Transformada Z - análise espectral no domínio frequência $z = e^{\frac{\alpha + j\omega}{F_S}}$ de sinais no domínio tempo discreto sob frequência de amostragem F_S. O domínio frequência complexa $z = e^{\frac{\alpha + j\omega}{F_S}}$. Propriedades da Transformada Z. Respostas de sistemas com $H(z)$ racional. Resposta em regime transiente e em regime permanente. Análise da estabilidade de sistemas discretos no tempo.

Departamento de Eletrônica e Computação

Centro de Tecnologia

ELC1115 – Sinais e Sistemas

Prof. Fernando DeCastro

Transformada Z

Suponhamos que um sinal $x(t)$ contínuo no tempo, cujo espectro no domínio frequência complexa $s = \alpha + j\omega$ é $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ (ver Cap IV das notas de aula), seja amostrado no tempo sob um intervalo de amostragem $T_s = 1/f_s$, sendo f_s a frequência de amostragem do sistema digital que digitaliza $x(t)$, de modo que

$$x(t) = x(nT_s), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

A Transformada de Laplace de $x(t)$ é

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^\infty x(t)e^{-st}dt \tag{2}$$

Mas, sob o processo de digitalização expresso por (1), é necessário reescrever (2) como:

$$X(s) = \int_0^{nT_s} x(nT_s)e^{-snT_s}d(nT_s) = \int_0^{nT_s} x(nT_s)(e^{sT_s})^{-n}d(nT_s) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n](e^{sT_s})^{-n} \tag{3}$$

A passagem da representação em forma de integral contínua para a representação em forma de somatório discreto em (3) será discutida nos slides 9 a 13.

Definindo em (3) a variável z em função da frequência complexa $s = \alpha + j\omega$:

$$\boxed{z = e^{sT_s} = e^{\frac{s}{f_s}}} \tag{4}$$

Substituindo (4) em (3) obtemos a **Transformada *Z*** da sequência $x[n]$:

$$X(z) = Z\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} \tag{5}$$

Alternativamente (5) pode ser alterada para representar sequências não causais:

$$X(z) = Z\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \tag{5a}$$

Os limites do somatório em (5a), $-\infty \leq n \leq \infty$, consideram a possibilidade de uma sequência não causal, ou seja, com valores se estendendo à esquerda de $n = 0$.

- Nos casos representados por (5a), a Transformada $\mathcal{Z}$ é denominada bilateral.
- A Transformada $\mathcal{Z}$ bilateral (5a) e a Transformada $\mathcal{Z}$ (5) são equivalentes quando $x[n] = 0$ para $n < 0$.
- Na absoluta maioria das aplicações práticas em engenharia as sequências são causais, de modo que o escopo deste estudo é a Transformada $\mathcal{Z}$ dada por (5).

O que representam z e $X(z) = Z\{x[n]\}$, dado que, conforme (4), z é uma grandeza adimensional ?

Partindo da equação (4), $z = e^{sT_s} = e^{\frac{s}{f_s}}$, com $f_s = 1/T_s$, temos:

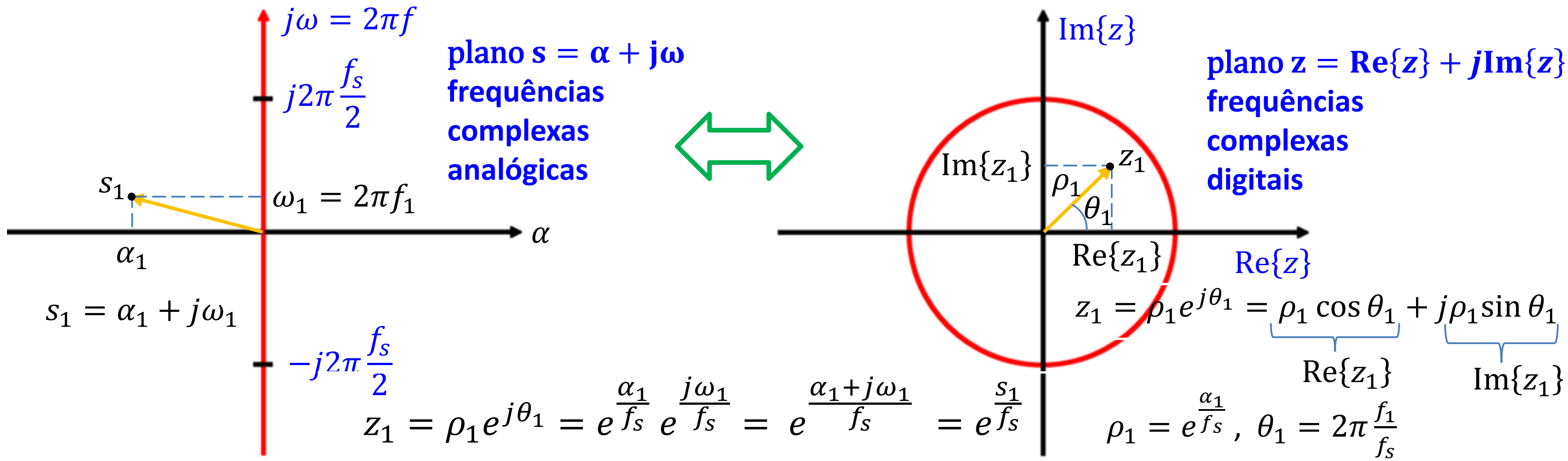
$$\boxed{\begin{array}{l} z = \mathrm{Re}\{z\} + j\mathrm{Im}\{z\} = e^{sT_s} = e^{\frac{s}{f_s}} = e^{\frac{\alpha + j\omega}{f_s}} = e^{\frac{\alpha}{f_s}} e^{\frac{j\omega}{f_s}} = \rho e^{j\theta} \\ \text{onde } \rho = e^{\frac{\alpha}{f_s}} \quad \text{e} \quad \theta = 2\pi \dfrac{f}{f_s}. \end{array}} \tag{6}$$

A análise de (6) evidencia que z é o resultado da normalização do domínio de frequências complexas $s = \alpha + j\omega$ em relação à frequência de amostragem f_s, com subsequente mapeamento através da transformação $z = e^u$, onde $u = \frac{s}{f_s}$ representa o plano s normalizado em relação a f_s.

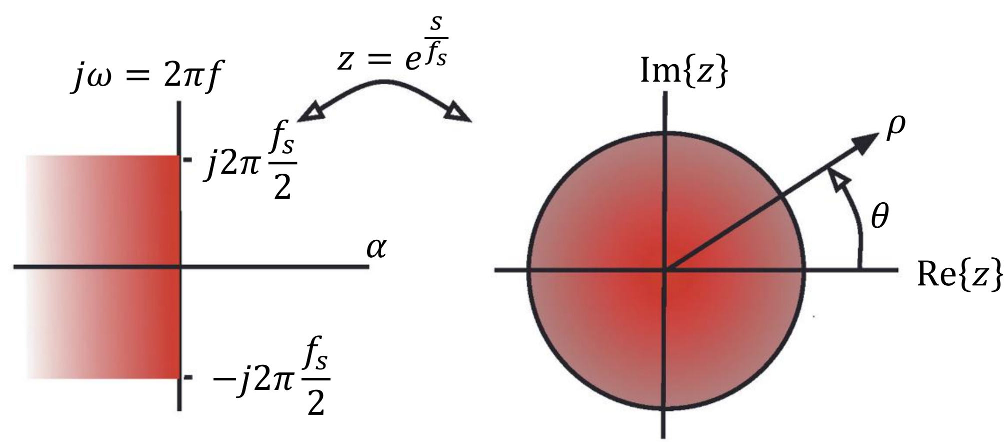
Em outras palavras, quando um sinal $x(t)$ é amostrado sob uma frequência de amostragem f_s dando origem a uma sequência $x[n]$, deixa de existir o domínio de frequências complexas $s = \alpha + j\omega$ absolutas, que é transformado pelo processo de amostragem em um domínio de frequências relativas u, cujo parâmetro de referência é a frequência de amostragem f_s.

Sobre este domínio relativo u é aplicada a transformação $z = e^u$, no sentido de simplificar a complexidade computacional envolvida no cômputo de (3), $X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n](e^{sT_s})^{-n}$. Procedendo assim elimina-se o cômputo adicional da exponencial que haveria caso mantivéssemos o domínio da representação dada por (5), $X(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} x[n]z^{-n}$, como sendo s e não o domínio z. O cômputo da exponencial em (3) impõe um custo computacional desnecessário visto que, conforme veremos a seguir, todas as informações contidas no plano s são mapeadas no plano z através de $z = e^{\frac{s}{f_s}}$.

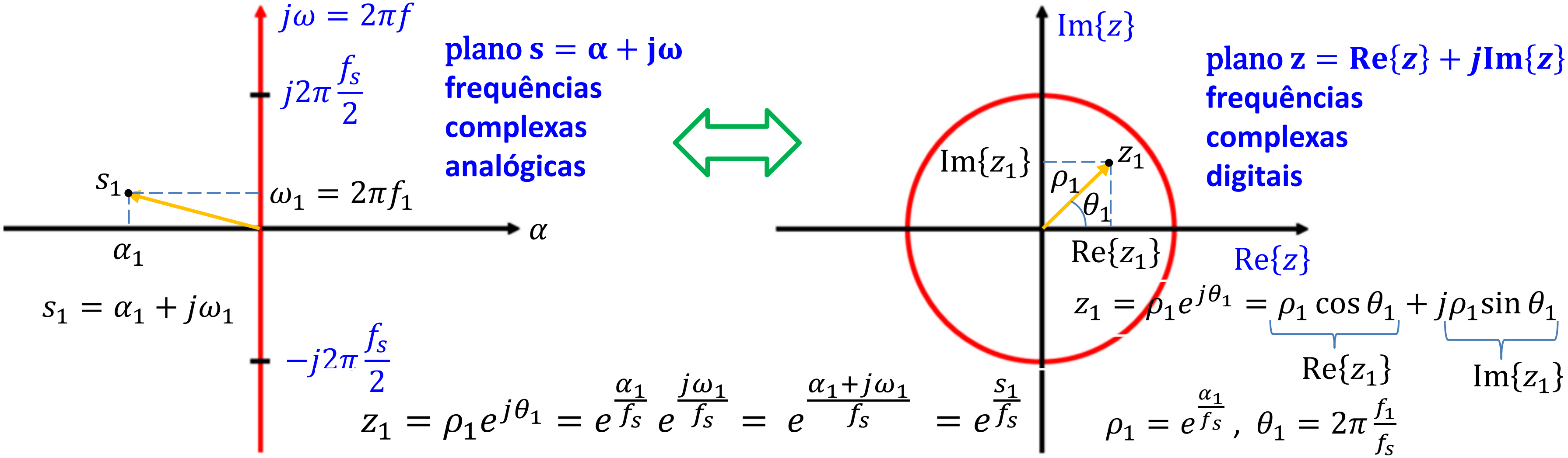
O mapeamento plano $s \leftrightarrow$ plano z



- O ponto $s_1 = \alpha_1 + j\omega_1$ mapeia no ponto $z_1 = \rho_1 e^{j\theta_1}$ através da relação $z_1 = \rho_1 e^{j\theta_1} = e^{\frac{\alpha_1}{f_s}} e^{\frac{j\omega_1}{f_s}} = e^{\frac{\alpha_1 + j\omega_1}{f_s}} = e^{\frac{s_1}{f_s}}$.
- O eixo $j\omega$ mapeia no círculo de raio unitário (em vermelho na figura acima), porque $\alpha = 0 \rightarrow \rho = 1 \rightarrow z = 1e^{j\theta}$.
- Todo ponto à esquerda do eixo $j\omega$ mapeia dentro do círculo de raio unitário (ver figura abaixo), porque $\alpha < 0 \rightarrow \rho < 1$.
- Todo ponto à direita do eixo $j\omega$ mapeia fora do círculo de raio unitário, porque $\alpha > 0 \rightarrow \rho > 1$.

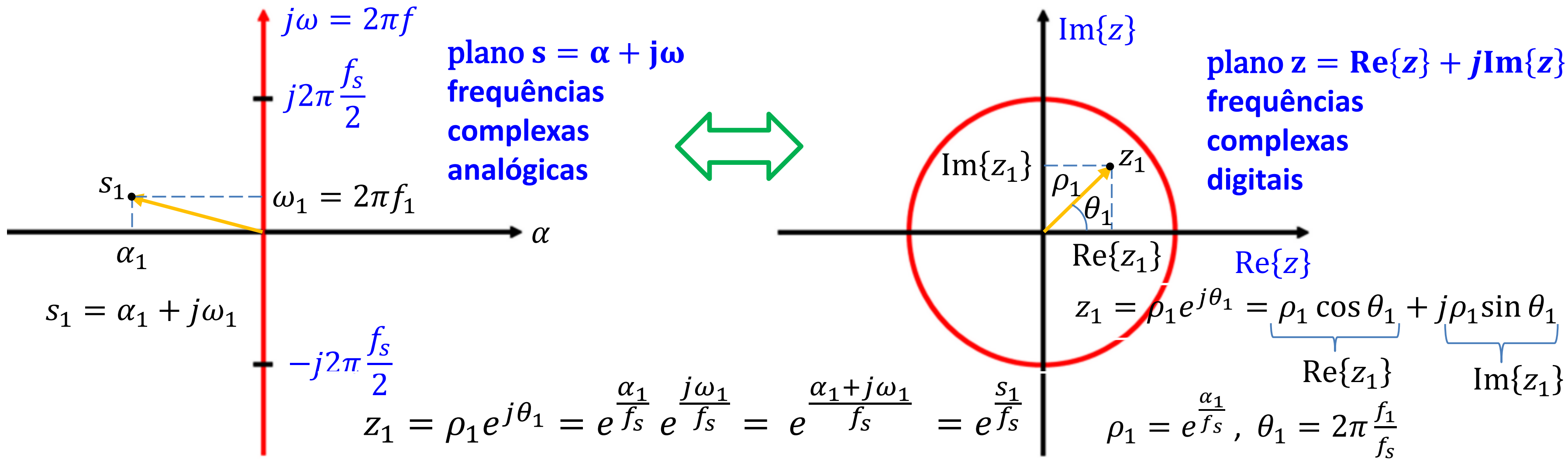


O mapeamento plano $s \leftrightarrow$ plano z

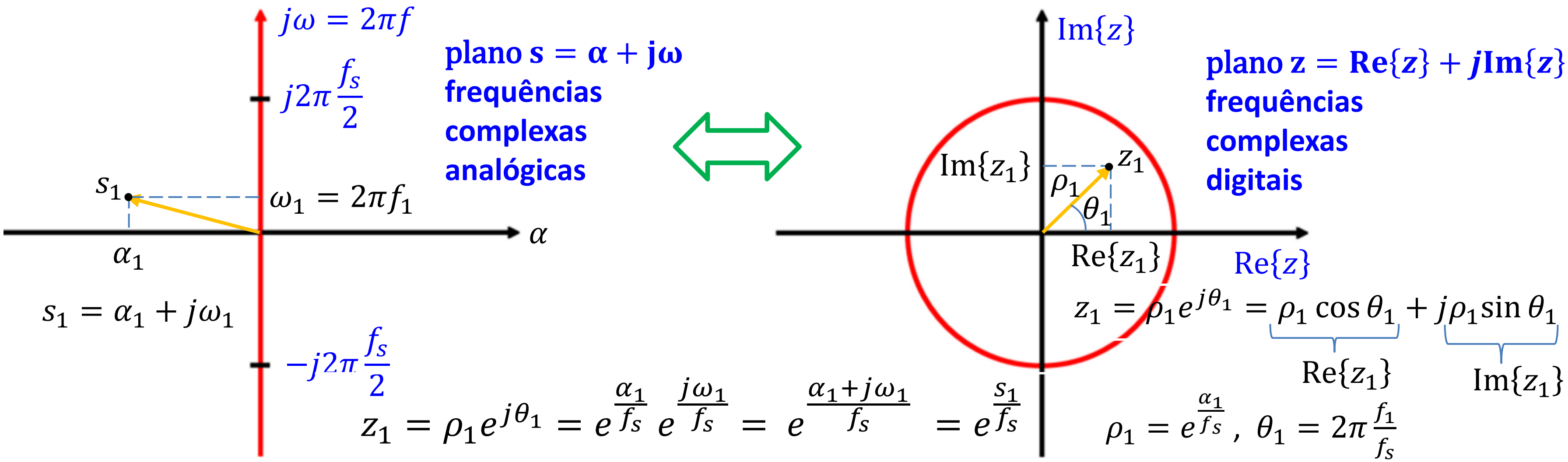


- Dado que $z = \rho e^{j\theta} = e^{\frac{\alpha}{f_s}} e^{\frac{j\omega}{f_s}}$, observe que uma trajetória paralela ao eixo α no plano s (variação somente em α) é mapeada em uma trajetória radial no plano z (variação somente em ρ, uma vez que $\rho = e^{\frac{\alpha}{f_s}}$).
- Uma trajetória paralela ao eixo $j\omega$ no plano $s = \alpha + j\omega$ (variação somente em ω) é mapeada em uma trajetória circular no plano z (variação somente em θ, uma vez que $e^{\frac{j\omega}{f_s}} = e^{j\theta}$, onde θ é a denominada **frequência digital** definida por $\theta = \frac{\omega}{f_s} = 2\pi\frac{f}{f_s}$.
- Observe também que, se um observador se movimenta linearmente ao longo do eixo $j\omega$ no plano $s = \alpha + j\omega$, partindo de $\omega = 0$ e indo até $\omega = \infty$, o movimento correspondente no plano $z = \mathrm{Re}\{z\} + j\mathrm{Im}\{z\}$ será um movimento circular de múltiplas voltas no sentido anti-horário ao longo do círculo de raio unitário $1e^{j\theta}$, partindo de $\theta = 0$ e indo até $\theta = \infty$.
- De mesma forma, se um observador se movimenta linearmente ao longo do eixo $j\omega$ no plano $s = \alpha + j\omega$, partindo de $\omega = 0$ e indo até $\omega = -\infty$, o movimento correspondente no plano $z = \mathrm{Re}\{z\} + j\mathrm{Im}\{z\}$ será um movimento circular de múltiplas voltas no sentido horário ao longo do círculo de raio unitário $1e^{j\theta}$, partindo de $\theta = 0$ e indo até $\theta = -\infty$.

O mapeamento plano $s \leftrightarrow$ plano z



- Ainda, note em $\theta = \omega / f_s = 2\pi f / f_s$, que a máxima frequência f permitida no espectro do sinal analógico $x(t)$ é $f_{max} = f_s/2$ para que não ocorra *aliasing* no processo de amostragem efetuado pelo conversor A/D (Critério de Nyquist), processo que digitaliza $x(t)$ convertendo o mesmo na sequência $x[n]$.
- Portanto, para evitar *aliasing*, o observador que se movimenta linearmente ao longo do eixo $j\omega$ no plano $s = \alpha + j\omega$, partindo de $\omega = 0$ na direção de $\omega = \infty$, poderá se mover no máximo até $\omega_{max} = +2\pi f_{max} = +2\pi \frac{f_s}{2}$. Nesta situação, o movimento correspondente no plano $z = \mathrm{Re}\{z\} + j\mathrm{Im}\{z\}$ será um movimento circular de meia volta no sentido anti-horário ao longo do circulo de raio unitário $1e^{j\theta}$, partindo de $\theta = 0$ e indo até $\theta_{max} = 2\pi \frac{f_{max}}{f_s} = 2\pi \frac{f_s/2}{f_s} = +\pi$.
- De mesma forma, para evitar *aliasing*, o observador que se movimenta linearmente ao longo do eixo $j\omega$ no plano $s = \alpha + j\omega$, partindo de $\omega = 0$ na direção de $\omega = -\infty$, poderá se mover no máximo até $\omega'_{max} = -2\pi f_{max} = -2\pi \frac{f_s}{2}$. Nesta situação, o movimento correspondente no plano $z = \mathrm{Re}\{z\} + j\mathrm{Im}\{z\}$ será um movimento circular de meia volta no sentido horário ao longo do círculo de raio unitário $1e^{j\theta}$, partindo de $\theta = 0$ e indo até $\theta'_{max} = -2\pi \frac{f_{max}}{f_s} = -2\pi \frac{f_s/2}{f_s} = -\pi$.

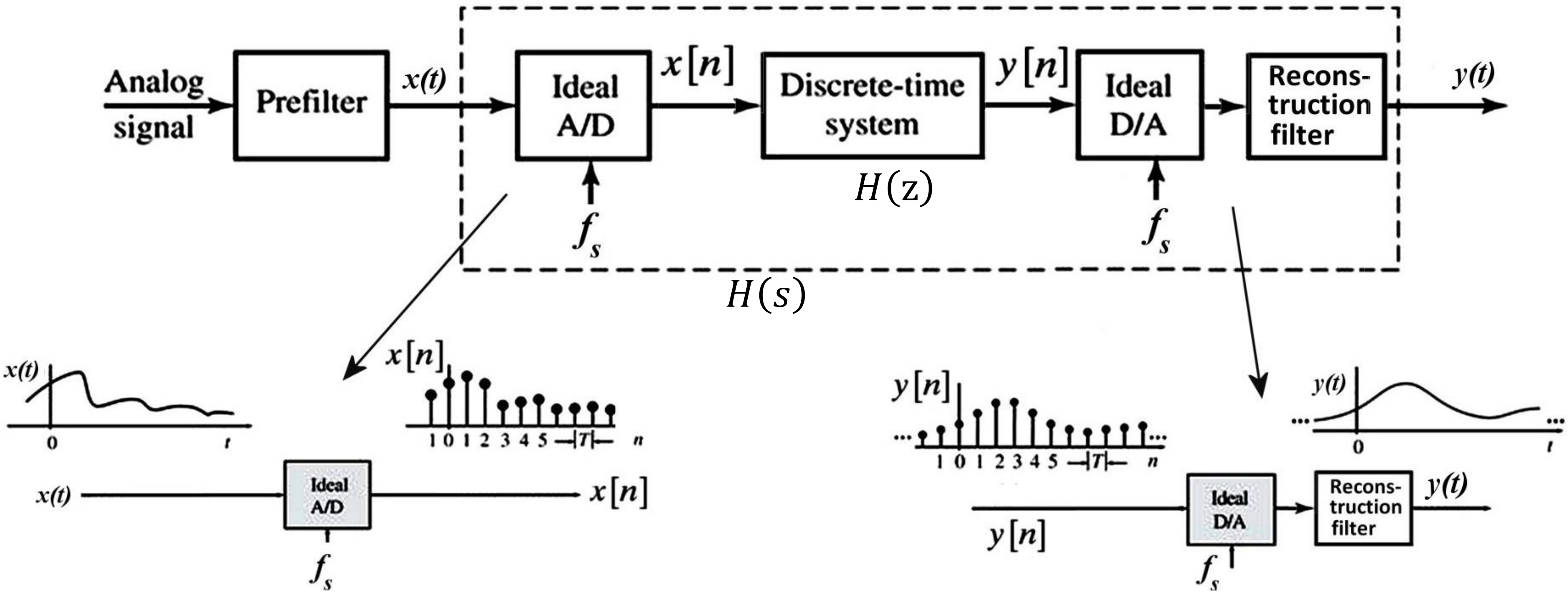


- Neste contexto, na hipótese de o espectro do sinal analógico $x(t)$ conter qualquer frequência $f > f_s/2$, esta será mapeada em um ponto sobre círculo de raio unitário $1e^{j\theta}$ para o qual já existe mapeada alguma outra frequência $f < f_s/2$, caracterizando, assim, a superposição espectral resultante do *aliasing*.
- Sob este ponto de vista, $X(z)$ definida por

$$X(z) = Z\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{n=\infty} x[n] z^{-n}$$

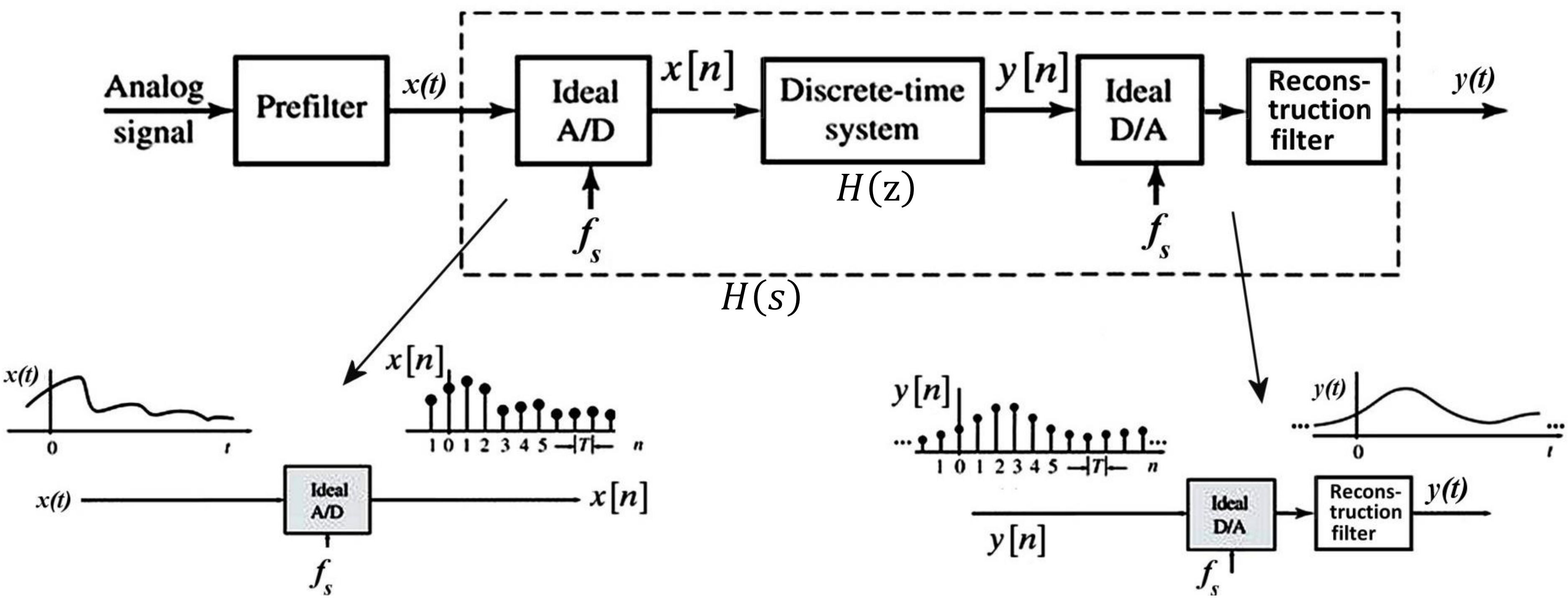
representa o espectro de $x[n]$, a diferença sendo que o domínio frequência s encontra-se normalizado pela frequência de amostragem f_s e re-mapeado para um novo universo de domínio através da transformação exponencial $z = e^{\frac{s}{f_s}}$.

Transformada Z interpretada como a Transformada de Laplace adaptada para sinais discretos



Consideremos o sistema LTI mostrado na figura acima, em que o sinal de entrada $x(t)$ contínuo no tempo é digitalizado por um conversor A/D e convertido na sequência $x[n] = x(nT_s)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, onde $T_s = 1/f_s$ é o intervalo de tempo entre amostras, sendo f_s a frequência de amostragem do conversor A/D. A sequência de entrada $x[n]$ é processada digitalmente pelo bloco "Discrete-time system", que usualmente é um processador GPP ou DSP ou ainda uma FPGA (ver slides 19 e 20 do Cap I das notas de aula).

Por exemplo, a sequência $x[n]$ pode representar um sinal de voz de pouca inteligibilidade devido aos ecos e reverberações no ambiente em que o sinal de voz analógico $x(t)$ foi gerado. No âmbito deste exemplo, o processador executa um algoritmo para cancelamento de eco (ver https://en.wikipedia.org/wiki/Echo_removal) e entrega em sua saída a sequência $y[n]$, representando a sequência da voz desconvoluída da resposta ao impulso do ambiente que gerou os ecos e reverberações.



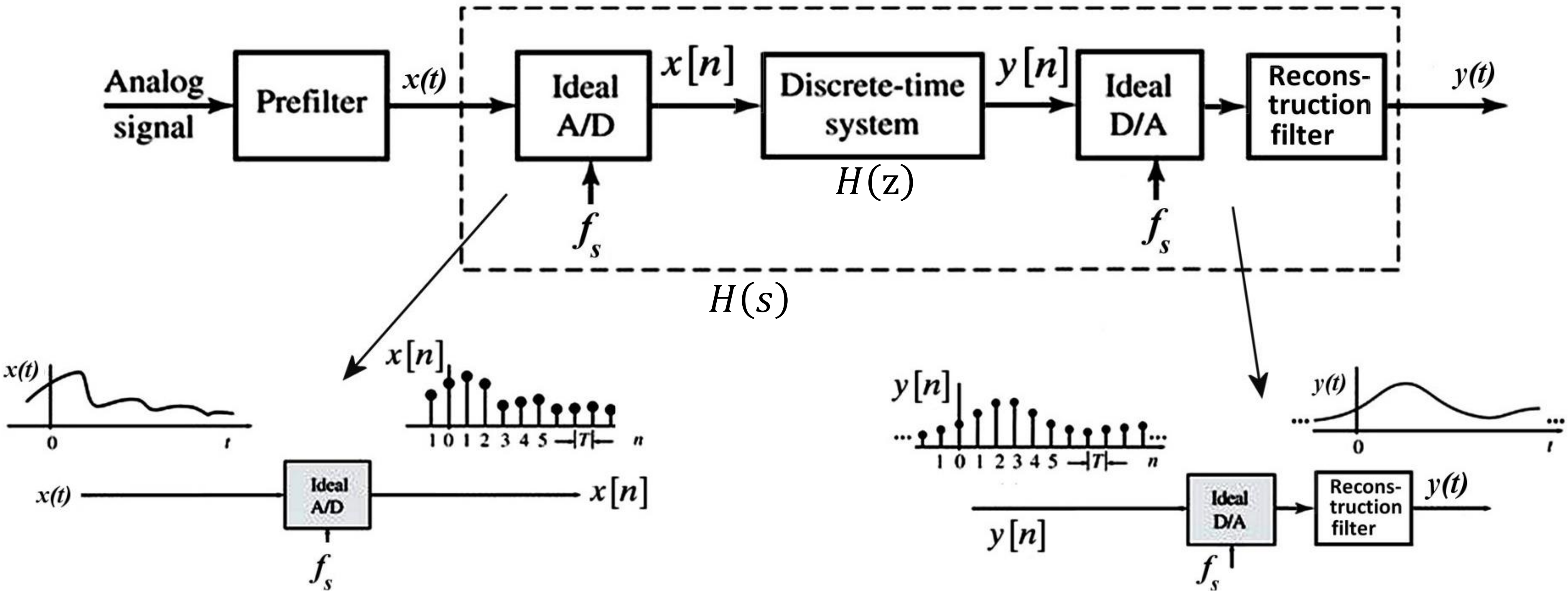
Independente do algoritmo que é executado no bloco "Discrete-time system", a sequência $y[n]$ é re-convertida pelo conversor D/A para o sinal analógico $y(t)$ na saída do sistema.

Neste contexto, o bloco representado pelo retângulo tracejado na figura acima implementa um sistema LTI analógico descrito pela função de transferência $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$, $s = \alpha + j\omega$, conforme segue:

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^\infty x(t)e^{-st}dt \qquad x(t) \longrightarrow \boxed{H(s)} \longrightarrow y(t) \qquad Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} = \int_0^\infty y(t)e^{-st}dt$$

Note que "visto" da entrada $x(t)$ e da saída $\mathrm{y}(t)$ o retângulo tracejado implementa um sistema analógico. Se não for explicitado que o bloco "Discrete-time system" implementa digitalmente a transmitância do sistema, não há como saber, a priori, que o processamento é digital apenas considerando o que um osciloscópio "vê" na entrada $x(t)$ e na saída $\mathrm{y}(t)$.

Transformada Z interpretada como a Transformada de Laplace adaptada para sinais discretos

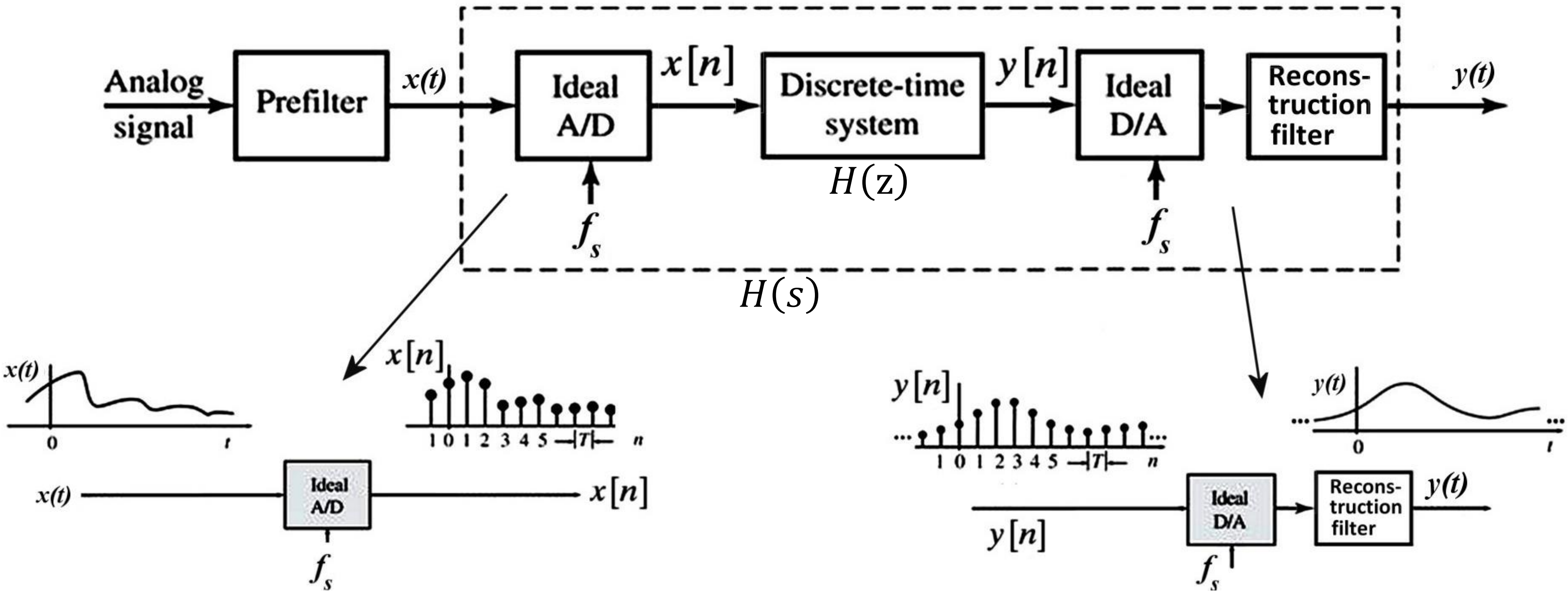


Simultaneamente, o bloco "Discrete-time system" na figura acima implementa um sistema LTI digital descrito pela função de transferência $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$, $z = \rho e^{j\theta}$, conforme segue:

$$X(z) = Z\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{n=\infty} x[n]z^{-n} \qquad x[n] \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow y[n] \qquad Y(z) = Z\{y[n]\} = \sum_{n=0}^{n=\infty} y[n]z^{-n}$$

Importante notar que $H(s)$ representa o comportamento no domínio frequência do bloco analógico representado pelo retângulo tracejado, que contém o bloco digital "Discrete-time system" descrito por $H(z)$, e portanto $H(z)$ e $H(s)$ expressam o mesmo comportamento em frequência, só que em domínios-frequência diferentes (domínios s e z).

Transformada Z interpretada como a Transformada de Laplace adaptada para sinais discretos



Embora $H(z)$ e $H(s)$ expressem o mesmo comportamento em frequência, a tentativa de usar a Transformada de Laplace para determinar o comportamento em frequência (i.e, determinar a função de transferência) do bloco digital "Discrete-time system" resulta em uma incoerência conceitual:

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(nT_s)e^{-snT_s}dt$$

$$Y(s) = \int_0^{\infty} y(nT_s)e^{-snT_s}dt$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

Não existe diferencial dt de uma grandeza *x* ou *y*, discretas no tempo, cujos valores são definidos apenas nos instantes nT_s !!!

No entanto, é factível discretizar a Transformada de Laplace para que ela possa representar sinais no tempo discreto substituindo a integral contínua no tempo por um somatório discreto no tempo:

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(nT_s) e^{-snT_s} dt$$

⇩

$$X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_s)\, e^{-snT_s} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]\, e^{-snT_s} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] \underbrace{\left(e^{\frac{s}{f_s}}\right)}_{z}{}^{-n} \longrightarrow \boxed{z = e^{\frac{s}{f_s}} = e^{\frac{\alpha + j\omega}{f_s}}}$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]\, z^{-n} = \mathcal{Z}\{x[n]\}$$

Conclusão ⇨ Neste contexto, a Transformada Z pode ser interpretada como a Transformada de Laplace discretizada no tempo, de forma a poder representar sinais e sistemas no tempo discreto.

A integral de inversão da Transformada Z

No Apêndice A do Cap IV das notas de aula, quando estudamos a Transformada de Laplace $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$, utilizamos o conceito de que $x(t)$ pode ser reconstruído a partir das componentes espectrais expressas por $X(s)$, conforme integral de inversão

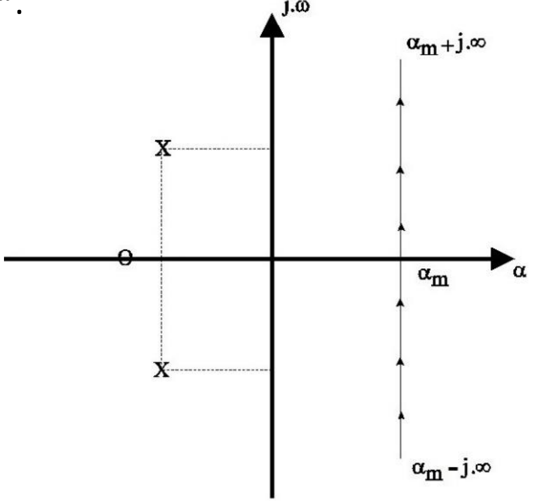
$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\alpha_m - j\infty}^{\alpha_m + j\infty} X(s)e^{st}ds \qquad (7)$$

Dado que, conforme discutido no slide anterior, a Transformada Z pode ser interpretada como a Transformada de Laplace discretizada no tempo, de mesma forma, $x[n]$ pode ser reconstruído pelas componentes espectrais definidas por $X(z)$, através da integral de inversão

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz \qquad (8)$$

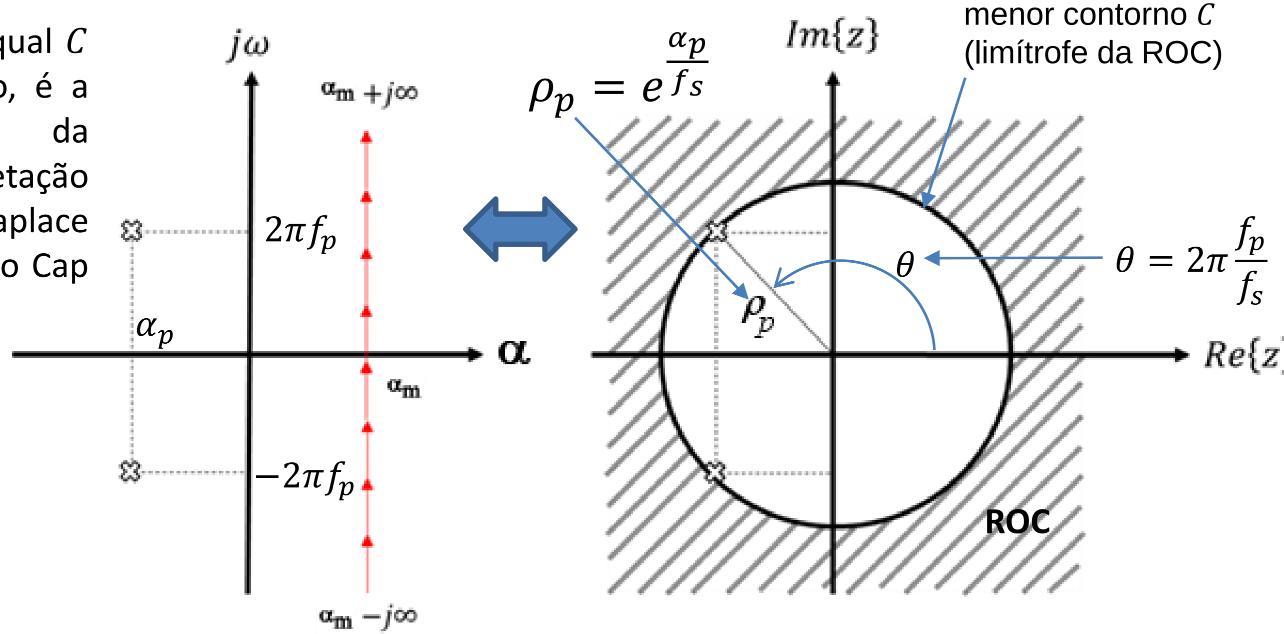
A integral de inversão (8) define a Transformada $\mathcal{Z}$ Inversa de $X(z)$, ou seja, dado o espectro $X(z)$, (8) expressa como reconstruir $x[n]$ no domínio tempo discreto n a partir de suas componentes espectrais no domínio frequência z, em uma interpretação semelhante à da Transformada de Laplace. Note que a integração em (8) é realizada sobre um contorno fechado C no domínio $z = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{jIm}(z)$. Este contorno fechado em z nada mais é do que o caminho de integração definido pela reta $s = \alpha_m$ em (7), localizado à direita dos polos de $X(s)$ e mostrado na figura abaixo, caminho que inicia em $s = \alpha_m - j\infty$ e termina em $s = \alpha_m + j\infty$, mas transformado para um contorno circular quando o domínio s é mapeado para o domínio z através da transformação $z = e^u$.

Mapa de polos e zeros de $X(s)$ (por exemplo) e contorno de integração para cômputo de (7). Polo (x): valor de s tal que $|X(s)| = \infty$. Zero (o): valor de s tal que $|X(s)|= 0$.



Assim como a reta $s = \alpha_m$ deve estar à direita do polo de $X(s)$ mais à direita no plano $s = \alpha + j\omega$, conforme já discutido no Apêndice A do Cap IV e no Exemplo 1 do slide 21 do Cap IV das notas de aula, o contorno de integração fechado C da Transformada $\mathcal{Z}$ Inversa (8) deve estar localizado externamente ao polo de $X(z)$ mais afastado da origem do plano z, localização que obedece ao mapeamento $z = \rho e^{j\theta} = e^{\frac{\alpha}{f_s}} e^{\frac{j\omega}{f_s}}$ conforme mostra a figura:

Esta região hachurada na figura, na qual C obrigatoriamente deve estar contido, é a **ROC** (*Region Of Convergence*) da Transformada Z, com mesma interpretação da ROC da Transformada de Laplace discutida no Exemplo 1 do slide 21 do Cap IV das notas de aula.



<u>Nota</u>: Para o caso de uma sequência $x[n]$ não causal (fora do escopo deste estudo), no âmbito da Transformada de Laplace este caso equivaleria a inverter o sentido do caminho de integração ao longo da reta $s = \alpha_m$ na equação (7) de modo que o caminho de integração agora iniciaria em $s = \alpha_m + j\infty$ e terminaria em $s = \alpha_m - j\infty$, o que, como consequência, admite a existência do sinal $x(t)$ somente para $t < 0$. Neste caso hipotético, a reta $s = \alpha_m$ deveria estar à esquerda dos polos de $X(s)$ e, consequentemente, no âmbito da Transformada Z, o contorno C no domínio z deveria estar localizado internamente aos polos de $X(z)$. A ROC seria, então, interna aos polos, ou seja, $|z| < \rho_p$.

A relação entre $X(s)$ e $X(z)$

Consideremos o par de Transformadas de Laplace conforme abaixo (ver slides 11 e 12 do Cap IV das notas de aula):

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = 1.054e^{-5t}\cos(6t - 18.4°)\,u(t) \longleftrightarrow X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \frac{s+7}{s^2+10s+61} \quad (9)$$

Suponhamos que $x(t)$ seja digitalizado por um conversor A/D com intervalo entre amostras de $T_s = 1/f_s = 0.1$ [s], sendo f_s a frequência de amostragem do conversor A/D. Como o sinal $x(t)$ é digitalizado, resultando na sequência $x[n]$, é necessário que seu espectro $X(z)$ seja obtido através da Transformada $\mathcal{Z}$ (e não através da Transformada de Laplace).

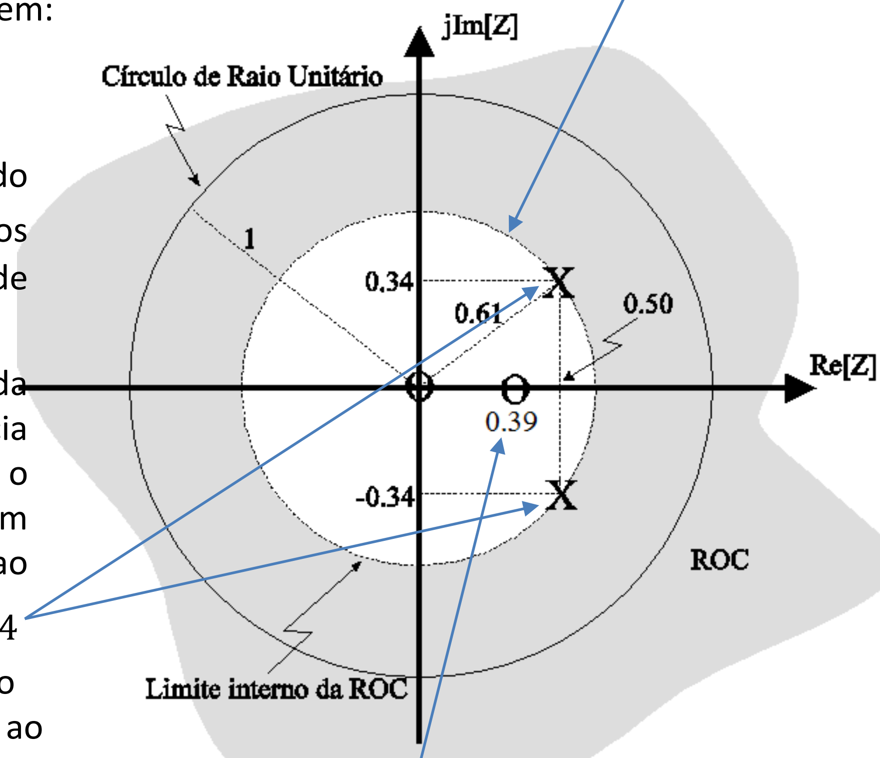
A sequência $x[n]$ é obtida de $x(t)$ em (9), fazendo $t = nT_s = 0.1n$ em $x(t)$:

$$x[n] = Z^{-1}\{X(z)\} = 1.054e^{-0.5n}\cos(0.6n - 18.4°)\,u[n] \quad (10)$$

limite interno da ROC

$X(z) = Z\{x[n]\}$ é obtido do par 14 da tabela no slide 20 e resulta em:

$$X(z) = Z\{x[n]\} = \frac{z(z-0.386)}{z^2 - z + 0.368} \quad (11)$$



Os dois polos de $X(z)$ são as duas raízes do polinômio do denominador que resultam $0.5 \pm j0.34$. O mapa de polos e zeros de $X(z)$ é mostrado ao lado. De mesma forma, os dois polos de $X(s)$ em (9) são as raízes do denominador que resultam $-5 \pm j6$.

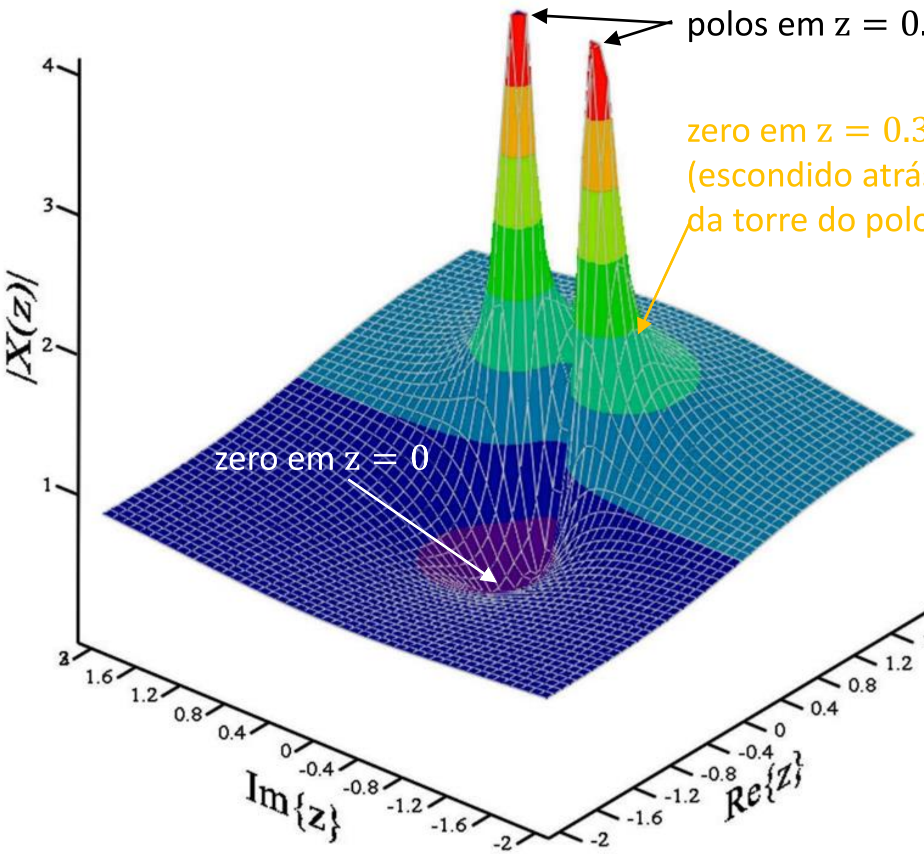
Apesar da forma da superfície $|X(s)|$ ser alterada ao ser convertida para $|X(z)|$, note que, como a magnitude é infinita na frequência dos polos tanto no domínio s como no domínio z (porque anula o denominador), e como infinito é um valor absoluto não importa em que domínio, a frequência dos polos é mapeada sem distorção ao convertermos $|X(s)|$ para $|X(z)|$: $z = e^{\frac{s}{f_s}} = e^{\frac{-5 \pm j6}{10}} = 0.5 \pm j0.34$

No entanto, uma magnitude de valor zero não é um valor absoluto comum entre os domínios s e z, e a alteração da superfície $|X(s)|$ ao ser convertida para $|X(z)|$ impõe algum deslocamento na frequência do zero em $s = -7$ ao ser mapeada do domínio s para o domínio z: $z = e^{\frac{s}{f_s}} = e^{\frac{-7}{10}} = 0.497$

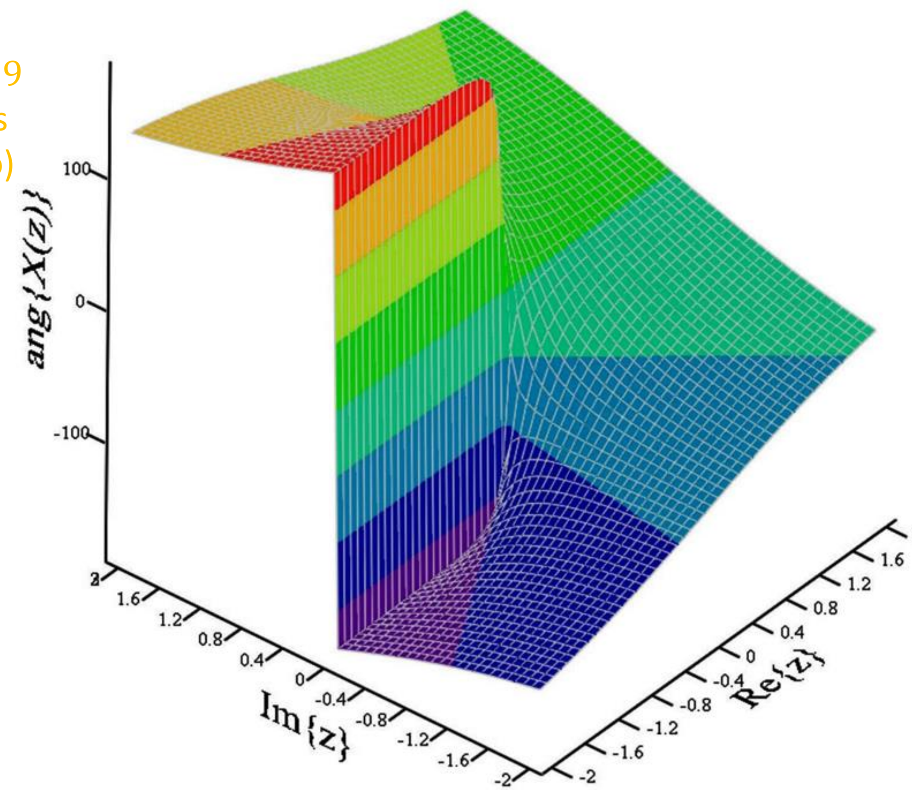
A relação entre $X(s)$ e $X(z)$

As figuras abaixo mostram a vista tridimensional da função complexa $X(z)$ definida sobre o domínio $z = \rho e^{j\theta} = \mathrm{Re}\{z\} + j\mathrm{Im}\{z\}$ mostrado no mapa de polos e zeros no slide anterior. As figuras respectivamente mostram as superfícies de módulo e ângulo do espectro $X(z)$. Compare com os gráficos $|X(s)|$ e $\sphericalangle\{X(s)\}$ no slide 12 do Cap IV das notas de aula.

Dado que $X(z)$ é um número complexo, são necessários dois gráficos tridimensionais para definir $X(z)$, um para a superfície da função $|X(z)|$ e outro para a superfície da função $\sphericalangle\{X(z)\}$, plotadas contra o plano $z = \rho e^{j\theta} = \mathrm{Re}\{z\} + j\mathrm{Im}\{z\}$, que é o conjunto de domínio destas funções.



Módulo do espectro $X(z)$ com topo dos pólos limitado em 4.0.



Ângulo do espectro $X(z)$.

Propriedades da Transformada Z (resultantes das equações (5) e (8))

Reference	Sequence $x[n] = Z^{-1}\{X(z)\}$	Transform $X(z) = Z\{x[n]\}$	ROC
	$x[n]$	$X(z)$	R_x
	$x_1[n]$	$X_1(z)$	R_{x_1}
	$x_2[n]$	$X_2(z)$	R_{x_2}
1	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1(z) + bX_2(z)$	Contains $R_{x_1} \cap R_{x_2}$
2	$x[n - n_0]$	$z^{-n_0}X(z)$	R_x, except for the possible addition or deletion of the origin or ∞
3	$z_0^n x[n]$	$X(z/z_0)$	$\|z_0\|R_x$
4	$nx[n]$	$-z\dfrac{dX(z)}{dz}$	R_x, except for the possible addition or deletion of the origin or ∞
5	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R_x
	$\mathcal{R}e\{x[n]\}$	$\frac{1}{2}[X(z) + X^*(z^*)]$	Contains R_x
	$\mathcal{J}m\{x[n]\}$	$\frac{1}{2j}[X(z) - X^*(z^*)]$	Contains R_x
6	$x^*[-n]$	$X^*(1/z^*)$	$1/R_x$
7	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	Contains $R_{x_1} \cap R_{x_2}$
8	Initial-value theorem:		
	$x[n] = 0, \quad n < 0$ $\quad \lim_{z\to\infty} X(z) = x[0]$		

Pares de Transformadas Z (resultantes das equações (5) e (8))

Sequence $x[n] = Z^{-1}\{X(z)\}$	Transform $X(z) = Z\{x[n]\}$	ROC
1. $\delta[n]$	1	All z
2. $u[n]$	$\dfrac{1}{1 - z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
3. $-u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1 - z^{-1}}$	$\lvert z\rvert < 1$
4. $\delta[n-m]$	z^{-m}	All z except 0 (if $m > 0$) or ∞ (if $m < 0$)
5. $a^n u[n]$	$\dfrac{1}{1 - az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
6. $-a^n u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1 - az^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
7. $na^n u[n]$	$\dfrac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
8. $-na^n u[-n-1]$	$\dfrac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$

Pares de Transformadas Z (resultantes das equações (5) e (8))

Sequence $x[n] = Z^{-1}\{X(z)\}$	Transform $X(z) = Z\{x[n]\}$	ROC
9. $[\cos \omega_0 n]u[n]$	$\dfrac{1 - [\cos \omega_0]z^{-1}}{1 - [2\cos \omega_0]z^{-1} + z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
10. $[\sin \omega_0 n]u[n]$	$\dfrac{[\sin \omega_0]z^{-1}}{1 - [2\cos \omega_0]z^{-1} + z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
11. $[r^n \cos \omega_0 n]u[n]$	$\dfrac{1 - [r\cos \omega_0]z^{-1}}{1 - [2r\cos \omega_0]z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$\|z\| > r$
12. $[r^n \sin \omega_0 n]u[n]$	$\dfrac{[r\sin \omega_0]z^{-1}}{1 - [2r\cos \omega_0]z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$\|z\| > r$
13. $\begin{cases} a^n, & 0 \le n \le N-1, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$	$\dfrac{1 - a^N z^{-N}}{1 - az^{-1}}$	$\|z\| > 0$
14. $Aa^n \cos(\theta n + \phi)u(n)$	$\dfrac{Az[z\cos\phi - a\cos(\phi - \theta)]}{z^2 - (2a\cos\theta)z + a^2}$	$\|z\| > \|a\|$

Transformada Z de uma sequência $x[n]$ atrasada no domínio tempo discreto

Esta propriedade é útil quando o sistema pondera réplicas atrasadas de uma sequência $x[n]$, objetivando conformar o espectro $X(z)$ de acordo com um *template* desejado, como é o caso de um filtro digital FIR (*Finite Impulse Response*) – ver https://en.wikipedia.org/wiki/Finite_impulse_response ou de um filtro digital IIR (*Infinity Impulse Response*) – ver https://en.wikipedia.org/wiki/Infinite_impulse_response

Em particular, esta propriedade é muito útil na área de telecomunicações, quando se deseja determinar a resposta em frequência do canal de transmissão de um sistema de comunicação digital, conforme discutido nos slides 1 a 34 em http://www.fccdecastro.com.br/pdf/T2_Aulas16a20_27052020.pdf .

Consideremos a sequência $x[n]$, atrasada de n_d amostras tal que $x_d[n] = x[n - n_d]$. Aplicando a Transformada Z a $x_d[n]$ temos

$$X_d(z) = Z\{x_d[n]\} = Z\{x[n - n_d]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n - n_d]\, z^{-n} \qquad (12)$$

Façamos $m = n - n_d$ em (12):

$$Z\{x[n - n_d]\} = \sum_{m=-n_d}^{\infty} x[m]\, z^{-(m+n_d)} = \Bigg[\overbrace{\sum_{m=0}^{\infty} x[m]\, z^{-m}}^{X(z)}\Bigg] z^{-n_d} + \Bigg[\sum_{m=-n_d}^{-1} x[m]\, z^{-(m+n_d)}\Bigg] =$$

$$= X(z)z^{-n_d} + \underbrace{x[-1]z^{-n_d+1} + x[-2]z^{-n_d+2} + \cdots + x[-n_d]} \qquad (13)$$

representa valores iniciais quando $x[n - n_d]$ é um dos termos de uma equação de diferença, conforme slide 38.

De (13) note que para equações de diferença de 1ª e 2ª ordem (ver Cap II.3 das notas de aula) temos:

$$Z\{x[n - 1]\} = X(z)z^{-1} + x[-1] \qquad (14)$$

$$Z\{x[n - 2]\} = X(z)z^{-2} + x[-1]z^{-1} + x[-2] \qquad (15)$$

Note ainda de (13) que, se os valores iniciais são nulos (como é o caso na determinação da função de transferência de um sistema a partir da equação de diferença do sistema) , $Z\{x[n - n_d]\}$ simplifica para uma mera multiplicação de $X(z) = Z\{x[n]\}$ por um fator z^{-n_d}:

$$Z\{x[n - n_d]\} = X(z)z^{-n_d} \qquad (16)$$

Exemplo 1: Determine a Transformada $\mathcal{Z}$ da sequência $x[n] = A\delta[n]$.

Solução: A partir da definição dada por (5), temos que a Transformada Z da sequência $x[n]$ é obtida por

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} A\delta[n]z^{-n} = Az^{0} = A$$

$$A\delta[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} A$$

Exemplo 2: Determine a Transformada $\mathcal{Z}$ da sequência $x[n] = Au[n]$.

Solução: A partir da definição dada por (5), temos que a Transformada $\mathcal{Z}$ da sequência $x[n]$ é obtida por

ver Apêndice A

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} Au[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} Az^{-n} = A\sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1})^n = \frac{A}{1 - z^{-1}}$$

onde usamos a forma fechada de série geométrica infinita expressa no Apêndice A, que requer $|z^{-1}| < 1$, ou $|z| > 1$.

Este conjunto de valores de z para os quais a série converge define a ROC, e se torna bastante intuitivo se considerarmos a série na forma aberta, ou seja,

$$X(z) = A[1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots + z^{-n} + \cdots] = A\left[1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots\right]$$

a qual converge unicamente para $|z| > 1$.

$$Au[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{A}{1 - z^{-1}}$$

Exemplo 3: Determine a Transformada $\mathcal{Z}$ da sequência $x[n] = Aa^n u[n]$.

Solução: A partir da definição dada por (5), temos que a Transformada $\mathcal{Z}$ da sequência $x[n]$ é obtida por

ver Apêndice A

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} Aa^n z^{-n} = A\sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{A}{1 - az^{-1}}$$, para $|az^{-1}| < 1$, ou $|z| > |a|$.

$$Aa^n u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{A}{1 - az^{-1}}$$

Exemplo 4: Determine a Transformada $\mathcal{Z}$ da sequência $x[n] = Aa^n e^{j\theta n}, n \geq 0;\ x[n] = 0,$ $n < 0.$

Solução: A partir da definição dada por (5), temos que a Transformada $\mathcal{Z}$ da sequência $x[n]$ é obtida por

ver Apêndice A

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} Aa^n e^{j\theta n} z^{-n} = A \sum_{n=0}^{\infty} \left(ae^{j\theta} z^{-1}\right)^n = \frac{A}{1 - ae^{j\theta} z^{-1}}$$

para $\left|ae^{j\theta} z^{-1}\right| < 1$, ou $|z| > \left|ae^{j\theta}\right|$, ou $|z| > |a|$, dado que $\left|e^{j\theta}\right| = 1$

$$Aa^n e^{j\theta n} \quad \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \quad \frac{A}{1 - ae^{j\theta} z^{-1}}$$

Exemplo 5: Determine a Transformada $\mathcal{Z}$ da sequência $x[n] = Aa^n \cos \theta n \, , n \geq 0$; $x[n] = 0, n < 0$.

Solução: A partir da definição dada por (5), temos que a Transformada $\mathcal{Z}$ da sequência $x[n]$ é obtida por

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} Aa^n \cos(\theta n)\, z^{-n} = A \sum_{n=0}^{\infty} a^n \left[\frac{e^{j\theta n} + e^{-j\theta n}}{2}\right] z^{-n}$$

que pode ser escrita em dois termos, conforme

$$X(z) = \frac{A}{2}\sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{j\theta n} z^{-n} + \frac{A}{2}\sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\theta n} z^{-n} = \frac{A}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(ae^{j\theta} z^{-1}\right)^n + \frac{A}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(ae^{-j\theta} z^{-1}\right)^n =$$

$$= \frac{A}{2}\left[\frac{1}{1 - ae^{j\theta} z^{-1}} + \frac{1}{1 - ae^{-j\theta} z^{-1}}\right] \quad \text{, para } \left|ae^{\pm j\theta} z^{-1}\right| < 1. \qquad (17)$$

ou $|z| > |a|$, dado que $\left|e^{j\theta}\right| = 1$

A equação (17) pode ser reescrita na forma de um denominador comum, conforme

$$X(z) = \frac{A}{2}\left[\frac{2 - az^{-1}\left(e^{j\theta} + e^{-j\theta}\right)}{(1 - ae^{j\theta}z^{-1})(1 - ae^{-j\theta}z^{-1})}\right] = \frac{A(1 - az^{-1}\cos\theta)}{1 - az^{-1}(e^{j\theta} + e^{-j\theta}) + a^2z^{-2}}$$

E, colocando na forma quadrática de segunda ordem, encontramos

$$X(z) = \frac{A(1 - az^{-1}\cos\theta)}{1 - (2a\cos\theta)z^{-1} + a^2z^{-2}} = \frac{Az(z - a\cos\theta)}{z^2 - (2a\cos\theta)z + a^2}$$

A ROC é $\left|ae^{\pm j\theta}z^{-1}\right| < 1$, ou $|z| > |a|$.

$$Aa^n\cos\theta n \quad \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \quad \frac{Az(z - a\cos\theta)}{z^2 - (2a\cos\theta)z + a^2}$$

Exemplo 6: Determine usando a função ztrans() do software Matlab a transformada Z de $x[n] = 8 + 2(0.5)^n - 9(0.75)^n,\ n \geq 0$. Verifique o resultado com a função iztrans().

Solução: As funções ztrans() e iztrans() são usadas conforme segue

```
>> help ztrans
--- help for sym/ztrans ---

ztrans Z-transform.
    F = ztrans(f) is the Z-transform of the sym f with default
    independent variable n.  The default return is a function of z:
    f = f(n) => F = F(z).  The Z-transform of f is defined as:
       F(z) = symsum(f(n)/z^n, n, 0, inf),
    where n is f's symbolic variable as determined by SYMVAR.  If
    f = f(z), then ztrans(f) returns a function of w:  F = F(w).

    F = ztrans(f,w) makes F a function of the sym w instead of the
    default z:  ztrans(f,w) <=> F(w) = symsum(f(n)/w^n, n, 0, inf).

    F = ztrans(f,k,w) takes f to be a function of the sym variable k:
    ztrans(f,k,w) <=> F(w) = symsum(f(k)/w^k, k, 0, inf).
```

```
>> help iztrans
--- help for sym/iztrans ---

 iztrans Inverse Z-transform.
    f = iztrans(F) is the inverse Z-transform of the sym F with
    default independent variable z.  The default return is a function
    of n:  F = F(z) => f = f(n).  If F = F(n), then iztrans returns a
    function of k: f = f(k).

    f = iztrans(F,k) makes f a function of k instead of the default n.

    f = iztrans(F,w,k) takes F to be a function of w instead of the
    default symvar(F) and returns a function of k:  F = F(w) & f = f(k).
```

```
syms n z % declara variaveis simbolicas
xn=8+2*(0.5)^n-9*(0.75)^n; % define x[n]
Xz=ztrans(xn,n,z); % determina X(z)=Z{x[n]}
xn_=iztrans(Xz); % determina x_[n]=Zinv{X[z]}
xn % mostra x[n]
Xz % mostra X(z)=Z{x[n]}
xn_ % mostra x_[n]=Zinv{X[z]}
```

Resultando em:

```
xn =
2*(1/2)^n - 9*(3/4)^n + 8

Xz =
(8*z)/(z - 1) + (2*z)/(z - 1/2) - (9*z)/(z - 3/4)

xn_ =

2*(1/2)^n - 9*(3/4)^n + 8
```

Transformada Z Inversa através da expansão de $X(z)$ em frações parciais

Conforme discutimos no Cap IV das notas de aula, quando estudamos a Transformada de Laplace, dado $X(s)$ e obter $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$ através da integral de inversão não é uma abordagem usual. De mesma forma, para o caso da Transformada Z , dado $X(z)$ e obter $x[n] \ = Z^{-1}\{X(z)\}$ através da integral de inversão (8) não é uma abordagem prática porque, assim como para $X(s)$, no âmbito da maioria absoluta da solução de problemas de engenharia $X(z)$ é uma razão entre dois polinômios $N(z)$ e $D(z)$. Neste contexto, a expansão de $X(z)$ através de frações parciais é uma abordagem que resolve a grande maioria dos problemas práticos, sendo válido aqui o mesmo procedimento descrito nos slides 25 e 26 no Cap IV das notas de aula.

Apenas um detalhe adicional deve ser aqui considerado. Para evitar termos multiplicados por $u[n-1]$ em $x[n] = Z^{-1}\{X(z)\}$ (o que não é um erro, mas é incômodo), **ao invés de efetuar a expansão em frações parciais de $X(z)$, efetua-se a expansão em frações parciais de $X(z)/z$, e então multiplica-se ambos os lados da equação por z. Com isto evita-se termos multiplicados por $u[n-1]$ em $x[n]$,** conforme veremos nos exemplos nos slides que seguem.

Exemplo 7: Um sistema digital apresenta função de transferência $\mathrm{F(z)} = Z\{y[n]\}/Z\{x[n]\}$ conforme abaixo. Determine analiticamente a saída $y[n]$ do sistema quando um impulso $\delta[n]$ é aplicado à sua entrada $x[n]$. Verifique a consistência do resultado através da função iztrans() do software Matlab.

$$F(z) = \frac{12z}{(z+1)(z-1)^2}$$

Solução: Dividindo por z ambos os lados da expressão de $\mathrm{F(z)}$ temos:

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{12}{(z+1)(z-1)^2} = \frac{r_1}{(z+1)} + \frac{r_2}{(z-1)^2} + \frac{r_3}{(z-1)}$$

Os resíduos, i.e., os coeficientes da expansão em frações parciais, são obtidos do procedimento nos slides 25 e 26 no Cap IV das notas de aula e resultam:

$$r_1 = \left.\frac{12}{(z-1)^2}\right|_{z=-1} = \frac{12}{(-1-1)^2} = 3$$

$$r_2 = \left.\frac{12}{(z+1)}\right|_{z=1} = \frac{12}{(1+1)} = 6$$

$$r_3 = \left.\frac{d}{dz}\left(\frac{12}{z+1}\right)\right|_{z=1} = \frac{-12}{(z+1)^2} = -3$$

Daí

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{12}{(z+1)(z-1)^2} = \frac{3}{(z+1)} + \frac{6}{(z-1)^2} + \frac{-3}{(z-1)}$$

Transformada Z Inversa – polos repetidos

Multiplicando por z ambos os lados da equação:

$$\mathrm{F(z)} = \frac{12z}{(z+1)(z-1)^2} = \frac{3z}{(z-(-1))} + \frac{6z}{(z-1)^2} + \frac{-3z}{(z-1)}$$

Dos pares 5 e 7 do slide (19):

$$a^n u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$

$$na^n u[n] \leftrightarrow \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} = \frac{z^2 az^{-1}}{z^2(1-az^{-1})^2} = \frac{az}{(z-a)^2}$$

Aplicando os pares 5 e 7 para inversão de $\mathrm{F(z)}$ e obter a resposta ao impulso $h[n] \ = Z^{-1}\{\mathrm{F(z)}\}$ do sistema, obtemos:

$$h[n] = 3(-1)^n + 6n - 3, \quad n \geq 0$$

Verificando a consistência do resultado:

```
syms n z % declara variaveis simbolicas
Fz=12*z/((z+1)*(z-1)^2);
hn=iztrans(Fz); % determina h[n]=Zinv{F[z]}
hn % mostra h[n]
```

```
hn =

6*n + 3*(-1)^n - 3
```

Transformada Z Inversa – polos complexos conjugados

Dado $X(z)$ na forma

$$X(z) = \frac{b_M z^M + b_{M-1} z^{M-1} + \cdots + b_0}{a_N z^N + a_{N-1} z^{N-1} + \cdots + a_0} \tag{18}$$

Divide-se por z ambos os lados de (18), acha-se as N raízes do polinômio do denominador (N polos) e expande-se em frações parciais:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z - p_1} + \frac{c_2}{z - p_2} + \cdots + \frac{c_N}{z - p_N} \tag{19}$$

Os resíduos, i.e., os coeficientes c_k, $k = 1,2,\cdots,N$, da expansão em frações parciais em (19), são obtidos do procedimento nos slides 25 e 26 no Cap IV das notas de aula. Obtidos os coeficientes c_k , multiplica-se ambos os lados de (19) por z:

$$X(z) = c_0 + \frac{c_1 z}{z - p_1} + \frac{c_2 z}{z - p_2} + \cdots + \frac{c_N z}{z - p_N} \tag{20}$$

Aplicando o par 1 ($\delta[n] \leftrightarrow 1$) e o par 5 do slide (19) ($a^n u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$) em (20) resulta:

$$x[n] = c_0\delta[n] + c_1 p_1^n + c_2 p_2^n + \cdots + c_N p_N^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{21}$$

De mesma forma que para $X(s)$ no âmbito da Transformada de Laplace, os polos complexos de $X(z)$ sempre ocorrem em pares complexos conjugados. Suponhamos que $p_2 = {p_1}^*$ em (19), de modo que (21) pode ser reescrita como:

$$x[n] = c_0\delta[n] + c_1 {p_1}^n + {c_1}^*({p_1}^*)^n + \cdots + c_N {p_N}^n \tag{22}$$

onde

$$Z^{-1}\{c_1 {p_1}^n + {c_1}^*({p_1}^*)^n\} = 2|c_1|\sigma^n \cos(\Omega n + \measuredangle c_1) \tag{23}$$

$$\text{sendo} \quad \sigma = |p_1| \ \text{ e } \ \Omega = \measuredangle p_1 \tag{24}$$

E, portanto, (22) é reescrita como:

$$x[n] = c_0\delta[n] + 2|c_1|\sigma^n \cos(\Omega n + \measuredangle c_1) + c_3 {p_3}^n \cdots + c_N {p_N}^n, \qquad n = 0,1,\cdots \tag{25}$$

Transformada Z Inversa – polos complexos conjugados

Exemplo 8: O espectro de frequências complexas $X(z)$ da sequência $x[n]$ na entrada de um sistema é conforme abaixo. **Pede-se: (a)** Determine analiticamente a sequência $x[n]$. **(b)** Verifique o resultado em (a) com a função residue() do software Matlab. **(c)** Determine e plote $x[n]$ p/ $n = 0,1,\cdots,19$ com a função filter() do software Matlab.

$$X(z) = \frac{z^3 + 1}{z^3 - z^2 - z - 2}$$

Solução: (a) Usando a função roots() do software Matlab, os polos de $X(z)$ são:

$$p_1 = -0.5 - j0.866$$
$$p_2 = -0.5 + j0.866$$
$$p_3 = 2$$

Expandindo $X(z)/z$ em frações parciais:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z + 0.5 + j0.866} + \frac{c_1^*}{z + 0.5 - j0.866} + \frac{c_3}{z - 2}$$

$$c_0 = X(0) = \frac{1}{-2} = -0.5$$

$$c_1 = \left[(z + 0.5 + j0.866)\frac{X(z)}{z}\right]_{z=-0.5-j0.866} = 0.429 + j0.0825$$

$$c_3 = \left[(z - 2)\frac{X(z)}{z}\right]_{z=2} = 0.643$$

De (21) obtemos:

$$x[n] = -0.5\delta[n] + c_1(-0.5 - j0.866)^n + c_1^*(-0.5 + j0.866)^n + 0.643(2)^n$$

Usando (22),(23),(24) e (25):

$$|p_1| = \sqrt{(0.5)^2 + (0.866)^2} = 1 \qquad |c_1| = \sqrt{(0.429)^2 + (0.0825)^2} = 0.437$$

$$\angle p_1 = \pi + \tan^{-1}\frac{0.866}{0.5} = \frac{4\pi}{3}\text{rad} \qquad \angle c_1 = \tan^{-1}\frac{0.0825}{0.429} = 10.89^\circ$$

$$x[n] = -0.5\delta[n] + 0.874\cos\left(\frac{4\pi}{3}n + 10.89^\circ\right) + 0.643(2)^n$$

(b)

```
num = [1 0 0 1]; % numerador de X(z)/z
den= [1 -1 -1 -2 0];  % denominador de X(z)/z
[r,p] = residue(num,den) % determina coeficientes e mostra
```

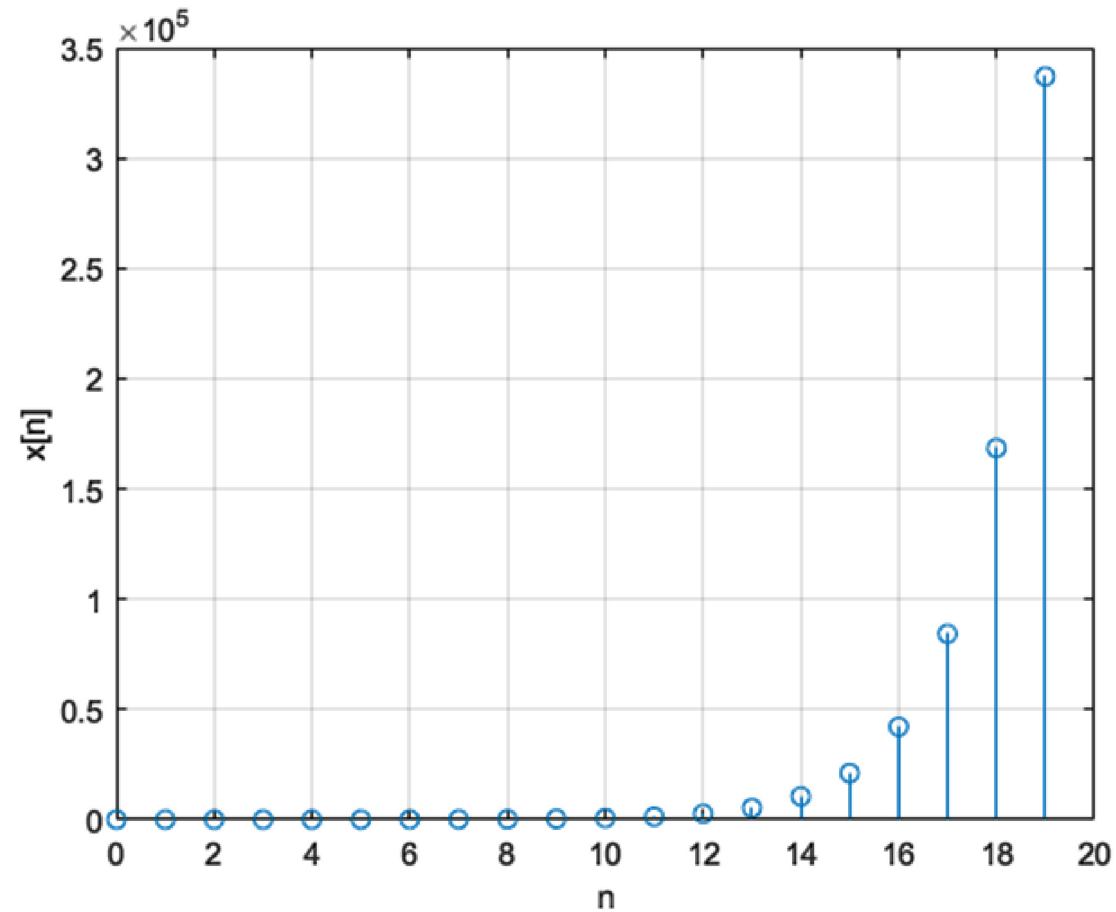
```
r =
    0.6429 + 0.0000i
    0.4286 - 0.0825i
    0.4286 + 0.0825i
   -0.5000 + 0.0000i

p =
    2.0000 + 0.0000i
   -0.5000 + 0.8660i
   -0.5000 - 0.8660i
    0.0000 + 0.0000i
```

Os coeficientes c_k da expansão em frações parciais e os polos obtidos em (a) são, portanto, consistentes com o resultado da função residue().

(c) A função filter() é usada conforme segue:

```
>> help filter
 filter One-dimensional digital filter.
    Y = filter(B,A,X) filters the data in vector X with the
    filter described by vectors A and B to create the filtered
    data Y.  The filter is a "Direct Form II Transposed"
    implementation of the standard difference equation:

    a(1)*y(n) = b(1)*x(n) + b(2)*x(n-1) + ... + b(nb+1)*x(n-nb)
                          - a(2)*y(n-1) - ... - a(na+1)*y(n-na)

    If a(1) is not equal to 1, filter normalizes the filter
    coefficients by a(1).

    filter always operates along the first non-singleton dimension,
    namely dimension 1 for column vectors and non-trivial matrices,
    and dimension 2 for row vectors.

    [Y,Zf] = filter(B,A,X,Zi) gives access to initial and final
    conditions, Zi and Zf, of the delays.  Zi is a vector of length
    MAX(LENGTH(A),LENGTH(B))-1, or an array with the leading dimension
    of size MAX(LENGTH(A),LENGTH(B))-1 and with remaining dimensions
    matching those of X.
```

```
clear; % limpa memoria
num = [1 0 0 1]; % numerador de X(z)
den= [1 -1 -1 -2];  % denominador de X(z)
N=20; % numero de amostras
n=0:N-1; % indexador da amostras
impulso = [1 zeros(1,N-1)]; % excitação de X(z) com um impulso
x = filter(num,den,impulso); % determina x[n], que é a resposta de X(z) ao impulso
stem(n,x); % plota x[n]
grid on % coloca grade no plot
ylabel('x[n]') % label eixo y
xlabel('n') % label eixo x
```



Resposta de sistemas discretos de 2ª ordem

Consideremos um sistema discreto de 2ª ordem descrito pela equação de diferença abaixo, que relaciona a entrada x do sistema com a saída y:

$$y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] \qquad (26)$$

Aplicando a Transformada Z em ambos os lados de (26), usando as equações (14) e (15) para contemplar as condições iniciais $y[-1]$ e $y[-2]$ e assumindo que $x[-1] = 0$, temos:

$$Y(z) + a_1[z^{-1}Y(z) + y[-1]] + a_2[z^{-2}Y(z) + z^{-1}y[-1] + y[-2]] \qquad (27)$$

$$= b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z)$$

Resolvendo (27) p/ $Y(z)$:

$$Y(z) = \frac{-a_2 y[-2] - a_1 y[-1] - a_2 y[-1] z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} + \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} X(z) \qquad (28)$$

Multiplicando numerador e denominador de (28) por z^2 :

$$Y(z) = \frac{-(a_1 y[-1] + a_2 y[-2]) z^2 - a_2 y[-1] z}{z^2 + a_1 z + a_2} + \frac{b_0 z^2 + b_1 z}{z^2 + a_1 z + a_2} X(z) \qquad (29)$$

A equação (29) é a representação no domínio z do sistema de tempo discreto descrito pela equação de diferença de segunda ordem (26), que relaciona a entrada x do sistema com a saída y. O primeiro termo no lado direito de (29) é a Transformada z da parte da resposta na saída y resultante das condições iniciais $y\,[-1]$ e $y\,[-2]$. O segundo termo no lado direito de (29) é a Transformada z da parte da resposta na saída y resultante da entrada x aplicada para $n \geq 0$.

Resposta de sistemas discretos de 2ª ordem

Se das condições iniciais $y\,[-1]$ e $y\,[-2]$ são nulas, (29) se reduz á representação da função de transferência $H(z)$ do sistema:

$$Y(z) = \underbrace{\frac{b_0 z^2 + b_1 z}{z^2 + a_1 z + a_2}}_{H(z)} X(z) \tag{30}$$

$$H(z) = \frac{b_0 z^2 + b_1 z}{z^2 + a_1 z + a_2} \tag{31}$$

Exemplo 9: Considere o sistema discreto de 2ª ordem descrito pela equação de diferença abaixo, que relaciona a entrada x do sistema com a saída y. A entrada $x[n]$ do sistema é excitada com um degrau unitário $u[n]$, e as condições iniciais do sistema são $y\,[-1] = 2$ e $y\,[-2] = 1$.

$$y[n] + 1.5y[n-1] + 0.5y[n-2] = x[n] - x[n-1]$$

Pede-se: (a) Determine a função de transferência $H(z)$ do sistema **(b)** Determine analiticamente a resposta $y[n]$ à excitação $x[n] = u[n]$ e às condições iniciais dadas. **(c)** Determine e plote $y[n]$ p/ $n = 0,1,\cdots,20$ com a função filter() do software Matlab e verifique a consistência do resultado obtido para $y[n]$ em (b).

Solução: (a) De (31) temos

$$H(z) = \frac{z^2 - z}{z^2 + 1.5z + 0.5}$$

(b) Dado que $x[n] = u[n]$, vamos aplicar em (29) o par 5 do slide (19), $x[n] = Z^{-1}\{X(z)\} = a^n u[n] \leftrightarrow X(z) = Z\{x[n]\} = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$, juntamente com os coeficientes da equação de diferença e as condições iniciais $y\,[-1] = 2$ e $y\,[-2] = 1$ dados no enunciado, resultando

$$Y(z) = \frac{-[(1.5)(2) + (0.5)(1)]z^2 - (0.5)(2)z}{z^2 + 1.5z + 0.5} + \frac{z^2 - z}{z^2 + 1.5z + 0.5}\left(\frac{z}{z-1}\right)$$

Simplificando algebricamente $Y(z)$ e expandindo em frações parciais, temos:

$$Y(z) = \frac{-3.5z^2 - z}{z^2 + 1.5z + 0.5} + \frac{z^2}{z^2 + 1.5z + 0.5}$$

$$= \frac{-2.5z^2 - z}{z^2 + 1.5z + 0.5}$$

$$= \frac{0.5z}{z + 0.5} - \frac{3z}{z + 1}$$

Aplicando o par 5 do slide (19), $a^n u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$, resulta:

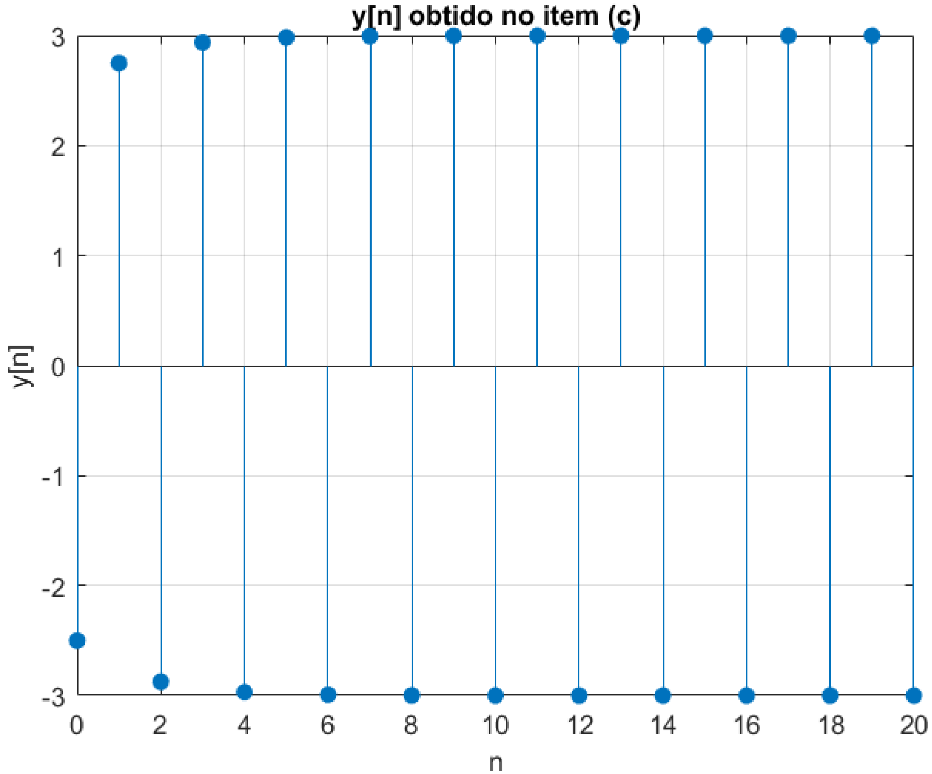
$$y[n] = Z^{-1}\{Y(z)\} = 0.5(-0.5)^n - 3(-1)^n, \qquad n = 0,1,2,\cdots$$

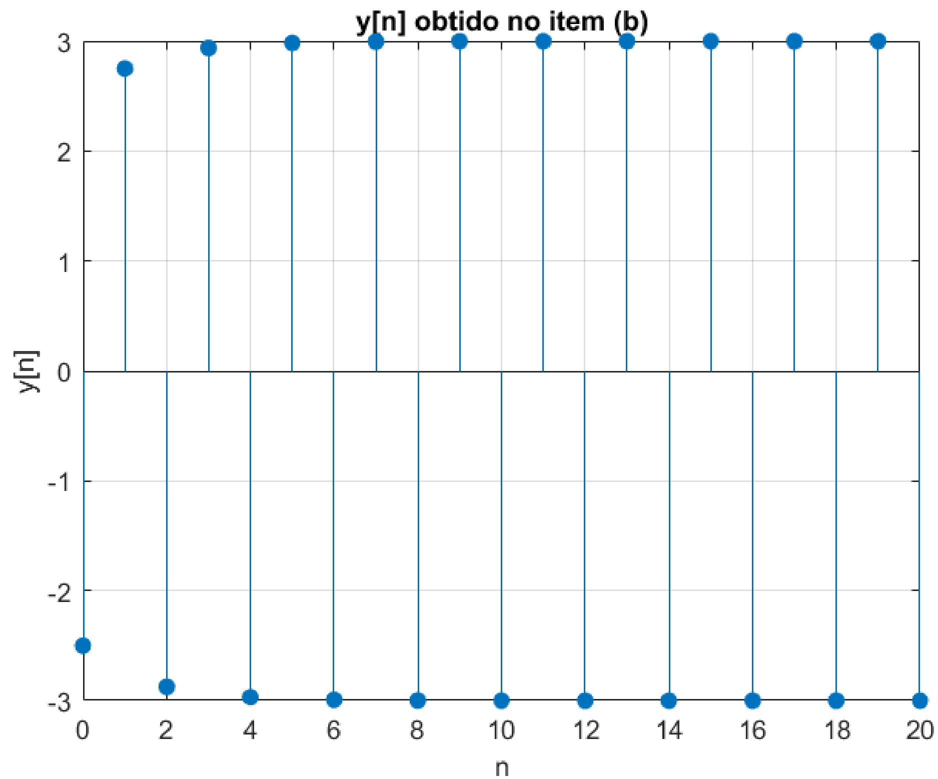
(c) Ver próximo slide.

(c)

```
num = [1 -1 0]; % numerador de Y(z)
den= [1 1.5 0.5];  % denominador de Y(z)
N=21; % numero de amostras
n=0:N-1; % indexador da amostras
x = ones(1,length(n)); % excitação x[n] do sistema é um degrau unitário u[n]
zi=[-1.5*2-0.5*1, -0.5*2]; % cond. iniciais zi=[-a1*y[-1]-a2*y[-2], -a2*y[-1]] - ver
% numerador do 1o termo de (29)
y = filter(num,den,x, zi); % determina y[n], que é a resposta a x e às condições
% iniciais zi
yb=0.5*(-0.5).^n-3*(-1).^n; % y[n] determinado no item (b)
figure(1); % 1o grafico
stem(n,y, 'filled'); % plota y{n] com bolinhas do stem preenchidas
title('y[n] obtido no item (c)');
grid on % coloca grade no plot
ylabel('y[n]') % label eixo y
xlabel('n') % label eixo x
figure(2); % 2o grafico
stem(n,yb, 'filled'); % plota y{n] com bolinhas do stem preenchidas
title('y[n] obtido no item (b)');
grid on % coloca grade no plot
ylabel('y[n]') % label eixo y
xlabel('n') % label eixo x
```

Resposta de sistemas discretos de 2ª ordem





Portanto, o resultado obtido para $y[n]$ em (b) é consistente com o resultado obtido em (c).

Resposta de sistemas discretos de qualquer ordem

Exemplo 10: Considere o sistema discreto descrito pela equação de diferença abaixo, que relaciona a entrada x do sistema com a saída y. A excitação é $x[n] = 0.9^n u[n]$ e as condições iniciais são $y\,[-1] = -1$ e $y\,[-2] = -2$.

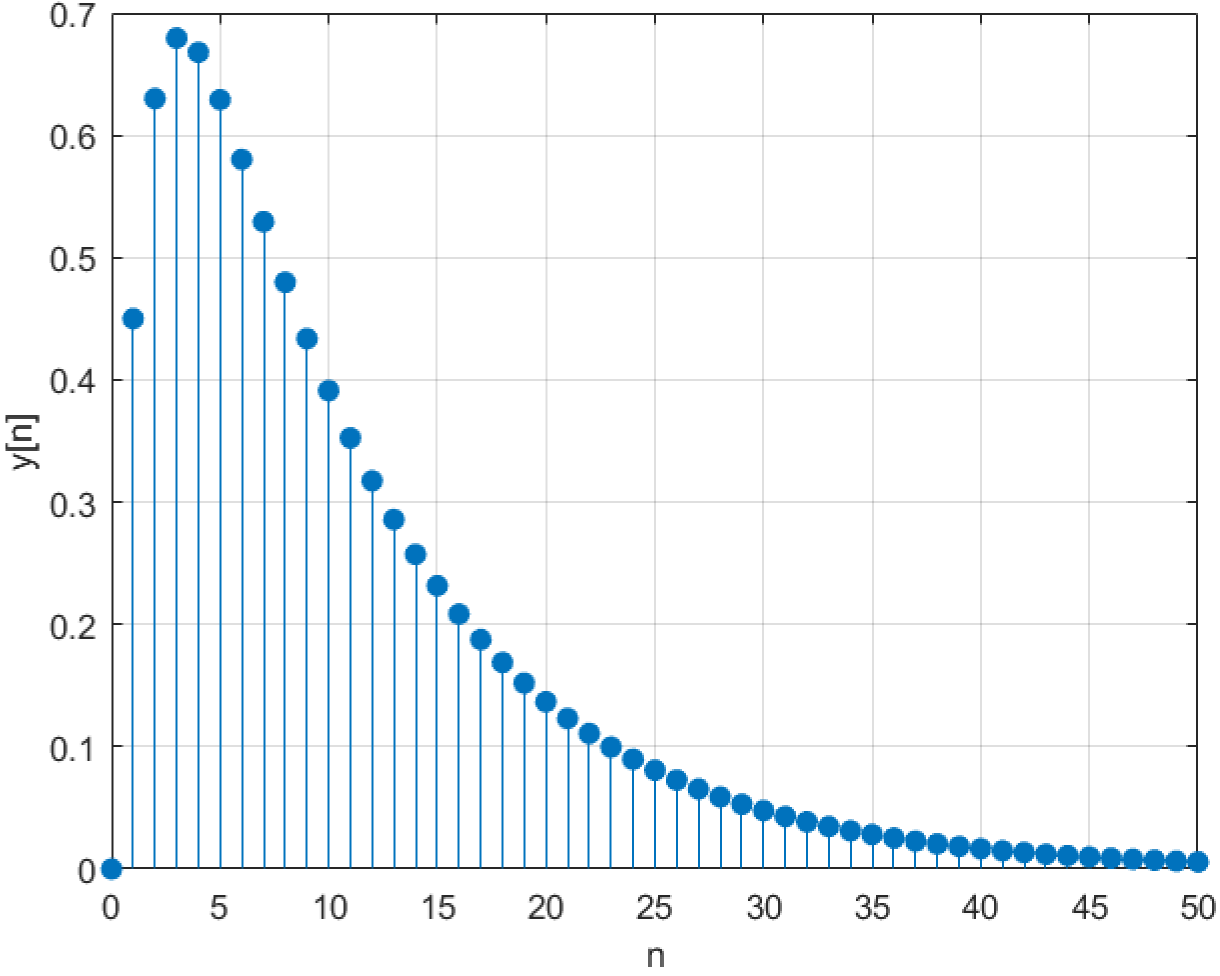
$$2y[n] - 3y[n-1] + y[n-2] = x[n] - x[n-1]$$

Pede-se: Usando as funções de processamento simbólico do software Matlab escreva um script .m que possa ser facilmente adaptado para sistemas de qualquer ordem. Use o script p/ determinar e plotar $y[n]$ p/ $n = 0,1,\cdots,50$.

Solução:

```
syms n z Y % declara variaveis simbolicas
x=0.9^n; % define excitação x[n].
X=ztrans(x,z); % X(z)=Z{x[n]}
X1=z^(-1)*X; % Z{x[n-1]} = z^-1*X(z) - ver equacao (16)
y_1=-1; % condicao inicial
y_2=-2; % condicao inicial
Y1=z^(-1)*Y+y_1; % Z{y[n-1]} = z^-1*Y(z) + y[-1]  - ver equacao (14) (e (13))
Y2=z^(-2)*Y+y_2+(z^-1)*y_1; % Z{y[n- 2]} = z^-2*Y(z) + y[-2] + z^-1*y[-1] ->
% -> ver equacao (15) (e (13))
G=2*Y-3*Y1+Y2-X+X1; % os termos em x na equação da diferença são movidos para o lado
% esquerdo e todo lado esquerdo é atribuído a um termo G
SOL=solve(G,Y); % a equação representada por G é igualada a zero e resolvida para Y,
% tal que SOL=Y(z).
y=iztrans(SOL,n) % y[n]=Zinv{Y(z)}
n1=0:50; % indice das amostras
y_n=subs(y,n,n1); % subs(y,n,n1) retorna uma cópia de y substituindo todas as ocorrências
% de 'n' por 'n1', e então evalua y e retorna.
stem(n1,y_n, 'filled') % plota y{n] com bolinhas do stem preenchidas
grid on % coloca grade no plot
ylabel('y[n]') % label eixo y
xlabel('n') % label eixo x
```

```
y =

(9*(9/10)^n)/8 - (9*(1/2)^n)/8
```



Conforme vimos no Cap V.2 das notas de aula, um sistema LTI contínuo no tempo é estável no sentido BIBO (*Bounded Input Bounded Output*) se e somente se todos os polos da função de transferência estiverem no semiplano esquerdo do plano $s = \alpha + j\omega$. Mas, conforme discutimos no slide 5, todo ponto à esquerda do eixo $j\omega$ mapeia dentro do círculo de raio unitário do plano z. Portanto:

Um sistema LTI discreto no tempo é estável se todos os polos de sua função de transferência estiverem dentro do círculo de raio unitário. Se um polo estiver fora do círculo de raio unitário, o sistema será instável.

Exemplo 11: Considere o sistema discreto descrito pela função de transferência $H(z) = Z\{y[n]\}/Z\{x[n]\}$ conforme abaixo, sendo $x[n]$ e $y[n]$ os sinais no tempo discreto respectivamente medidos na entrada e na saída do sistema.

$$H(z) = \frac{2z+1}{z^2+3z+2}$$

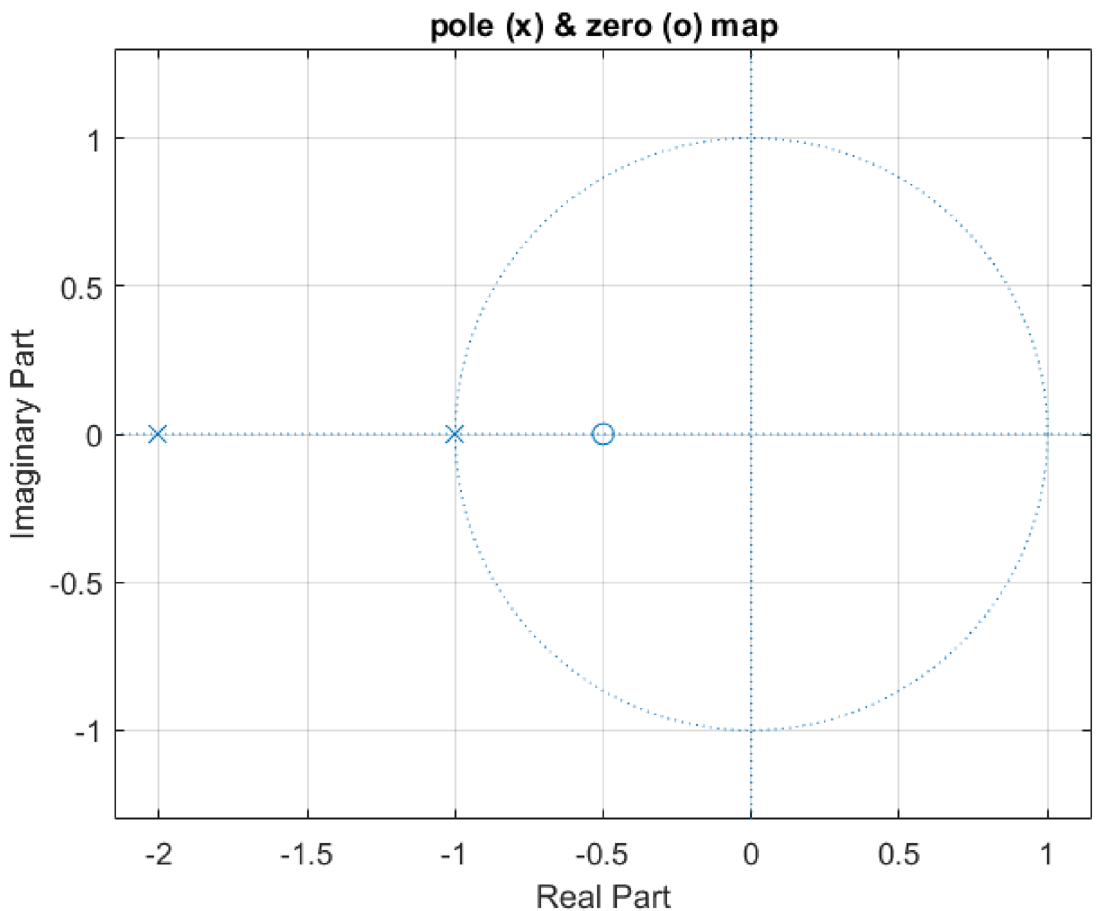
Pede-se: (a) Plote o mapa de polos e zeros deste sistema através da função zplane() do software Matlab, e determine se o sistema é estável. **(b)** Determine e plote a resposta ao impulso $h[n] = Z^{-1}\{H(z)\}$ deste sistema para p/ $n = 0,1,\cdots,19$ usando a função filter() do software Matlab.

Solução:

(a)
```
>> help zplane
 zplane Z-plane zero-pole plot.
    zplane(Z,P) plots the zeros Z and poles P (in column vectors) with the
    unit circle for reference.  Each zero is represented with a 'o' and
    each pole with a 'x' on the plot.  Multiple zeros and poles are
    indicated by the multiplicity number shown to the upper right of the
    zero or pole.  zplane(Z,P) where Z and/or P is a matrix, plots the zeros
    or poles in different columns using the colors specified by the axes
    ColorOrder property.

    zplane(B,A) where B and A are row vectors containing transfer function
    polynomial coefficients plots the poles and zeros of B(z)/A(z).  Note
    that if B and A are both scalars they will be interpreted as Z and P.
```

Estabilidade de sistemas LTI discretos no tempo

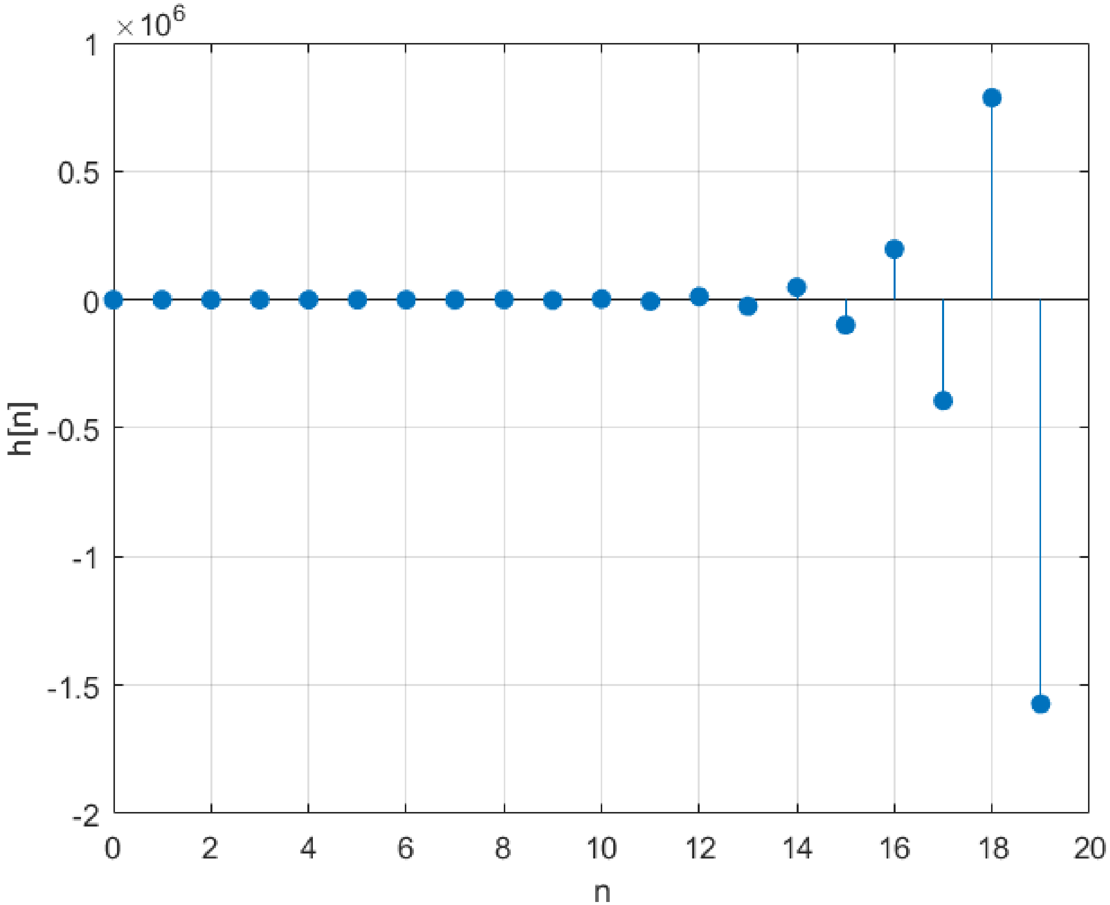
```
num=[2 1]; % numerador de H(z)
den=[1 3 2]; % denominador de H(z)
H=tf(num,den); % determina H(z) a partir de num e den
poles=pole(H) % determina os polos de H(z)
zeros=zero(H) % determina os zeros de H(z)
zplane(zeros,poles); % plota os polos e zeros no plano z
title('pole (x) & zero (o) map'); % coloca titulo no grafico
grid on; % coloca grade no gráfico
```



Portanto, o sistema é **instável** porque há um polo fora do círculo de raio unitário.

(b)

```
clear; % limpa memoria
num=[2 1]; % numerador de H(z)
den=[1 3 2]; % denominador de H(z)
N=20; % numero de amostras na resposta ao impulso
n=0:N-1; % indexador da amostras
impulso = [1 zeros(1,N-1)]; % excitação de H(z) com um impulso
h = filter(num,den,impulso); % determina h[n], que é a resposta de H(z) ao impulso
stem(n,h, 'filled'); % plota h[n] com as bolinhas do stem preenchidas
grid on % coloca grade no plot
ylabel('h[n]') % label eixo y
xlabel('n') % label eixo x
```



A **instabilidade** do sistema no sentido BIBO em consequência do polo fora do circulo de raio unitário pode ser observada na resposta ao impulso $h[n]$ do sistema, que cresce indefinidamente com o índice n.

Exemplo 12: Considere o sistema discreto descrito pela função de transferência $H(z) = Z\{y[n]\}/Z\{x[n]\}$ conforme abaixo, sendo $x[n]$ e $y[n]$ os sinais no tempo discreto respectivamente medidos na entrada e na saída do sistema.

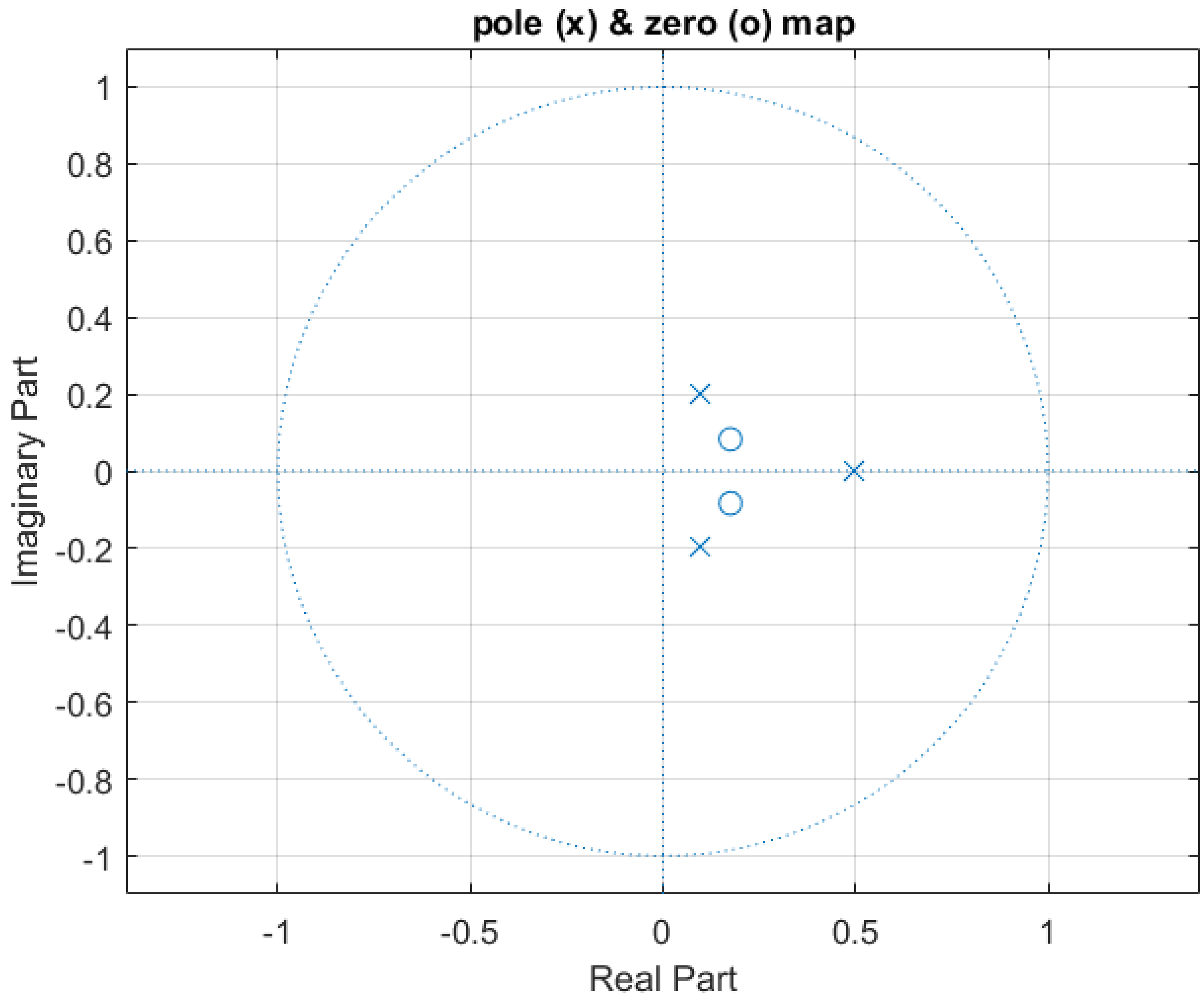
$$H(z) = \frac{4z^2 - 1.4z + 0.15}{z^3 - 0.7z^2 + 0.15z - 0.025}$$

Pede-se: (a) Plote o mapa de polos e zeros deste sistema através da função zplane() do software Matlab, e determine se o sistema é estável. **(b)** Determine e plote a resposta ao impulso $h[n] = Z^{-1}\{H(z)\}$ deste sistema para p/ $n = 0,1,\cdots,19$ usando a função filter() do software Matlab.

Solução:

(a)

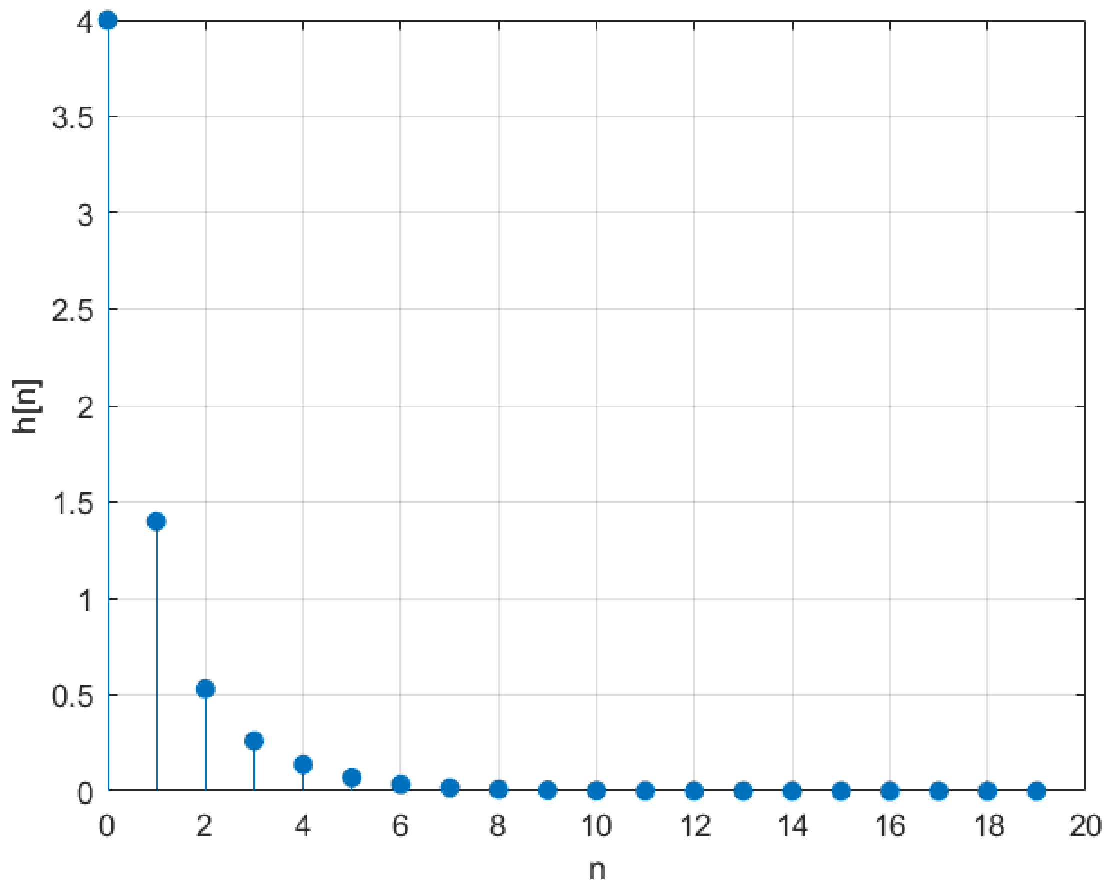
```
num=[4 -1.4 0.15]; % numerador de H(z)
den=[1 -0.7 0.15 -0.025]; % denominador de H(z)
H=tf(num,den); % determina H(z) a partir de num e den
poles=pole(H) % determina os polos de H(z)
zeros=zero(H) % determina os zeros de H(z)
zplane(zeros,poles); % plota os polos e zeros no plano z
title('pole (x) & zero (o) map'); % coloca titulo no grafico
grid on; % coloca grade no gráfico
```



Portanto, o sistema é **estável** porque não há polo fora do círculo de raio unitário.

(b)

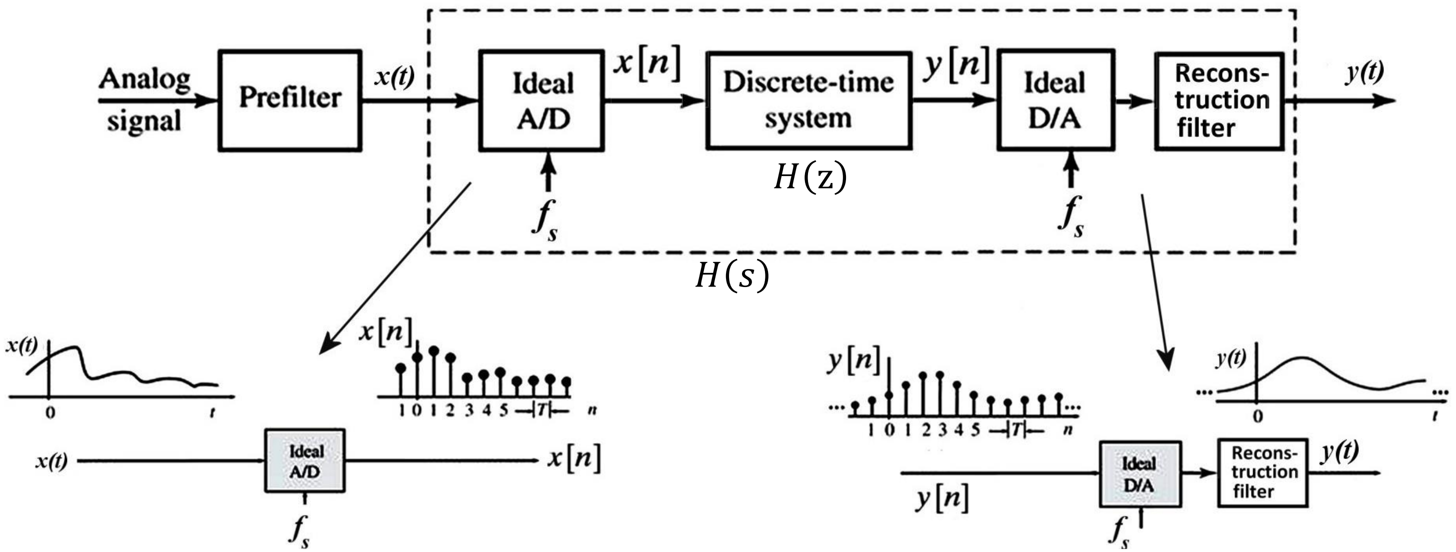
```
clear; % limpa memoria
num=[4 -1.4 0.15]; % numerador de H(z)
den=[1 -0.7 0.15 -0.025]; % denominador de H(z)
N=20; % numero de amostras na resposta ao impulso
n=0:N-1; % indexador da amostras
impulso = [1 zeros(1,N-1)]; % excitação de H(z) com um impulso
h = filter(num,den,impulso); % determina h[n], que é a resposta de H(z) ao impulso
stem(n,h, 'filled'); % plota h[n] com as bolinhas do stem preenchidas
grid on % coloca grade no plot
ylabel('h[n]') % label eixo y
xlabel('n') % label eixo x
```



A **estabilidade** do sistema no sentido BIBO em consequência de não haver polo fora do circulo de raio unitário pode ser observada na resposta ao impulso $h[n]$ do sistema, que decresce com o índice n, tendendo a zero para $n \to \infty$.

Resposta em frequência sob regime permanente senoidal

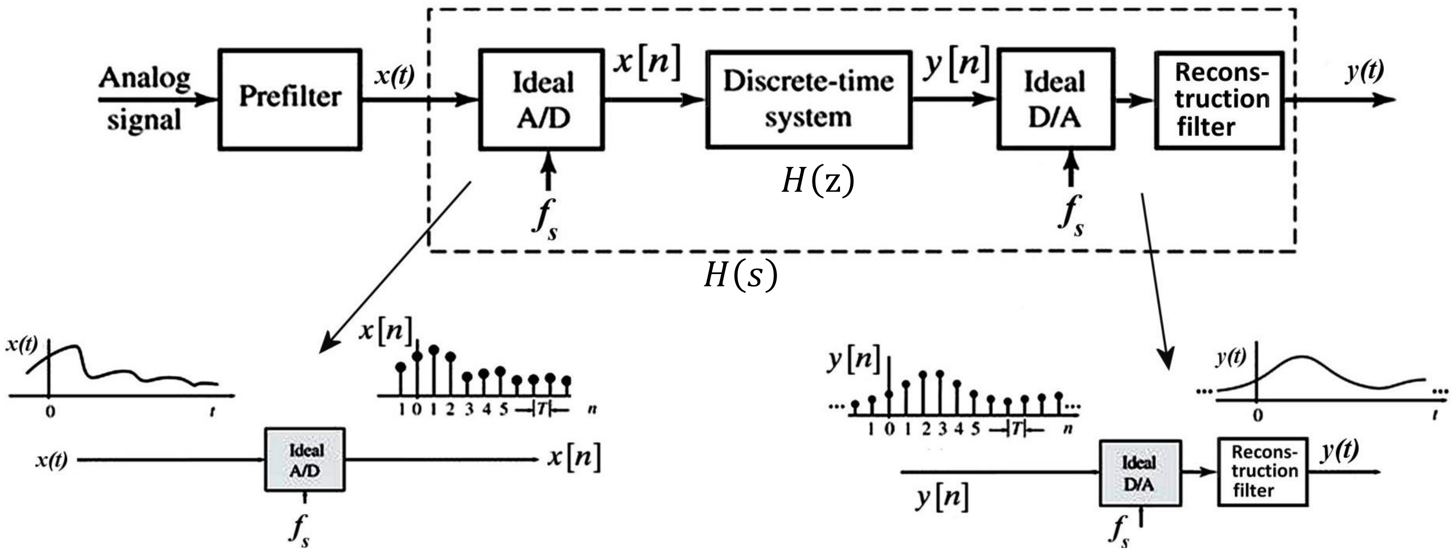
A figura abaixo representa o diagrama de blocos de um sistema LTI. O bloco "Discrete-time system" implementa a parte digital do sistema, com função de transferência $H(z) = Y(z)/X(z)$. O bloco representado pelo retângulo tracejado implementa a parte analógica do sistema com função de transferência $H(s) = Y(s)/X(s)$.



Vamos supor, a título de exemplo, que o sistema LTI implemente o controle de graves e agudos de um amplificador de áudio (ver https://en.wikipedia.org/wiki/Equalization_(audio)) com frequência de amostragem f_s tanto no A/D como no D/A. O bloco "Discrete-time system" implementa o filtro digital que controla os graves e agudos (*bass/treble*) do sinal de áudio. Queremos determinar a resposta em frequência $H(z) = H\left(1e^{j\theta}\right)$ em regime permanente senoidal do bloco "Discrete-time system". Lembre do slide 5 do Cap IV das notas de aula que o eixo $j\omega$ representa sinais senoidais. Lembre também do slide 5 do presente capítulo que o eixo $j\omega$ mapeia no círculo de raio unitário no plano z, e, portanto, sob regime senoidal o plano z é reduzido ao círculo $z = 1e^{j\theta}$.

Uma possibilidade para determinar $H\left(e^{j\theta}\right)$ é usar a abordagem discutida nos slides 27 a 31 do Cap I das notas de aula. Um gerador senoidal aplica na entrada do sistema e no canal 1 de um osciloscópio um sinal $x(t) = \mathrm{A_{in}}\cos(2\pi\mathrm{f}t + \phi_{\mathrm{in}})$ e a frequência f é ajustada manualmente através de um *knob* em uma sequencia de diversos valores f1<f2<… Para cada frequência f1, f2, … a saída $\mathrm{y}(t) = \mathrm{A_{out}}\cos(2\pi\mathrm{f}t + \phi_{\mathrm{out}})$ é medida no canal 2 do osciloscópio. A magnitude e fase da função de transferência $H(\mathrm{f})$ é obtida para cada f através de $|H(\mathrm{f})| = \left.\frac{\mathrm{A_{out}}}{\mathrm{A_{in}}}\right|_{\mathrm{f}}$ e $\sphericalangle H(\mathrm{f}) = \left.(\phi_{\mathrm{out}} - \phi_{\mathrm{in}})\right|_{\mathrm{f}}$, conforme vimos no Cap I. A resposta ao impulso $h(t)$ do sistema analógico é obtida da Transformada de Fourier inversa $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(\mathrm{f})\}$. Daí $h(t)$ é digitalizado com intervalo entre amostras de $T_s = 1/f_s$, e, conforme vimos no slide 16, a sequência $h[n]$ é obtida de $h(t)$ fazendo-se $t = nT_s$ em $h(t)$.

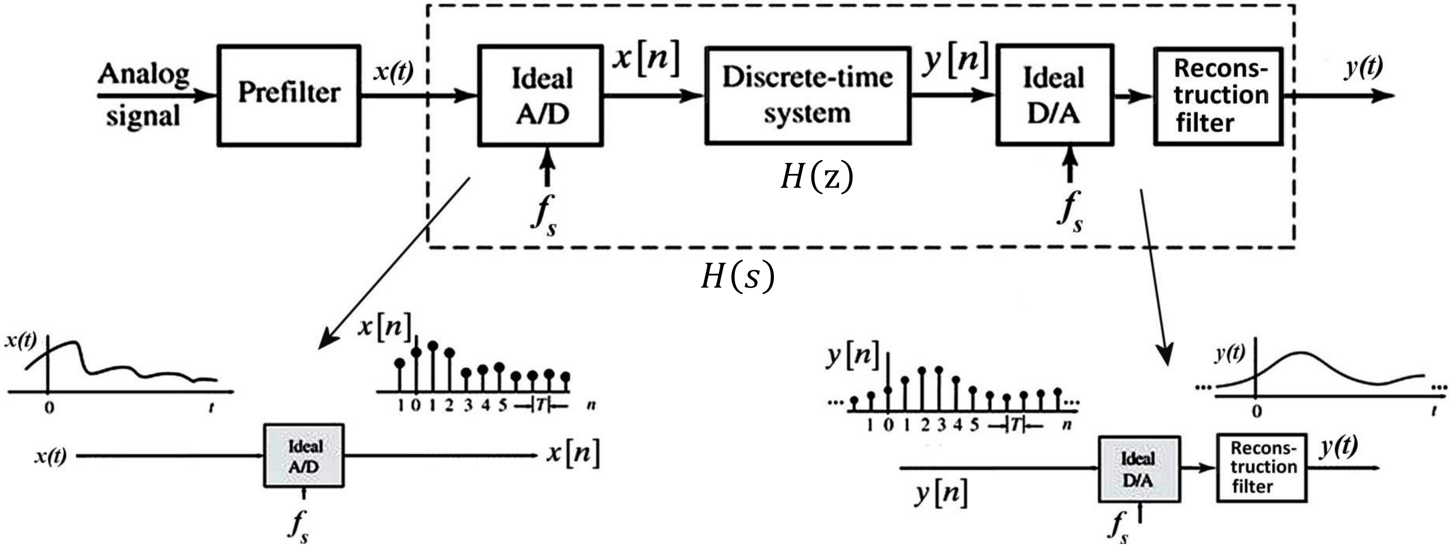
Resposta em frequência sob regime permanente senoidal



A resposta ao impulso $h[n]$ obtida da digitalização de $h(t)$ é então convertida para o domínio frequência z através de $H(z) = Z\{h[n]\}$ e a resposta em frequência em regime permanente senoidal é obtida fazendo $z = 1e^{j\theta}$ em $H(z)$, de modo que a curva de magnitude da resposta em frequência do sistema digital é dada por $\left|H\left(e^{j\theta}\right)\right|$ e a curva de fase da resposta em frequência do sistema digital é dada por $\measuredangle\left\{H\left(e^{j\theta}\right)\right\}$.

Uma alternativa bem mais simples do que gerar um amplo espectro na entrada do sistema através da variação manual da frequência do gerador senoidal é aplicar um impulso $\delta[n]$ na entrada $x[n]$ do bloco “Discrete-time system”. Esta abordagem é válida porque $Z\{\delta[n]\} = 1$, significando que o espectro de $\delta[n]$ é um espectro muito amplo, apresentando magnitude constante para todas as frequências do plano z. Ainda, gerar um impulso $\delta[n]$ na entrada de um sistema discreto é uma operação muito simples – basta instruir no próprio código em C ou em VHDL que o sistema leia uma LUT (*look up table*) com o valor 1.0 armazenado na 1ª posição da LUT e com o valor 0 armazenado em todas as posições subsequentes. A resposta à $\delta[n]$ resultante na saída $y[n]$ do bloco “Discrete-time system” é a resposta ao impulso $h[n]$. A resposta ao impulso $h[n]$ assim obtida na saída $y[n]$ do bloco “Discrete-time system” é convertida para o domínio frequência z através de $H(z) = Z\{h[n]\}$ e a resposta em frequência em regime permanente senoidal é obtida fazendo $z = 1e^{j\theta}$ em $H(z)$. A curva de magnitude da resposta em frequência do sistema digital é dada por $\left|H\left(e^{j\theta}\right)\right|$ e a curva de fase da resposta em frequência do sistema digital é dada por $\measuredangle\left\{H\left(e^{j\theta}\right)\right\}$.

Resposta em frequência sob regime permanente senoidal

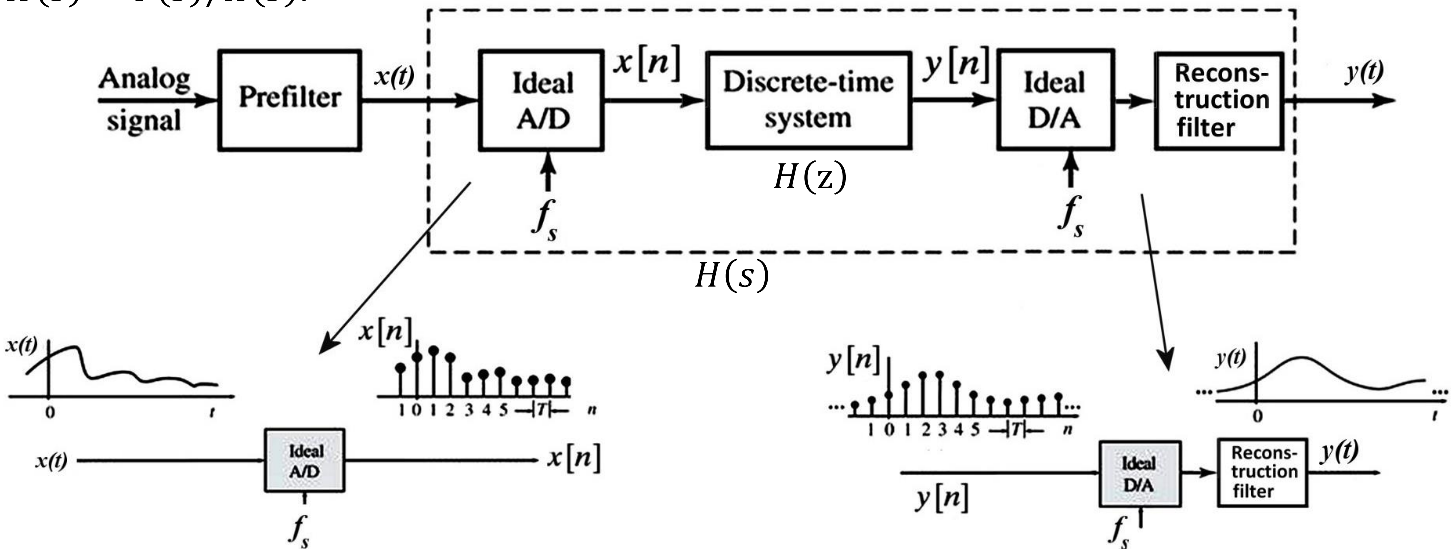


Importante notar que **a curva de magnitude da resposta em frequência $|H(e^{j\theta})|$ e a curva de fase da resposta em frequência $\measuredangle\{H(e^{j\theta})\}$ devem ser geradas para o intervalo de frequências digitais $0 \le \theta \le \pi$, correspondendo a um intervalo de frequências analógicas $0 \le f \le f_s/2$**. Isto é necessário porque, conforme discutido no slide 7, para evitar *aliasing*, o observador que se movimenta linearmente ao longo do eixo $j\omega$ no plano $s = \alpha + j\omega$, partindo de $\omega = 0$ na direção de $\omega = \infty$, poderá se mover no máximo até $\omega_{max} = +2\pi f_{max} = +2\pi\frac{f_s}{2}$. Nesta situação, o movimento correspondente no plano $z = \mathrm{Re}\{z\} + j\mathrm{Im}\{z\}$ será um movimento circular de meia volta no sentido anti-horário ao longo do circulo de raio unitário $1e^{j\theta}$, partindo de $\theta = 0$ e indo até $\theta_{max} = 2\pi\frac{f_{max}}{f_s} = 2\pi\frac{f_s/2}{f_s} = +\pi$.

Para sistemas *bandpass*, com espectro do sinal transladado de DC para uma frequência central f_o, as curvas $|H(e^{j\theta})|$ e $\measuredangle\{H(e^{j\theta})\}$ devem ser geradas para o intervalo de frequências digitais $-\pi \le \theta \le \pi$, correspondendo a um intervalo de frequências analógicas $f_o - f_s/2 \le f \le f_o + f_s/2$.

(ver slide 28 de http://www.fccdecastro.com.br/pdf/T2_Aulas16a20_27052020.pdf)

Exemplo 13: A figura abaixo representa o diagrama de blocos simplificado do controle de graves e agudos do equalizador gráfico de um amplificador de áudio (ver https://pt.wikihow.com/Usar-um-Equalizador-Gr%C3%A1fico). A frequência de amostragem é f_s =40KHz tanto no A/D como no D/A. O bloco "Discrete-time system" implementa um filtro digital cuja função de transferência é $H(z) = Y(z)/X(z)$ e que controla a amplitude e fase das componentes espectrais de interesse no sinal de áudio. O bloco representado pelo retângulo tracejado implementa a parte analógica do sistema com função de transferência $H(s) = Y(s)/X(s)$.



Aplicando um impulso $\delta[n]$ na entrada $x[n]$ do bloco "Discrete-time system", a resposta $h[n]$ que resulta na saída $y[n]$ é conforme abaixo.

$$h[n] = \delta[n] + 0.955\delta[n-8] + 0.881[n-20] + 0.055\delta[n-87] + 0.043\delta[n-91] + 0.032\delta[n-116]$$

Determine e plote: **(a)** A curva de magnitude da resposta em frequência do sistema $|H(e^{j\theta})|$ em [dB] e **(b)** A curva de fase da resposta em frequência do sistema $\measuredangle\{H(e^{j\theta})\}$ em [°].

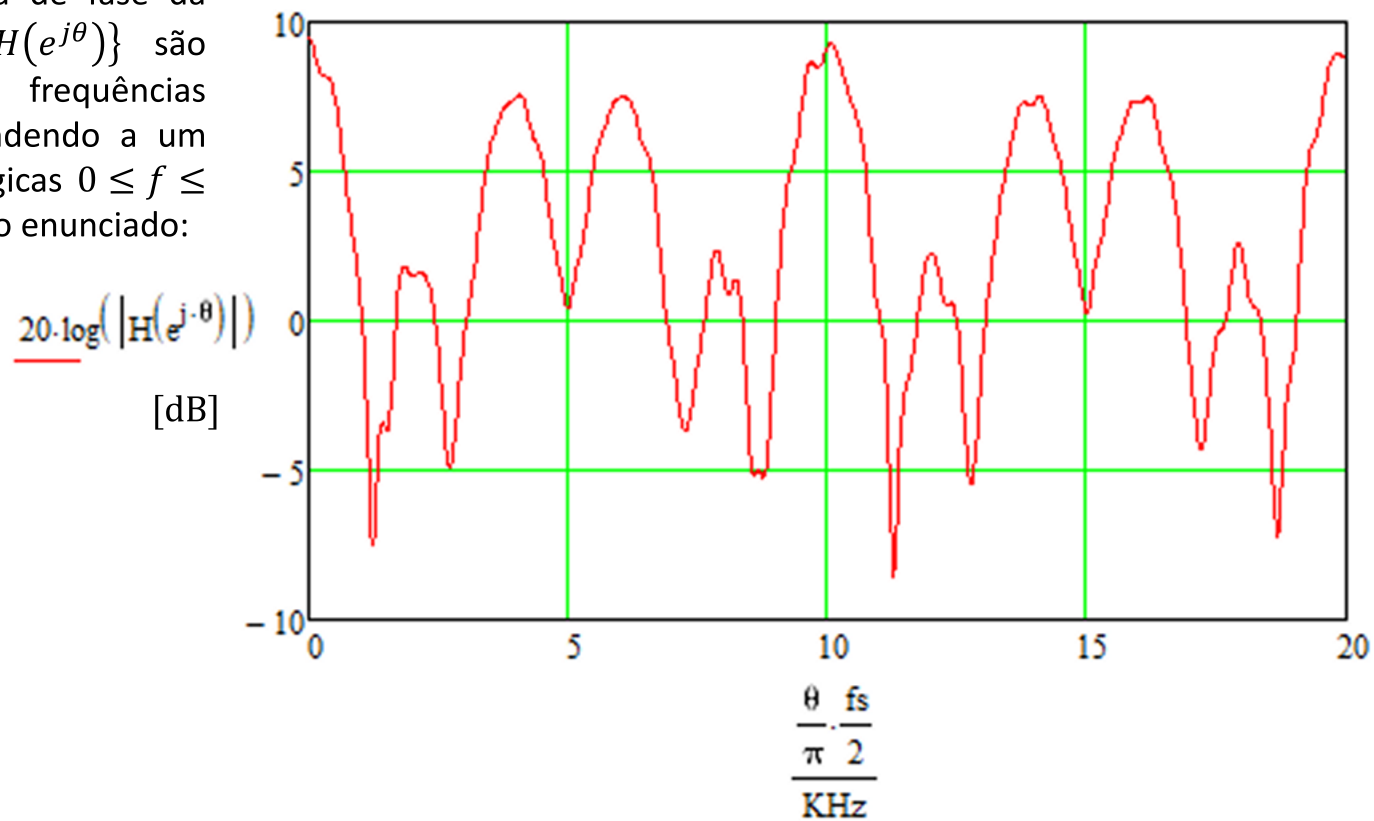
Solução: (a) Aplicando a transformada Z (equação (16) slide 21) em ambos os lados da expressão para $h[n]$, obtemos:

$$H(z) := 1 + 0.955\cdot z^{-8} + 0.881\cdot z^{-20} + 0.055\cdot z^{-87} + 0.043\cdot z^{-91} + 0.032\cdot z^{-116}$$

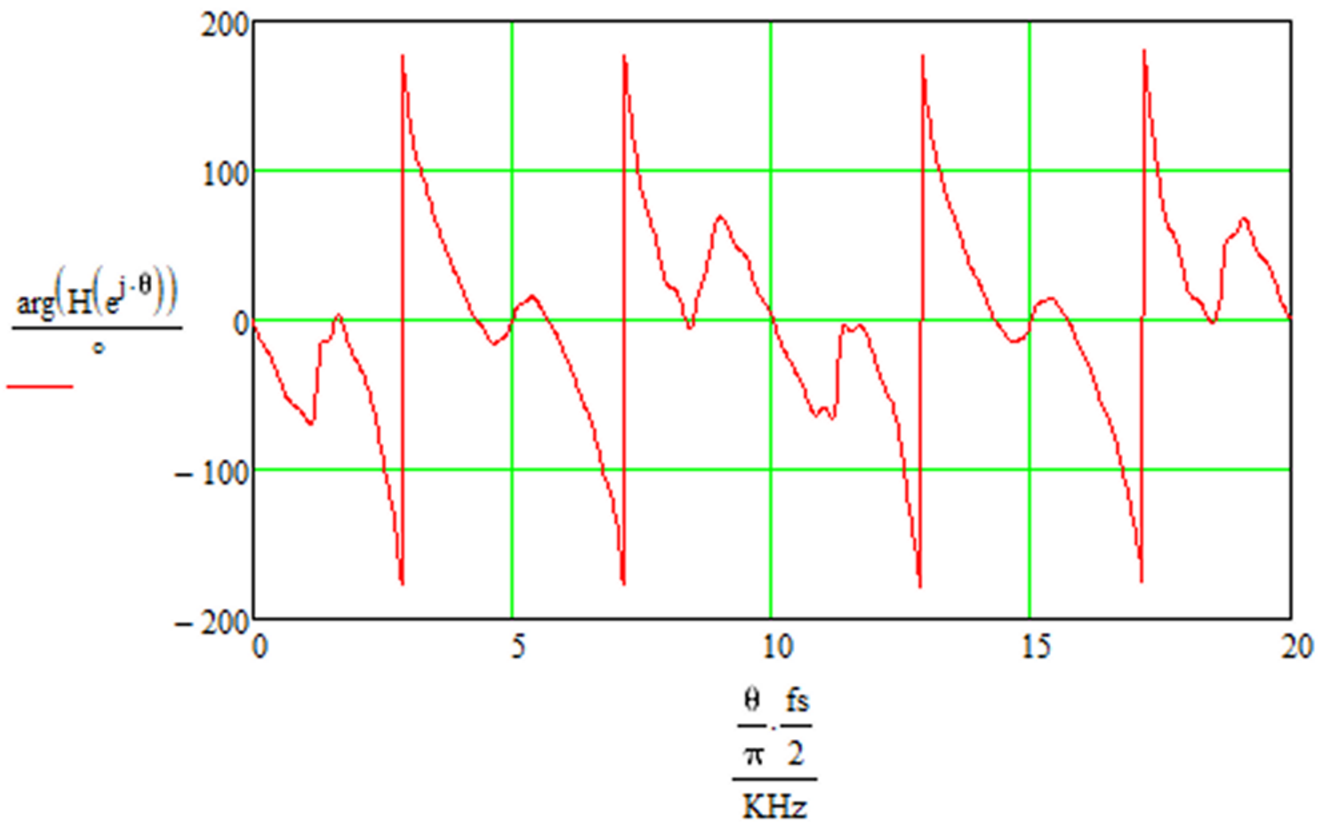
ou

$$H(z) := \frac{z^{116} + 0.955\cdot z^{108} + 0.881\cdot z^{96} + 0.055\cdot z^{29} + 0.043\cdot z^{25} + 0.032}{z^{116}}$$

A curva de magnitude da resposta em frequência $\left|H\left(e^{j\theta}\right)\right|$ e a curva de fase da resposta em frequência $\measuredangle\left\{H\left(e^{j\theta}\right)\right\}$ são geradas para o intervalo de frequências digitais $0 \le \theta \le \pi$, correspondendo a um intervalo de frequências analógicas $0 \le f \le f_s/2$, sendo f_s =40KHz dado no enunciado:



(b)



Exemplo 14: Considere o sistema discreto descrito pela função de transferência $H(z) = Z\{y[n]\}/Z\{x[n]\}$ conforme abaixo, sendo $x[n]$ e $y[n]$ os sinais no tempo discreto respectivamente medidos na entrada e na saída do sistema.

$$H(z) = \frac{0.1z + 0.1}{z^2 - 1.5z + 0.7}$$

Pede-se: **(a)** Usando a função filter() do software Matlab determine e plote a resposta ao degrau do sistema para $n = 0,1,\cdots,34$. **(b)** Usando a função zplane() do software Matlab plote o mapa de polos e zeros do sistema. **(c)** Plote $\left|H\left(e^{j\theta}\right)\right|$ em [dB] e $\measuredangle\left\{H\left(e^{j\theta}\right)\right\}$ em [°] usando a função freqz() do software Matlab. **(d)** Determine analiticamente e plote $\left|H\left(e^{j\theta}\right)\right|$ em [dB] e $\measuredangle\left\{H\left(e^{j\theta}\right)\right\}$ em [°]. **(e)** Analise e inter-relacione os resultados obtidos em (a),(b) e (c).

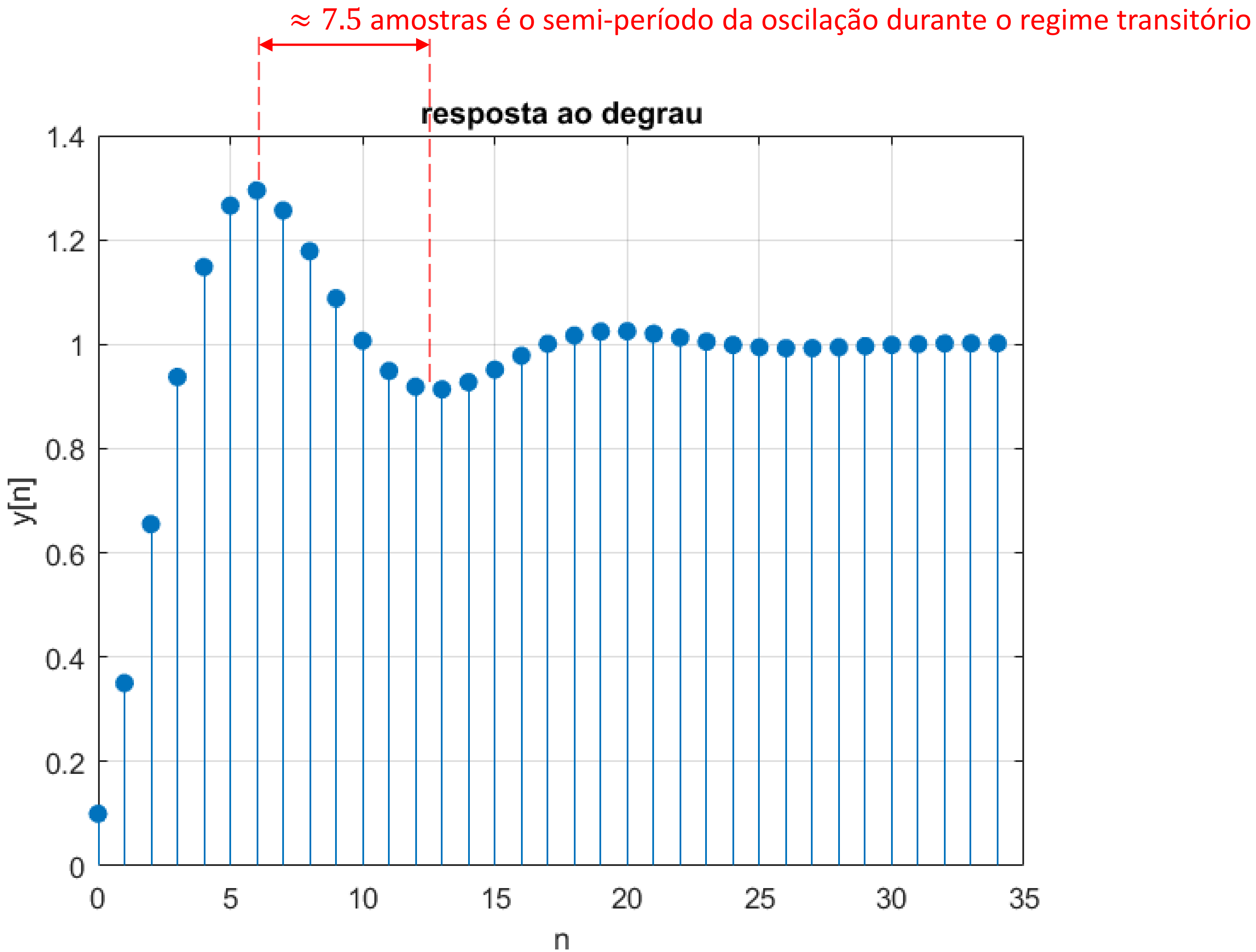
Solução: A função freqz() é usada conforme segue:

```
>> help freqz
 freqz Frequency response of digital filter
    [H,W] = freqz(B,A,N) returns the N-point complex frequency response
    vector H and the N-point frequency vector W in radians/sample of
    the filter:
                jw                -jw                -jmw
         jw  B(e)    b(1) + b(2)e + .... + b(m+1)e
      H(e) = ---- = ------------------------------------
                jw                -jw                -jnw
             A(e)    a(1) + a(2)e + .... + a(n+1)e

given numerator and denominator coefficients in vectors B and A.

    freqz(...) with no output arguments plots the magnitude and
    unwrapped phase of the filter in the current figure window.
```

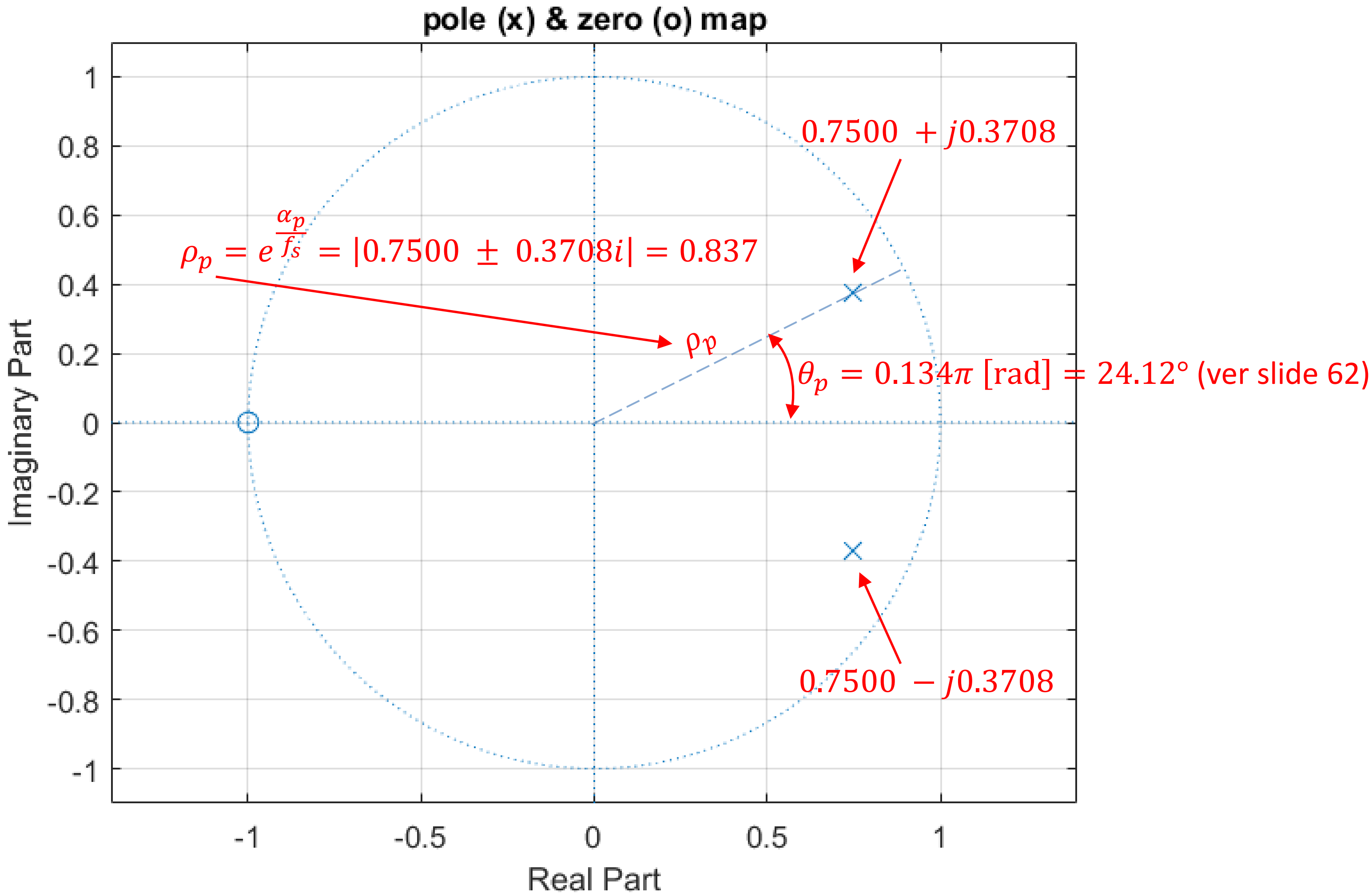
```
num = [0.1 0.1]; % numerador de H(z)
den= [1 -1.5 0.7];  % denominador de H(z)
% resposta ao degrau:
N=35; % numero de amostras
n=0:N-1; % indexador da amostras
x = ones(1,length(n)); % excitação x[n] do sistema é um degrau unitário u[n]
y = filter(num,den,x); % determina y[n], a partir de H(z)
figure(1); % gráfico 1
stem(n,y, 'filled'); % plota y{n] com bolinhas do stem preenchidas
title('resposta ao degrau');
grid on % coloca grade no plot
ylabel('y[n]') % label eixo y
xlabel('n') % label eixo x
% pole-sero map:
H=tf(num,den); % determina H(z) a partir de num e den
poles=pole(H) % determina os polos de H(z)
zeros=zero(H) % determina os zeros de H(z)
figure(2); % gráfico 2
zplane(zeros,poles); % plota os polos e zeros no plano z
title('pole (x) & zero (o) map'); % coloca titulo no grafico
grid on; % coloca grade no gráfico
% resposta em frequencia:
figure(3); % gráfico 3
freqz(num,den); % resposta em frequencia de H(z)=H(exp(j*Theta)) p/ 0<Theta<Pi -> 0<f<fs/2
% notando que o eixo x dos gráficos de magnitude e fase é mostrado com a frequência
% digital Theta normalizada em relacao a Pi de modo que o eixo x varia no intervalo
% 0 < ThetaNormalizado < 1.
ylim([-20,10]); % ajusta os limites do eixo y do gráfico de magnitude H(z)=H(exp(j*Theta))
grid on; % coloca grade no gráfico
```

Resposta em frequência sob regime permanente senoidal

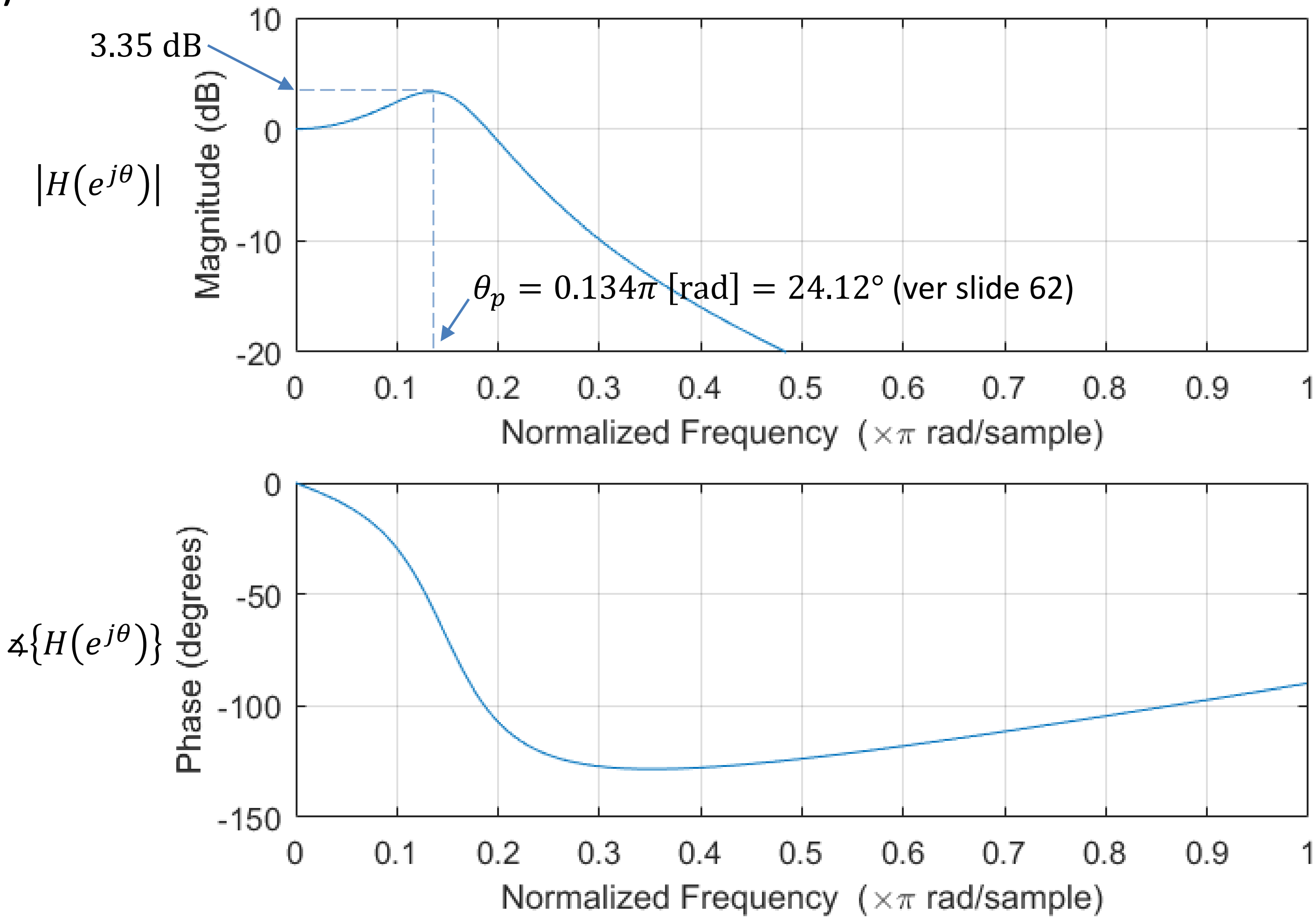
(a)



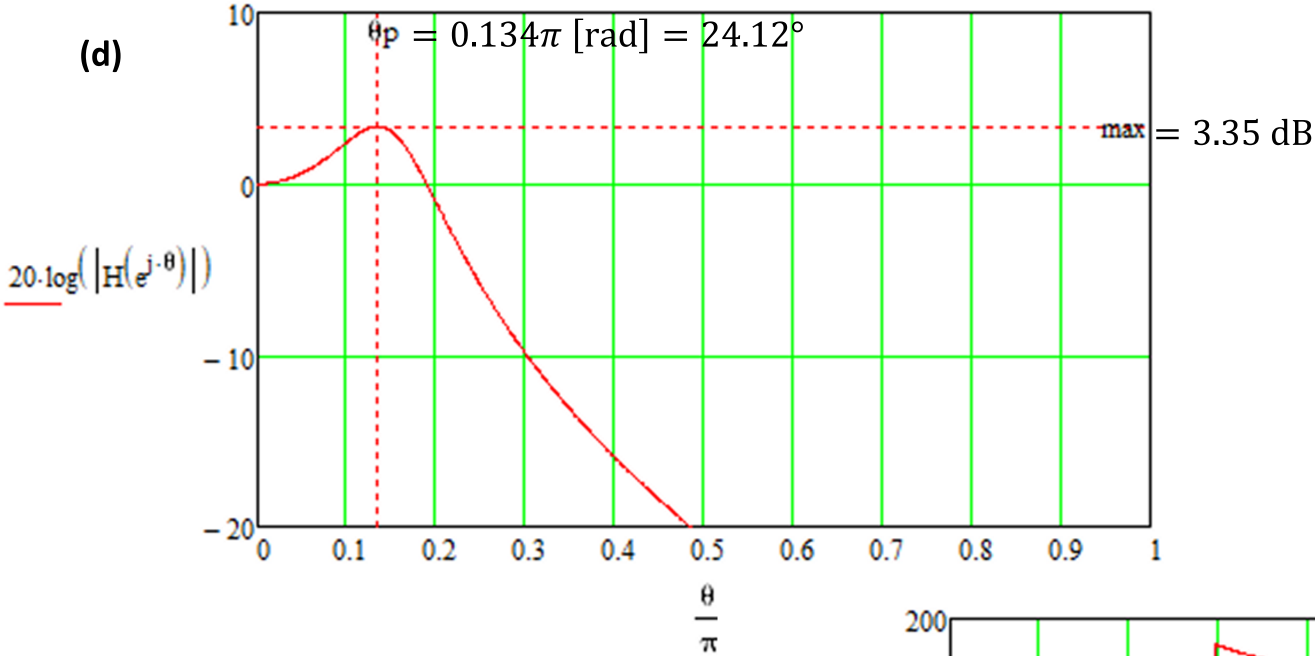
(b)

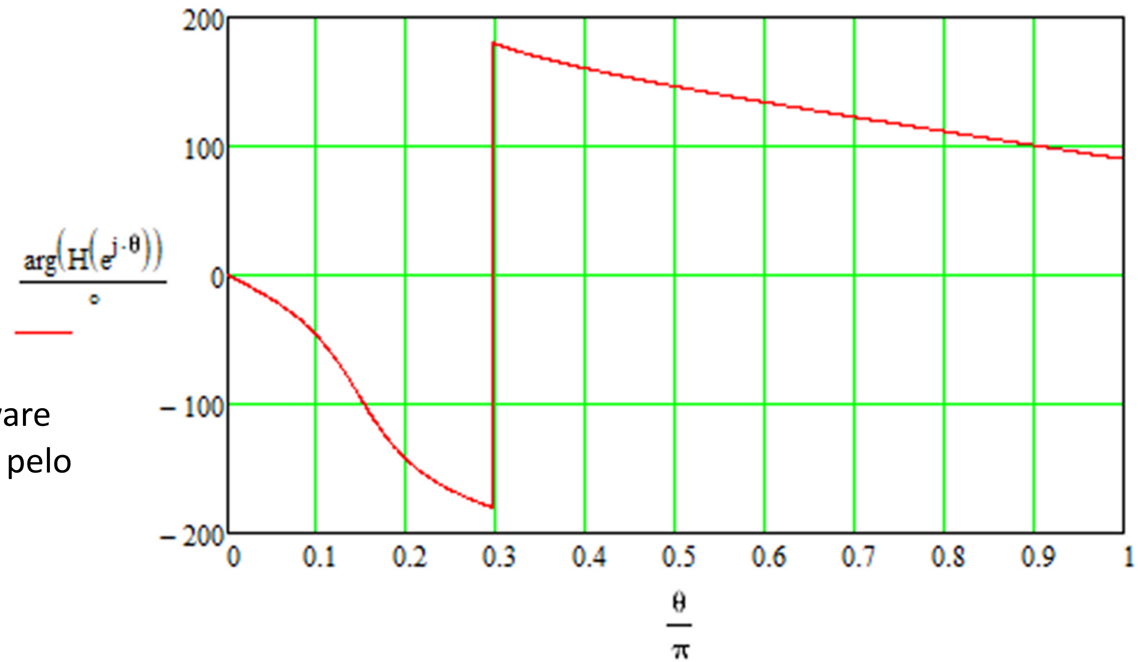

pole (x) & zero (o) map
Imaginary Part
Real Part
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-1
-0.5
0
0.5
1
$0.7500 + j0.3708$
$\rho_p = e^{\frac{\alpha_p}{f_s}} = |0.7500 \pm 0.3708i| = 0.837$
ρ_p
$\theta_p = 0.134\pi$ [rad] $= 24.12°$ (ver slide 62)
$0.7500 - j0.3708$

(c)


3.35 dB
$|H(e^{j\theta})|$
$\theta_p = 0.134\pi$ [rad] $= 24.12°$ (ver slide 62)
10
0
-10
-20
Magnitude (dB)
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
Normalized Frequency ($\times\pi$ rad/sample)
$\measuredangle\{H(e^{j\theta})\}$
0
-50
-100
-150
Phase (degrees)
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
Normalized Frequency ($\times\pi$ rad/sample)

(d)





Note que $\measuredangle\{H(e^{j\theta})\}$ determinado pelo software MathCad (ao lado) é distinto do determinado pelo software Matlab em (c) no slide anterior.

(e) Note em (c) que $\left|H\left(e^{j\theta}\right)\right| = 0$ dB (=ganho unitário) para $\theta = 0$ (frequência zero ou DC). Isto significa que, como o degrau unitário estabiliza no nível DC 1.0, após saltar de 0 para 1 em $n = 0$, o sistema reproduzirá este nível DC sem alteração em sua saída após o regime transitório, conforme é observado em (a) para $n > 30$.

Durante o regime transitório , o sistema responde ao degrau de forma oscilatória com um semi-período da oscilação de aproximadamente $N/2 =$ 7.5 amostras, conforme mostrado em (a). Isto significa que a componente oscilatória na resposta ao degrau é da forma $A\cos(\theta n + \varphi)$, onde $\theta = 2\pi/N = 2\pi/15 =$ 0.42 [rad] é a frequência digital da resposta oscilatória. Importante notar que a frequência digital $\theta = 0.42$ [rad] da resposta oscilatória corresponde à frequência digital dos polos complexos $\theta_p = 0.134\pi =$ 0.42 [rad] , conforme mostrado em (b) e em (c). Isto era esperado, porque qualquer sistema LTI sempre responde na frequência de seus polos, conforme discutimos quando estudamos a Transformada de Laplace. Ainda, neste contexto, a componente que define o decaimento exponencial $(0.837)^n$ da resposta transitória em (a) está associada ao módulo $\rho_p = e^{\frac{\alpha_p}{f_s}} = |0.7500 \pm 0.3708i| = 0.837$ dos polos complexos conjugados. Note que esta componente caracteriza a resposta exponencialmente amortecida de um sistema BIBO-estável.

Note em (c) que o sistema é passa-baixa, porque $\left|H\left(e^{j\theta}\right)\right|$ diminui à medida em que θ aumenta. Isto é consistente com o mapa de polos e zeros mostrado em (b) dado que há um zero sobre o círculo de raio unitário para $\theta = \pi\,[\mathrm{rad}] = 180°$. Se “caminharmos” sobre o círculo de raio unitário partindo de $\theta = 0°$ indo até $\theta = 180°$ (equivalendo a caminhar no eixo $j\omega$ partindo de $\omega = 0$ [rad/s] até $\omega = 2\pi\frac{f_s}{2}$ [rad/s]) , $\left|H\left(e^{j\theta}\right)\right|$ experimentará um aumento nas proximidades de $\theta_p = 0.134\pi\,[\mathrm{rad}] = 24.12°$ devido à vizinhança da “torre” do polo complexo, mas daí em diante $\left|H\left(e^{j\theta}\right)\right|$ sofrerá decréscimo até $\left|H\left(e^{j\theta}\right)\right|$ resultar nulo para $\theta = \pi\,[\mathrm{rad}] = 180°$ em consequência do zero sobre o círculo de raio unitário. Mesma análise é válida para o caso de “caminharmos” sobre o círculo de raio unitário no sentido contrário, partindo de $\theta = 0°$ indo até $\theta = -180°$.

Importante notar que se os polos estivessem sobre o círculo de raio unitário, a magnitude $\left|H\left(e^{j\theta}\right)\right|$ “explodiria” para um valor infinito em $\theta_p = \pm 0.134\pi\,[\mathrm{rad}] = \pm 24.12°$, porque o denominador de $\left|H\left(e^{j\theta}\right)\right|$ seria zero nestas frequências.

Homework 1

Considere o sistema discreto descrito pela função de transferência $H(z) = Z\{y[n]\}/Z\{x[n]\}$ conforme abaixo, sendo $x[n]$ e $y[n]$ os sinais no tempo discreto respectivamente medidos na entrada e na saída do sistema.

$$H(z) = \frac{2z - 1}{z^3 + 0.5z^2 + 0.5z + 0.5}$$

Pede-se: (a) Plote o mapa de polos e zeros deste sistema através da função zplane() do software Matlab, e determine se o sistema é estável. **(b)** Determine e plote a resposta ao impulso $h[n] = Z^{-1}\{H(z)\}$ deste sistema para p/ $n = 0,1,\cdots,19$ usando a função filter() do software Matlab.

Homework 2

Considere o sistema discreto descrito pela função de transferência $H(z) = Z\{y[n]\}/Z\{x[n]\}$ conforme abaixo, sendo $x[n]$ e $y[n]$ os sinais no tempo discreto respectivamente medidos na entrada e na saída do sistema.

$$H(z) = \frac{0.2z + 0.2}{z^2 - 1.5z + 0.9}$$

Pede-se: **(a)** Usando a função filter() do software Matlab determine e plote a resposta ao degrau do sistema para $n = 0,1,\cdots,34$. **(b)** Usando a função zplane() do software Matlab plote o mapa de polos e zeros do sistema. **(c)** Plote $\left|H\left(e^{j\theta}\right)\right|$ em [dB] e $\measuredangle\left\{H\left(e^{j\theta}\right)\right\}$ em [°] usando a função freqz() do software Matlab. **(c)** Analise e inter-relacione os resultados obtidos em (a),(b) e (c).

Homework 3

Considere o sistema discreto de 2ª ordem descrito pela equação de diferença abaixo, que relaciona a entrada x do sistema com a saída y. A entrada $x[n]$ do sistema é excitada com um degrau unitário $u[n]$, e as condições iniciais do sistema são nulas.

$$y[n] - 1.5y[n-1] + 0.9y[n-2] = 0.2x[n] - 0.2x[n-1]$$

Pede-se: **(a)** Determine a função de transferência $H(z)$ do sistema **(b)** Determine e plote $y[n]$ p/ $n = 0,1,\cdots,99$ com a função filter() do software Matlab.

Apêndice A:

Name	*Sum*	*Condition*
Finite on $[N_1, N_2]$	$\sum_{n=N_1}^{N_2} a^n = \frac{a^{N_1} - a^{N_2+1}}{1-a}$	none
Finite on $[0, \quad N - 1]$	$\sum_{k=0}^{N} a^k = \frac{1 - a^{N+1}}{1-a}$	none
Infinite	$\sum_{n=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}$	$\|a\| < 1$

Apêndice B:

Operation	***Formula***
Rectangular to Polar Conversion	$z = x + jy = re^{j\theta}$ where $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ and $\theta = \arctan(y/x)$
Polar to Rectangular Conversion	$z = re^{j\theta} = r\,[\cos(\theta) + j\sin(\theta)] = x + jy$ where $r = \cos(\theta)$ and $y = r\sin(\theta)$
Add: $z_3 = z_1 + z_2$	$(x_1 + x_2) + j\,(y_1 + y_2)$
Subtract: $z_3 = z_1 - z_2$	$(x_1 - x_2) + j\,(y_1 - y_2)$
Multiply: $z_3 = z_1 z_2$ (polar form)	$(x_1 x_2 - y_1 y_2) + j\,(x_1 y_2 + y_1 x_2)$ $r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$
Divide: $z_3 = z_1 / z_2$ (polar form)	$\dfrac{(x_1 x_2 - y_1 y_2) - j\,(x_1 y_2 - y_1 x_2)}{x_2^2 + y_2^2}$ $\dfrac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$

Apêndice C:

Relationship	Relationship
$\sin u = \cos(u - \pi/2)$	$\cos u = \sin(u + \pi/2)$
$\cos(-u) = \cos u$	$\sin(-u) = -\sin(u)$
$\sin^2 u + \cos^2 u = 1$	$\cos^2 u = \frac{1}{2}(1 + \cos 2u)$
$\sin^2 u = \frac{1}{2}(1 - \cos 2u)$	$\cos(u \pm v) = \cos u \cos v \mp \sin u \sin v$
$\sin(u \pm v) = \sin u \cos v \pm \cos u \sin v$	$\cos u \cos v = \frac{1}{2}[\cos(u - v) + \cos(u + v)]$
$\sin u \sin v = \frac{1}{2}[\cos(u - v) + \cos(u + v)]$	$\sin u \cos v = \frac{1}{2}[\sin(u - v) + \sin(u + v)]$
$\cos u = \frac{1}{2}\left[e^{ju} + e^{-ju}\right]$	$\sin u = \frac{1}{2j}\left[e^{ju} - e^{-ju}\right]$
$e^{ju} = \cos u + j \sin u$	

Apêndice D:

Property	*Continuous*	*Discrete*
Energy	$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} \lvert x(t)\rvert^2 dt < \infty$	$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert x[n]\rvert^2$
Power	$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \lvert x(t)\rvert^2 dt < \infty$	$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert x[n]\rvert^2 < \infty$
Periodic	$x(t-T_0) = x(t),\ T_0 = \text{period}$	$x[n-N_0] = x[n],\ N_0 = \text{period}$
Even	$x(-t) = x(t)$	$x[-n] = x[n]$
Odd	$x(-t) = -x(t)$	$x[-n] = -x[n]$

Name	*Continuous*	*Discrete*
Impulse	$\delta(t) = 0,\ t \neq 0$ $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$	$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$
Step	$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$	$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$
Rectangle Pulse	$\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 1, & t \leq \lvert\tau/2\rvert \\ 0, & t > \lvert\tau\rvert \end{cases}$	$u[n] - u[n-M]$
Triangle Puls e	$\Lambda\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 1-\lvert t/\tau\rvert, & t \leq \lvert\tau\rvert \\ 0, & t > \lvert\tau\rvert \end{cases}$	$\begin{cases} n+1, & 0 \leq n \leq M-1 \\ 2M-1-n, & M-1 < n \leq 2\ M-2 \end{cases}$
sinc( ) and aliased sinc( )	$\text{sinc}(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$	$\frac{\sin(N\pi x)}{\sin(\pi x)}$, aliased sinc()
Sinusoid	$A\cos(2\pi f_0 t + \phi)$	$A\cos(\hat{\omega}_0 n + \phi),\hat{\omega}$ is mod2π