



Transformada Discreta de Fourier. Análise espectral no domínio frequência angular discreto de sinais não-periódicos no domínio tempo discreto.



Departamento de Eletrônica e Computação

Centro de Tecnologia

ELC1115 – Sinais e Sistemas

Prof. Fernando DeCastro

Transformada Discreta de Fourier - DFT

A DFT (*Discrete Fourier Transform*) é definida a partir da Transformada de Fourier no Tempo Discreto – DTFT (*Discrete Time Fourier Transform*), que estudamos no Cap III.4. Quando estudamos a DTFT vimos que:

$$X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \quad (1A)$$

$$x[n] = \mathcal{F}^{-1}\{X(e^{j\omega})\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (1B)$$

A equação (1A) é a DTFT (*Discrete Time Fourier Transform*) da sequência $x[n]$, expressão que computa o espectro $X(e^{j\omega})$ da sequência $x[n]$ no tempo discreto. $X(e^{j\omega})$ expressa a magnitude e a fase de cada componente espectral no domínio frequência ω requerida para sintetizar $x[n]$ no domínio tempo discreto por meio de (1B), que é a DTFT inversa de $X(e^{j\omega})$.

Lembre que na representação da DTFT o domínio tempo n é discreto e que a soma sobre n em (1A) contempla um número infinito de amostras, explicitando que a DTFT deve ser adotada quando a sequência $x[n]$ é definida para todo n . Se o sinal $x[n]$ não for definido para $n < 0$, a DTFT assume que $x[n] = 0$ p/ $n < 0$ em (1A). Em consequência o domínio frequência ω é contínuo na DTFT porque, se o sinal $x[n]$ existe em todo o tempo discreto n , a separação entre as componentes espectrais no domínio frequência ω é infinitesimal e, portanto, o espectro $X(e^{j\omega})$ resultante da DTFT é contínuo.

Dado que a soma sobre n em (1A) contempla um número infinito de amostras, não é adequado usar a DTFT para determinação do espectro de sequências $x[n]$ com um número finito de amostras, como as que ocorrem em sistemas de tempo real. Outra situação prática em que a DTFT é inadequada ocorre quando não conhecermos o número de amostras do sinal $x[n]$, mas estamos interessados em determinar o espectro de um segmento de $x[n]$ com um número finito de amostras, como ocorre no sinal de áudio digitalizado da conversa entre dois interlocutores e estamos interessados em determinar o espectro da voz de apenas um deles.

Quando a sequência $x[n]$ não é definida para todo n mas apenas para um número limitado de amostras n , a representação de Fourier adequada é a [Transformada Discreta de Fourier – DFT \(*Discrete Fourier Transform*\)](#).

Transformada Discreta de Fourier - DFT

A DFT é versátil porque é computável em tempo real através da FFT (*Fast Fourier Transform* - ver https://en.wikipedia.org/wiki/Fast_Fourier_transform). A DFT é um bloco funcional de importância crucial em sistemas de comunicação OFDM (ver <https://pt.wikipedia.org/wiki/OFDM>) e em qualquer sistema implementado com técnicas de DSP que utilize análise espectral em algum de seus blocos funcionais.

Esta versatilidade da DFT resulta de

- O número de amostras no tempo discreto necessário para a determinação do espectro ser finito (diferente da DTFT em que o número de amostras é infinito).
- O espectro resultante no domínio frequência ser discreto (diferente da DTFT em que o espectro é contínuo).
- A significativa redução da complexidade computacional quando a DFT é implementada através da otimização algorítmica efetuada pela FFT, em que o somatório em (1A) é re-organizado em uma árvore binária reduzindo a complexidade de $O\{N^2\}$ para $O\{N\log N\}$, onde N é o número de amostras no tempo discreto (e que deve ser uma potência inteira de 2 em função da árvore binária implementada na otimização feita pela FFT).

Nota: A notação $O\{\cdot\}$, denominada “Big O”, é usada em DSP para descrever a complexidade de um algoritmo. “Big O” descreve especificamente o pior cenário possível em termos das operações envolvidas no processamento e é usado basicamente para descrever o tempo de execução normalizado de um algoritmo – ver https://en.wikipedia.org/wiki/Big_O_notation.

Independente de a DFT ser implementada através da otimização da FFT ou não, a ideia básica na implementação da DFT (e da FFT) é amostrar em pontos uniformemente e igualmente espaçados o domínio frequência ω do espectro $X(e^{j\omega})$, espectro que resulta da DTFT dada pela equação (1A), abaixo reproduzida.

$$X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \quad (1A)$$

Sob esta interpretação, a DFT nada mais é do que a DTFT uniformemente amostrada no domínio frequência ω .

Transformada Discreta de Fourier - DFT

$$X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \quad (1A)$$

Para amostrar (1A) em pontos uniformemente e igualmente espaçados no domínio frequência ω vamos usar o fato de que, conforme vimos no Cap III.4, $X(e^{j\omega})$ é uma função periódica em ω , com um período de 2π . Se tomarmos N amostras em cada período de $X(e^{j\omega})$ no eixo ω , o espaçamento entre as amostras no domínio frequência ω será de $\frac{2\pi}{N}$.

A equação (1A) determina o espectro de $x[n]$. Especificamente, para cada frequência ω a equação (1A) estabelece a correlação da sequência $x[n]$ com uma exponencial complexa $e^{-j\omega n} = \cos \omega n - j \sin \omega n$, determinando assim o quanto $x[n]$ é “construído” pela frequência ω . Ao variar a frequência ω estabelecemos um conjunto de exponenciais complexas superpostas no domínio tempo discreto n , cada uma delas com uma frequência ω , que é o domínio frequência contínuo e periódico de período 2π da DTFT. Se discretizarmos o domínio contínuo ω amostrando o eixo ω com N amostras em cada período 2π , a frequência ω_k da k -ésima senoide (ou cossenoide) do referido conjunto passa a ser dada por $\omega_k = \frac{2\pi}{N}k$, sendo $k = 0, 1, \dots, N-1$. Portanto, dada uma sequência $x[n]$ de N amostras definida no intervalo $0 \leq n \leq N-1$, em que nada se sabe ou não há interesse saber os valores de $x[n]$ fora deste intervalo, $x[n]$ tem a sua DFT determinada a partir de (1A), sujeita à condição de que o domínio ω contínuo é discretizado com as amostras ocorrendo em $\omega = \frac{2\pi}{N}k$:

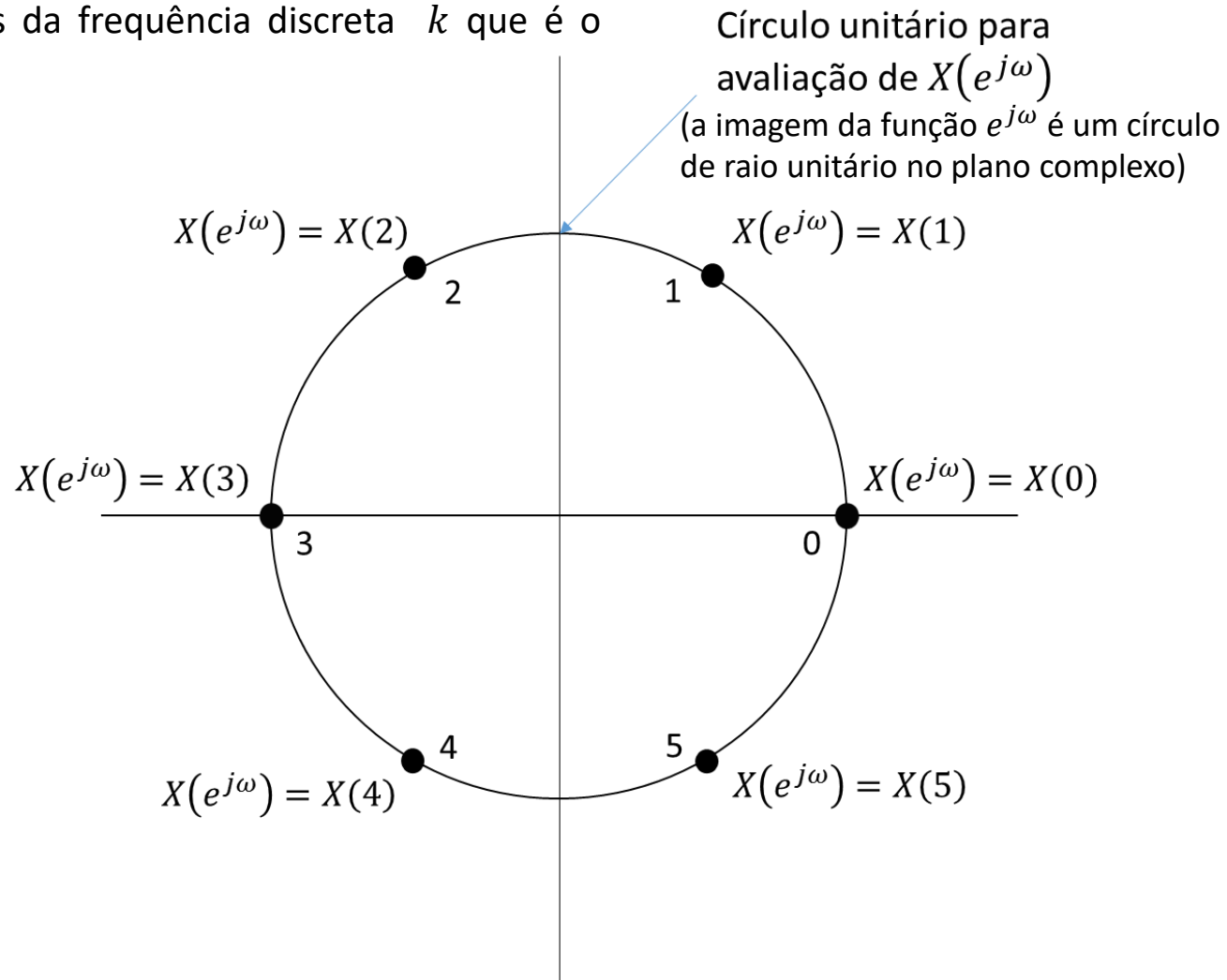
$$X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=(2\pi/N)k} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j(2\pi k/N)n} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j(2\pi/N)nk} = X[k]$$

ou

$$X[k] = \text{DFT}\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j(2\pi/N)nk} \quad (2)$$

Transformada Discreta de Fourier - DFT

Por exemplo, a figura mostra $N = 6$ amostras igualmente espaçadas no domínio frequência discreto originado da amostragem do domínio contínuo ω de $X(e^{j\omega})$. As amostras de ω são obtidas dos valores resultantes de $2\pi k/N$, com k iniciando em $k = 0$ ($\omega = 0$), determinando assim os valores da frequência discreta k que é o domínio de $X[k] = \text{DFT}\{x[n]\}$.

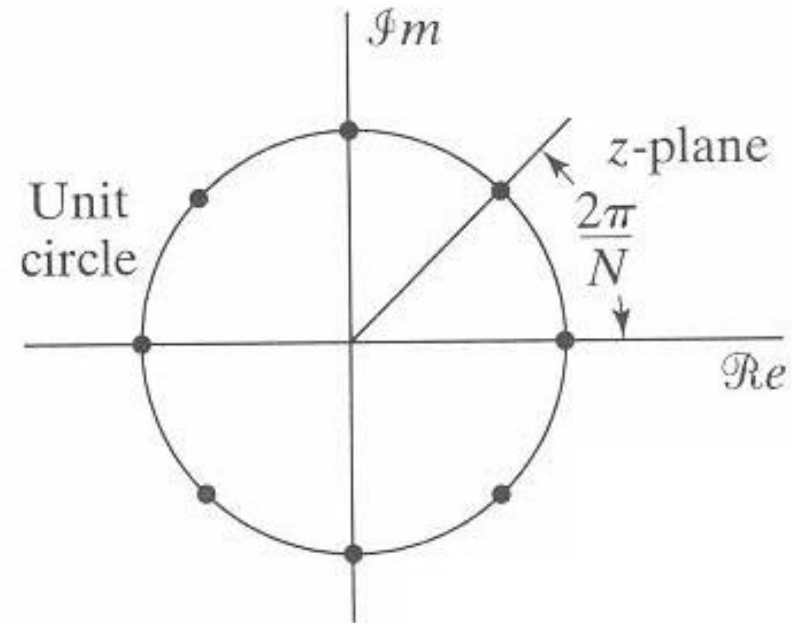


Transformada Discreta de Fourier - DFT

Quando estudamos a Transformada Z no Cap VI das notas de aula vimos que o eixo $j\omega$ do plano $s = \alpha + j\omega$ mapeia no círculo de raio unitário no plano z . Lembre que $z = e^{\frac{\alpha+j\omega}{f_s}} = \rho e^{j\theta}$, sendo $\rho = e^{\frac{\alpha}{f_s}}$ e $\theta = \frac{\omega}{f_s} = 2\pi \frac{f}{f_s}$. Especificamente, se $\alpha = 0 \rightarrow \rho = 1$, definindo assim o círculo de raio unitário $z = 1e^{j\theta}$.

Neste contexto, é importante notar que os valores da sequência de amostras discretas $X[k] = \text{DFT}\{x[n]\}$ resultantes da DFT de $x[n]$ equivalem aos valores da Transformada Z de $x[n]$ (i.e., $X(z) = Z\{x[n]\}$), com valores de $X(z)$ determinados sobre o círculo de raio unitário $1e^{j\theta}$ no plano z em pontos de amostragem de θ que são separados por um intervalo de $2\pi/N$ conforme mostra a figura.

Portanto, $X[k] = \text{DFT}\{x[n]\}$ equivale à Transformada Z $X(z) = Z\{x[n]\}$ calculada para $z = 1e^{j\theta}$ sobre o círculo de raio unitário em pontos de amostragem que são separados por um intervalo de $2\pi/N$.



Points on the unit circle at which $X(z)$ is sampled to obtain the periodic sequence $X[k]$ ($N = 8$).

Transformada Discreta de Fourier - DFT

Alternativamente, podemos considerar a DFT como uma extensão da Série de Fourier de sinais no tempo discreto, já estudada no Cap III.2 das notas de aula, e que passamos a revisitar nos próximos slides no âmbito do estudo da DFT. Conforme vimos no Cap III.2 das notas de aula, qualquer sinal periódico discreto no tempo com período N pode ser expresso como uma combinação linear de N funções exponenciais complexas, conforme:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi kn/N} \quad (3)$$

onde $j = \sqrt{-1}$ e $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$.

Sendo conhecido o sinal $x[n]$, os coeficientes de Fourier podem ser calculados por

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N} \quad (4)$$

Conforme vimos no Cap III.1 e no Cap III.2 das notas de aula, os coeficientes c_k de valor complexo em (4) determinam o espectro $X[k]$ no domínio discreto de frequências k , espectro que representa as componentes espectrais do sinal periódico discreto no tempo $x[n]$ de período N . O módulo e a fase dos coeficientes c_k representam a magnitude e a fase da componente espectral de $x[n]$ na frequência normalizada $\omega_k = 2\pi k/N$, com ω_k formando o domínio frequência discreto do espectro do sinal $x[n]$ no intervalo de frequências $0 \leq \omega_k \leq 2\pi$. A frequência normalizada ω_k pode ser desnormalizada se conhecermos a frequência de amostragem f_s , ou $\omega_s = 2\pi/T$, onde $T = 1/f_s$ é o intervalo entre duas amostras consecutivas, situação em que a variação da frequência é no intervalo $0 \leq \omega_k \leq \omega_s$. A sequência de coeficientes c_k é periódica com período N , portanto o espectro de frequências $X[k]$ de um sinal $x[n]$ periódico será também periódico com período N .

Transformada Discreta de Fourier - DFT

Por exemplo, consideremos a sequência de período $N = 4$, definida em um período por

$$x(n) = \{0, 1, 1, 0\} \quad n = 0, 1, 2, 3$$

Os coeficientes c_k são determinados a partir da equação (4), conforme

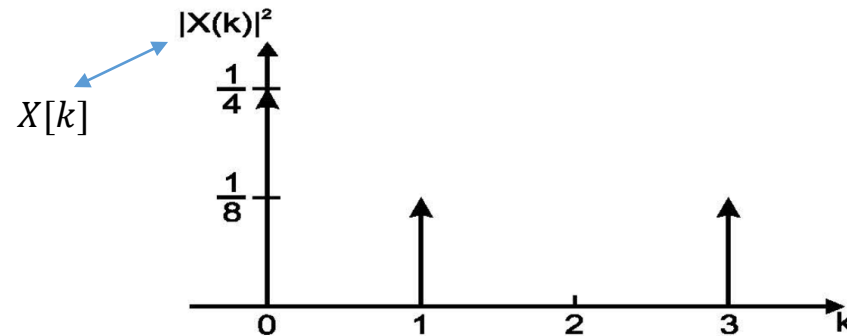
$$c_k = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 x(n) e^{-j2\pi kn/4} \quad k = 0, \dots, 3 \quad , \text{ assim, } c_k = \frac{1}{4} [x(1)e^{-j\pi k/2} + x(2)e^{-j\pi k}]$$

$$c_0 = \frac{1}{4} [1 + 1] = \frac{1}{2}$$

$$c_1 = \frac{1}{4} [e^{-j\pi/2} + e^{-j\pi}] = \frac{1}{4} (-1 - j)$$

$$c_2 = \frac{1}{4} [e^{-j\pi} + e^{-j2\pi}] = 0$$

$$c_3 = \frac{1}{4} [e^{-j3\pi/2} + e^{-j3\pi}] = \frac{1}{4} (-1 + j)$$



A figura apresenta o quadrado da magnitude do espectro discreto $X[k]$ do sinal $x[n]$, representando a potência de cada componente espectral (analisadores de espectro usualmente apresentam as componentes espectrais em dBm, ou seja, potência).

Transformada Discreta de Fourier - DFT

Quando a sequência $x[n]$ de N amostras é não-periódica, não faz sentido usar Séries Discretas de Fourier para determinar seu espectro, no âmbito do rigorismo da definição matemática de Séries de Fourier que assume $x[n]$ ser periódica de período N . Nestes casos, a representação no domínio frequência é adequadamente obtida através da DFT, cujo conjunto de coeficientes $X[k]$ resultante é definido no domínio frequência discreto k , sendo as amostras k e $k + 1$ separadas de um valor constante $2\pi/N$, conforme já discutimos nos slides anteriores. O número de amostras N resultantes para $X[k]$ no domínio frequência discreto é o mesmo número de amostras N presente na sequência temporal $x[n]$.

Neste contexto, partindo da definição dos coeficientes c_k da Série de Fourier para sinais periódicos no tempo discreto dada por (4), elimina-se o fator $1/N$ para caracterizar que a sequência $x[n]$ de N amostras é não-periódica (na realidade, estamos “forçando a barra” ao assumir que $x[n]$ não seja periódica, porque a origem da DFT na Série de Fourier prova o contrário) e reescreve-se (4) como:

$$X[k] = \text{DFT}\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j(2\pi/N)nk}, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (5)$$

A Transformada Discreta de Fourier Inversa (IDFT – *Inverse Discrete Fourier Transform*) converte o espectro discreto $X[k]$ no correspondente sinal $x[n]$ discreto no domínio tempo, e é dada por:

$$x[n] = \text{IDFT}\{X[k]\} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j(2\pi/N)nk}, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (6)$$

$$x[n] = \text{IDFT}\{X[k]\} \quad \longleftrightarrow \quad X[k] = \text{DFT}\{x[n]\} \quad (7)$$

No âmbito da ideia básica na implementação da DFT, assumir que $x[n]$ não seja periódica significa que $x[n] = \text{IDFT}\{X[k]\}$ existe somente para $n = 0, 1, \dots, N - 1$ e que $X[k] = \text{DFT}\{x[n]\}$ existe somente para $k = 0, 1, \dots, N - 1$.

Property	Signal Description	Discrete Fourier Transform
Linearity	$\sum_{m=0}^Q a_m x_m(n)$	$\sum_{m=0}^Q a_m X_m(k)$
Circular shift	$x[(n - m) \bmod N]$	$W_N^{km} X(k)$
Modulation	$W_N^{-qn} x(n)$	$X[(k - q) \bmod N]$
Time reversal	$x^*[-n \bmod N]$	$x^*(k)$
Complex conjugation	$x^*(n)$	$X^*[-k \bmod N]$
Circular convolution	$\sum_{m=0}^{N-1} x(m)y[(n - m) \bmod N]$	$X(k)Y(k)$
Multiplication	$x(n)y(n)$	$\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X(m)Y[(k - m) \bmod N]$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$W_N^{kn} = e^{-j2\pi kn/N}$$

Property	Signal Description	Discrete Fourier Transform
Parseval's theorem	$\sum_{k=0}^{N-1} x(n)y^*(n)$	$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)Y^*(k)$
Real part of signal	$\text{Re}\{x(n)\}$	$\frac{1}{2}\{X(k) + X^*(N-k)\}$
Imaginary part of signal	$j \text{Im}\{x(n)\}$	$\frac{1}{2}\{X(k) - X^*(N-k)\}$
Complex even	$x_{ce}(n) = \frac{1}{2}\{x(n) + x^*(N-n)\}$	$X_R(k)$
Complex odd	$x_{co}(n) = \frac{1}{2}\{x(n) - x^*(N-n)\}$	$jX_I(k)$
Any real signal	$x(n)$	$X(k) = X^*(N-k)$ $X_R(k) = X_R(N-k)$ $X_I(k) = -X_I(N-k)$ $ X(k) = X(N-k) $ $\angle X(k) = -\angle X(N-k)$

DFT - exemplos

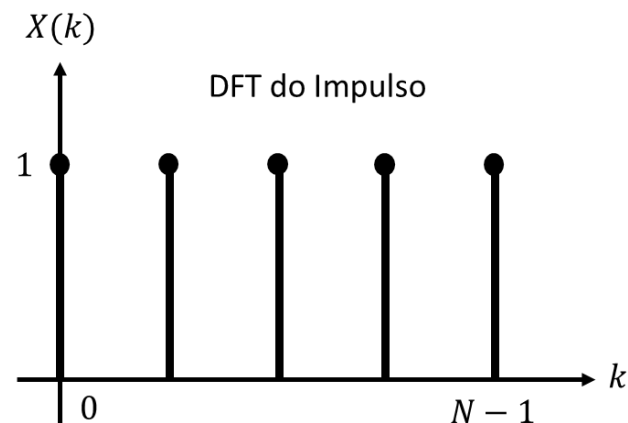
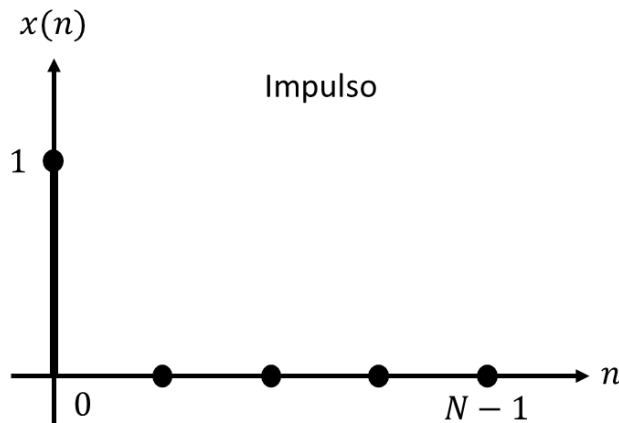
Exemplo 1: Determine a DFT da sequência $x[n]$ de N amostras que representa o impulso unitário $\delta[n]$.

Solução: De (5) temos,

$$X[k] = \text{DFT}\{\delta[n]\} = \sum_{n=0}^{N-1} \delta[n] e^{-j(2\pi/N)nk}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

Dado que $\delta[n] = 1$ para $n = 0$, e zero em todos os outros casos:

$$X[k] = \text{DFT}\{\delta[n]\} = \sum_{n=0}^{N-1} \delta[n] e^{-j(2\pi/N)nk} = 1 e^{-j(2\pi/N)0k} = 1, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$



Note que este resultado não depende de N .

DFT - exemplos

Exemplo 2: Determine a DFT da sequência $x[n]$ de N amostras que representa um valor constante A .

Solução: De (5) temos,

$$X[k] = \text{DFT}\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j(2\pi/N)nk} = \sum_{n=0}^{N-1} A e^{-j(2\pi/N)nk}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

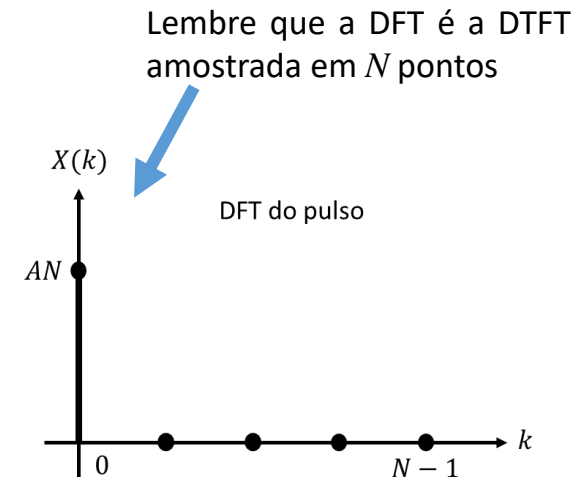
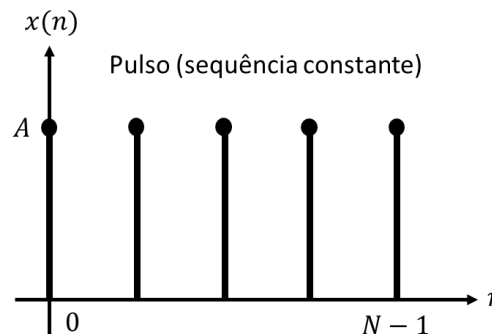
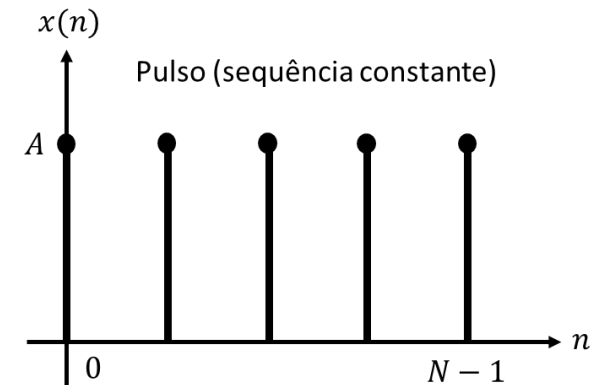
$$X[k = 0] = \sum_{n=0}^{N-1} A e^{-j(2\pi/N)n(0)} = AN$$

$$X[k \neq 0] = \sum_{n=0}^{N-1} A e^{-j(2\pi/N)nk} = A \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j(2\pi/N)nk}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

Do Apêndice A temos que $\sum_{n=N_1}^{N_2} a^n = \frac{a^{N_1} - a^{N_2+1}}{1-a}$. Daí podemos escrever:

$$X[k] = A \frac{1 - e^{-j(\frac{2\pi k}{N})N}}{1 - e^{-j(\frac{2\pi k}{N})k}} = A \frac{1 - e^{-j2\pi k}}{1 - e^{-j(\frac{2\pi}{N})k}} = 0$$

Portanto, $X[k] = AN\delta[k]$.



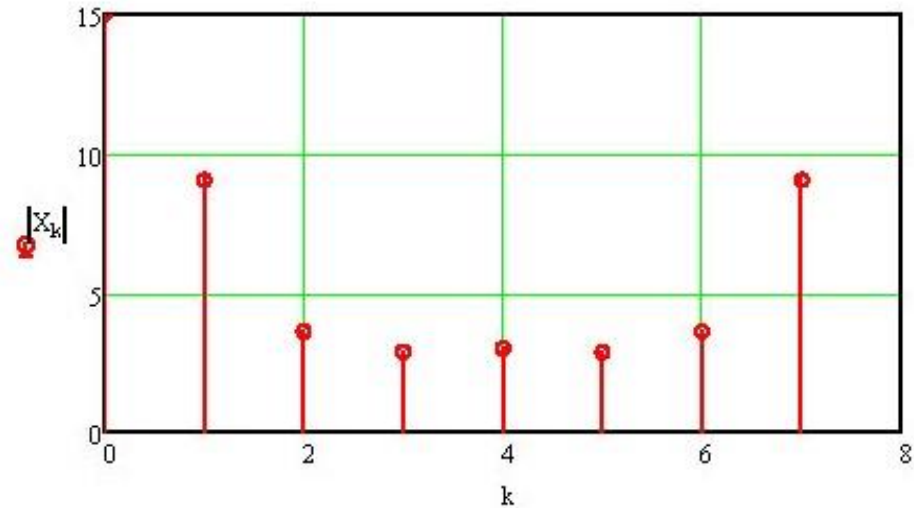
DFT - exemplos

Exemplo 3: Mediu-se a tensão $x(t)$ em um ponto de um circuito, utilizando-se para tanto um osciloscópio de armazenamento digital (*Digital Storage Oscilloscope - DSO*).

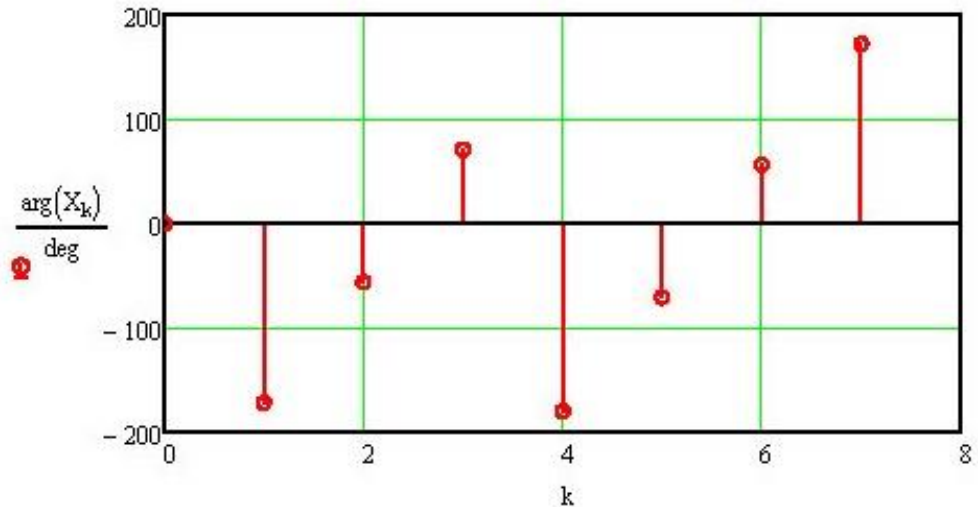
O osciloscópio digitalizou o sinal $x(t)$ e armazenou a sequência $x[n]$ resultante.

A seguir, utilizou-se a função DFT do osciloscópio, de modo a determinar o espectro $X[k]$ da sequência $x[n]$ através de $X[k] = \text{DFT}\{x[n]\}$.

Os gráficos mostrados na tela do osciloscópio para o módulo e a fase do espectro, bem como seus valores numéricos são mostrados nas figuras ao lado.



$ X_k =$
15
9.043
3.606
2.869
3
2.869
3.606
9.043



$\arg(X_k) =$
0
-171.78
-56.31
70.667
-180
-70.667
56.31
171.78

Pede-se:

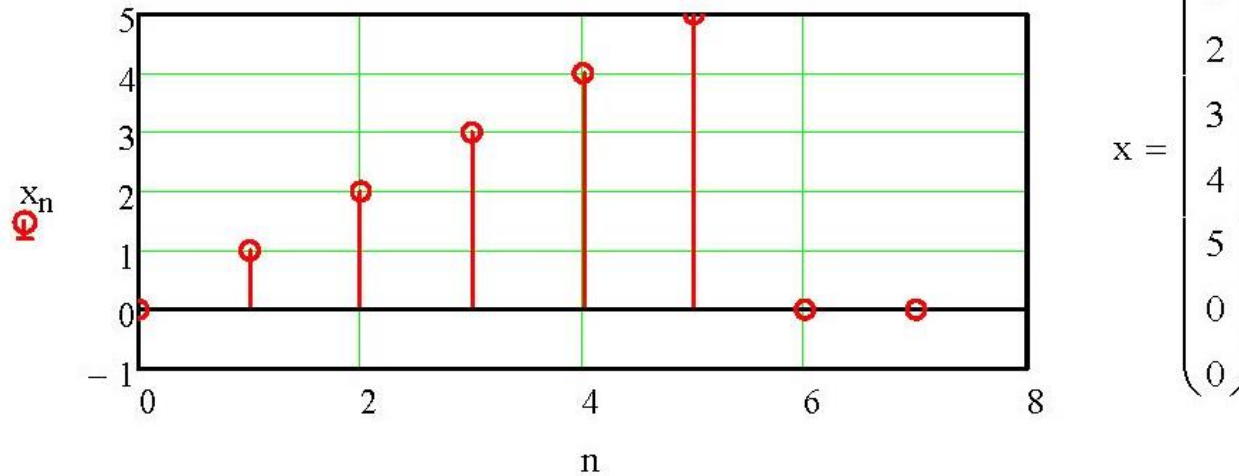
- a)** Determine e plote a sequência $x[n]$ armazenada na memória do osciloscópio.
- b)** Sabendo que a frequência de amostragem utilizada na digitalização de $x(t)$ é $f_s = 256$ kHz, determine as frequências analógicas f no intervalo de Nyquist $-\frac{f_s}{2} \leq f \leq \frac{f_s}{2}$, que correspondem ao índice k das componentes espectrais discretas do espectro $X[k]$.
- c)** Sabendo que a DFT é a DTFT sub-amostrada em N pontos no intervalo $-\pi \leq \theta \leq \pi$, correspondendo a $-\frac{f_s}{2} \leq f \leq \frac{f_s}{2}$, sendo θ a frequência digital sobre o círculo de raio unitário $z = 1e^{j\theta}$ no plano z , plote novamente $X[k]$ identificando as frequências analógicas no eixo horizontal do gráfico de módulo e fase de $X[k]$.

Solução:

a) Sequência $x[n]$ armazenada na memória do osciloscópio:

$$N = 8 \quad n := 0..N - 1$$

$$x_n := \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \left(X_k \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot n \cdot \frac{k}{N}} \right)$$



DFT - exemplos

b) Dada a frequência de amostragem $f_s = 256$ kHz, determinar as frequências analógicas f_a no intervalo de Nyquist $-\frac{f_s}{2} \leq f \leq \frac{f_s}{2}$, que correspondem ao índice k das componentes espectrais discretas do espectro $X(k)$:

Dado que a DFT é a DTFT subamostrada em N pontos no intervalo $-\pi \leq \theta \leq \pi$, correspondendo a $-\frac{f_s}{2} \leq f_a \leq \frac{f_s}{2}$

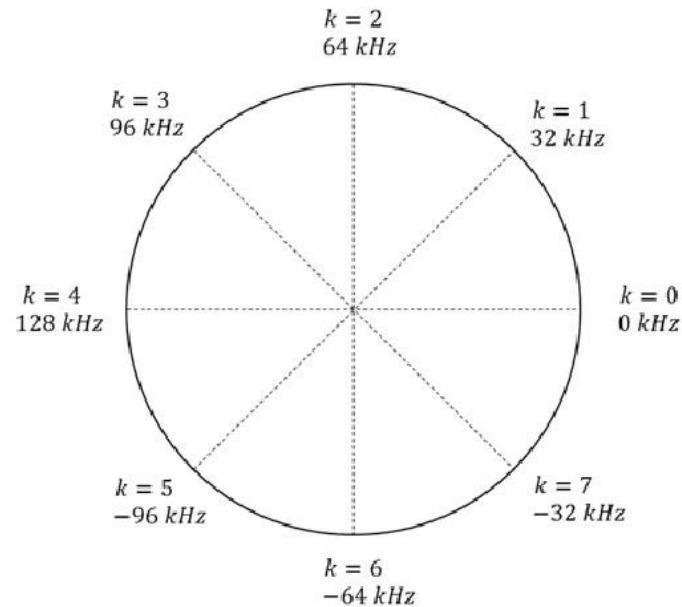
no mundo analógico, sendo θ a frequência digital sobre o círculo de raio unitário $z = 1e^{j\theta}$ no plano Z , temos:

$$\theta = \pi \rightarrow f_a := \frac{f_s}{2} \quad f_a = 128 \cdot \text{KHz} \rightarrow k := \frac{N}{2} \quad k = 4$$

A correspondência acima entre θ , f_a e k na frequência $f_a = \frac{f_s}{2}$ pode ser generalizada para :

$$f_a(k) := \text{if} \left[\left(k \leq \frac{N}{2} \right), k \cdot \frac{f_s}{N}, (k - N) \cdot \frac{f_s}{N} \right]$$

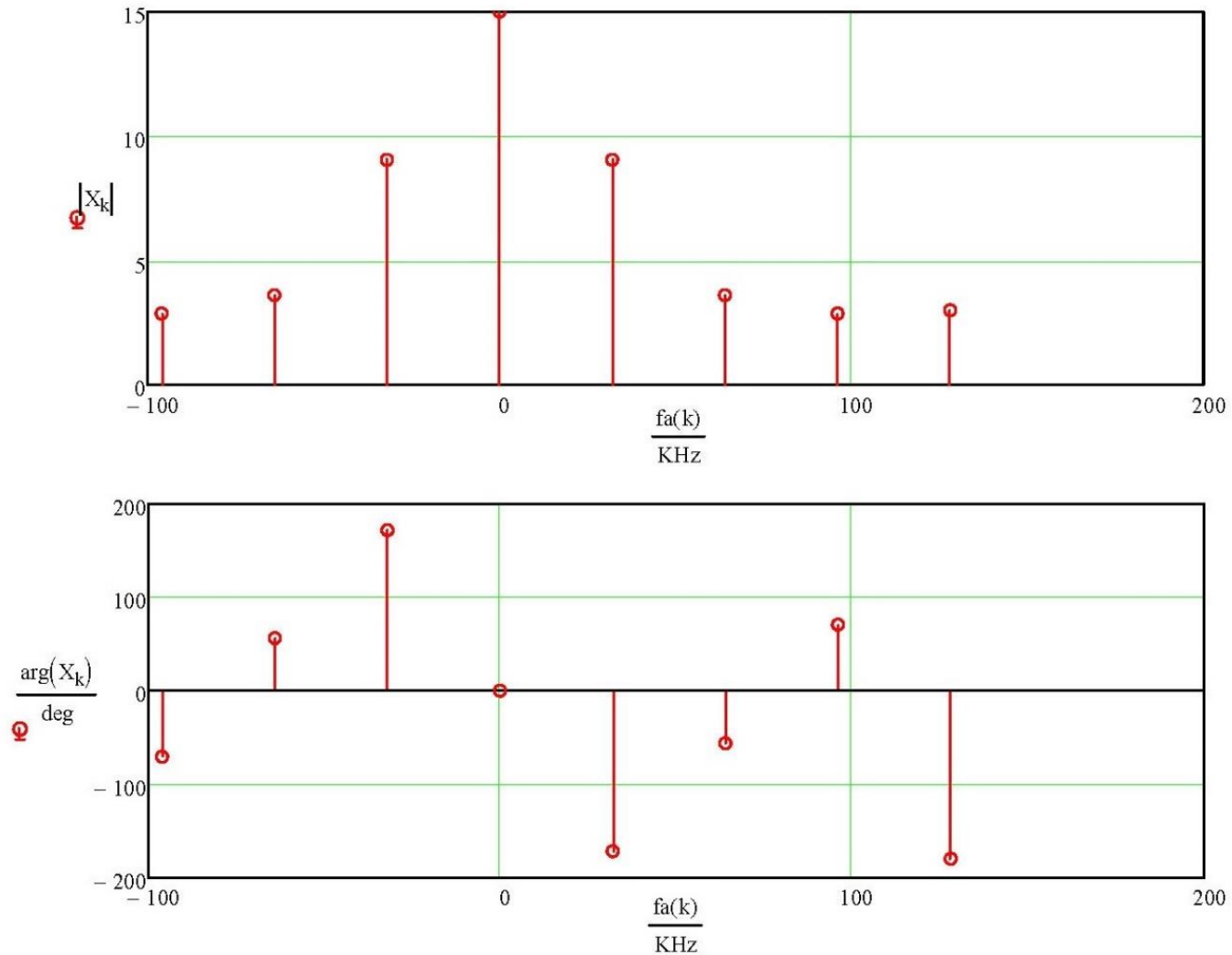
k =	f _a (k) =	· KHz
0	0	
1	32	
2	64	
3	96	
4	128	
5	-96	
6	-64	
7	-32	



DFT - exemplos

c) Plotar novamente $X[k]$ identificando as frequências analógicas no eixo horizontal do gráfico de módulo e fase, sabendo que a DFT é a DTFT sub-amostrada em N pontos no intervalo $-\pi \leq \theta \leq \pi$, correspondendo a $-\frac{f_s}{2} \leq f \leq \frac{f_s}{2}$, sendo θ a frequência digital sobre o círculo de raio unitário $z = 1e^{j\theta}$ no plano z :

Com base nos resultados de b), temos:



Exemplo 4: O diagrama de blocos apresentado na Figura 1 mostra a etapa de modulação de um sistema de comunicação digital OFDM (*Orthogonal Frequency Division Multiplexing*) utilizando modulação digital 16-QAM (*Quadrature Amplitude Modulation*). A técnica OFDM é utilizada em inúmeros sistemas de comunicações atuais, tais como WiFi 802.11n, 802.11ac, telefonia 4G-LTE, 5G, etc.

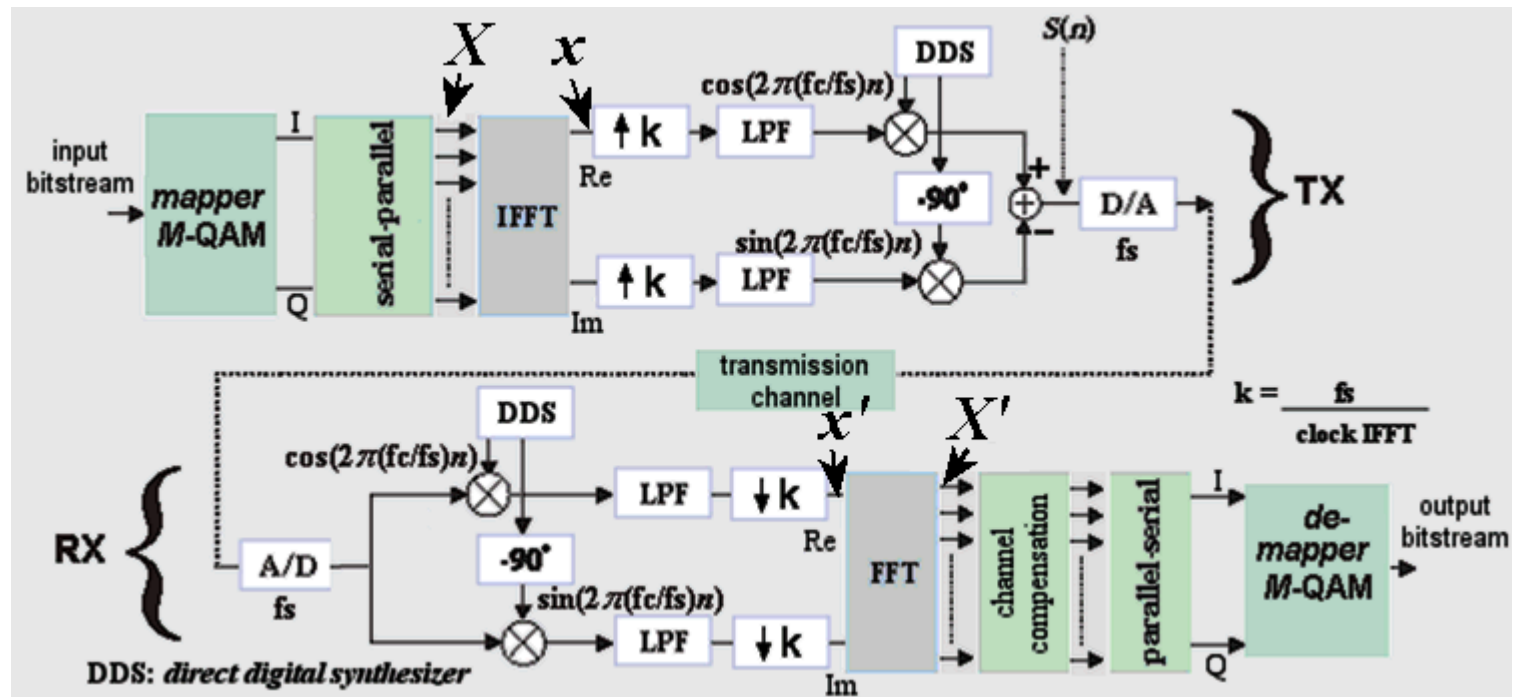


Figura 1: Etapa de modulação de um sistema de comunicação digital OFDM 16-QAM. A entrada da IDFT são os valores $X = I + jQ$ obtidos do mapeamento direto (ver Figura 2 no próximo slide) realizado no *mapper* do TX a partir da sequência binária de entrada. Da mesma forma, a saída do *de-mapper* do RX, é a sequência binária obtida do mapeamento inverso (ver Figura 2) realizado pelo *de-mapper* do RX a partir dos valores $X' = I' + jQ'$ resultantes na saída da DFT do RX. Caso não haja degradação de sinal no canal de transmissão, forçosamente $X' = X$.

DFT - exemplos

A Figura 2 mostra como cada 4 bits na sequência de entrada (*input bitstream*) do transmissor (TX) na Figura 1 são convertidos pelo mapeamento efetuado pelo *mapper* M-QAM, $M = 16$, em um número complexo $I + jQ$ na saída do *mapper*. A sequência de números complexos na saída do *mapper* é denominada sequência de símbolos da modulação digital (no caso, 16-QAM).

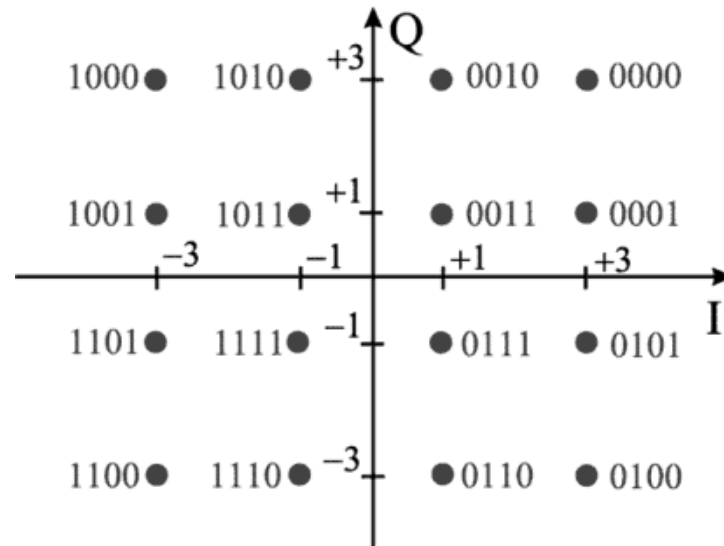


Figura 2: Mapeamentos direto e inverso realizados, respectivamente, pelo *mapper* 16-QAM no TX e pelo *de-mapper* 16-QAM no RX. Cada palavra binária de 4 bits é mapeada em um símbolo complexo $I + jQ$ no *mapper*, e vice-versa no *de-mapper*.

Nesta sequência de símbolos na saída do *mapper* cada símbolo tem módulo e fase de acordo com a respectiva palavra binária na entrada do *mapper* (conforme mapeamento mostrado na Figura 2), e a sequência de símbolos é então armazenada no *buffer* de entrada X da IFFT que implementa uma IDFT de $N = 8$ pontos. Na saída da IDFT, o *buffer* x armazena o resultado da operação $x = \text{IDFT}\{X\}$.

A sequência na saída x da IDFT de $N = 8$ pontos é, então, super-amostrada em k amostras, filtrada por um filtro passa-baixa digital (LPF) e, através do teorema da modulação, tem o seu espectro deslocado para a frequência central f_c do canal de transmissão (frequência regulamentada pelo órgão regulador - ANATEL, FCC, etc ...).

O sinal é, então, convertido de digital para analógico (D/A) para que possa ser enviado através do canal de transmissão (fibra ótica, cabo coaxial, espaço de propagação entre antenas TX e RX, etc.)

Do outro lado do canal de transmissão está o receptor OFDM (RX), o qual implementa as operações duais e inversas às operações realizadas no transmissor, de modo que, se o sinal não for degradado no canal de transmissão (ruído, interferência, ecos, etc.), a sequência armazenada no *buffer* de entrada x' da FFT (que implementa uma DFT de $N = 8$ pontos) será a réplica da sequência armazenada do *buffer* da saída x da IDFT no TX.

O *buffer* X' de saída da DFT no RX, armazenará o resultado da operação $X' = \text{DFT}\{x'\}$. Os símbolos $I' + jQ'$ armazenados na saída X' da DFT são, então, filtrados para efeito de eliminação dos ecos (no bloco *channel compensation*) e enviados ao *de-mapper*, que converte a sequência de símbolos $I' + jQ'$ na sequência de bits (*output bitstream* na Figura 1), obedecendo o mapeamento de 4 em 4 bits mostrado na Figura 2. Se o sinal não tiver sido degradado no canal de transmissão, a sequência *output bitstream* no RX será idêntica à sequência *input bitstream* no TX.

DFT - exemplos

Novamente, note que o bloco IDFT (IFFT) no TX executa a operação $x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{\frac{j2\pi kn}{N}}$ com

$n = 0, 1, \dots, N - 1$, onde X pode assumir qualquer um dos valores $I + jQ$ do mapeamento realizado pelo *mapper*, de acordo com a palavra binária de 4 bits a ser transmitida.

O bloco DFT (FFT) no RX executa a operação inversa da executada no TX, i.e., $X'(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x'(n) e^{\frac{-j2\pi kn}{N}}$

com $k = 0, 1, \dots, N - 1$ e, se não ocorrer qualquer degradação de sinal no bloco *transmission channel*, a DFT recupera em X' os valores $I + jQ$ originalmente transmitidos em X .

Pede-se:

a) Sabendo que o sistema utiliza uma IDFT de $N = 8$ pontos (N define o número de portadoras do sistema OFDM) e que, em um determinado instante, o *buffer* de entrada da IDFT do TX armazena os valores dados pelo vetor $\underline{X} = [X_1 \ X_2 \ X_3 \ X_4 \ X_5 \ X_6 \ X_7 \ X_8]^T$, resultantes do *input bitstream* $B = \{0111110111100001001011111110010\}$, determine os valores resultantes no *buffer* de saída da IDFT dado pelo vetor $\underline{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7 \ x_8]^T$.

b) A partir do resultado obtido em (a), verifique (numericamente) se o bloco DFT no RX recupera em X' os valores $I + jQ$ originalmente transmitidos em X . Assuma que não ocorre ruído, interferência ou eco no canal de transmissão.

DFT - exemplos

Solução: a)

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 - i \\ -3 - i \\ -1 - 3i \\ 3 + i \\ 1 + 3i \\ -1 - i \\ -1 - i \\ 1 + 3i \end{pmatrix}$$

→ Símbolos $X = I + jQ$ armazenados no *buffer* de entrada da IFFT (no TX da Figura 1), símbolos que são gerados no *mapper* pelo *input bitstream* dado no enunciado.

$$N := \text{length}(\mathbf{X}) \quad N = 8 \quad \rightarrow \text{Número de portadoras}$$

A operação de IFFT no TX é:

$$n := 0..N - 1$$

$$x_n := \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \left(X_k \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot n \cdot \frac{k}{N}} \right)$$



Resultando na seguinte seqüência de números complexos na saída da IFFT no TX:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.073 - 0.323i \\ 1.25 - 0.25i \\ 0.28 - 0.677i \\ -0.5i \\ 0.427 - 0.677i \\ -0.25 + 1.75i \\ -0.78 - 0.323i \end{pmatrix}$$

b)

A operação de FFT no RX é:

xlinha := x → Não há ruído nem multipercurso no canal

k := 0 .. N - 1

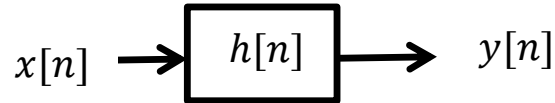
$$X_{\text{linha}}_k := \left[\sum_{n=0}^{N-1} \left(x_{\text{linha}}_n \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot \frac{n}{N}} \right) \right]$$

$$X_{\text{linha}} = \begin{pmatrix} 1 - i \\ -3 - i \\ -1 - 3i \\ 3 + i \\ 1 + 3i \\ -1 - i \\ -1 - i \\ 1 + 3i \end{pmatrix}$$

$$\text{mean}(X - X_{\text{linha}}) = 0$$

~0 → OK! Símbolos IQ recuperados corretamente na FFT do RX.

Exemplo 5: Considere o sistema LTI mostrado na figura, cuja resposta ao impulso é dada por $h[n] = \left(\frac{j}{2}\right)^n u[n]$, onde $j = \sqrt{-1}$, e cuja entrada é $x[n] = x1[n] + x2[n] = 2.0 \cos(0.25\pi n + 30^\circ) u[n] + 1.0 \cos(0.5\pi n + 45^\circ) u[n]$.



Pede-se:

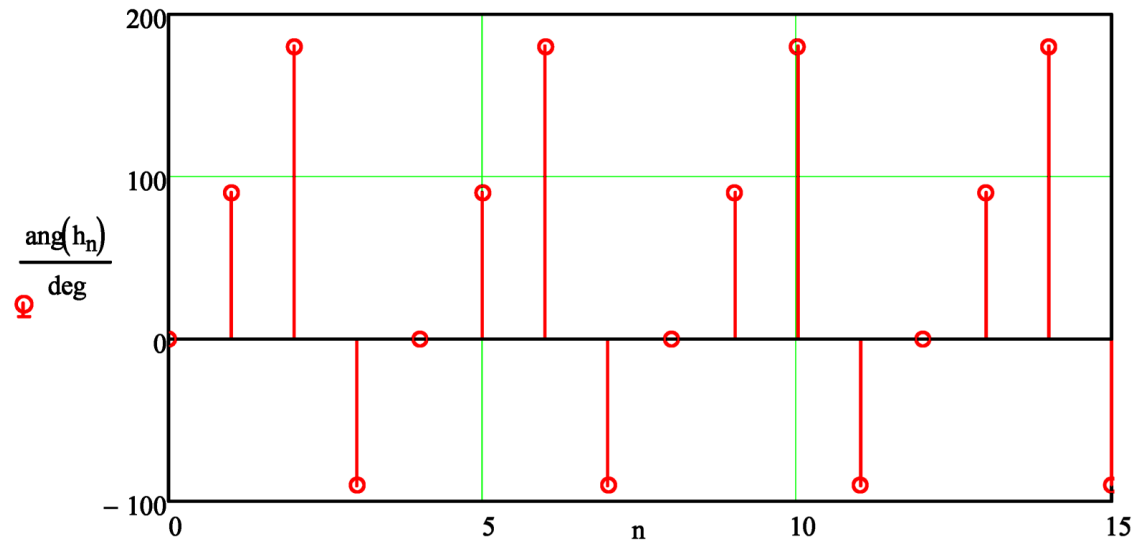
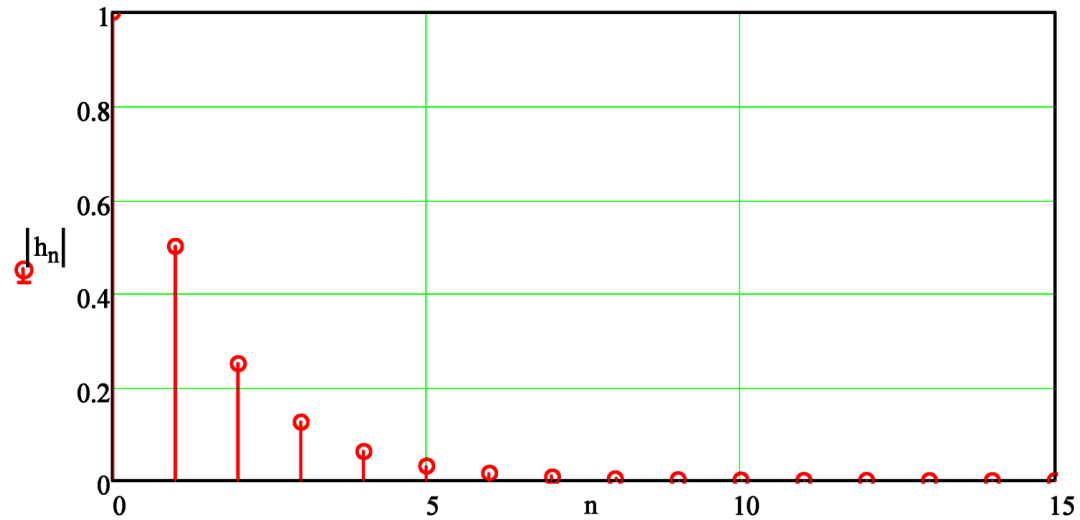
- a)** Plote os gráficos de módulo e fase (em graus) da resposta ao impulso $h[n]$ do sistema p/ $0 \leq n \leq N - 1$, $N = 16$.
- b)** Plote o gráfico da sequência $x[n]$ e de suas componentes $x1[n]$ e $x2[n]$ para $0 \leq n \leq N - 1$, sendo $N = 16$. Relacione o período em amostras de $x1[n]$ e $x2[n]$ com suas respectivas definições algébricas.
- c)** Utilizando uma DFT de $N = 16$ pontos, determine os valores numéricos e plote o módulo e a fase do espectro no domínio frequência discreta da sequência da entrada $x[n]$ e de suas componentes $x1[n]$ e $x2[n]$ para $0 \leq n \leq N - 1$. Assumindo que a frequência de amostragem é $f_s = 8$ KHz, determine a frequência analógica das componentes espectrais nos espectros de $x[n]$, $x1[n]$ e $x2[n]$.
- d)** Utilizando uma DFT de $N = 16$ pontos, determine os valores numéricos e plote o módulo e a fase da resposta em frequência $H[k]$ no domínio frequência discreta. Obtenha $H[k]$ através de $H[k] = \text{DFT}\{h[n]\}$ para $0 \leq n \leq N - 1$.
- e)** Determine os valores numéricos e plote o módulo e a fase do espectro $Y[k]$ no domínio frequência discreta da sequência $y[n]$ na saída do sistema. Utilize a propriedade de sistemas LTI que obtém $Y[k]$ através da operação no domínio frequência discreta definida por $Y[k] = H[k]X[k]$, onde $H[k]$ e $X[k]$ foram obtidas respectivamente em (d) e (c).
- f)** Utilizando uma IDFT de $N = 16$ pontos, determine os valores numéricos e plote o módulo e a fase da sequência complexa $y[n]$ na saída do sistema obtida através da operação $y[n] = \text{IDFT}\{Y[k]\}$, onde $Y[k]$ foi obtida em (e).

DFT - exemplos

Solução: a)

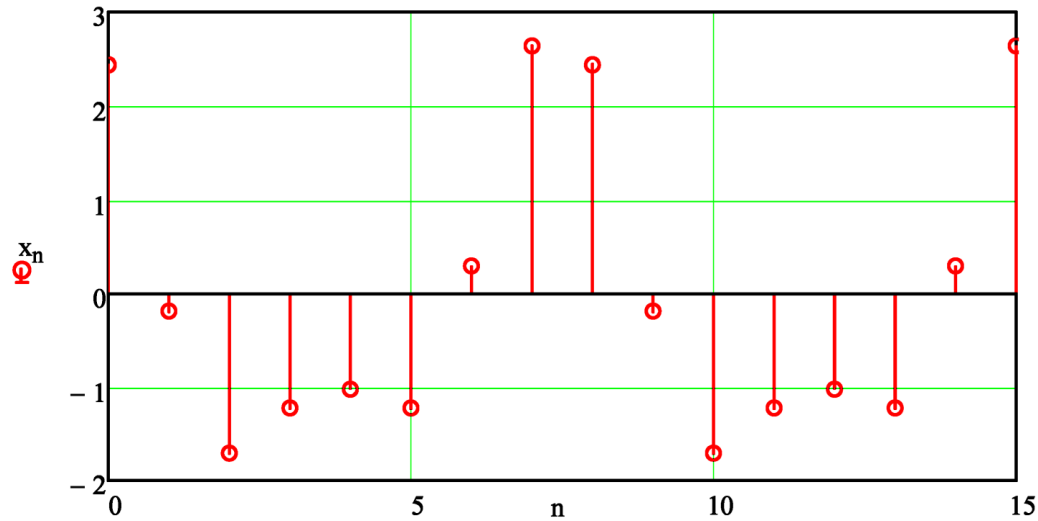
$$N := 16 \quad n := 0..N - 1 \quad u(n) := \text{if}(n < 0, 0, 1.0) \quad \text{ang}(u) := \text{if}(|u| < 10^{-12}, 0, \text{if}(|\arg(u)| < 10^{-6}, 0.0, \arg(u)))$$

$$h_n := \left(\frac{j}{2}\right)^n \cdot u(n)$$

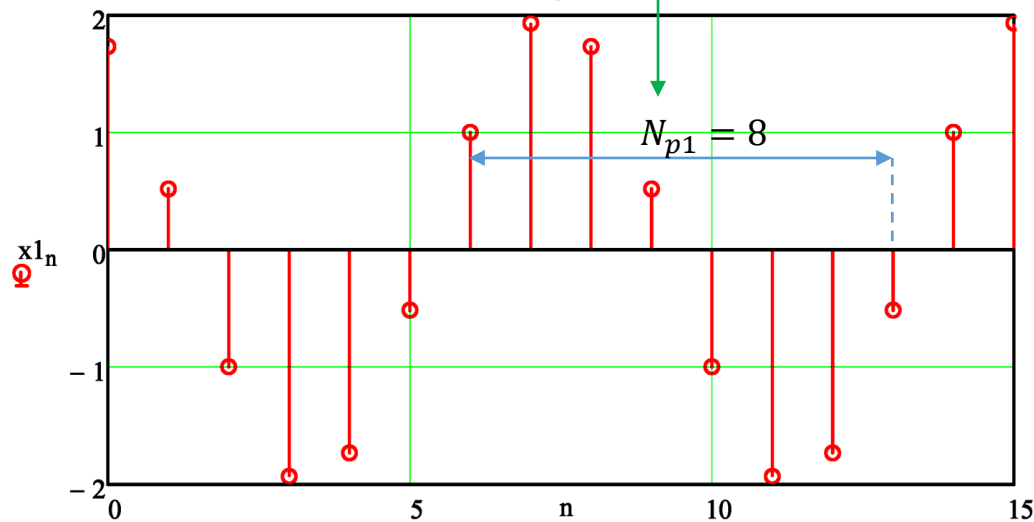


DFT - exemplos

b) $x_n := 2.0 \cos[(0.25\pi \cdot n) + 30^\circ] \cdot u(n) + 1.0 \cos[(0.5\pi \cdot n) + 45^\circ] \cdot u(n)$



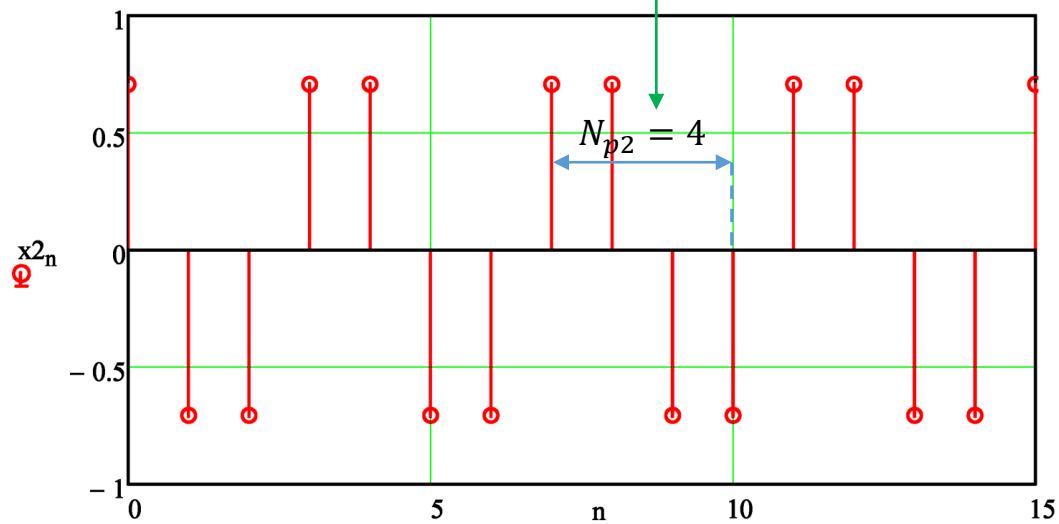
$x_{1n} := 2.0 \cos[(0.25\pi \cdot n) + 30^\circ]$ $\rightarrow 0.25\pi = \frac{2\pi}{N_{p1}} \rightarrow N_{p1} = 8$



DFT - exemplos

$$x2_n := 1.0 \cos[(0.5\pi \cdot n) + 45^\circ] \cdot u(n)$$

$0.5\pi = \frac{2\pi}{N_{p2}} \rightarrow N_{p2} = 4$



DFT - exemplos

c) Usando (5) para determinar $X1[k] = \text{DFT}\{x1[n]\}$, temos :

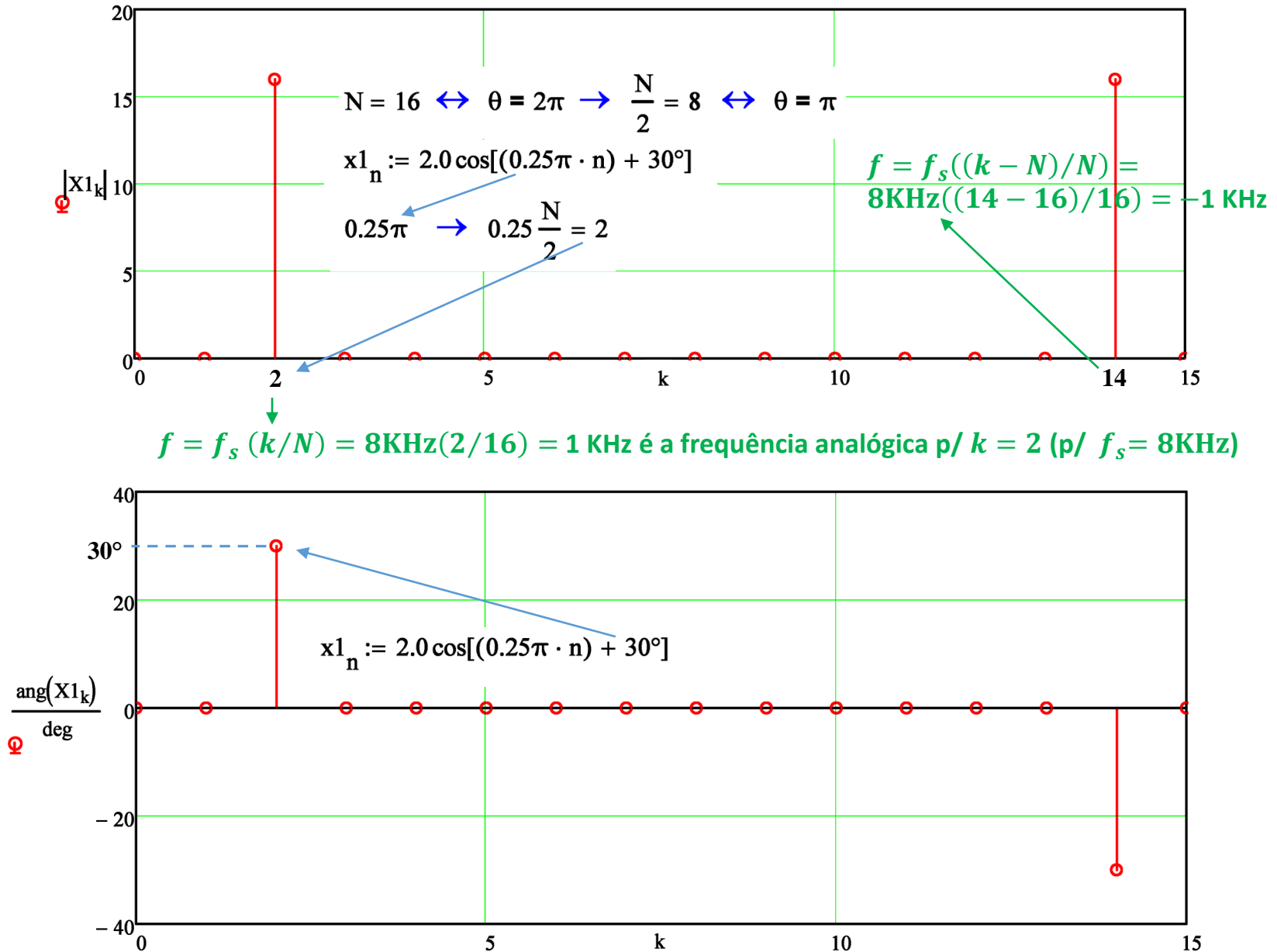
$$k := 0..N-1 \quad X1_k := \left[\sum_{n=0}^{N-1} \left(x1_n \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot \frac{n}{N}} \right) \right]$$

E resulta em:

$$|X1_k| = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 16 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ang}(X1_k) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 30 \\ -30 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot ^\circ$$

DFT - exemplos

Plotando $|X1[k]|$ e $\angle\{X1[k]\}$, temos :



Usando (5) para determinar $X_2[k] = \text{DFT}\{x_2[n]\}$, temos :

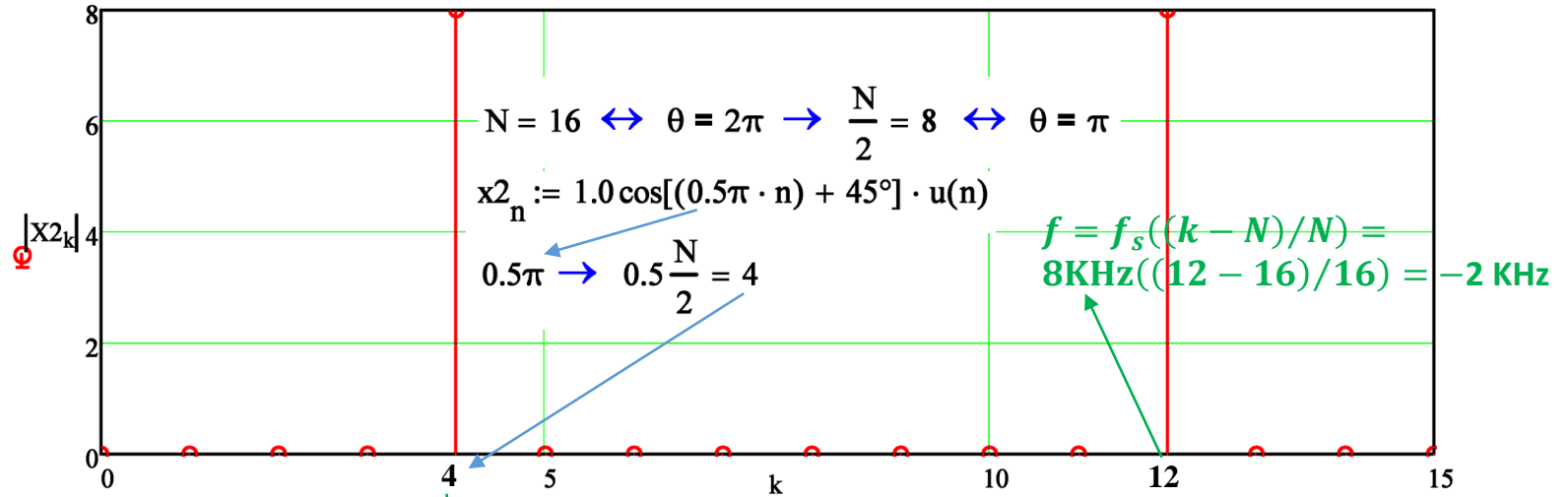
$$k := 0..N-1 \quad X_{2_k} := \left[\sum_{n=0}^{N-1} \left(x_{2_n} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot \frac{n}{N}} \right) \right]$$

E resulta em:

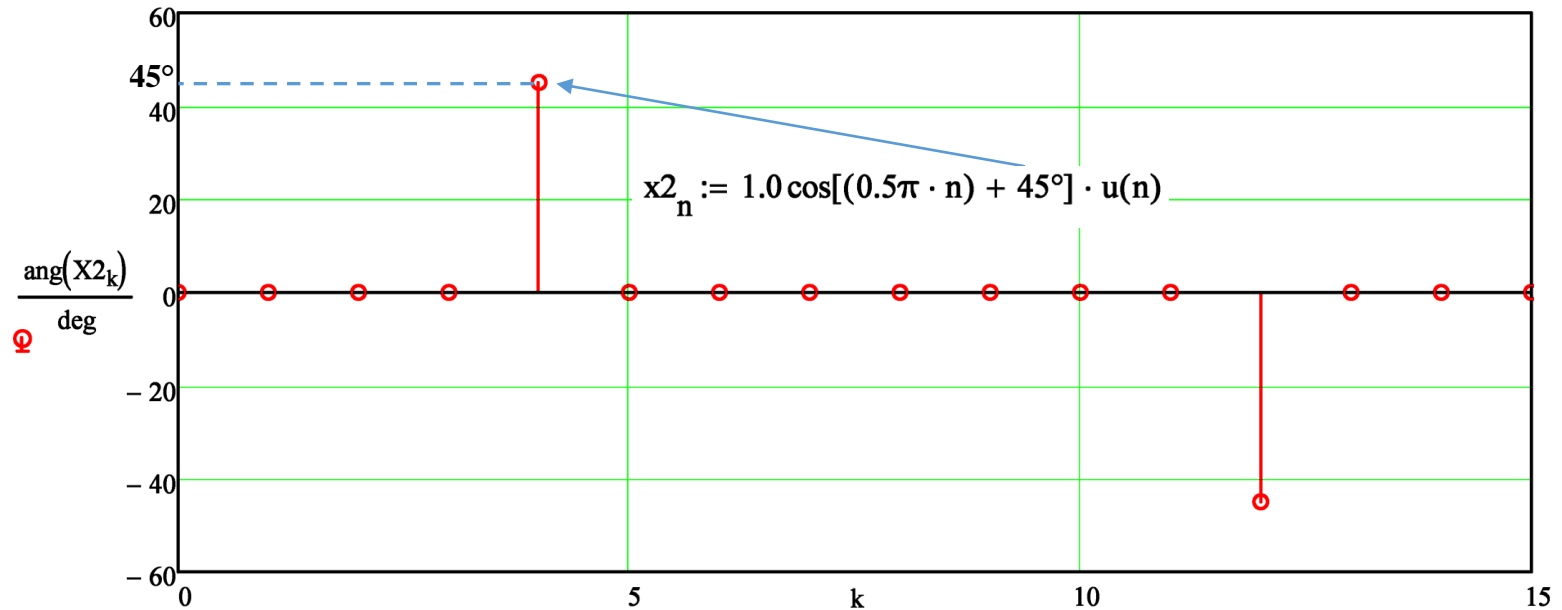
$$|X_{2_k}| = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ang}(X_{2_k}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 45 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -45 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .^\circ$$

DFT - exemplos

Plotando $|X_2[k]|$ e $\angle\{X_2[k]\}$, temos :



$f = f_s (k/N) = 8\text{KHz}(4/16) = 2 \text{ KHz}$ é a frequência analógica $p/k = 4$ ($p/ f_s = 8\text{KHz}$)



DFT - exemplos

Usando (5) para determinar $X[k] = \text{DFT}\{x[n]\}$, temos :

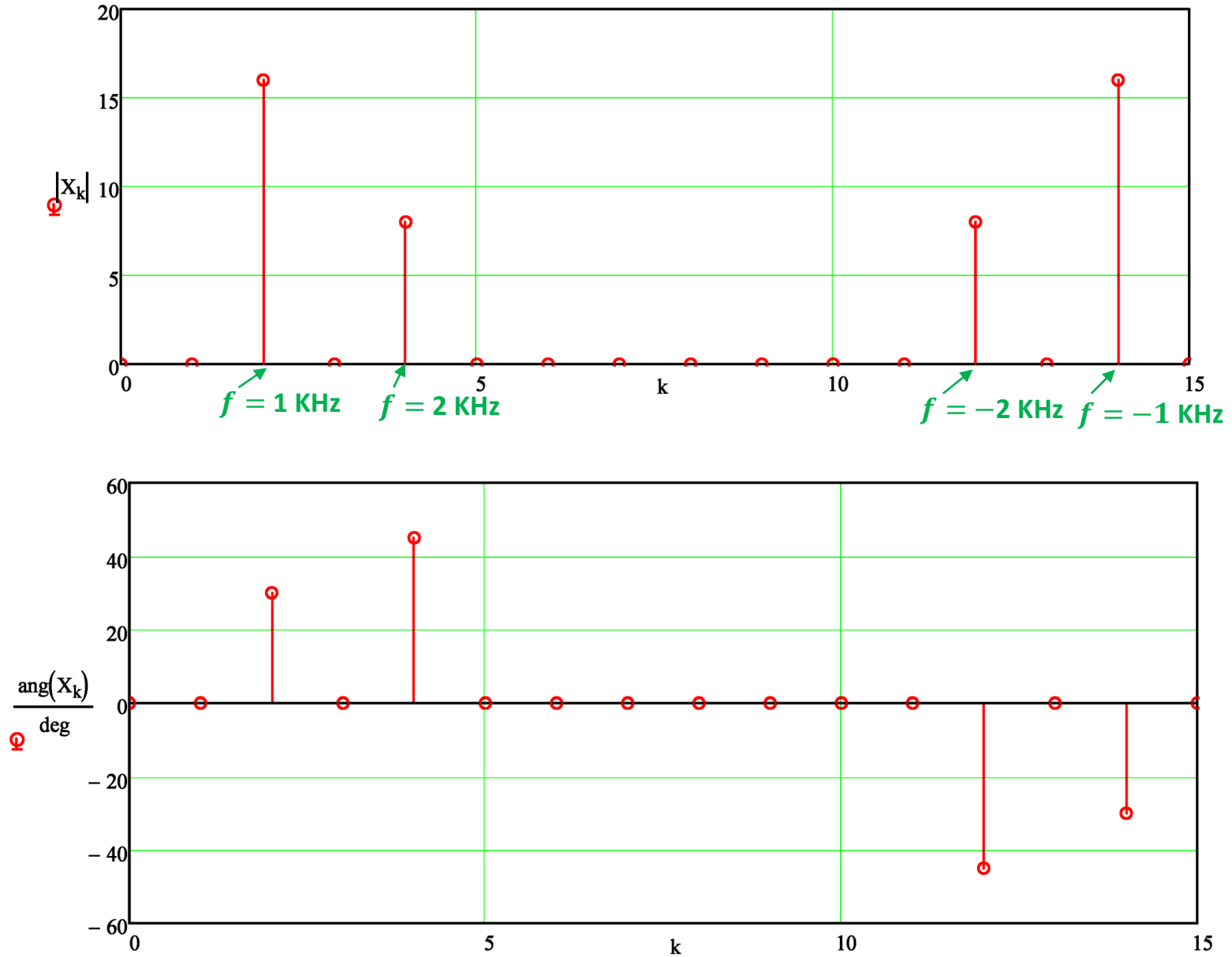
$$k := 0..N-1 \quad X_k := \left[\sum_{n=0}^{N-1} \left(x_n \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot \frac{n}{N}} \right) \right]$$

E resulta em:

$$|X_k| = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 16 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \\ 16 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ang}(X_k) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 30 \\ 0 \\ 45 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -45 \\ 0 \\ -30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot ^\circ$$

DFT - exemplos

Plotando $|X[k]|$ e $\angle\{X[k]\}$, temos :



d) Usando (5) para determinar $H[k] = \text{DFT}\{h[n]\}$, temos :

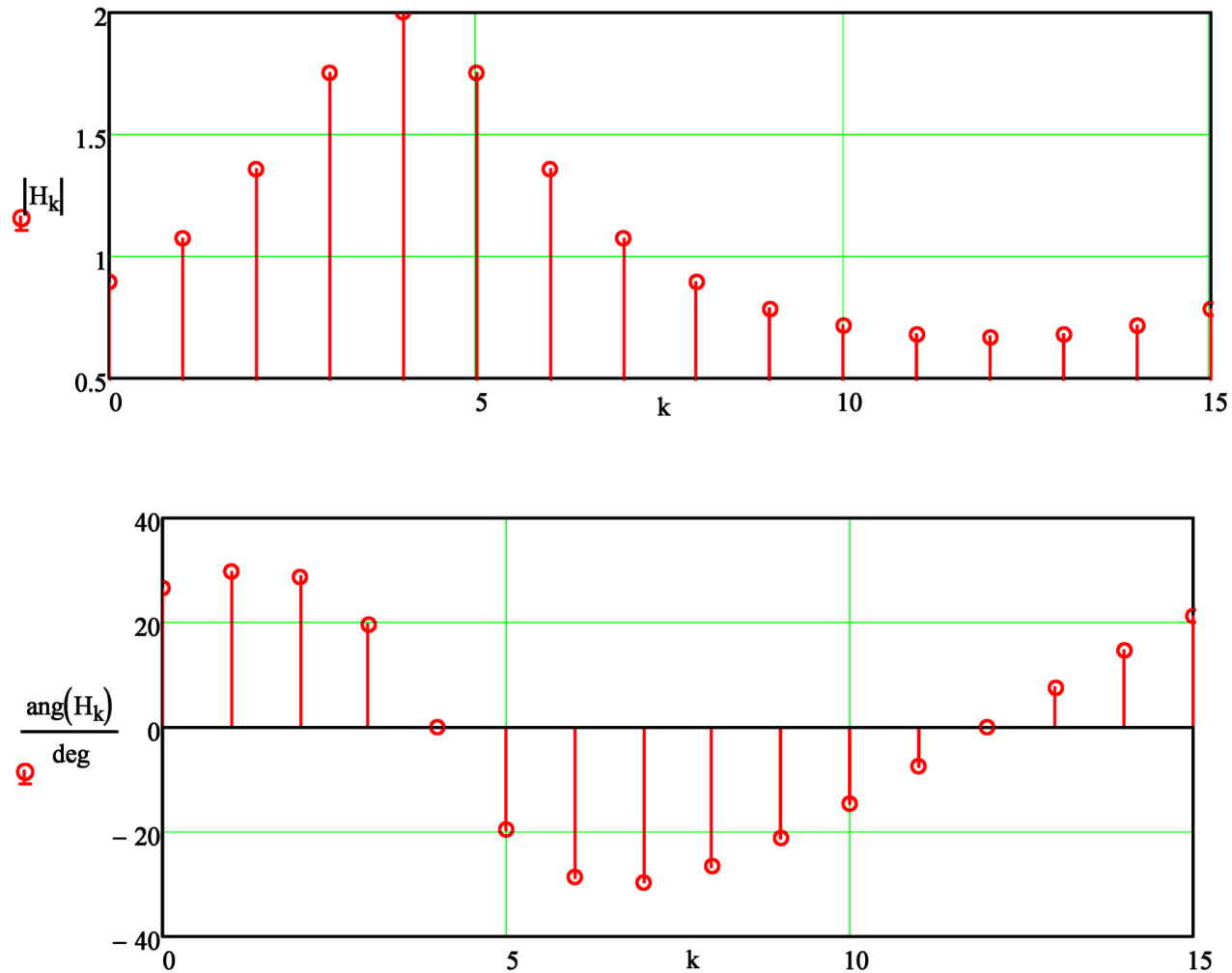
$$k := 0..N-1 \quad H_k := \sum_{n=0}^{N-1} \left(h_n \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot \frac{n}{N}} \right)$$

E resulta em:

$$|H_k| = \begin{pmatrix} 0.894 \\ 1.074 \\ 1.357 \\ 1.751 \\ 2 \\ 1.751 \\ 1.357 \\ 1.074 \\ 0.894 \\ 0.783 \\ 0.715 \\ 0.678 \\ 0.667 \\ 0.678 \\ 0.715 \\ 0.783 \end{pmatrix} \quad \text{ang}(H_k) = \begin{pmatrix} 26.565 \\ 29.737 \\ 28.675 \\ 19.576 \\ 0 \\ -19.576 \\ -28.675 \\ -29.737 \\ -26.565 \\ -21.194 \\ -14.639 \\ -7.457 \\ 0 \\ 7.457 \\ 14.639 \\ 21.194 \end{pmatrix} \cdot ^\circ$$

DFT - exemplos

Plotando $|H[k]|$ e $\angle\{H[k]\}$, temos :



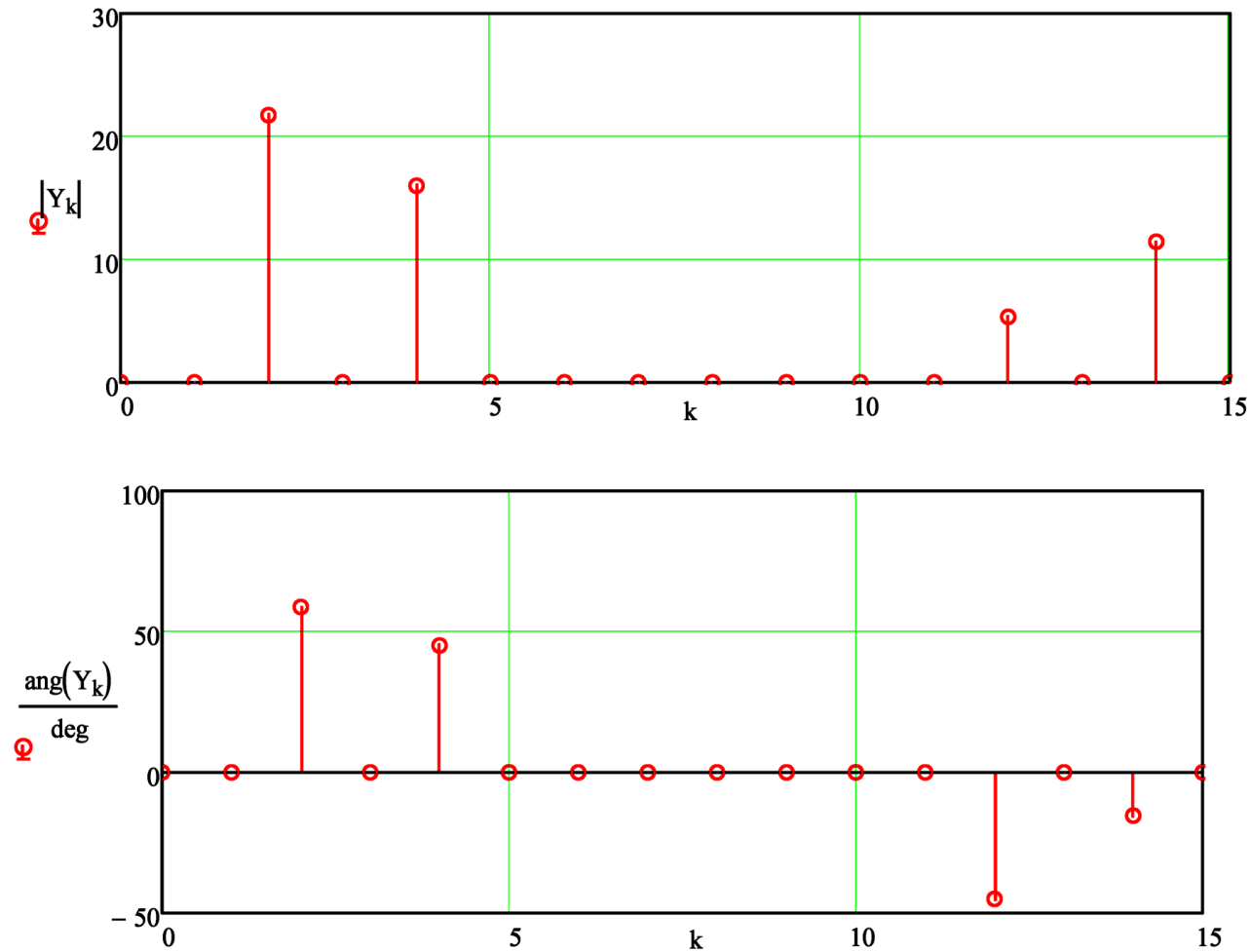
e) Determinando $Y[k] = H[k] X[k]$:

$$Y_k := H_k \cdot X_k$$

$$|Y_k| = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 21.715 \\ 0 \\ 16 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5.333 \\ 0 \\ 11.437 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ang}(Y_k) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 58.675 \\ 0 \\ 45 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -45 \\ 0 \\ -15.361 \\ 0 \end{pmatrix} .^\circ$$

DFT - exemplos

Plotando $|Y[k]|$ e $\angle\{Y[k]\}$, temos :



f) Usando (6) para determinar $y[n] = \text{IDFT}\{Y[k]\}$, temos :

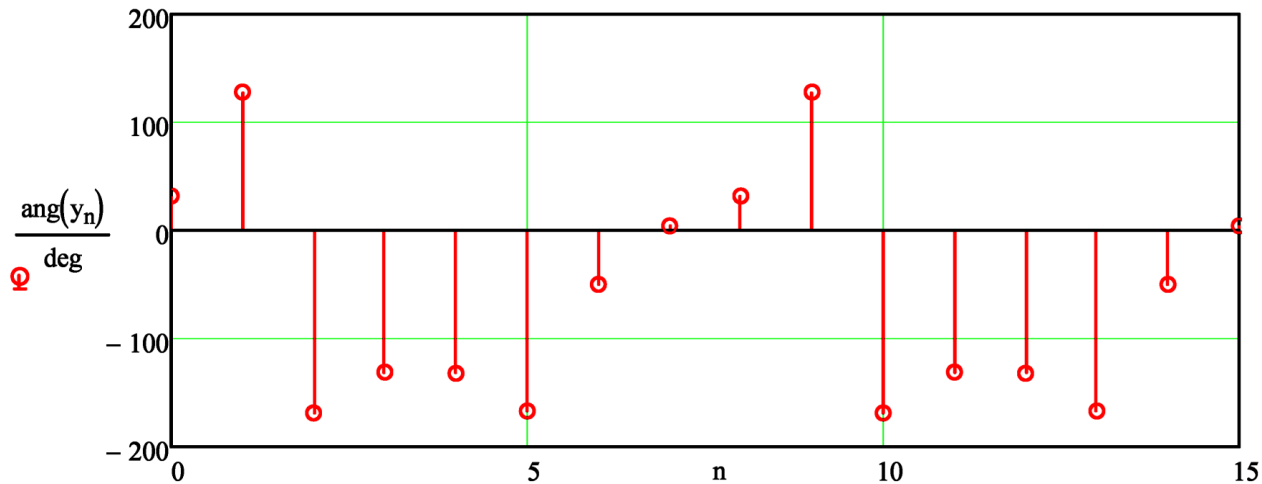
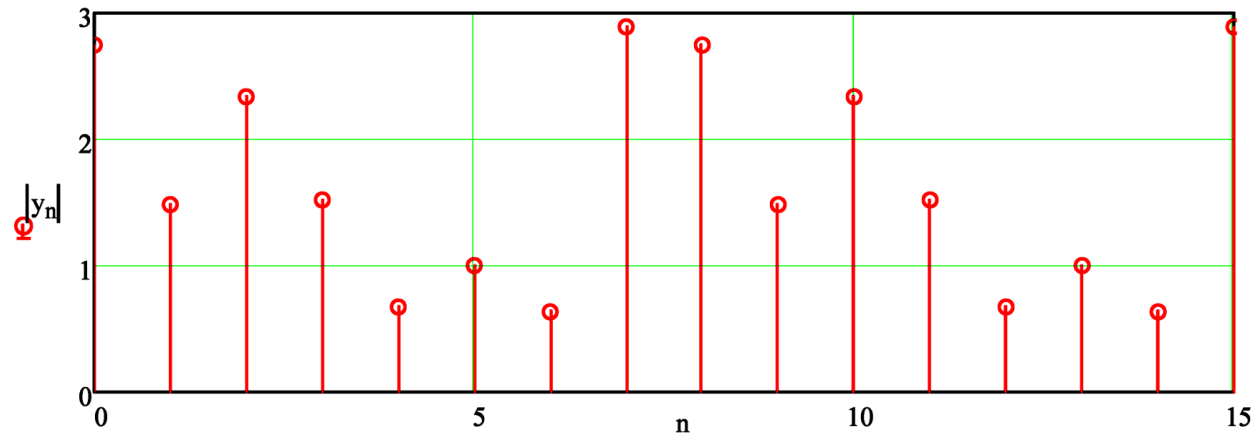
$$n := 0..N - 1 \quad y_n := \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \left(Y_k \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot n \cdot \frac{k}{N}} \right)$$

E resulta em:

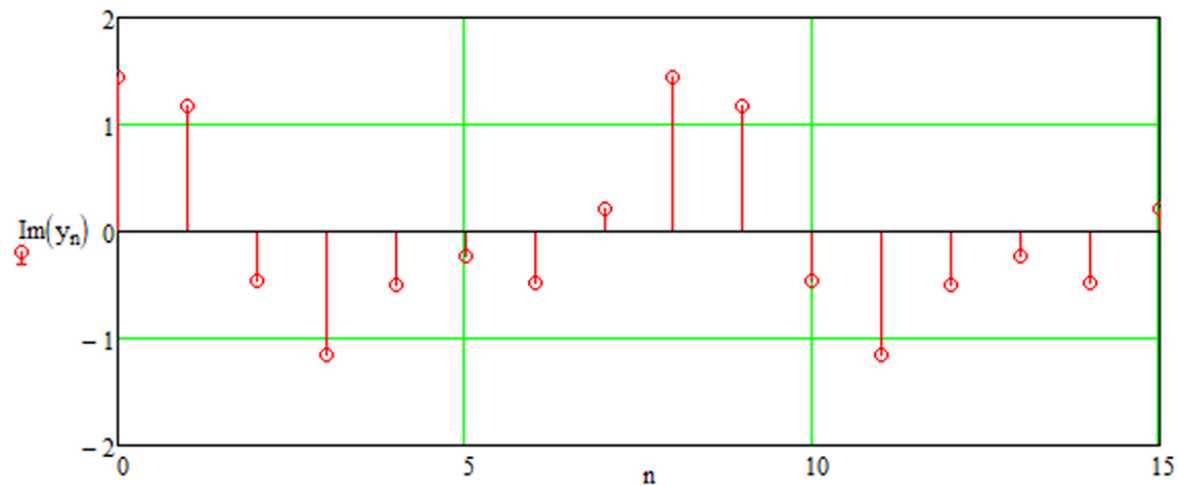
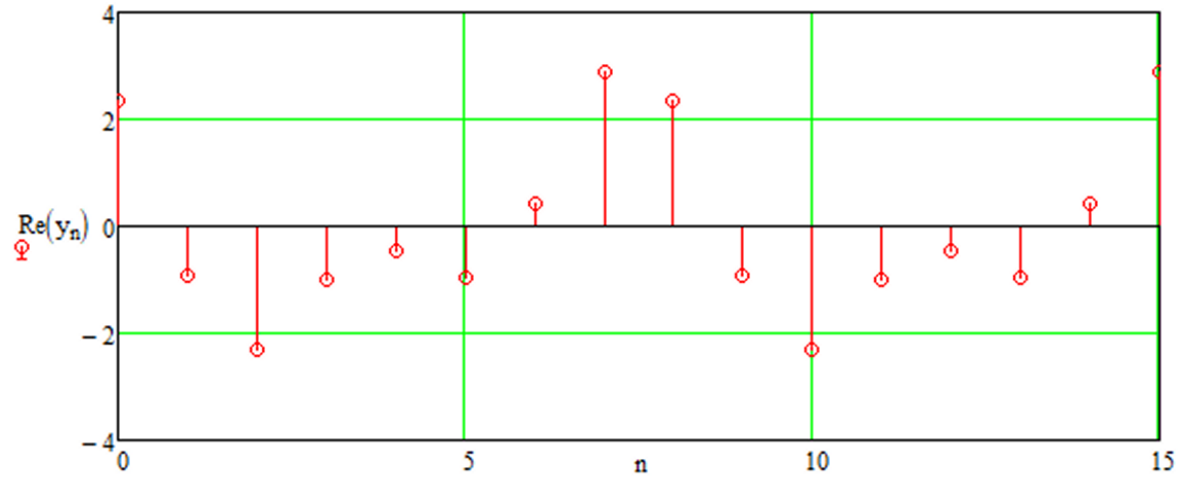
$$|y_n| = \begin{pmatrix} 2.746 \\ 1.481 \\ 2.336 \\ 1.519 \\ 0.673 \\ 1.001 \\ 0.635 \\ 2.89 \\ 2.746 \\ 1.481 \\ 2.336 \\ 1.519 \\ 0.673 \\ 1.001 \\ 0.635 \\ 2.89 \end{pmatrix} \quad \text{ang}(y_n) = \begin{pmatrix} 31.658 \\ 127.908 \\ -168.767 \\ -131.034 \\ -132.197 \\ -166.954 \\ -50.231 \\ 4.027 \\ 31.658 \\ 127.908 \\ -168.767 \\ -131.034 \\ -132.197 \\ -166.954 \\ -50.231 \\ 4.027 \end{pmatrix} \cdot \circ$$

DFT - exemplos

Plotando $y[n]$ (que é de valor complexo porque $h[n]$ é complexo), temos:



DFT - exemplos



Homework 1

Refazer o Exemplo 3 no slide 14 para $f_s = 64$ kHz.

Homework 2

Refazer o Exemplo 5 no slide 25 para $x[n] = x_1[n] + x_2[n] = 4.0 \cos(0.2\pi n + 30^\circ) u[n] + 2.0 \cos(0.4\pi n + 45^\circ) u[n]$. Qual o efeito observado na magnitude do espectro de $x_1[n]$ e de $x_2[n]$ quando o índice k da frequência discreta associada à frequência digital do respectivo cosseno não resultar em um número inteiro (i.e., quando a frequência digital do cosseno não é exatamente a frequência de um dos pontos em que o domínio frequência é amostrado na representação da DFT – ver slide 6)? Dica: ver “*Spectral Leakage*” em <https://dspillustrations.com/pages/posts/misc/spectral-leakage-zero-padding-and-frequency-resolution.html>.

Apêndice A:

Name	Sum	Condition
Finite on $[N_1, N_2]$	$\sum_{n=N_1}^{N_2} a^n = \frac{a^{N_1} - a^{N_2+1}}{1-a}$	none
Finite on $[0, N - 1]$	$\sum_{k=0}^N a^k = \frac{1 - a^{N+1}}{1 - a}$	none
Infinite	$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1 - a}$	$ a < 1$

Apêndice B:

Operation	Formula
Rectangular to Polar Conversion	$z = x + jy = re^{j\theta}$ where $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ and $\theta = \arctan(y/x)$
Polar to Rectangular Conversion	$z = re^{j\theta} = r [\cos(\theta) + j\sin(\theta)] = x + jy$ where $x = r \cos(\theta)$ and $y = r \sin(\theta)$
Add: $z_3 = z_1 + z_2$	$(x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$
Subtract: $z_3 = z_1 - z_2$	$(x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$
Multiply: $z_3 = z_1 z_2$ (polar form)	$(x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + y_1 x_2)$ $r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$
Divide: $z_3 = z_1 / z_2$ (polar form)	$\frac{(x_1 x_2 - y_1 y_2) - j(x_1 y_2 - y_1 x_2)}{x_2^2 + y_2^2}$ $\frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$

Apêndice C:

<i>Relationship</i>	<i>Relationship</i>
$\sin u = \cos(u - \pi/2)$	$\cos u = \sin(u + \pi/2)$
$\cos(-u) = \cos u$	$\sin(-u) = -\sin(u)$
$\sin^2 u + \cos^2 u = 1$	$\cos^2 u = \frac{1}{2}(1 + \cos 2u)$
$\sin^2 u = \frac{1}{2}(1 - \cos 2u)$	$\cos(u \pm v) = \cos u \cos v \mp \sin u \sin v$
$\sin(u \pm v) = \sin u \cos v \pm \cos u \sin v$	$\cos u \cos v = \frac{1}{2}[\cos(u - v) + \cos(u + v)]$
$\sin u \sin v = \frac{1}{2}[\cos(u - v) - \cos(u + v)]$	$\sin u \cos v = \frac{1}{2}[\sin(u - v) + \sin(u + v)]$
$\cos u = \frac{1}{2}[e^{ju} + e^{-ju}]$	$\sin u = \frac{1}{2j}[e^{ju} - e^{-ju}]$
$e^{ju} = \cos u + j \sin u$	

Apêndice D:

Property	Continuous	Discrete
Energy	$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) ^2 dt < \infty$	$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] ^2$
Power	$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) ^2 dt < \infty$	$P_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] ^2 < \infty$
Periodic	$x(t - T_0) = x(t)$, $T_0 = \text{period}$	$x[n - N_0] = x[n]$, $N_0 = \text{period}$
Even	$x(-t) = x(t)$	$x[-n] = x[n]$
Odd	$x(-t) = -x(t)$	$x[-n] = -x[n]$

Name	Continuous	Discrete
Impulse	$\delta(t) = 0, t \neq 0$ $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$	$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$
Step	$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$	$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$
Rectangle Pulse	$\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 1, & t \leq \tau/2 \\ 0, & t > \tau \end{cases}$	$u[n] - u[n - M]$
Triangle Pulse	$\Lambda\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 1 - t/\tau , & t \leq \tau \\ 0, & t > \tau \end{cases}$	$\begin{cases} n + 1, & 0 \leq n \leq M - 1 \\ 2M - 1 - n, & M - 1 < n \leq 2M - 2 \end{cases}$
sinc() and aliased sinc()	$\text{sinc}(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$	$\frac{\sin(N\pi x)}{\sin(\pi x)}$, aliased sinc()
Sinusoid	$A \cos(2\pi f_0 t + \phi)$	$A \cos(\hat{\omega}_0 n + \phi)$, $\hat{\omega}$ is mod 2π