



# Modulação e demodulação



Departamento de Eletrônica e Computação

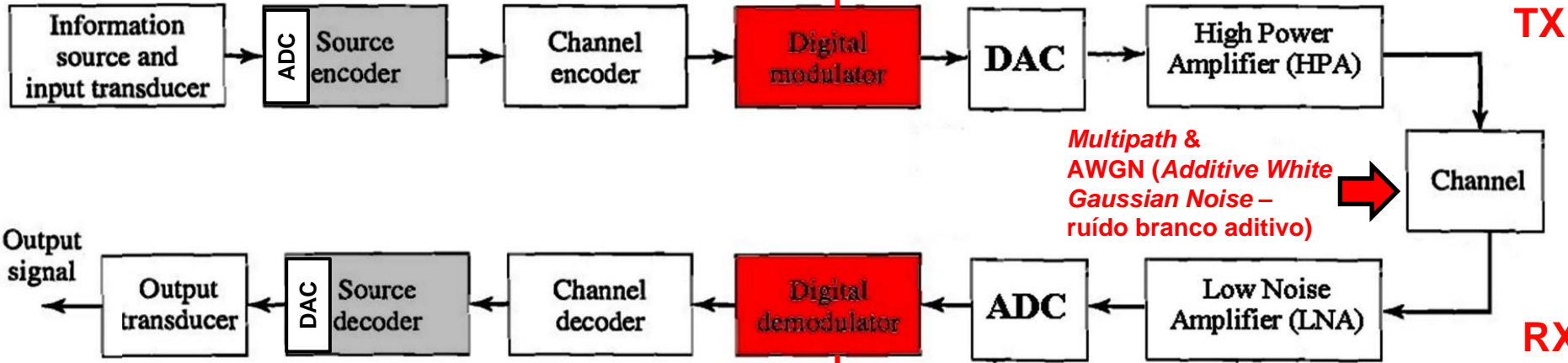
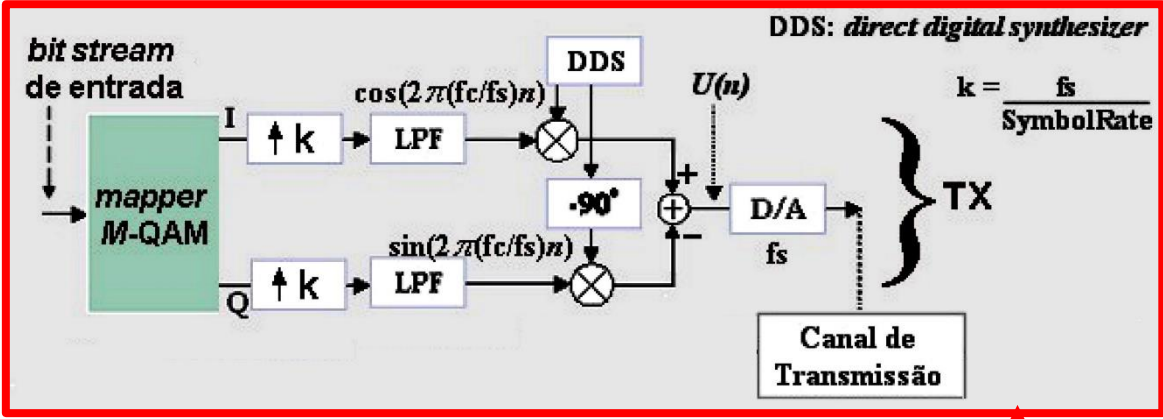
Centro de Tecnologia

ELC1120 – Telecomunicações II

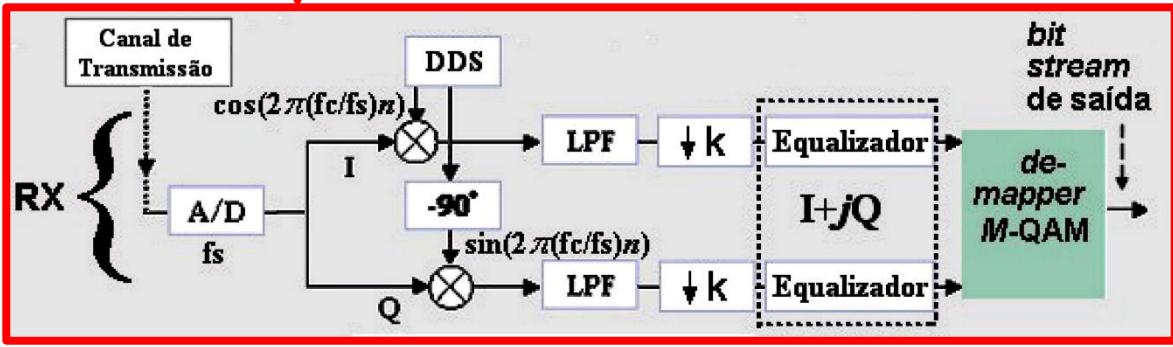
Profa. Candice Müller Prof. Fernando DeCastro

# Modulador e demodulador na arquitetura geral de um sistema de comunicações digital

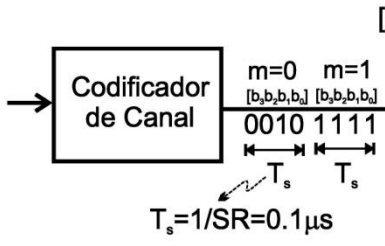
Conforme discutido p/ modulação 16-QAM no Cap I das notas de aula, o modulador no TX converte cada palavra binária do *bit stream* de entrada em “*wavepackets*” que se propagam no canal. Para cada palavra binária do *bit stream* o correspondente *wavepacket* no canal representa uma onda eletromagnética de amplitude  $A$  e/ou fase  $\varphi$  e/ou frequência  $f$  distintos. O parâmetro variado na onda ( $A$  e/ou  $\varphi$  e/ou  $f$ ) depende do tipo de modulação adotado (QAM, PAM, PSK, FSK), conforme veremos adiante neste capítulo.



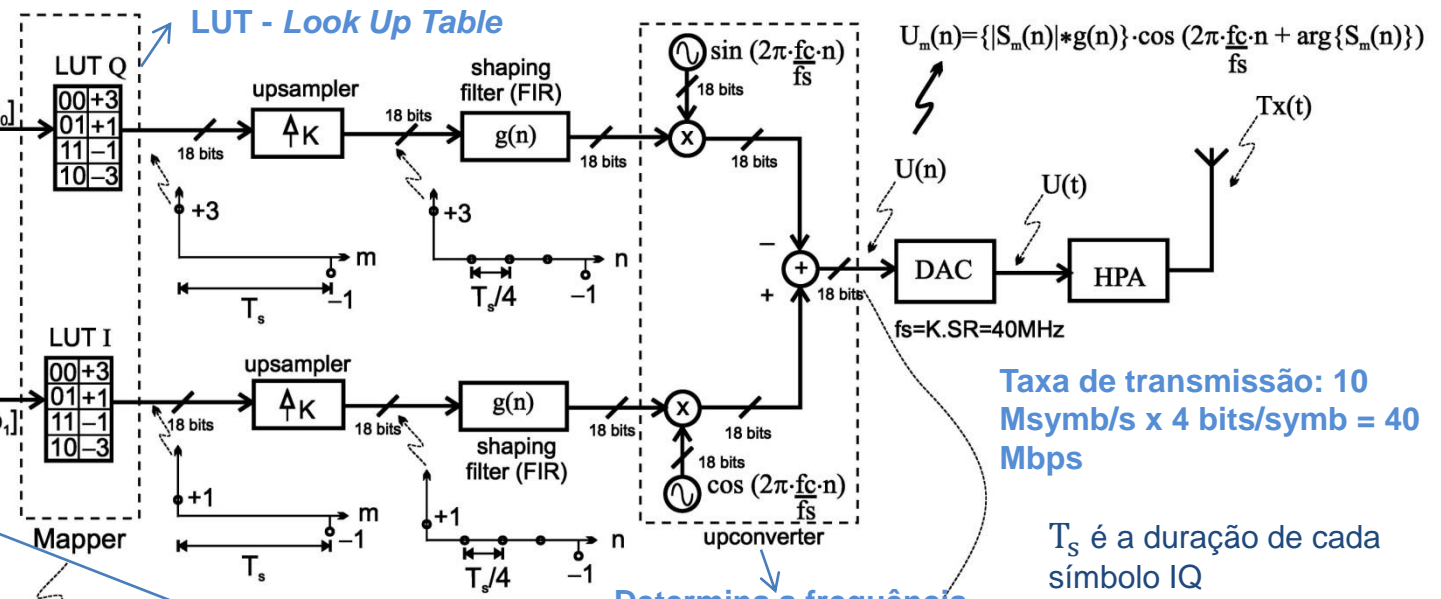
O demodulador no RX reconverte cada *wavepacket* recebido do canal na palavra binária correspondente no *bit stream* de entrada do modulador no TX e que a ele deu origem. A fidelidade da palavra binária no *bit stream* de saída do demodulador em relação à correspondente no TX depende do quanto a onda eletromagnética do TX tenha sido degradada por ruído e *multipath* no canal de transmissão, conforme Cap II das notas de aula.



# Exemplo: Modulador 16-QAM



**Parâmetros deste sistema:**  
 SR = 10MHz (symbol rate)  
 K=4 (oversampling factor)  
 fc= 20MHz (carrier freq.)

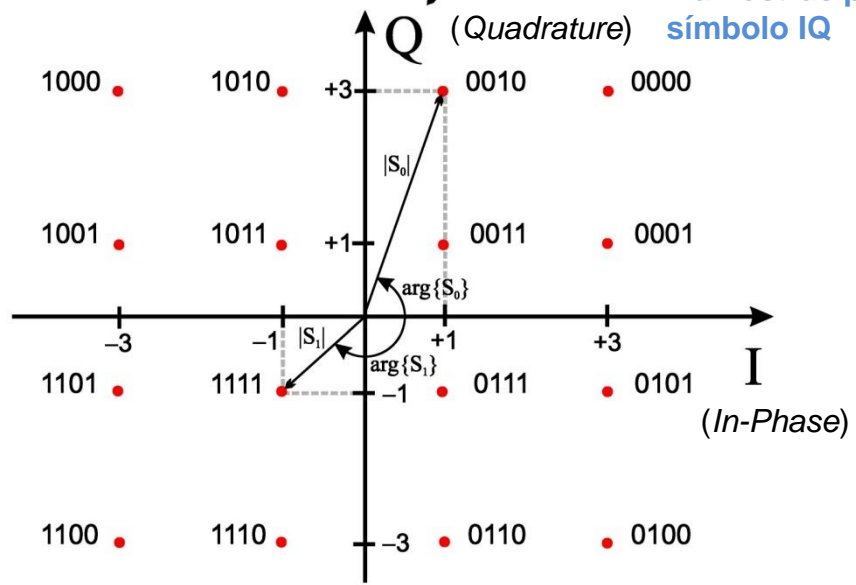


**Taxa de transmissão: 10 Msymb/s x 4 bits/symb = 40 Mbps**

$T_s$  é a duração de cada símbolo IQ

Determina a frequência central  $f_c$  do canal

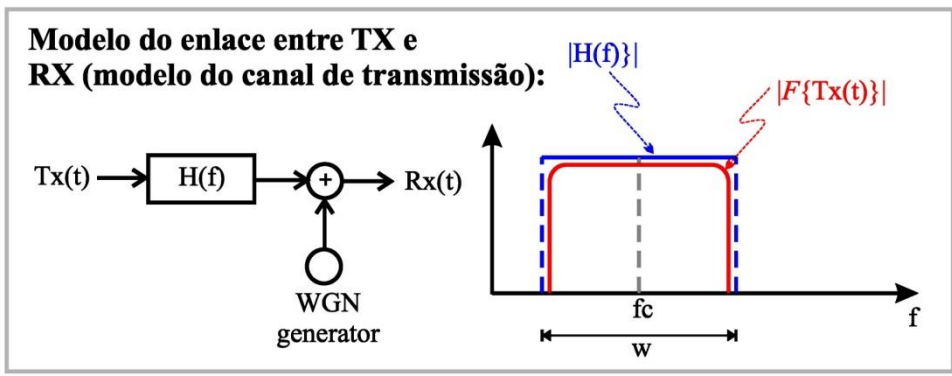
4 amostras por símbolo IQ



Identificação dos bits das palavras binárias:  $[b_3b_2b_1b_0]$   
 Constelação 16-QAM (Quadrature Amplitude Modulation)

**$U_m(n)$  p/  $m=0$  e  $m=1$  neste exemplo:**

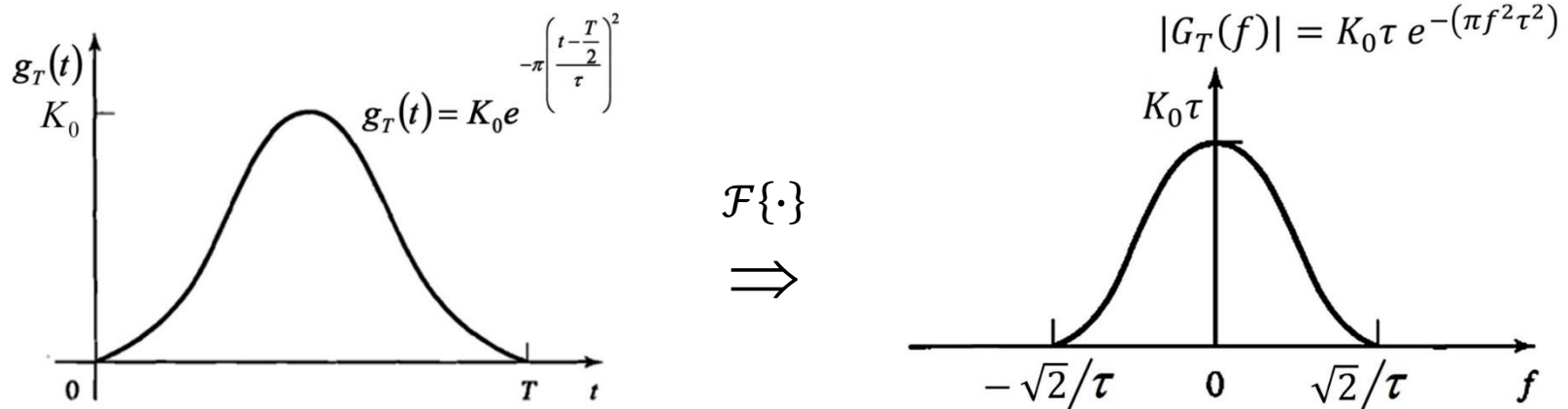
$$U_0(n) = \{\sqrt{3^2+1^2} * g(n)\} \cdot \cos(2\pi \cdot \frac{20}{40} \cdot n + \text{atan}(3/1))$$

$$U_1(n) = \{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2} * g(n)\} \cdot \cos(2\pi \cdot \frac{20}{40} \cdot n - \text{atan}(-1/-1))$$


## Contenção espectral da sequência de pulsos retangulares na saída das LUTs I e Q - *shaping filter* (filtro de formatação de pulso) e *Up-sampler* (superamostrador)

Conforme discutido no Cap I das notas de aula, a contenção espectral da sequência de pulsos retangulares na saída das LUTs I e Q é feita através de um filtro passa baixa denominado *shaping filter* (ver slide anterior). Uma possível resposta ao impulso para o *shaping filter* no domínio tempo contínuo é a resposta ao impulso Gaussiana  $g_T(t)$ , conforme mostra a figura abaixo. A convolução de  $g_T(t)$  com a sequência de pulsos retangulares na saída das LUTs suaviza as bordas de subida e descida dos pulsos. A contenção espectral é efetuada pela suavização das bordas dos pulsos porque, caso não fossem suavizadas pelo *shaping filter*, a rápida (instantânea) variação no tempo das bordas de subida e descida dos pulsos retangulares seriam responsáveis por uma largura infinita do espectro do sinal transmitido através do canal de transmissão. Uma largura infinita de espectro é incompatível com a largura de banda do canal limitada em  $W$  (ver slide anterior), alocado pelo órgão regulador (Anatel, FCC, etc ...).

O espectro do pulso  $g_T(t)$  é obtido aplicando a Transformada de Fourier à  $g_T(t) = K_0 e^{-\pi \left(\frac{t-T}{\tau}\right)^2}$ , i.e.,  $G_T(f) = \mathcal{F}\{g_T(t)\} = K_0 \tau e^{-(\pi f^2 \tau^2 + j\pi f T)} = K_0 \tau e^{-\pi f^2 \tau^2} e^{-j\pi f T}$ , de modo que  $|G_T(f)| = K_0 \tau e^{-\pi f^2 \tau^2}$ ,  $\angle G_T(f) = -j\pi f T$  e  $T = T_s$ .



Portanto o filtro passa-baixa Gaussiano contínuo no tempo transmite pulsos na forma  $s_m(t) = A g_T(t) = A K_0 e^{-\pi \left(\frac{t-T}{\tau}\right)^2}$ , com  $A$  correspondendo à amplitude dos pulsos retangulares na saída da LUT. Para um modulador 16-QAM, como o mostrado no slide anterior,  $A \in \{-3, -1, +1, +3\}$ . Note na figura acima que o espectro  $G_T(f)$  resultante é contido no domínio frequência  $f$  e, portanto, factível de ser transmitido através do canal de largura de banda limitada em  $W$  (ver modelo de canal no slide anterior).

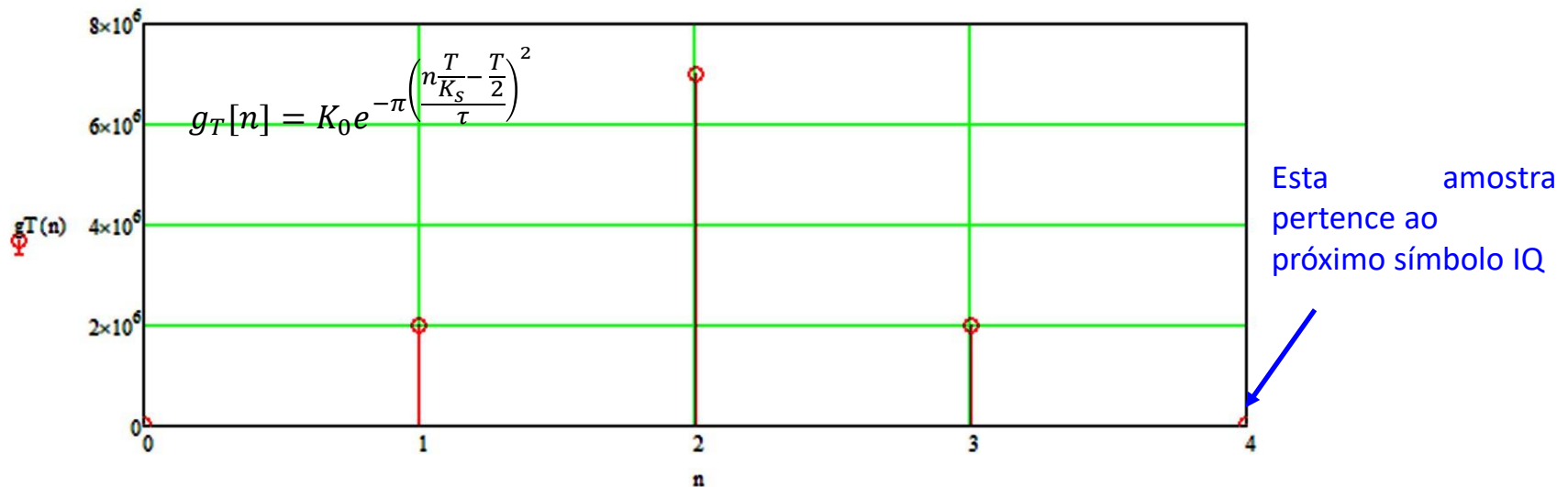
## Contenção espectral da sequencia de pulsos retangulares na saída das LUTs I e Q - *shaping filter* (filtro de formatação de pulso) e *Up-sampler* (superamostrador)

Mas observe que os pulsos retangulares na saída das LUTs I e Q não são contínuos no tempo no modulador do slide 3 – mas sim são amostras cuja amplitude é a mesma dos pulsos contínuos referidos no slide anterior. O pulsos seriam contínuos no tempo se retirássemos o DAC na saída do *upconverter* no slide 3 e em substituição colocássemos dois DACs respectivamente nas saídas das LUTs I e Q, de modo que o sinal seria discreto antes dos DACs e contínuo após os DACs, conforme discutimos no Cap I das notas de aula. No modulador do slide 3 as saídas das LUTs são uma sequencia de amostras e, portanto, o *shaping filter* é um filtro FIR digital e a sua resposta no tempo é discreta, A resposta discreta do *shaping filter* é obtida da resposta contínua. Para um modulador com um *oversampling factor*  $K_s$ , a passagem da resposta contínua para a resposta discreta é conforme:

$$g_T(t) = K_0 e^{-\pi \left( \frac{t - \frac{T}{2}}{\tau} \right)^2} \xrightarrow{t = n \frac{T}{K_s}} g_T[n] = K_0 e^{-\pi \left( \frac{n \frac{T}{K_s} - \frac{T}{2}}{\tau} \right)^2}$$

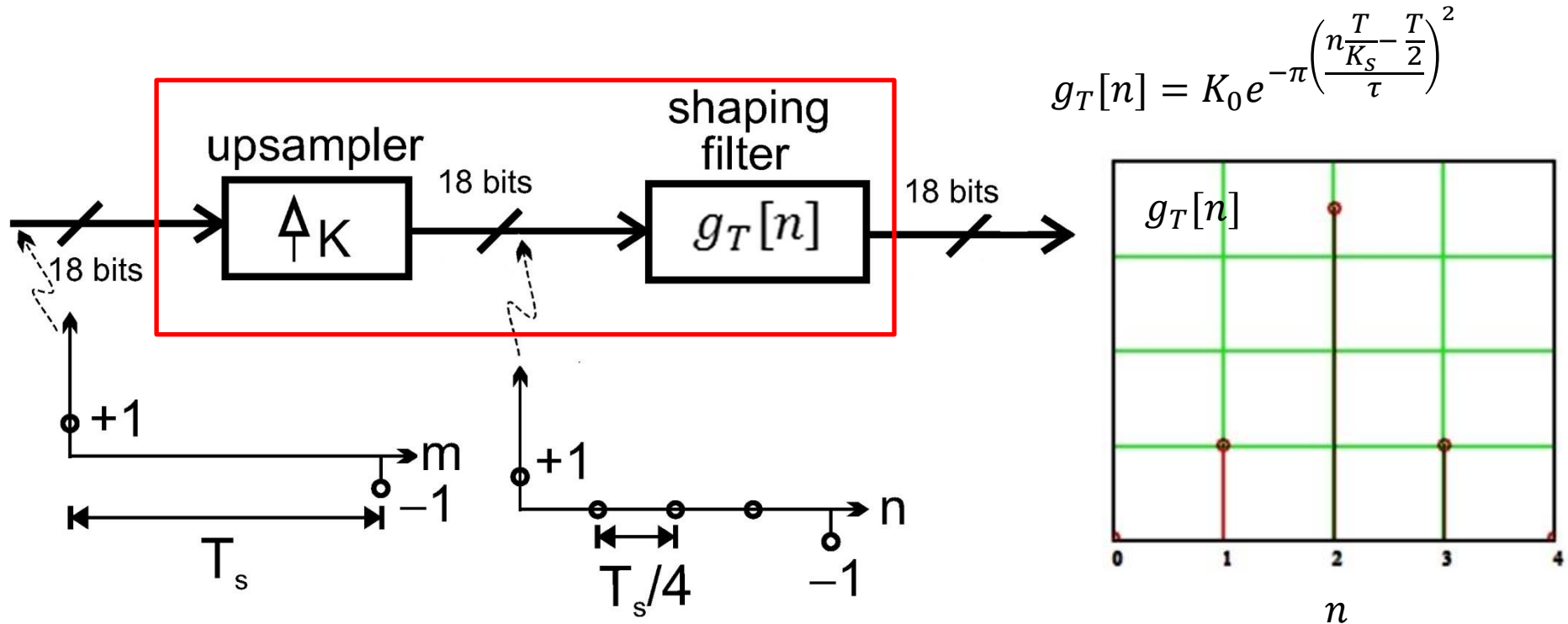
Por exemplo, um *shaping filter* Gaussiano de resposta ao impulso contínua no tempo dada por  $g_T(t) = K_0 e^{-\pi \left( \frac{t - \frac{T}{2}}{\tau} \right)^2}$  com  $K_0 = 7 \times 10^6$  e  $\tau = 0.022 \mu\text{s}$ , ao ser discretizado com  $K_s = 4$  (4 amostras por símbolo IQ) apresentará a resposta discreta

no tempo  $g_T[n] = K_0 e^{-\pi \left( \frac{n \frac{T}{K_s} - \frac{T}{2}}{\tau} \right)^2}$  conforme gráfico abaixo:



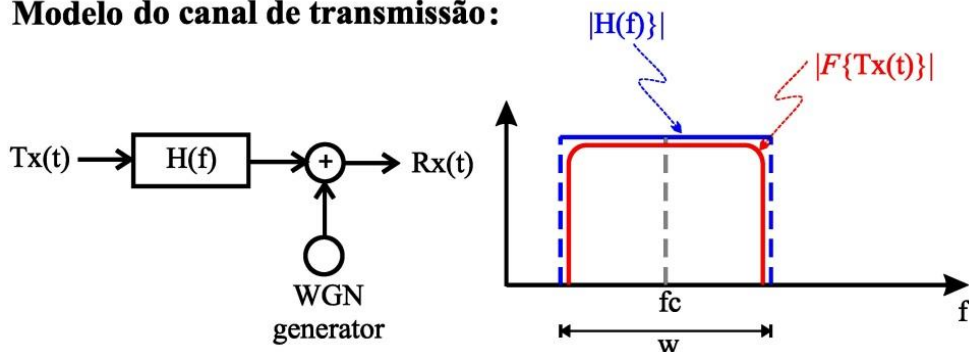
## Contenção espectral da sequencia de pulsos retangulares na saída das LUTs I e Q - *shaping filter* (filtro de formatação de pulso) e *Up-sampler* (superamostrador)

Portanto, note que, para um modulador com um *oversampling factor*  $K_s$ , como o modulador mostrado no slide 3, a resposta  $g_T[n]$  para  $K_s = 4$  mostrada no exemplo do slide anterior pode ser considerada a resposta ao impulso do bloco formado pelo *upsampler* seguido do *shaping filter* (bloco em vermelho abaixo):

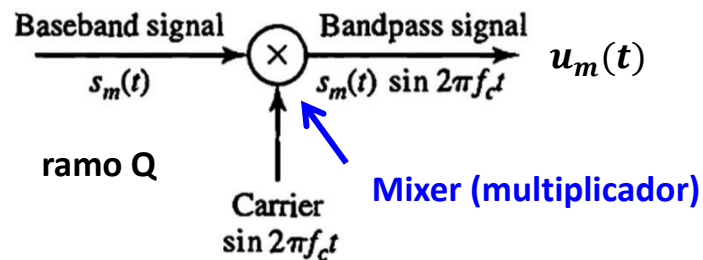
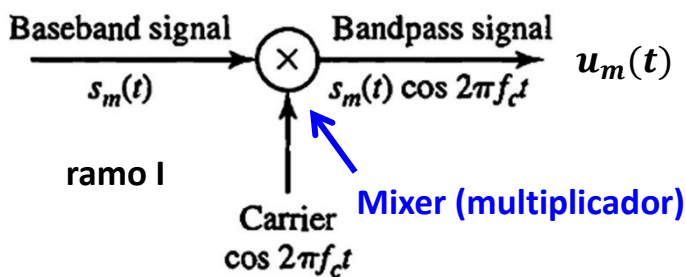


# Upconverter – a definição da frequência central $f_c$ do canal de largura $W$

Modelo do canal de transmissão:



Para colocar o centro do espectro do sinal transmitido na frequência central  $f_c$  do canal, o *upconverter* no slide 3 multiplica o trem de pulsos gaussianos na saída de cada *shaping filter* respectivamente por um seno e por um cosseno, ambos de frequência  $f_c$ , respectivamente no ramo I e no ramo Q do modulador, efetuando o processo de **heterodinação**:

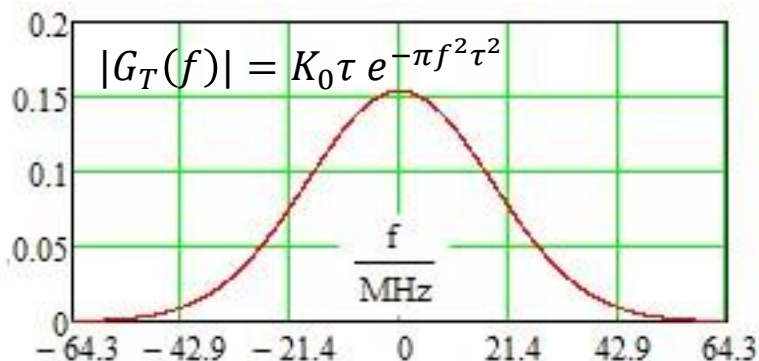


A **heterodinação** entre o sinal  $s_m(t)$  e  $\cos 2\pi f_c t$  no ramo I do modulador e a **heterodinação** entre o sinal  $s_m(t)$  e  $\sin 2\pi f_c t$  no ramo Q do modulador resultará na translação do espectro *baseband*  $G_T(f)$  dos pulsos  $s_m(t)$  para um espectro *passband*  $U_m(f)$  na forma:

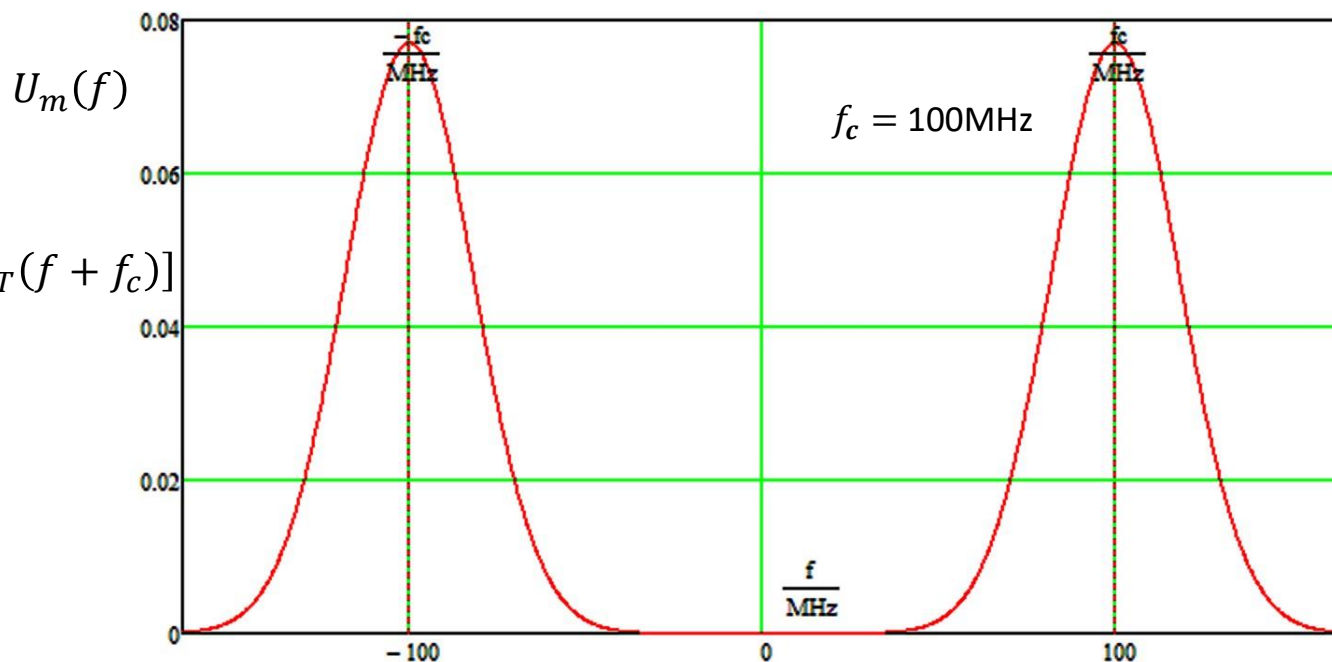
$$U_m(f) = \frac{A}{2} [G_T(f - f_c) + G_T(f + f_c)]$$

## Upconverter – a definição da frequência central $f_c$ do canal de largura $W$

Por exemplo, consideremos o trem de pulsos gerados por um *shaping filter* Gaussiano com resposta  $g_T(t) = K_0 e^{-\pi \left(\frac{t-T}{\tau}\right)^2}$ ,  $K_0 = 7 \times 10^6$  e  $\tau = 0.022\mu\text{s}$ , que faz a contenção espectral em um modulador digital cujo SymbolRate=18MHz e  $T = 1/\text{SymbolRate} = 1/18\text{MHz} = 0.056\mu\text{s}$ . O gráfico da magnitude do espectro  $|G_T(f)| = K_0 \tau e^{-\pi f^2 \tau^2}$  do trem de pulsos antes do *upconverter* é conforme abaixo:



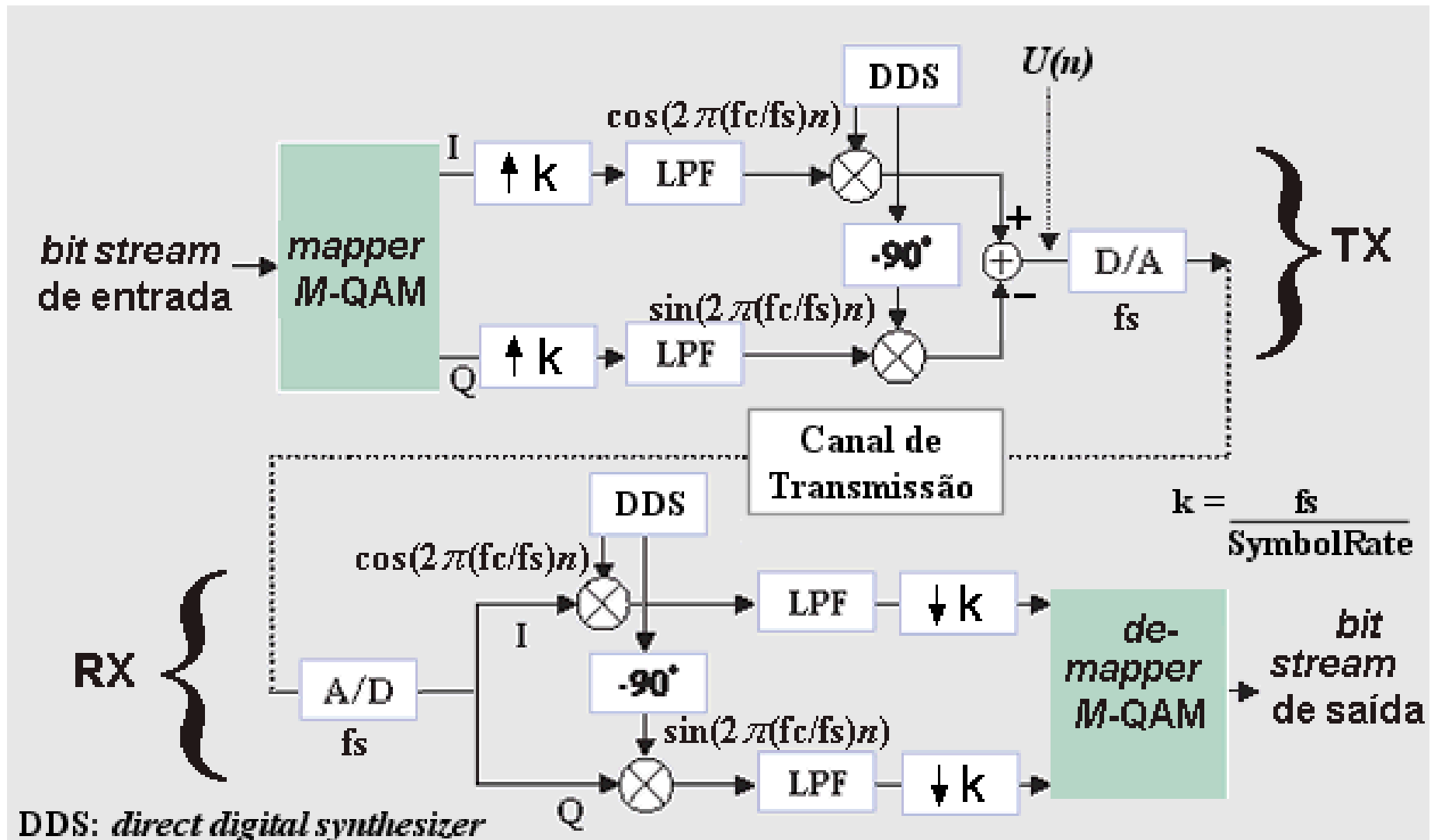
O modulador efetua a **heterodinação** entre o sinal  $s_m(t)$  e  $\cos 2\pi f_c t$  no ramo **I** e efetua a **heterodinação** entre o sinal  $s_m(t)$  e  $\sin 2\pi f_c t$  no ramo **Q**, sendo  $f_c = 100\text{MHz}$  a frequência central do canal. O gráfico da magnitude do espectro do sinal  $u_m(t)$  na saída do *upconverter* é conforme abaixo.



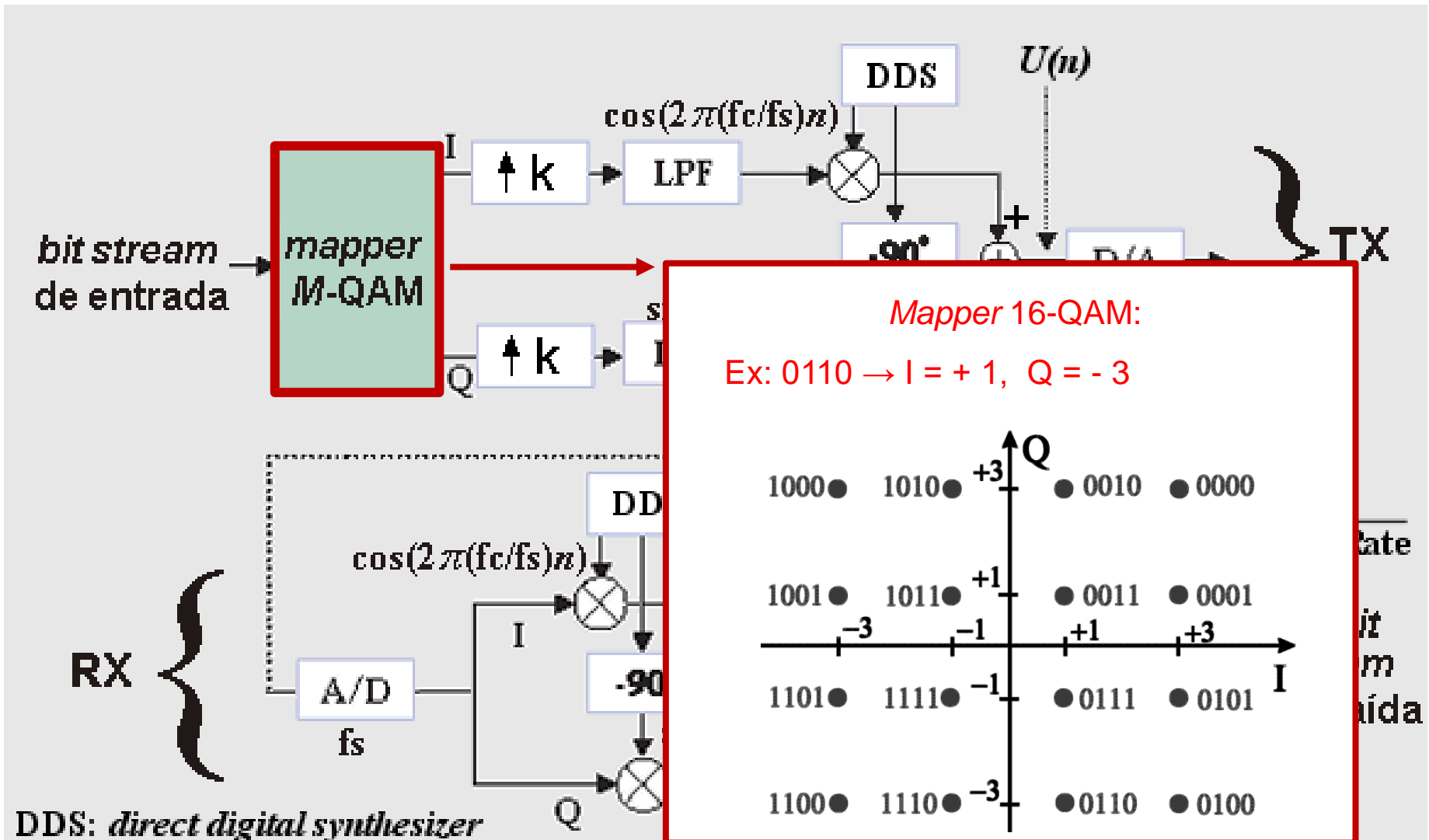
$$U_m(f) = \frac{A}{2} [G_T(f - f_c) + G_T(f + f_c)]$$



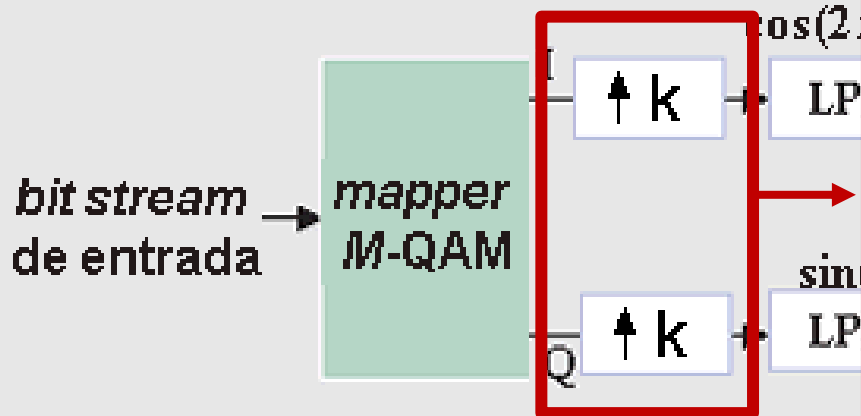
# Sumário das operações/processos em um modulador digital



# Sumário das operações/processos em um modulador digital

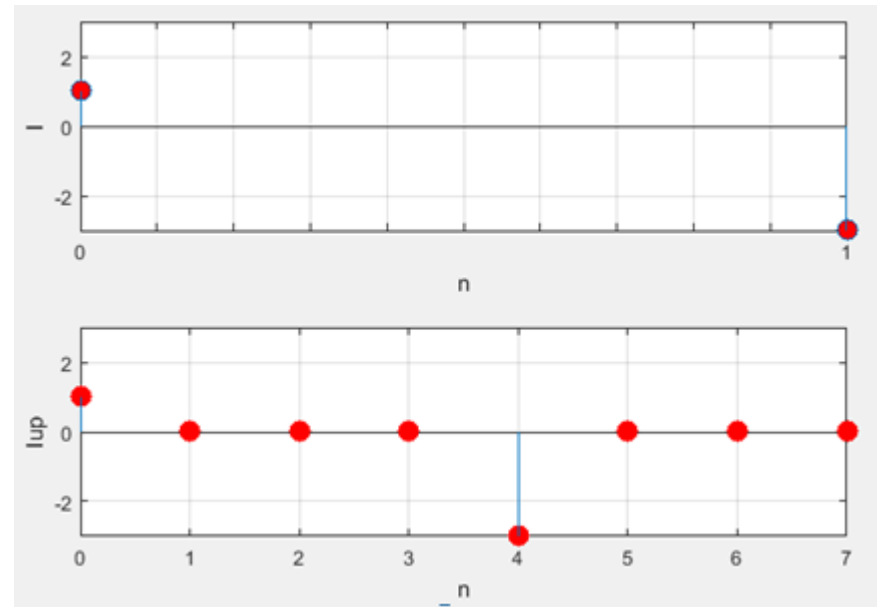
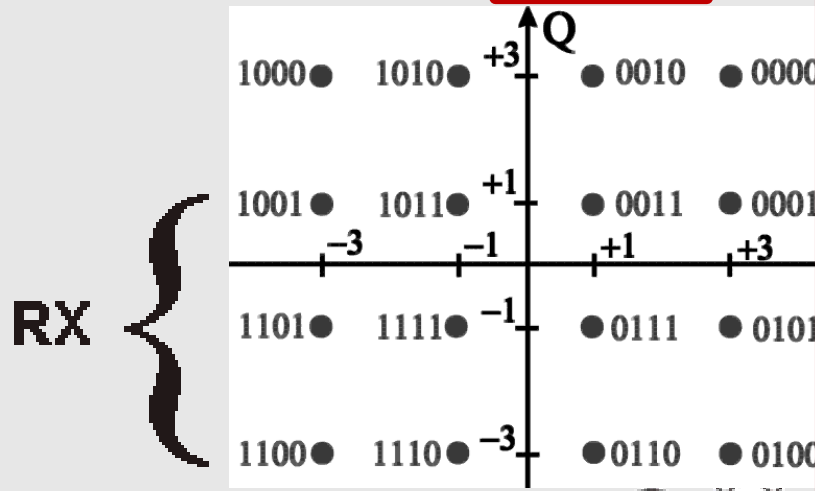


# Sumário das operações/processos em um modulador digital



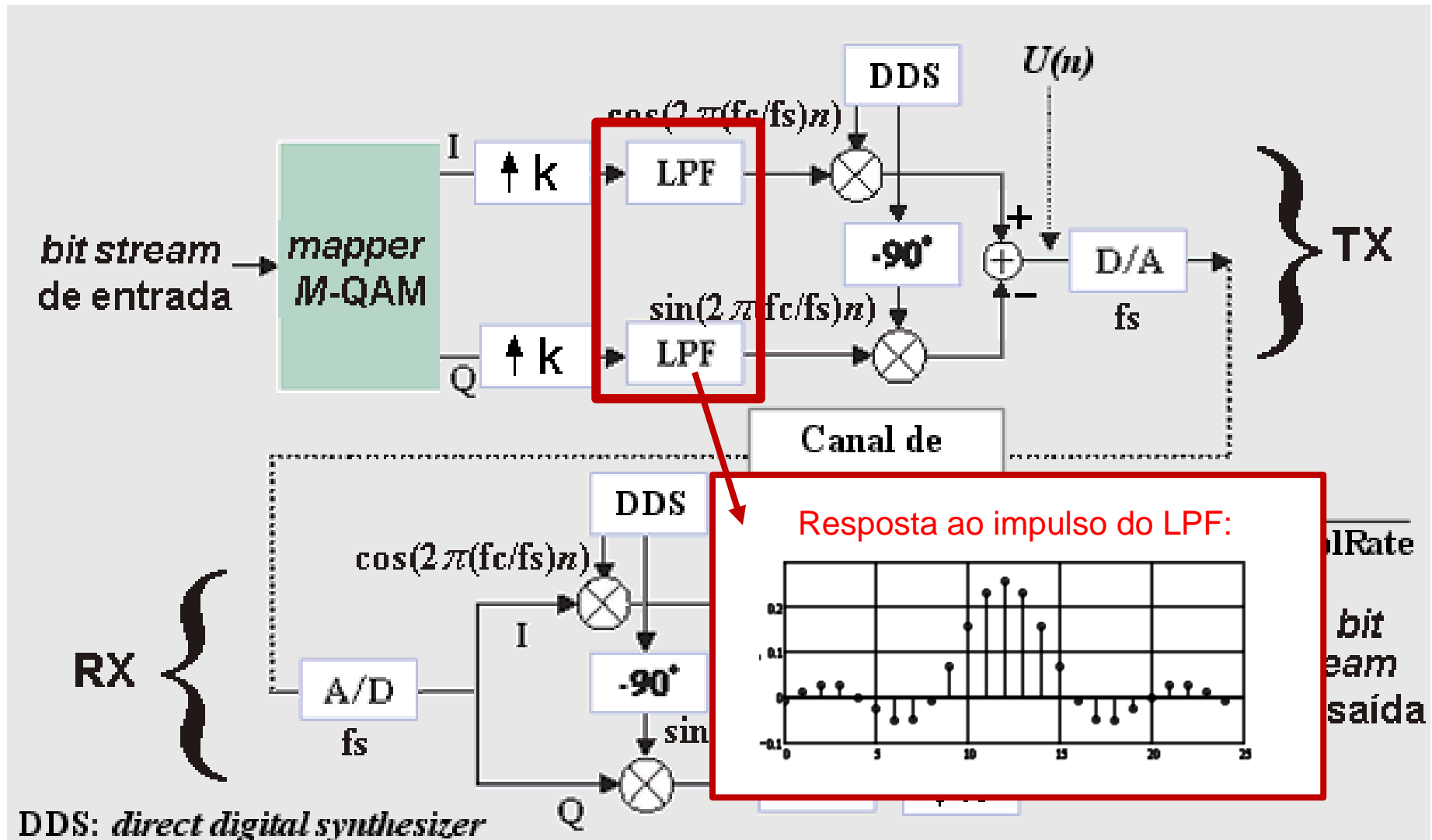
*Upsampler*: um *upsampler* de ordem  $k$  insere  $k - 1$  valores nulos entre duas amostras consecutivas dentro do intervalo de um símbolo.

Ex:  $k = 4$



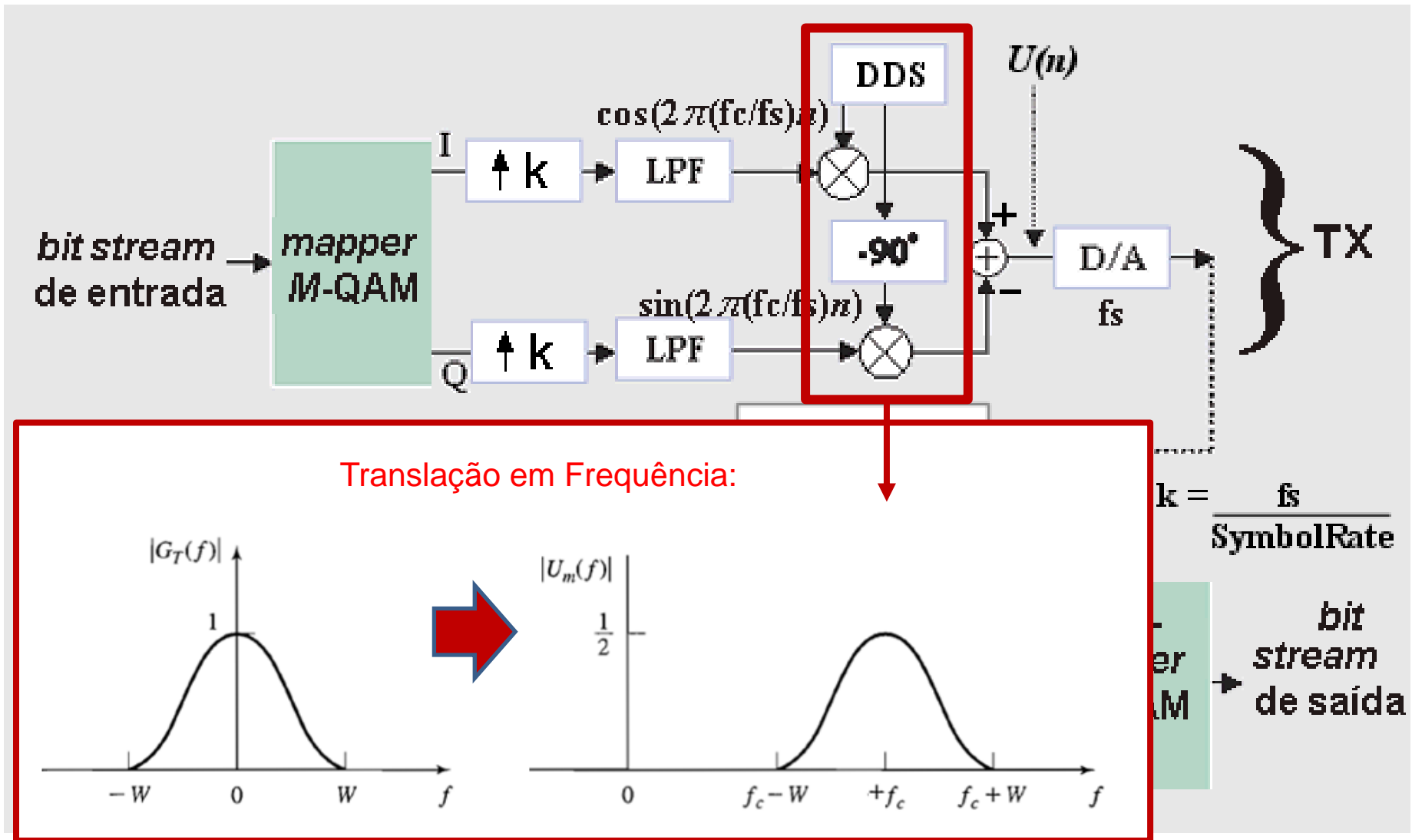
DDS: *direct digital synthesizer*

# Sumário das operações/processos em um modulador digital

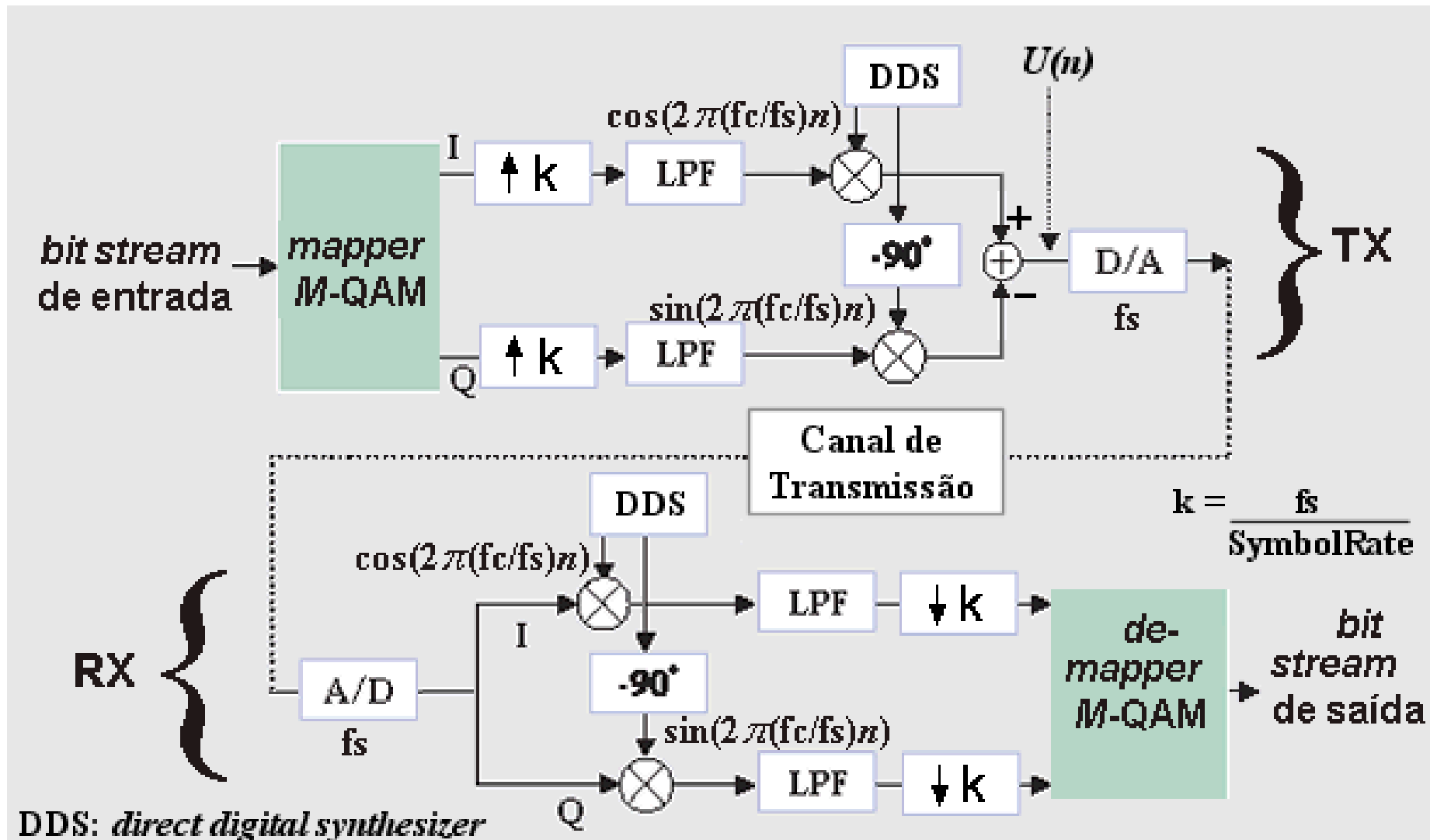


DDS: *direct digital synthesizer*

# Sumário das operações/processos em um modulador digital



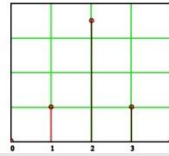
## Sumário das operações/processos em um modulador digital



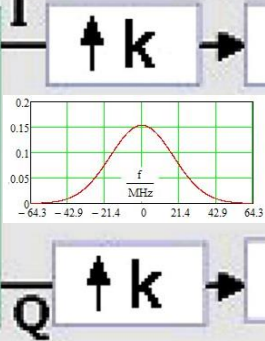
Sumário dos processos e sinais nos domínios tempo e frequência na operação conjunta do modulador (slide 3) e demodulador

LUT – Look Up Table (TX)

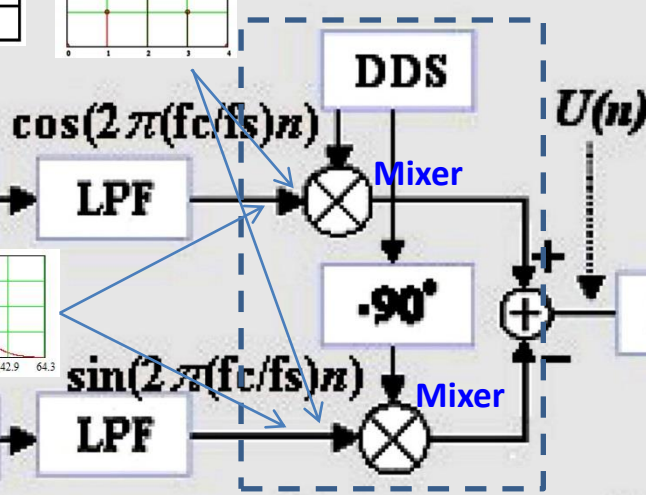
I: [b <sub>3</sub> b <sub>1</sub> ]		Q: [b <sub>2</sub> b <sub>0</sub> ]	
00	+3	00	+3
01	+1	01	+1
11	-1	11	-1
10	-3	10	-3



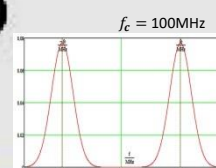
bit stream de entrada



Upconverter



DDS: *direct digital synthesizer*



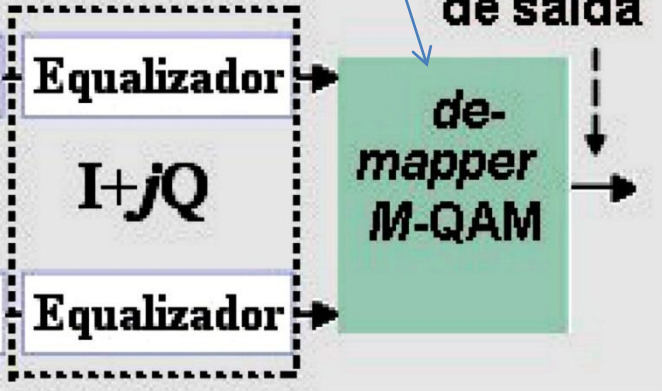
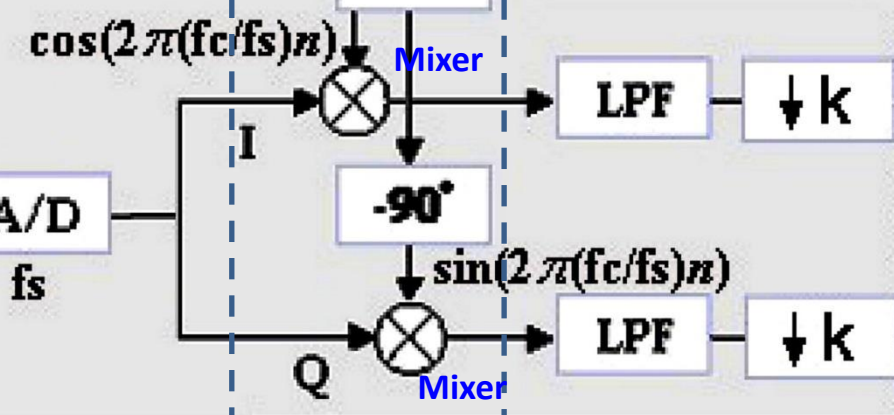
$$k = \frac{f_s}{\text{SymbolRate}}$$

TX  
LUT - Look Up Table (RX)

I: [b <sub>3</sub> b <sub>1</sub> ]		Q: [b <sub>2</sub> b <sub>0</sub> ]	
NN{+3}	00	NN{+3}	00
NN{+1}	01	NN{+1}	01
NN{-1}	11	NN{-1}	11
NN{-3}	10	NN{-3}	10

Canal de Transmissão

Downconverter

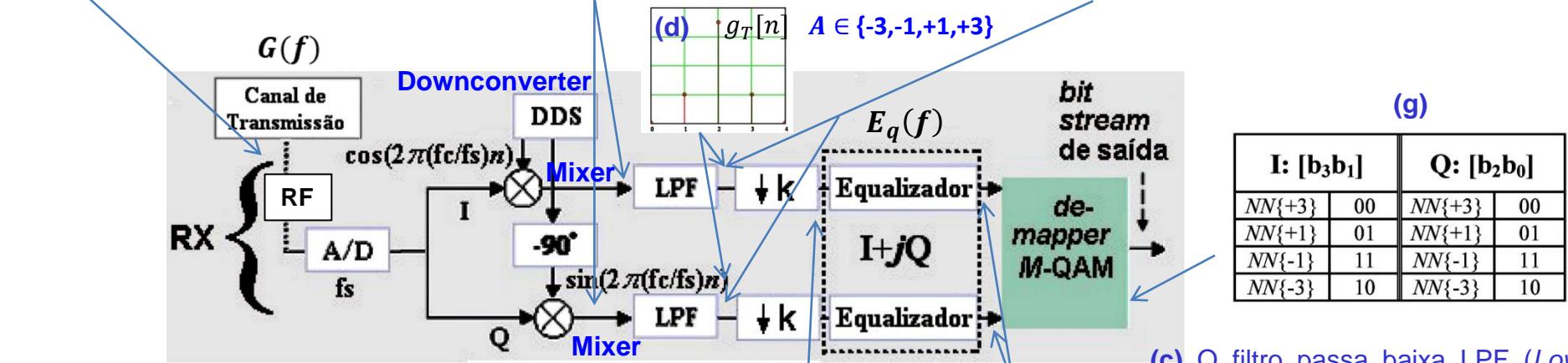
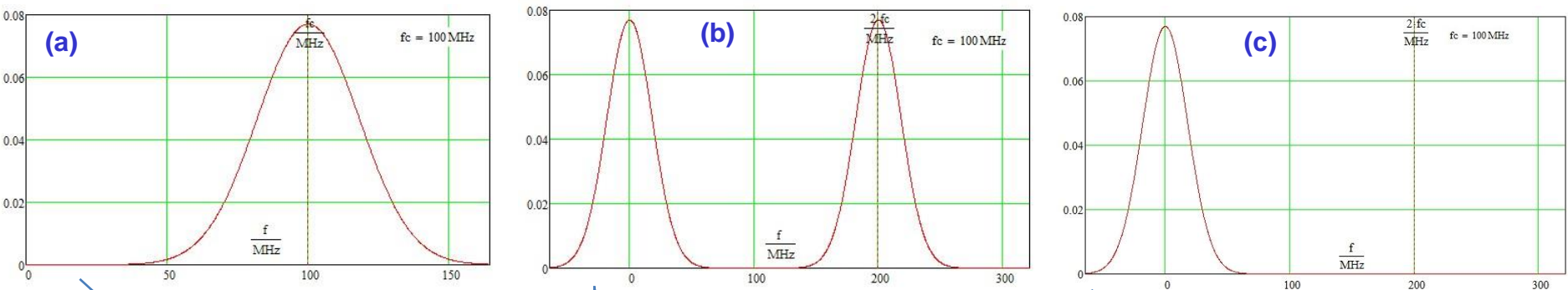


bit stream de saída

RX

NN{·} é o operador *Nearest Neighbour* (vizinho mais próximo), o qual retorna “Verdadeiro” quando o valor de entrada na coluna esquerda da LUT RX é o vizinho mais próximo (menor distância Euclidiana) de seu argumento {·}, e retorna “Falso” em caso contrário.

# Processos e sinais nos domínios tempo e frequência na operação do demodulador

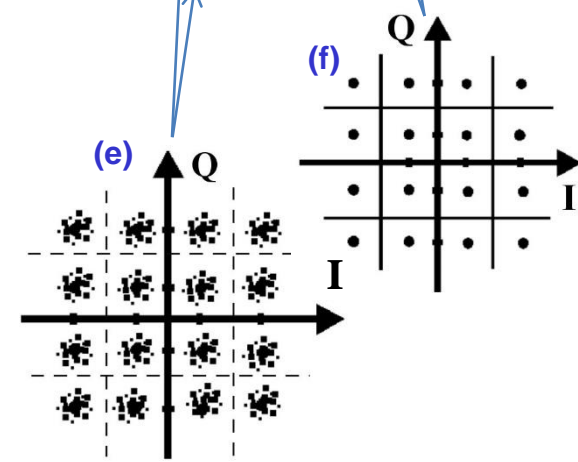


**(a)** O sinal centrado em 100 MHz é recebido do canal de transmissão e o AGC (*Automatic Gain Control*) do *front-end* de RF ajusta a amplitude do sinal de RF de modo que a magnitude dos símbolos IQ ( $s = I + jQ$ ) na saída do Equalizador se enquadrem no *frame* de decisão do *de-mapper*.

**(b)** O downconverter efetua o processo de heterodinação trazendo o espectro centrado em 100MHz para bandabase (centrado em  $f = 0$  Hz) e gerando um espectro adicional, que é o produto da heterodinação centrado em 200MHz.

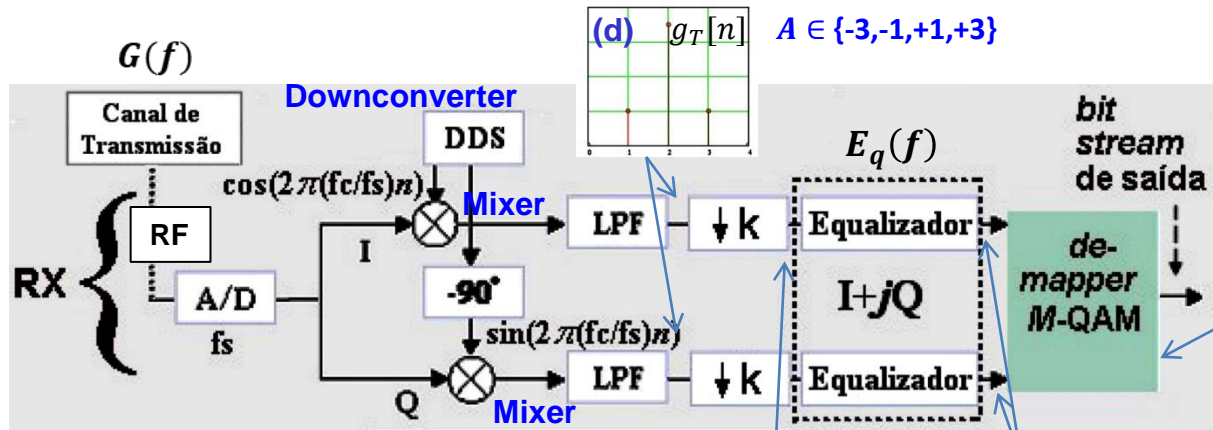
**(c)** O filtro passa baixa LPF (*Low Pass Filter*) elimina o produto de heterodinação em 200MHz restando apenas o espectro do sinal em bandabase .

**(d)** O espectro bandabase referido em (c) corresponde no domínio tempo ao pulso  $g_T[n]$  ( $p/K_s = 4$ ) cujas amplitudes  $A \in \{-3,-1,+1,+3\}$  dependem das palavras binárias na entrada das LUTs no modulador (ver slide 3) que foram originalmente transmitidas.

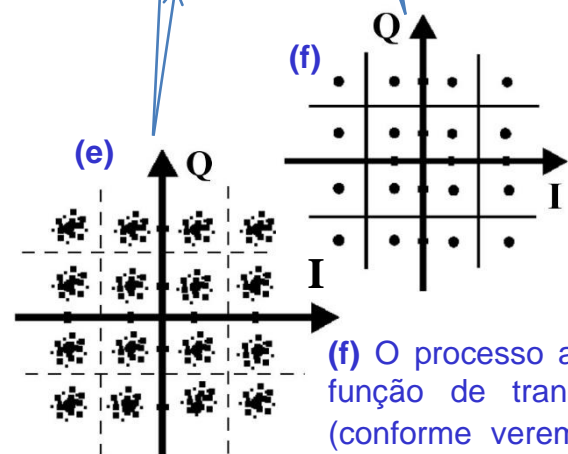




# Processos e sinais nos domínios tempo e frequência na operação do demodulador



(e) Os *downsamplers*  $\downarrow k$  do ramo I e Q selecionam a maior amostra dentre as  $K_s = 4$  e entregam para o equalizador uma sequência de símbolos IQ com ISI. A ISI é observada em (e) pela dispersão dos símbolos IQ em torno dos símbolos de referência da constelação 16-QAM. A ISI observada nos símbolos IQ em (e) é decorrente da superposição de símbolos IQ no domínio tempo causada pelo *multipath* no canal de transmissão, e tem como causa no domínio frequência  $f$  a ocorrência de zeros na função de transferência  $G(f)$  do canal. Os zeros são estabelecidos pela interferência destrutiva originada da superposição de ondas no cenário de *multipath* no canal, causando *notches* em  $G(f)$ , conforme Cap II das notas de aula. A superposição de ondas no canal é o fenômeno que implica simultaneamente na superposição de símbolos IQ na entrada do equalizador, gerando ISI (*Inter Symbol Interference* – interferência intersimbólica) conforme mostra (e).



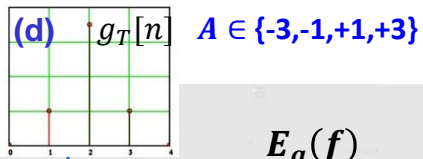
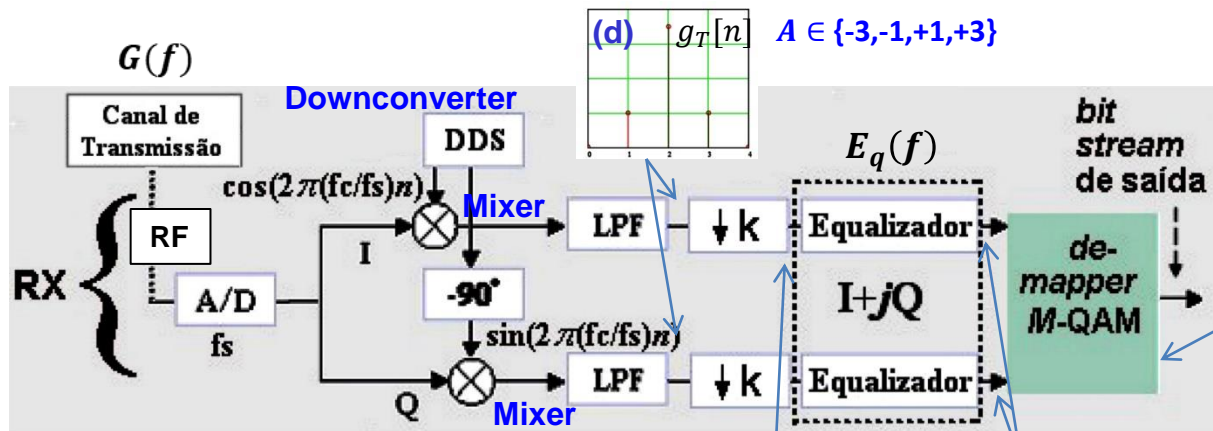
(f) O processo adaptativo do equalizador ajusta a função de transferência  $E_q(f)$  do equalizador (conforme veremos em capítulos posteriores) de modo a que a mesma implemente a função de transferência  $G^{-1}(f)$  do canal (os polos de  $E_q(f)$  cancelam os zeros de  $G(f)$ ). Nesta situação o RX “vê” o canal como um canal AWGN, conforme discutido no Cap II das notas de aula. Se a SNR no canal for alta (SNR>60dB), que é o caso mostrado em (f), o conjunto de símbolos IQ originalmente transmitidos é recuperado com mínima dispersão em torno dos símbolos IQ de referência da constelação 16-QAM.

(g)

I: $[b_3b_1]$		Q: $[b_2b_0]$	
$NN\{+3\}$	00	$NN\{+3\}$	00
$NN\{+1\}$	01	$NN\{+1\}$	01
$NN\{-1\}$	11	$NN\{-1\}$	11
$NN\{-3\}$	10	$NN\{-3\}$	10

$NN\{\cdot\}$  é o operador *Nearest Neighbour* (vizinho mais próximo), o qual retorna “Verdadeiro” quando o valor de entrada na coluna esquerda da LUT RX é o vizinho mais próximo (menor distância Euclidiana) de seu argumento  $\{\cdot\}$ , e retorna “Falso” em caso contrário.

# Processos e sinais nos domínios tempo e frequência na operação do demodulador

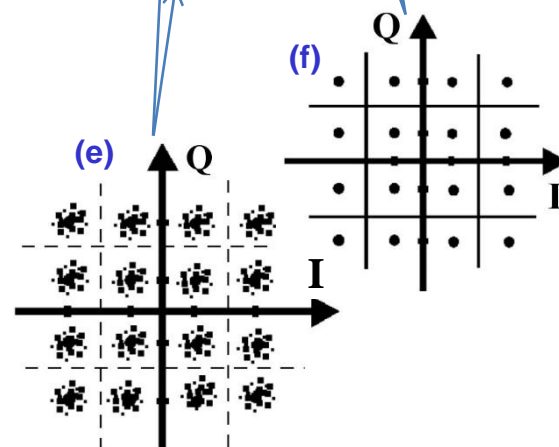


(g)

I: [b <sub>3</sub> b <sub>1</sub> ]		Q: [b <sub>2</sub> b <sub>0</sub> ]	
NN{+3}	00	NN{+3}	00
NN{+1}	01	NN{+1}	01
NN{-1}	11	NN{-1}	11
NN{-3}	10	NN{-3}	10

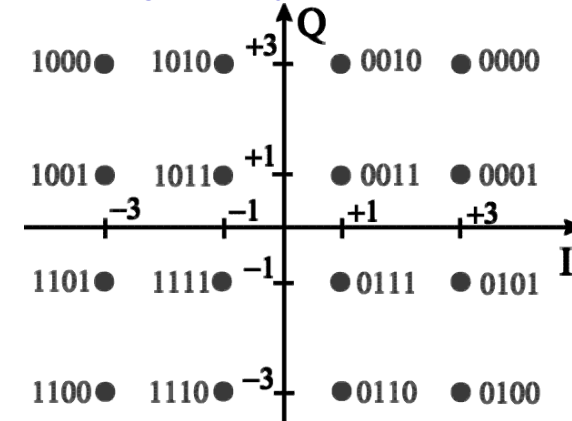
NN{.} é o operador *Nearest Neighbour* (vizinho mais próximo), o qual retorna “Verdadeiro” quando o valor de entrada na coluna esquerda da LUT RX é o vizinho mais próximo (menor distância Euclidiana) de seu argumento {.}, e retorna “Falso” em caso contrário.

(g) O equalizador entrega p/ o *de-mapper* uma sequência de símbolos IQ com ISI mínima. A ISI mínima é observada em (f) pela quase total ausência de dispersão dos símbolos equalizados em torno dos símbolos IQ de referência da constelação 16-QAM. Os símbolos IQ de referência  $I_{ref} + jQ_{ref}$  da constelação 16-QAM e respectivas palavras binárias [b<sub>3</sub> b<sub>2</sub> b<sub>1</sub> b<sub>0</sub>] associadas são mostrados em (h). Para cada símbolo  $s = I + jQ$  entregue pelo equalizador ao *de-mapper* este calcula a distância euclidiana entre  $s$  e todos os 16 símbolos IQ de referência  $I_{ref} + jQ_{ref}$  da constelação 16-QAM.



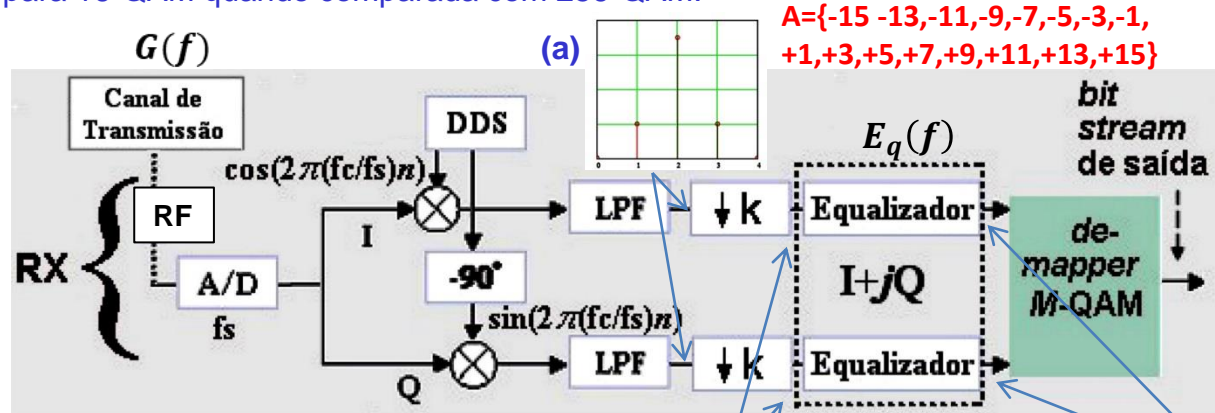
Para o símbolo  $I_{ref} + jQ_{ref}$  que apresentar a menor distância euclidiana ao símbolo  $s = I + jQ$  dentre as 16 distâncias que foram calculadas, o *de-mapper* decide que este símbolo de referência é o símbolo IQ originalmente transmitido e a respectiva palavra binária [b<sub>3</sub> b<sub>2</sub> b<sub>1</sub> b<sub>0</sub>] associada é considerada a palavra binária transmitida. Isto equivale a verificar a qual região de decisão (região de decisão = cada um dos 16 quadrados em (e) e (f)) o símbolo  $s$  pertence e considerar como símbolo IQ transmitido (e [b<sub>3</sub> b<sub>2</sub> b<sub>1</sub> b<sub>0</sub>] associada) o símbolo  $I_{ref} + jQ_{ref}$  no centro da respectiva região de decisão. Isto também equivale ao operador *Nearest Neighbour* (vizinho mais próximo) selecionar (através do valor de retorno V ou F) a correspondente linha das LUTs I e Q em (g) e retornar as respectivas palavras binárias [b<sub>3</sub> b<sub>1</sub>] e [b<sub>2</sub> b<sub>0</sub>] que formam a palavra binária [b<sub>3</sub> b<sub>2</sub> b<sub>1</sub> b<sub>0</sub>].

(h) [b<sub>3</sub> b<sub>2</sub> b<sub>1</sub> b<sub>0</sub>] ↔  $I_{ref} + jQ_{ref}$



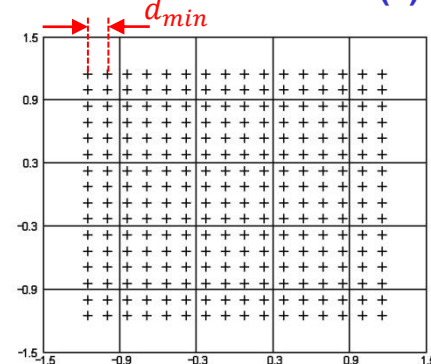
A robustez da modulação é expressa pela capacidade do *de-mapper* decidir corretamente qual palavra binária foi transmitida em presença de um determinado nível de ruído e de *multipath* no canal, mas a robustez da modulação é reduzida com o aumento do número  $M$  de símbolos de referência da modulação  $M$ -QAM (Nbits/símbolo =  $\log_2 M$ ):

Por exemplo, a taxa de transmissão do modulador 16-QAM com SR=10 Msymb/s do slide 3 é 10 Msymb/s x 4 bits/symb = 40 Mbps. Para aumentar a taxa de transmissão podemos utilizar uma modulação 256-QAM (ver (d)) ao invés da modulação 16-QAM, situação em que a taxa de transmissão aumenta para 10 Msymb/s x 8 bits/symb = 80 Mbps. Mas daí a consequência é que as regiões de decisão em (c) (em cor magenta) da constelação 256-QAM resultam 4 vezes menores do que as regiões de decisão de 16-QAM. Portanto a modulação 256-QAM é 4 vezes menos robusta que 16-QAM porque uma dispersão de símbolos 4 vezes menor em torno dos símbolos IQ de referência da constelação 256-QAM já é suficiente para que o *de-mapper* tome uma decisão errada e gere uma palavra binária no *bit stream* de saída que não corresponde à palavra binária originalmente transmitida. Uma interpretação alternativa é que a distância euclidiana entre símbolos adjacentes, denominada **distância mínima  $d_{min}$** , é quatro vezes maior para 16-QAM quando comparada com 256-QAM.

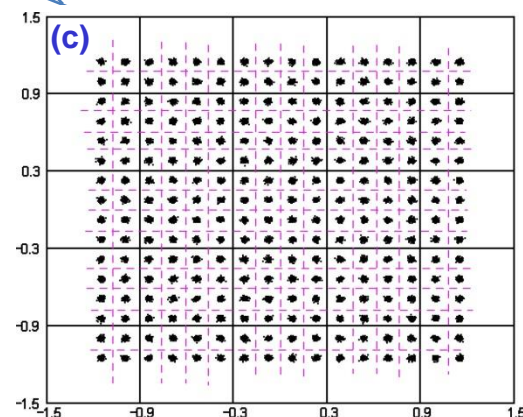
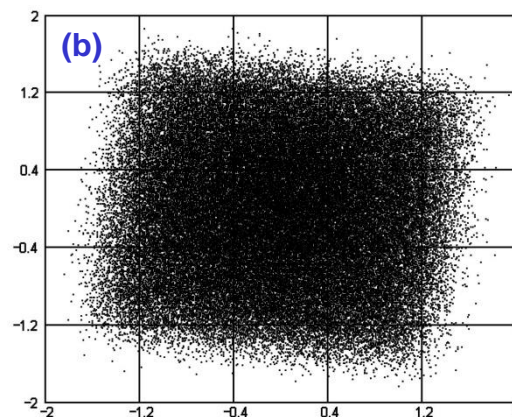


$A = \{-15, -13, -11, -9, -7, -5, -3, -1, +1, +3, +5, +7, +9, +11, +13, +15\}$

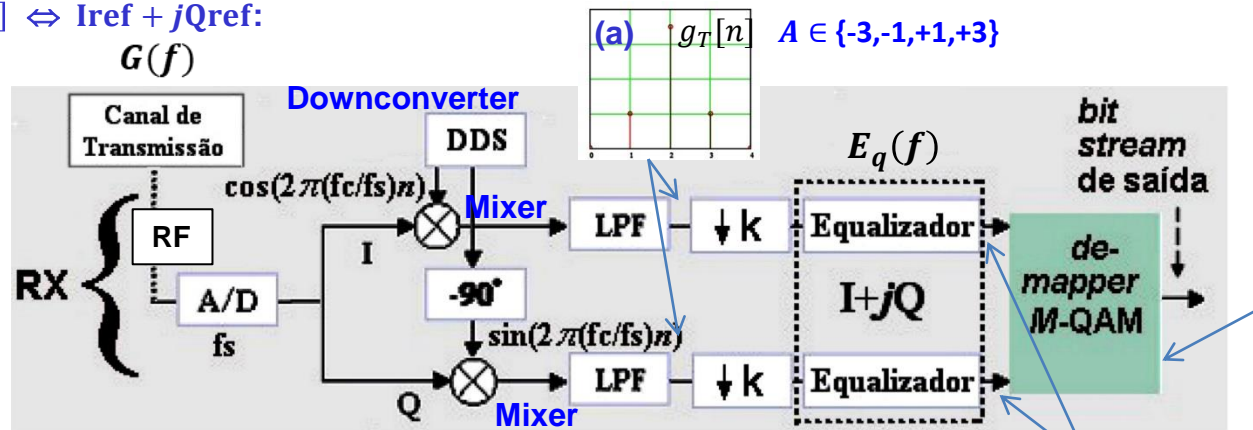
Constelação 256-QAM de referência (normalizada p/ potência unitária): (d)



(b&c) O processo adaptativo do equalizador ajusta a função de transferência  $E_q(f)$  do equalizador (conforme veremos em capítulos posteriores) de modo a que a mesma implemente a função de transferência  $G^{-1}(f)$  do canal (os polos de  $E_q(f)$  cancelam os zeros de  $G(f)$ ). Nesta situação o RX “vê” o canal como um canal AWGN, conforme discutido no Cap II das notas de aula. Se a SNR no canal for alta (SNR>60dB), que é o caso mostrado em (c), o conjunto de símbolos IQ originalmente transmitidos é recuperado com pouca dispersão residual em torno dos símbolos IQ de referência da constelação 256-QAM.



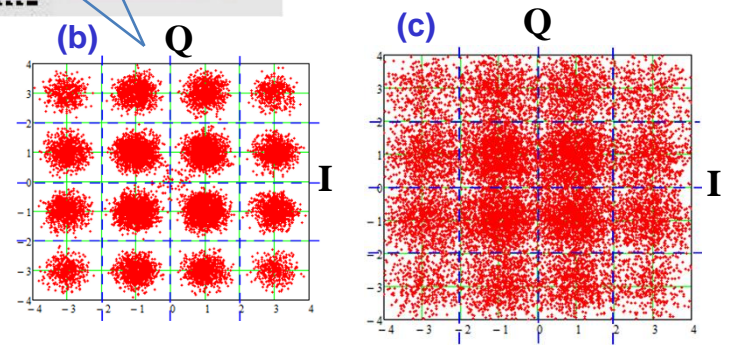
A dispersão residual em torno dos símbolos IQ de referência da constelação na entrada do de-mapper e o mapeamento  $[b_3 b_2 b_1 b_0] \Leftrightarrow I_{ref} + jQ_{ref}$ :



(e)

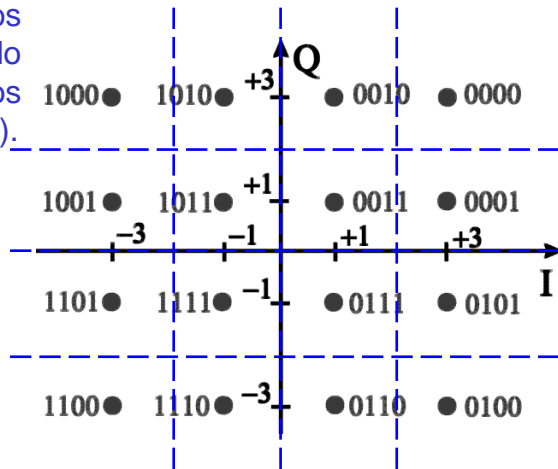
I: $[b_3 b_1]$		Q: $[b_2 b_0]$	
$NN\{+3\}$	00	$NN\{+3\}$	00
$NN\{+1\}$	01	$NN\{+1\}$	01
$NN\{-1\}$	11	$NN\{-1\}$	11
$NN\{-3\}$	10	$NN\{-3\}$	10

(b) Caso o processo adaptativo do equalizador falhe em ajustar a função de transferência  $E_q(f)$  do equalizador de modo que a mesma não consiga implementar a função de transferência  $G^{-1}(f)$  do canal então ocorrerá ISI residual (cujas origens são o *multipath* no canal) e a dispersão de símbolos em torno dos símbolos IQ de referência  $I_{ref} + jQ_{ref}$  da constelação 16-QAM será significativa na entrada do *de-mapper*, conforme mostrado em (b). Uma dispersão residual de símbolos significativa também pode decorrer em consequência de uma baixa SNR no canal.



(c) Se a causa da dispersão dos símbolos IQ na entrada do *de-mapper* for excessiva (SNR muito baixa ou excessiva ISI residual) as palavras binárias  $[b_3 b_2 b_1 b_0]$  associadas aos respectivos símbolos IQ originalmente transmitidos serão recuperadas com erro na saída do *de-mapper* para aqueles símbolos da "nuvem" de símbolos dispersos em torno dos símbolos  $I_{ref} + jQ_{ref}$  que invadirem uma das regiões de decisão adjacentes, conforme mostrado em (c).

(d)  $[b_3 b_2 b_1 b_0] \Leftrightarrow I_{ref} + jQ_{ref}$



(d) Em consequência da dispersão excessiva referida em (c) o mapeamento  $[b_3 b_2 b_1 b_0] \Leftrightarrow I_{ref} + jQ_{ref}$  mostrado em (d) é feito de tal maneira que palavras binárias  $[b_3 b_2 b_1 b_0]$  associadas à regiões de decisão adjacentes mantenham entre si uma distância de Hamming unitária (distância de Hamming unitária = somente um bit de diferença entre as palavras – ver [https://en.wikipedia.org/wiki/Gray\\_code](https://en.wikipedia.org/wiki/Gray_code)). Este mapeamento faz com que, caso a "nuvem" de símbolos dispersos em torno dos símbolos  $I_{ref} + jQ_{ref}$  invada uma das regiões de decisão adjacentes, os consequentes erros de decisão do *de-mapper* seja apenas de 1 bit, o que facilita o trabalho do código corretor de erro no Decodificador de Canal.

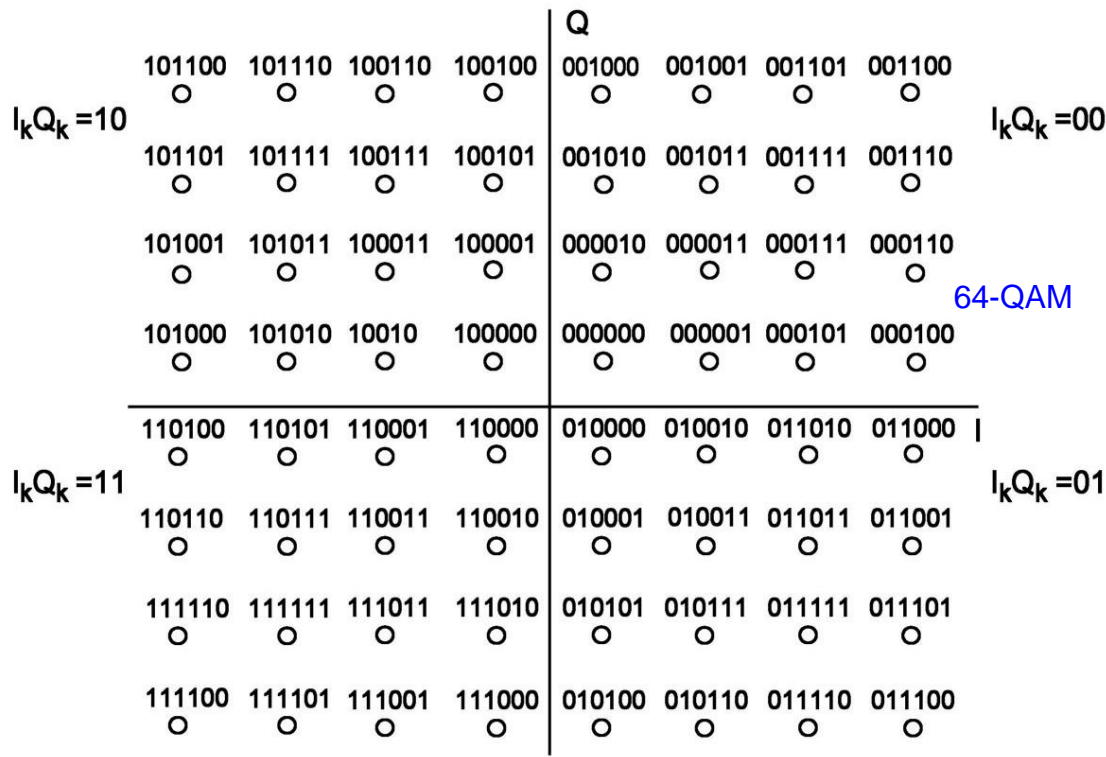
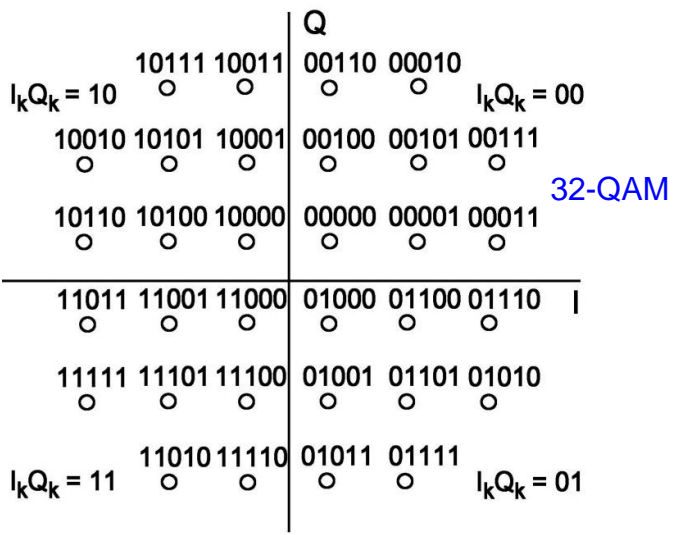
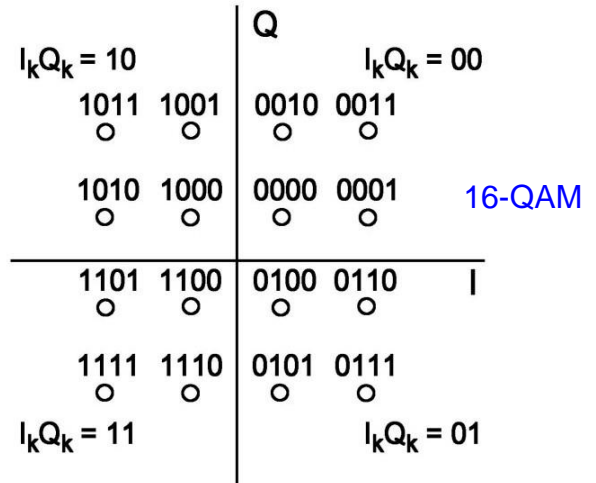
Tipos básicos de modulação em função da posição dos símbolos  $I_{ref} + jQ_{ref}$  no mapeamento  $[b_{N-1} \dots b_1 b_0] \Leftrightarrow I_{ref} + jQ_{ref}$ , sendo  $N = \log_2 M$  o número de bits transportados por cada símbolo IQ do conjunto de  $M$  símbolos  $I_{ref} + jQ_{ref}$  no mapa da constelação:

**M-QAM (Quadrature Amplitude Modulation):**

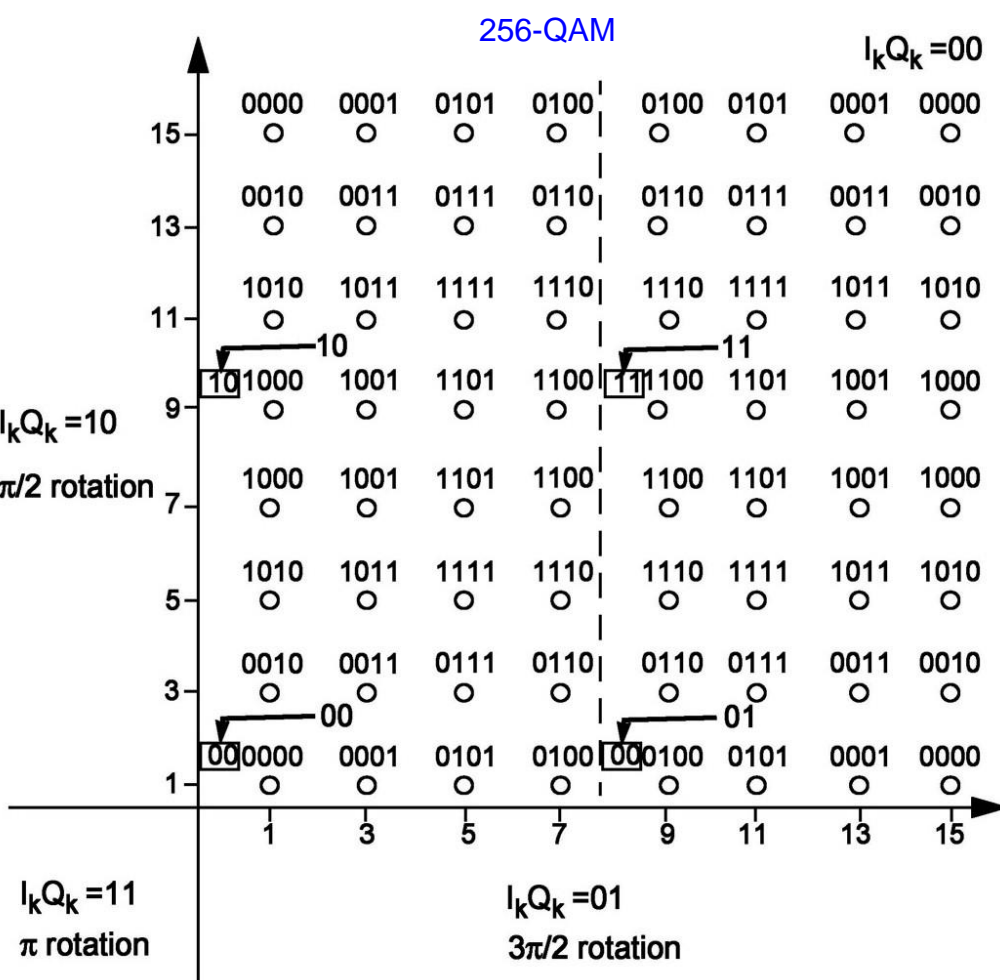
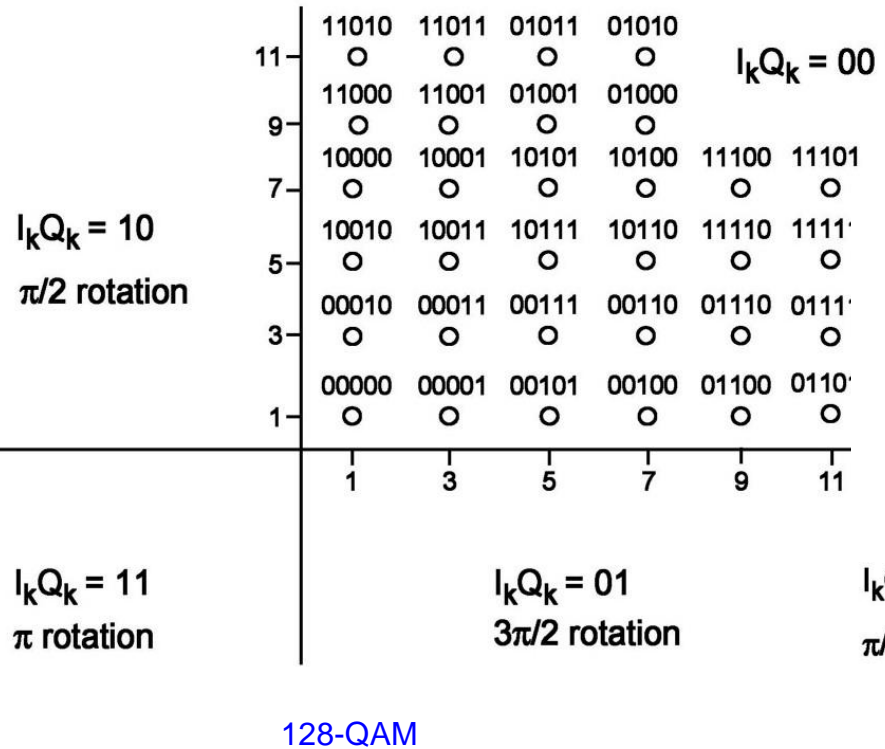
Nos mapas que seguem  $I_k Q_k$  são os 2 MSB (Most Significant Bit) em cada quadrante. Qualquer palavra binária associada a símbolos IQ no quadrante 1 da constelação é convertida para os quadrantes 2, 3 e 4 alterando os dois MSBs  $I_k Q_k$  conforme indicado em cada mapa e girando os  $N - 2$  LSB (Least Significant Bit) de acordo com a tabela abaixo.

**Conversion of Constellation Points**

Quadrant	Most Significant Bit	Least Significant Bit Rotation
1	00	
2	10	$\pi/2$
3	11	$\pi$
4	01	$3\pi/2$



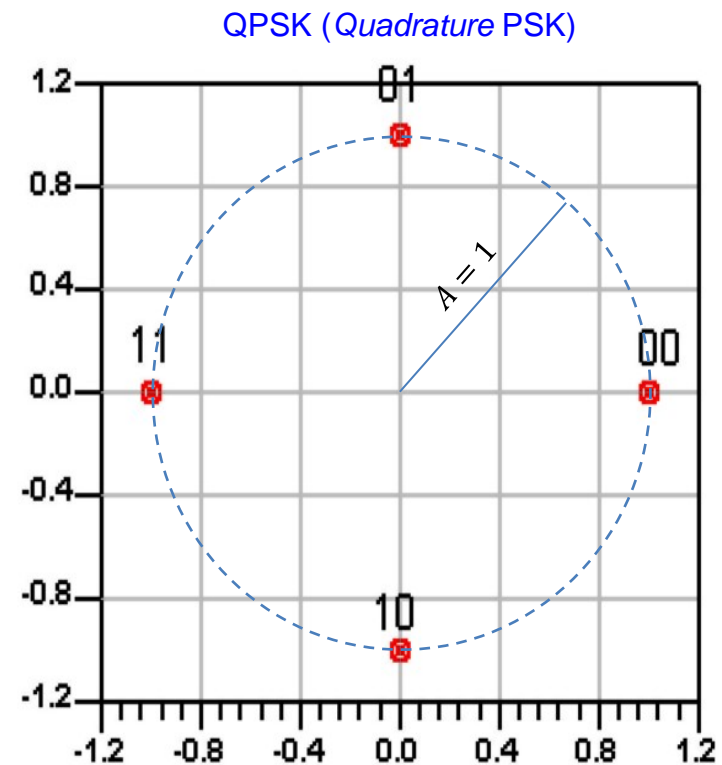
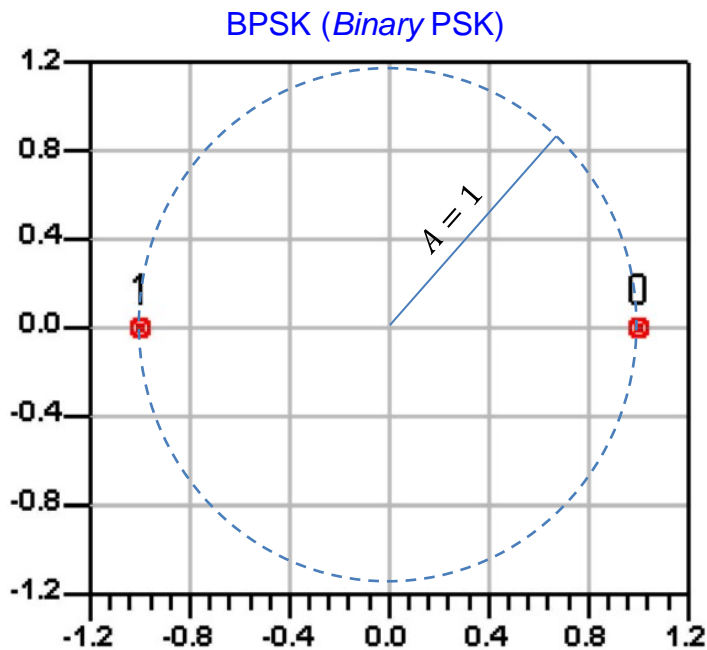
Tipos básicos de modulação em função da posição dos símbolos  $I_{ref} + jQ_{ref}$  no mapeamento  $[b_{N-1} \dots b_1 b_0] \leftrightarrow I_{ref} + jQ_{ref}$ , sendo  $N = \log_2 M$  o número de bits transportados por cada símbolo IQ do conjunto de  $M$  símbolos  $I_{ref} + jQ_{ref}$  no mapa da constelação:



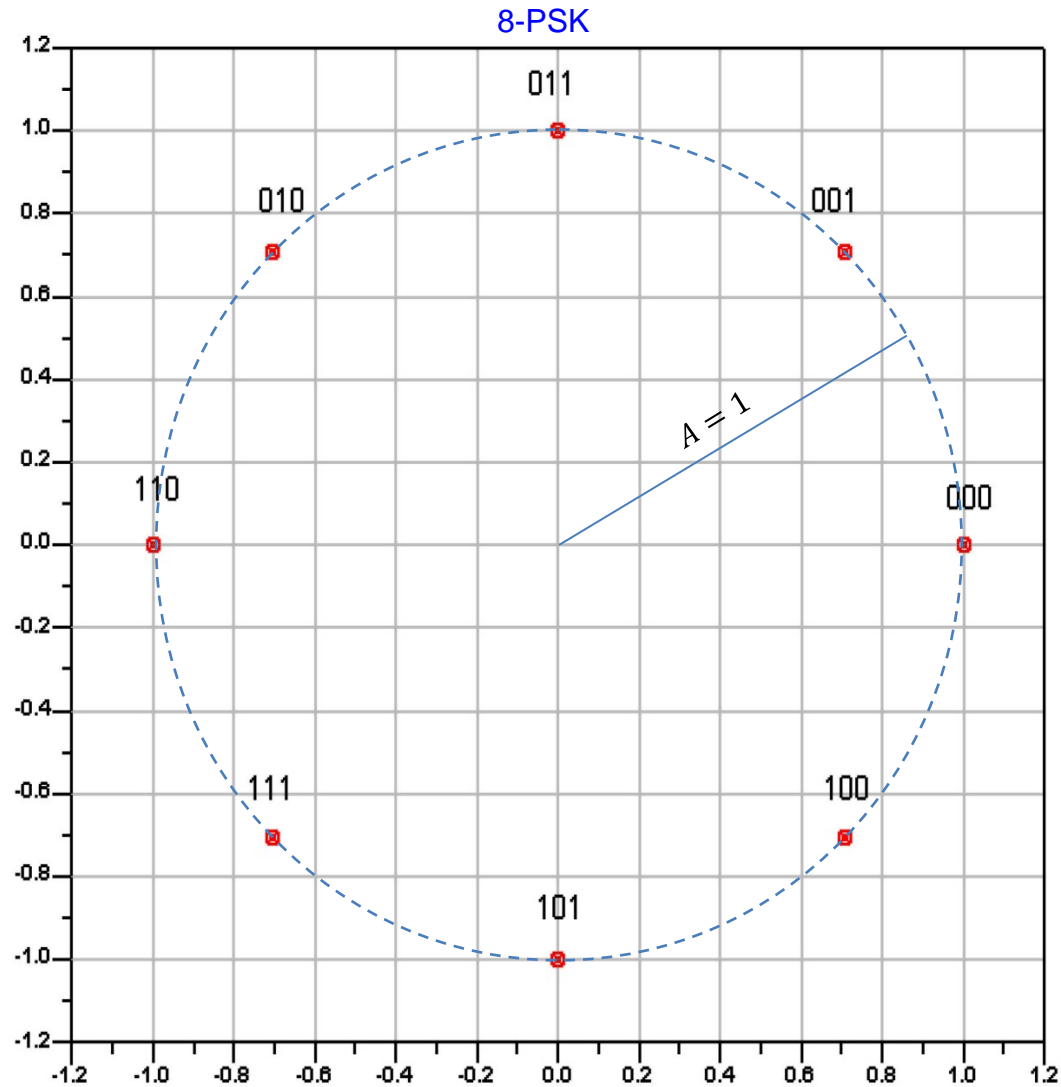
Tipos básicos de modulação em função da posição dos símbolos  $I_{\text{ref}} + jQ_{\text{ref}}$  no mapeamento  $[b_{N-1} \dots b_1 b_0] \Leftrightarrow I_{\text{ref}} + jQ_{\text{ref}}$ , sendo  $N = \log_2 M$  o número de bits transportados por cada símbolo IQ do conjunto de  $M$  símbolos  $I_{\text{ref}} + jQ_{\text{ref}}$  no mapa da constelação:

### M-PSK (Phase Shift Keying):

A constelação da modulação  $M$ -PSK tem seus  $M$  símbolos IQ de amplitude  $A$  uniformemente distribuídos ao longo de um círculo de raio  $A$ , conforme mostrado nos mapas que seguem.

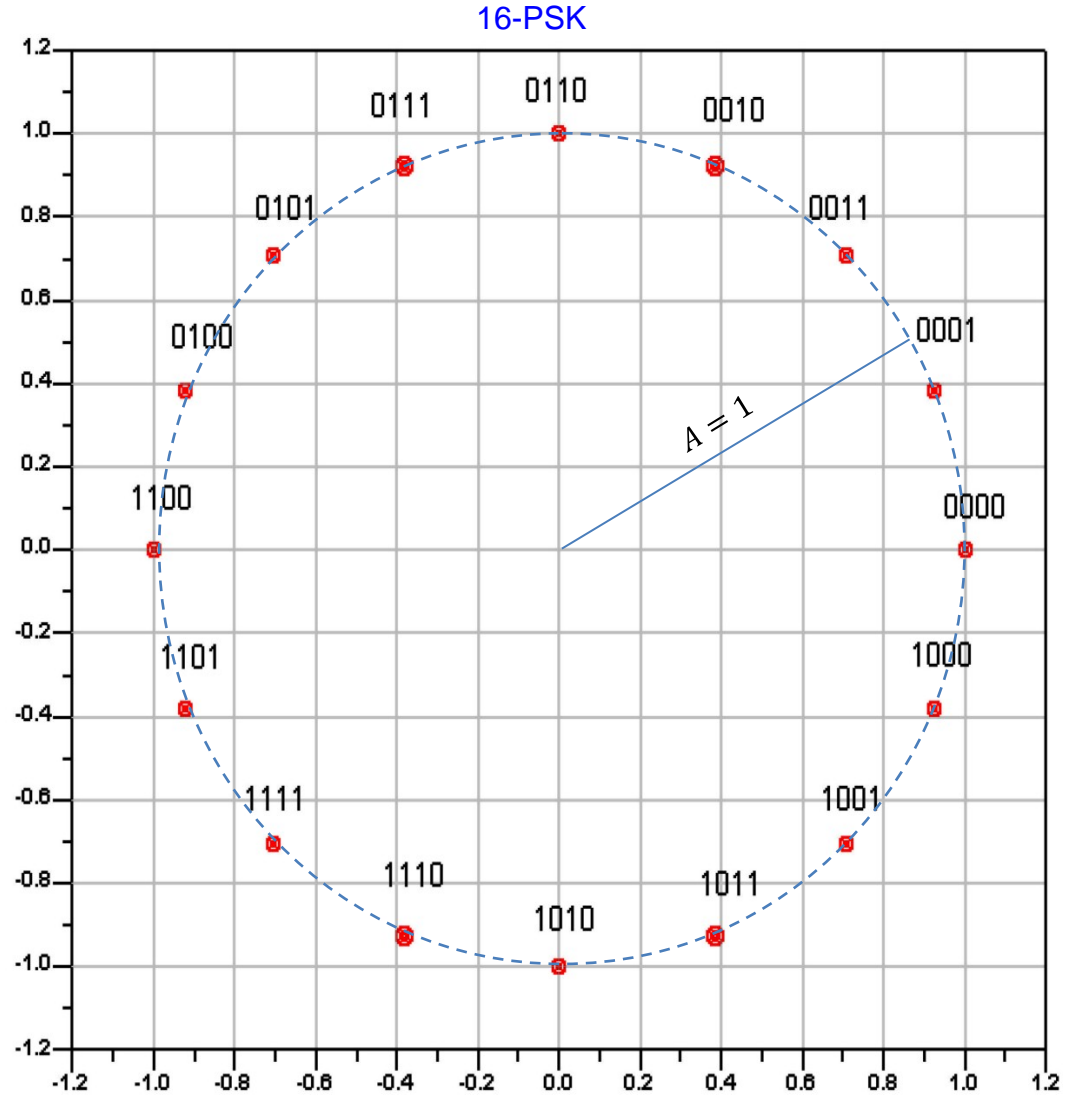


Tipos básicos de modulação em função da posição dos símbolos  $I_{ref} + jQ_{ref}$  no mapeamento  $[b_{N-1} \cdots b_1 b_0] \Leftrightarrow I_{ref} + jQ_{ref}$ , sendo  $N = \log_2 M$  o número de bits transportados por cada símbolo IQ do conjunto de  $M$  símbolos  $I_{ref} + jQ_{ref}$  no mapa da constelação:



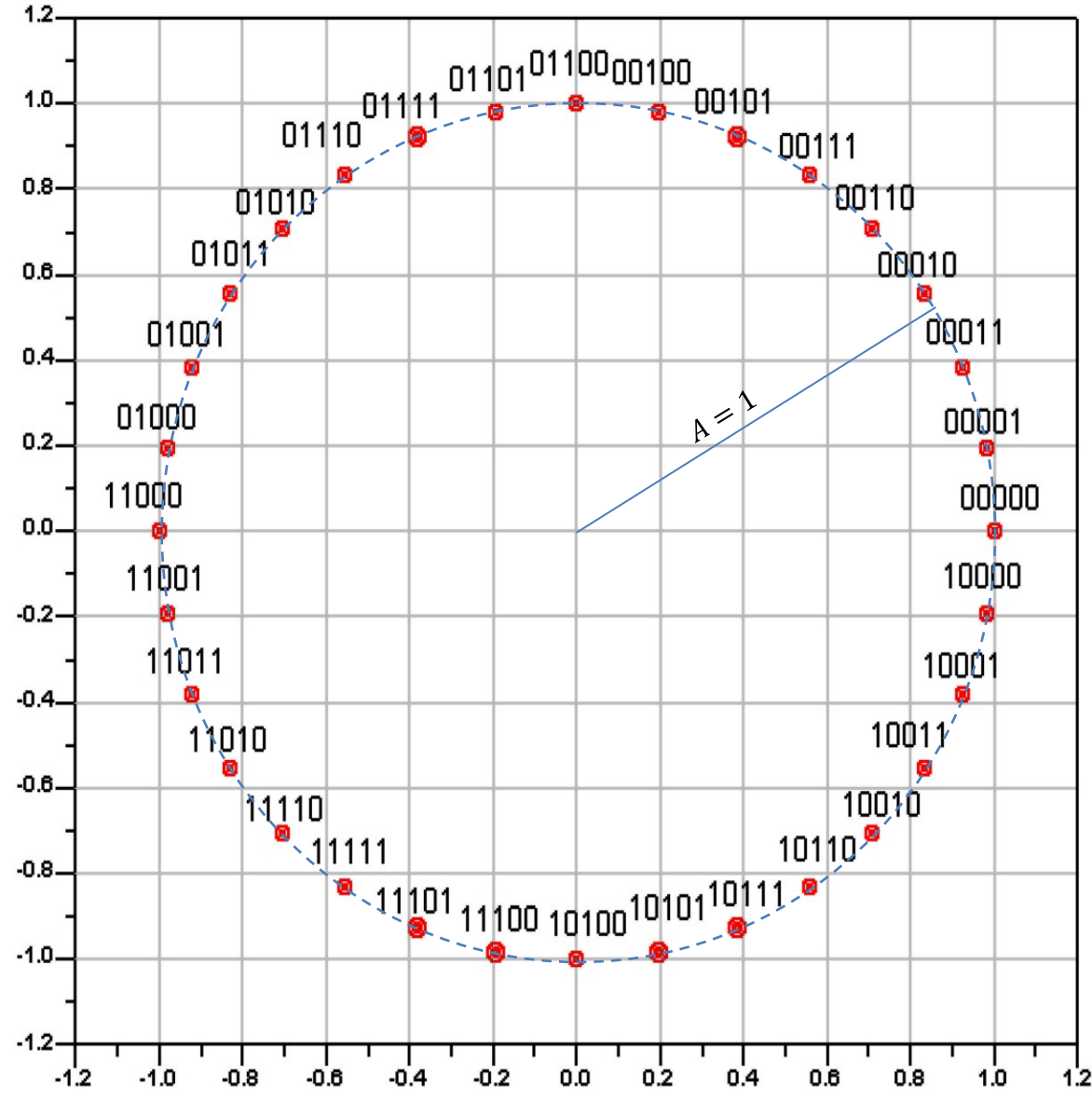


Tipos básicos de modulação em função da posição dos símbolos  $I_{ref} + jQ_{ref}$  no mapeamento  $[b_{N-1} \dots b_1 b_0] \Leftrightarrow I_{ref} + jQ_{ref}$ , sendo  $N = \log_2 M$  o número de bits transportados por cada símbolo IQ do conjunto de  $M$  símbolos  $I_{ref} + jQ_{ref}$  no mapa da constelação:



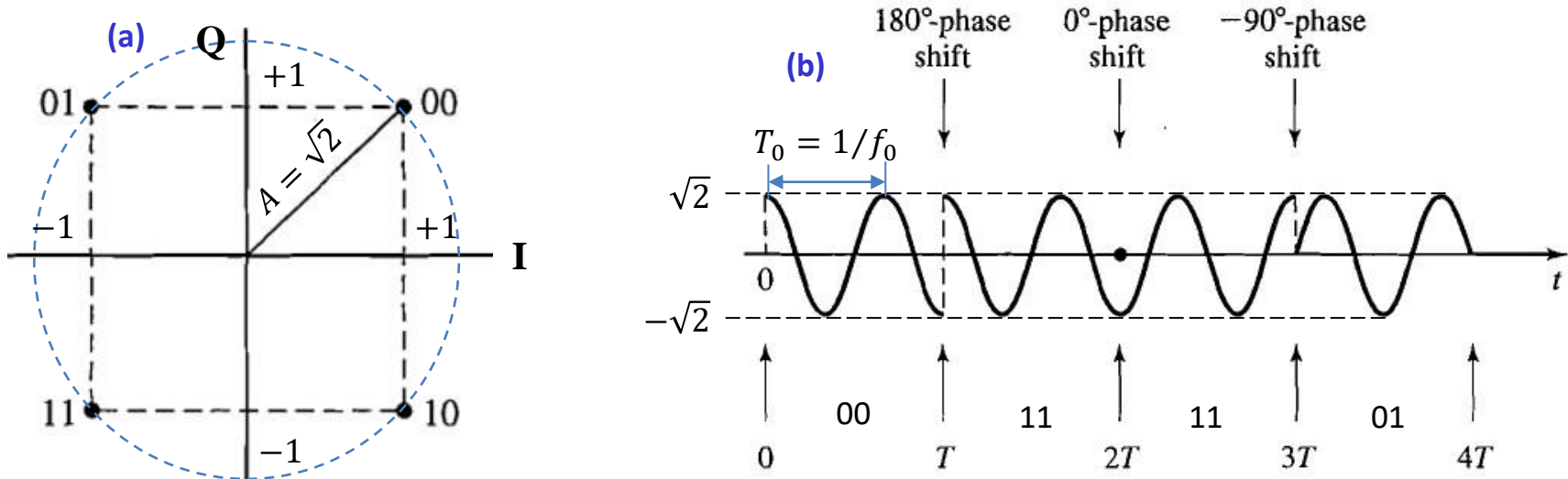
Tipos básicos de modulação em função da posição dos símbolos  $I_{ref} + jQ_{ref}$  no mapeamento  $[b_{N-1} \dots b_1 b_0] \Leftrightarrow I_{ref} + jQ_{ref}$ , sendo  $N = \log_2 M$  o número de bits transportados por cada símbolo IQ do conjunto de  $M$  símbolos  $I_{ref} + jQ_{ref}$  no mapa da constelação:

32-PSK



## Particularidades positivas e negativas da modulação M-PSK

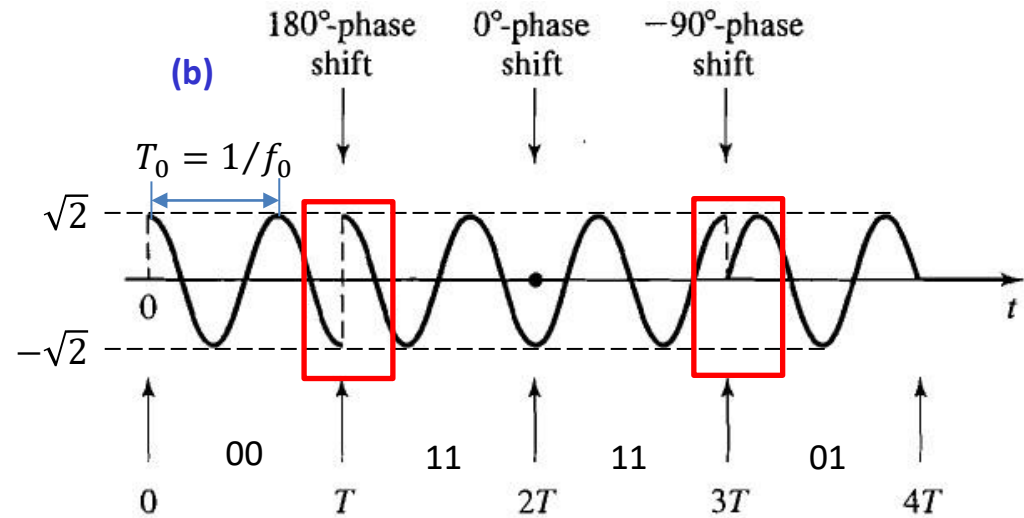
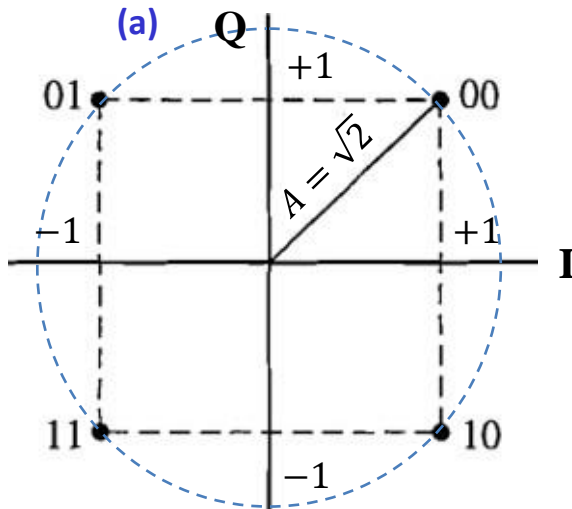
Consideremos a constelação QPSK mostrada abaixo em (a) e o sinal senoidal de frequência  $f_0$  resultante na saída do modulador mostrado no domínio tempo em (b). O sinal mostrado em (b) resulta da sequência de palavras binárias  $BitStream=\{00111101\}$  no *bit stream* na entrada do *mapper* QPSK na entrada do modulador (ver slide 3 p/ 16-QAM e considere QPSK como um “4-QAM”). O *symbol rate* do modulador é  $SR = 1/T$ , sendo T o período do símbolo IQ. O modulador em questão assume que não há *shaping filter* para contenção espectral no modulador, como é comum em *satcom links* para microssatélites LEO (*Low Earth Orbit*) de baixo custo, de modo que não há suavização das bordas de transição entre dois símbolos IQ consecutivos, conforme mostrado em (b).



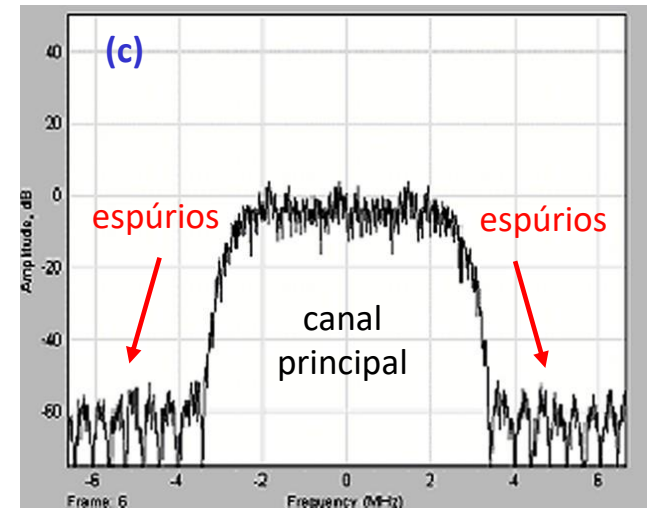
Note em (b) que a amplitude de pico  $A = \sqrt{2}$  da senoide de frequência  $f_0$  na saída do modulador é constante no tempo. Isto é uma grande vantagem das modulações M-PSK porque o HPA (*High Power Amplifier*) na saída do modulador (ver slide 3) pode relaxar a exigência de linearidade dado que o nível do sinal aplicado ao HPA é constante. Um sinal M-PSK pode excitar um amplificador classe C *narrowband* (não-linear mas de alta eficiência e de baixo custo – ver <https://www.electronics-tutorials.ws/amplifier/amplifier-classes.html>) sem que haja distorção de amplitude, porque a amplitude do sinal M-PSK é constante e o filtro LC sintonizado na saída do amplificador minimiza a distorção harmônica do sinal. Já as modulações M-QAM, com várias amplitudes de pico no sinal de saída no domínio tempo, demandam um amplificador linear, como os de classe A ou AB, de baixa eficiência e de alto custo resultante da exigência de linearidade (o ponto quiescente resultante da polarização dos transistores e a estabilidade do mesmo face à variações ambientais e variações de carga torna-se complexa).

## Particularidades positivas e negativas da modulação M-PSK

No entanto, note que as modulações M-PSK geram um amplo espectro de espúrios espectrais nos instantes em que ocorrem variações abruptas no sinal gerado no domínio tempo, conforme mostrado para QPSK realçado pelos retângulos vermelhos em (b) abaixo. Embora o *shaping filter* atenuate estes espúrios, ainda assim ocorre um aumento do nível de espúrios no espectro adjacente ao canal principal, conforme mostrado pelas setas vermelhas em (c) abaixo.



Estes espúrios espectrais são particularmente intensos quando ocorre a transição entre símbolos antipodais (símbolos angularmente distantes de 180°) na constelação da modulação M-PSK. Para o mapa QPSK mostrado em (a) ocorrem transições entre símbolos antipodais para as sequências de 4 bits no *bit stream* de entrada do *mapper* dadas por 0011, 1100, 0110, 1001, que resultam em transições abruptas de 180° e de máxima variação da amplitude no sinal no domínio tempo, conforme realçado pelo primeiro retângulo vermelho em (b) acima. É possível utilizar um codificador convolucional que gere uma sequência de bits que evite transições antipodais, minimizando assim a geração de espúrios espectrais.



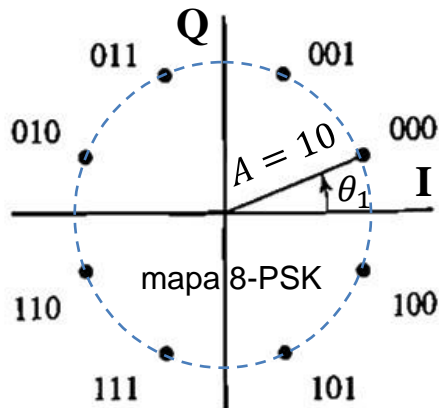
## Distância mínima $d_{\min}$ para a constelação M-PSK

Conforme discutido no slide 19 a robustez da modulação é proporcional à distância mínima  $d_{\min}$  entre os símbolos da constelação. Para uma modulação M-PSK com símbolos de amplitude  $A$ , a distância  $d(m_1, m_2)$  entre dois símbolos com índices de ocorrência  $m_1$  e  $m_2$  ao longo do círculo de raio  $A$  da constelação M-PSK é dada por:

$$d(m_1, m_2) = A\sqrt{2} \sqrt{1 - \cos\left(2\pi \frac{(m_1 - m_2)}{M}\right)} \quad (1)$$

**Exemplo:** Para o mapa 8-PSK abaixo, pede-se: **(a)** Determine os valores I e Q na LUT que gera os 8 símbolos da constelação. **(b)** Determine a  $d_{\min}$  da constelação através da equação (1) e verifique a consistência do resultado. **(c)** Determine a distância entre os símbolos associados às palavras binárias 000 e 011 através da equação (1) e verifique a consistência. **(d)** Suponha que a palavra 000 tenha sido transmitida e que a degradação imposta ao sinal pelo canal de transmissão seja apenas ruído (não há *multipath*). Estime a SNR instantânea em dB no canal que faz com que a palavra transmitida 000 possa ser interpretada erroneamente pelo *de-mapper* no receptor como se a palavra 011 tivesse sido transmitida. **(e)** Estime a SNR instantânea em dB no canal abaixo da qual o *de-mapper* no receptor começa a incorrer em erros de decisão.

**Solução:** **(a)** O mapa tem  $M = 8$  símbolos uniformemente distribuídos ao longo de um círculo de raio  $A = 10$ . A variação angular entre cada símbolo é  $\Delta\theta = 360^\circ/8 = 45^\circ$ . Portanto o ângulo  $\theta_1$  do símbolo  $s$  associado à palavra 000 é  $\theta_1 = 45^\circ/2 = 22.5^\circ$ . O ângulo dos demais símbolos dos quadrantes 1 e 2 é obtido somando-se progressivamente  $\Delta\theta$  à  $\theta_1$  e o ângulo dos símbolos dos quadrantes 3 e 4 são tais que os símbolos são simétricos aos do quadrante 1 e 2 em relação ao eixo I, conforme mostra a tabela abaixo. Convertendo o valor complexo de cada símbolo  $s$  no formato polar para o formato retangular obtemos os valores I e Q da LUT abaixo:

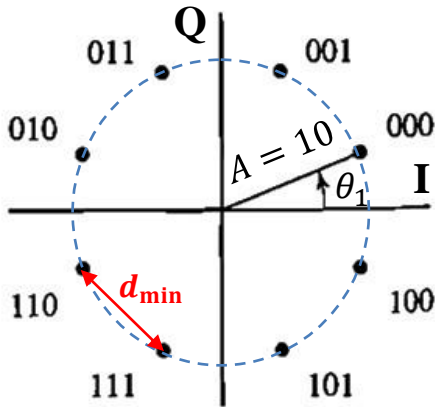


Palavra Binária	Símbolo $s$
000	$10e^{j22.5^\circ}$
001	$10e^{j67.5^\circ}$
011	$10e^{j112.5^\circ}$
010	$10e^{j157.5^\circ}$
110	$10e^{-j157.5^\circ}$
111	$10e^{-j112.5^\circ}$
101	$10e^{-j67.5^\circ}$
100	$10e^{-j22.5^\circ}$

LUT (Look Up Table)		
Palavra Binária	I = Re{ $s$ }	Q = Im{ $s$ }
000	9.239	3.827
001	3.827	9.239
011	-3.827	9.239
010	-9.239	3.827
110	-9.239	-3.827
111	-3.827	-9.239
101	3.827	-9.239
100	9.239	-3.827

## Distância mínima $d_{\min}$ para a constelação $M$ -PSK

(b) A distância mínima  $d_{\min}$  da constelação é a distância entre dois símbolos adjacentes no mapa da constelação. Sejam estes símbolos, por exemplo, os símbolos com índices de ocorrência  $m_1 = 5$  e  $m_2 = 6$  ao longo do círculo de raio  $A = 10$  da constelação 8-PSK:



Palavra Binária	Símbolo $s$
110	$10e^{-j157.5^\circ}$
111	$10e^{-j112.5^\circ}$

De (1) temos

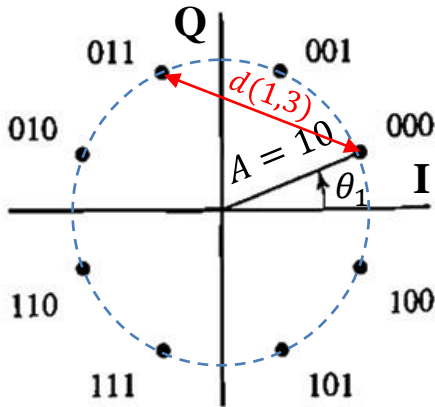
$$d_{\min} = d(5,6) = 10\sqrt{2} \sqrt{1 - \cos\left(2\pi \frac{(5-6)}{8}\right)} = 7.654$$

Verificando a consistência do resultado obtido de (1):

$$\left|10e^{-j157.5^\circ} - 10e^{-j112.5^\circ}\right| = 7.654$$

## Distância mínima $d_{\min}$ para a constelação $M$ -PSK

(c) A distância entre os símbolos com índices de ocorrência  $m_1 = 1$  e  $m_2 = 3$  ao longo do círculo de raio  $A = 10$  da constelação 8-PSK é:



Palavra Binária	Símbolo $s$
000	$10e^{j22.5^\circ}$
011	$10e^{j112.5^\circ}$

De (1) temos

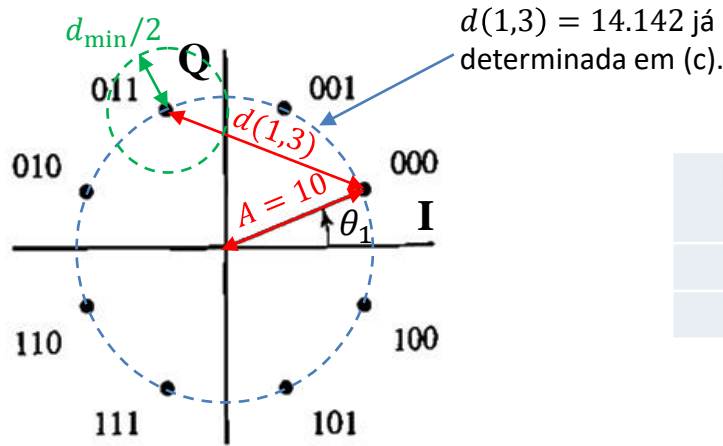
$$d(1,3) = 10\sqrt{2} \sqrt{1 - \cos\left(2\pi \frac{(1-3)}{8}\right)} = 14.142$$

Verificando a consistência do resultado obtido de (1):

$$|10e^{j22.5^\circ} - 10e^{j112.5^\circ}| = 14.142$$

## Distância mínima $d_{\min}$ para a constelação M-PSK

(d) Vamos considerar que a região de decisão do *de-mapper* em torno do símbolo  $10e^{j112.5^\circ}$  associado à palavra binária 011 seja o círculo verde de raio  $d_{\min}/2$  mostrado abaixo, sendo  $d_{\min} = 7.654$  já obtido em (b). Se a palavra 000 foi transmitida então a amplitude  $S$  do sinal transmitido é  $S = A = 10$ . Se a degradação imposta ao sinal pelo canal de transmissão é um ruído instantâneo que faz com que a palavra 000 transmitida seja interpretada erroneamente pelo *de-mapper* no receptor como se a palavra 011 tivesse sido transmitida então o fasor resultante da superposição do ruído com o sinal neste instante jaz dentro do círculo verde que define a região de decisão do *de-mapper*, conforme mostra a figura:



Palavra Binária	Símbolo $s$
000	$10e^{j22.5^\circ}$
011	$10e^{j112.5^\circ}$

Da figura acima temos então que a amplitude instantânea mínima  $N$  de ruído que faz o fasor resultante da superposição do ruído com o sinal neste instante fazer dentro do círculo verde é

$$N = d(1,3) - \frac{d_{\min}}{2} = 14.142 - \frac{7.654}{2} = 10.315$$

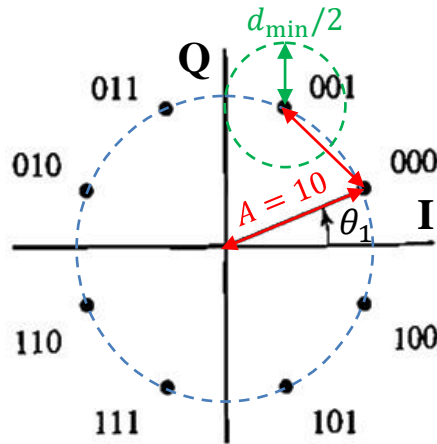
$$\text{SNR} = 20 \log\left(\frac{S}{N}\right) = 20 \log\left(\frac{A}{d(1,3) - \frac{d_{\min}}{2}}\right) = -0.27 \text{ dB}$$

Portanto, dependendo da fase do ruído (que também é aleatória como é a amplitude do ruído), uma SNR instantânea no canal abaixo de  $-0.27$  dB já é capaz de induzir o *de-mapper* à decisões errôneas de modo que a palavra 000 transmitida seja interpretada erroneamente pelo *de-mapper* no receptor como se a palavra 011 tivesse sido transmitida.



## Distância mínima $d_{\min}$ para a constelação M-PSK

(e) A SNR instantânea em dB no canal abaixo da qual o *de-mapper* no receptor começa a incorrer em erros de decisão refere-se a situações de erros de decisão entre símbolos adjacentes no mapa da constelação, conforme exemplifica a figura abaixo. Vamos considerar que a região de decisão do *de-mapper* em torno do símbolo  $10e^{j67.5^\circ}$  associado à palavra binária 001 seja o círculo verde de raio  $d_{\min}/2$  mostrado abaixo, sendo  $d_{\min} = 7.654$  já obtido em (b). Se a palavra 000 foi transmitida então a amplitude  $S$  do sinal transmitido é  $S = A = 10$ . Se a degradação imposta ao sinal pelo canal de transmissão é um ruído instantâneo que faz com que a palavra 000 transmitida seja interpretada erroneamente pelo *de-mapper* no receptor como se a palavra 001 tivesse sido transmitida então o fasor resultante da superposição do ruído com o sinal neste instante jaz dentro do círculo verde que define a região de decisão do *de-mapper*, conforme mostra a figura:



Palavra Binária	Símbolo $s$
000	$10e^{j22.5^\circ}$
001	$10e^{j67.5^\circ}$

Da figura acima temos então que a amplitude instantânea mínima  $N$  de ruído que faz o fasor resultante da superposição do ruído com o sinal neste instante jaz dentro do círculo verde é

$$N = d(1,2) - \frac{d_{\min}}{2} = 7.654 - \frac{7.654}{2} = 3.827$$

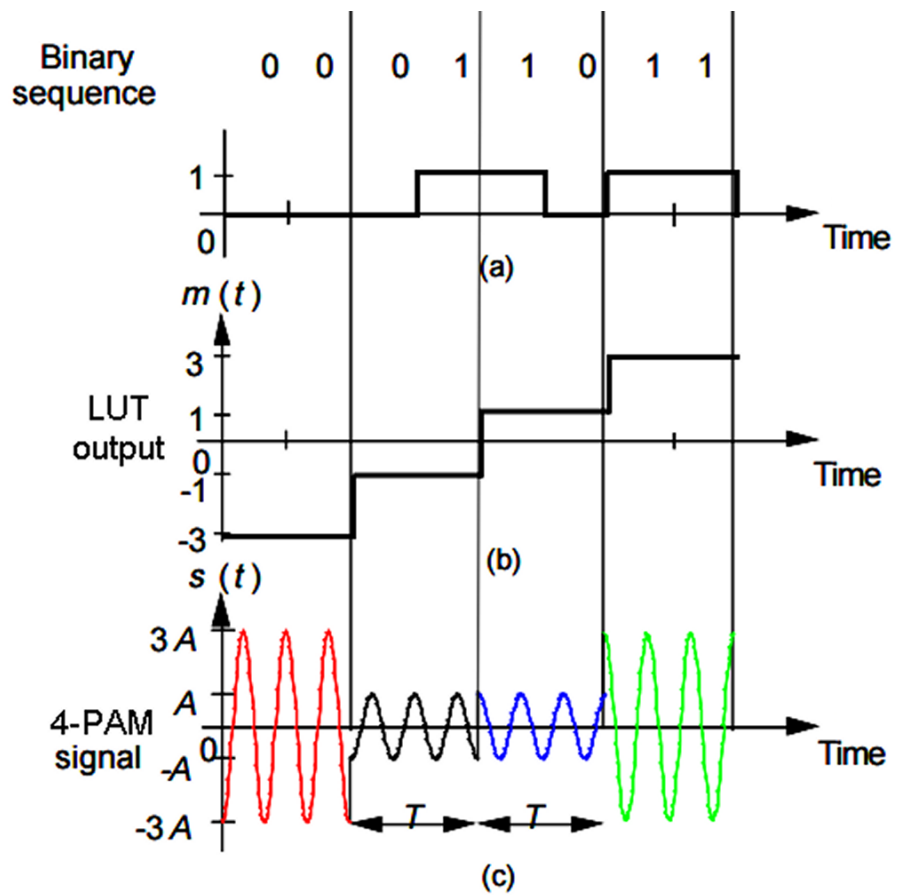
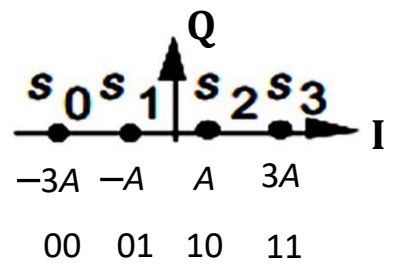
$$SNR = 20 \log\left(\frac{S}{N}\right) = 20 \log\left(\frac{A}{d(1,2) - \frac{d_{\min}}{2}}\right) = 8.343 \text{ dB}$$

Portanto, dependendo da fase do ruído (que também é aleatória como é a amplitude do ruído), uma SNR instantânea no canal abaixo de 8.343 dB já é capaz de induzir o *de-mapper* a decisões errôneas quanto a palavras binárias associadas a símbolos adjacentes no mapa da constelação 8-PSK. Se a SNR instantânea no canal é sempre acima de 8.343 dB ao longo de todo tempo de operação do demodulador, então, independentemente da fase do ruído, o *de-mapper* 8-PSK nunca comete erros de decisão em consequência do ruído no canal.

Tipos básicos de modulação em função da posição dos símbolos  $I_{ref} + jQ_{ref}$  no mapeamento  $[b_{N-1} \dots b_1 b_0] \leftrightarrow I_{ref} + jQ_{ref}$ , sendo  $N = \log_2 M$  o número de bits transportados por cada símbolo IQ do conjunto de  $M$  símbolos  $I_{ref} + jQ_{ref}$  no mapa da constelação:

**M-PAM (Pulse Amplitude Modulation):**

A constelação da modulação M-PAM tem seus  $M$  símbolos IQ uniformemente distribuídos ao longo do do eixo I (não há símbolos IQ com valor Q diferente de zero). Em consequência podemos considerar um modulador PAM como um modulador QAM (ver slide 3) sem os blocos funcionais do ramo Q. Por exemplo, abaixo é mostrado o mapa da constelação e o conjunto de sinais para um modulador 4 PAM com *symbol rate*  $SR = 1/T$ :



## Modulação PAM - exemplo

**Exemplo:** O sistema de comunicações digital mostrado na Figura 1 abaixo utiliza um modulador 4-PAM conforme mostra a Figura 2.

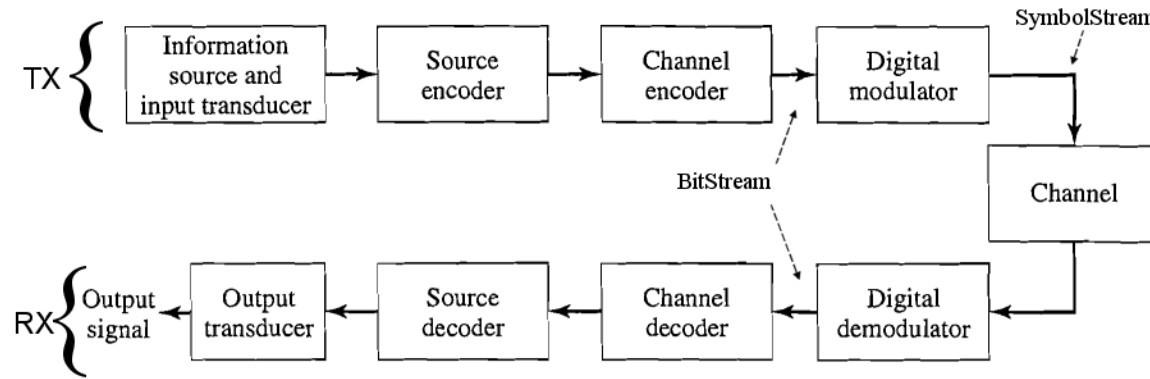
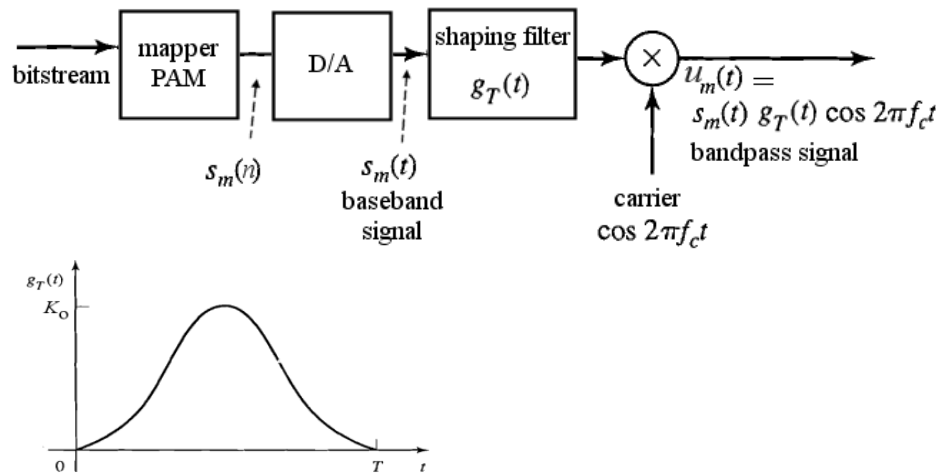
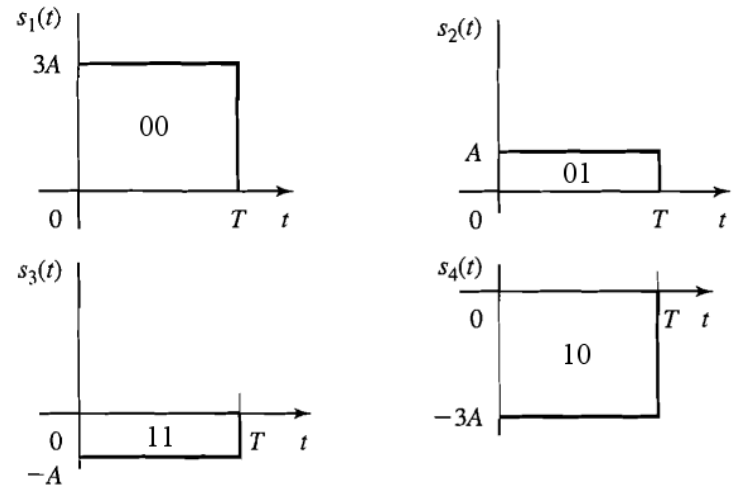


Figura 1: Diagrama geral de um sistema de comunicações digital.



(a) Modulador PAM (bloco *Digital modulator* na Figura 1) e gráfico da resposta  $g_T(t)$  do *shaping filter* a um pulso  $s_m(t)$  mostrado em (b).



(b) Relação entre a  $m$ -ésima palavra binária na entrada do *mapper* e o símbolo  $s_m(t)$  resultante na saída do D/A,  $m = 1, 2, \dots, 4$

Figura 2: Diagrama interno do bloco *Digital modulator* na Figura 1.

## Modulação PAM - exemplo

O *symbol rate* é 18 MHz e o *shaping filter* apresenta resposta  $g_T(t)$  ao pulso  $s_m(t)$  mostrado em (b) dada por

$$g_T(t) = K_0 e^{-\pi \left( \frac{t - \frac{T}{2}}{\tau} \right)^2}, \quad K_0 = 7 \times 10^6, \quad \tau = 0.014 \mu s, \quad \text{sendo } T \text{ a duração de um símbolo PAM.}$$

O demodulador no RX decide qual símbolo PAM é recebido com base em uma região de decisão definida pelo intervalo  $\left[ -\frac{d_{\min}}{2}, \frac{d_{\min}}{2} \right]$  em torno de cada ponto da constelação de referência, sendo  $d_{\min}$  a distância Euclidiana mínima entre os símbolos da constelação.

Sabendo que a frequência da portadora é  $f_c = 150 \text{ MHz}$  e que em um determinado instante a sequência de palavras binárias na entrada do *Digital modulator* na Figura 1 é dada por  $BitStream = \{0110000110111001\}$ , determine:

- A frequência do *clock* do *BitStream* na entrada do *Digital modulator* na Figura 1, sabendo que os bits são transmitidos serialmente.
- A sequência de símbolos da constelação 4-PAM gerados na saída do *Digital modulator* (*SymbolStream*).
- Qual a SNR (em dB) na entrada do demodulador do RX que faria palavra binária 00 originalmente transmitida ser interpretada como a palavra 01?
- Qual a SNR (em dB) na entrada do demodulador do RX que faria palavra binária 00 originalmente transmitida ser interpretada como a palavra 10?
- Plote o módulo do espectro do sinal na saída do *shaping filter* p/  $f \geq 0$  (o que seria mostrado na tela de um *spectrum analyzer*) – Dica: Vide Nota abaixo.
- Plote o módulo do espectro do sinal  $u_m(t)$  p/  $f \geq 0$  (o que seria mostrado na tela de um *spectrum analyzer*).

**Nota:**  $\mathcal{F} \left\{ K_0 e^{-\pi \left( \frac{t - \frac{T}{2}}{\tau} \right)^2} \right\} = K_0 \tau e^{-\pi f^2 \tau^2} e^{-j\pi f T}$  onde  $\mathcal{F}\{\cdot\}$  é o operador que denota a Transformada de Fourier do argumento.

## Solução:

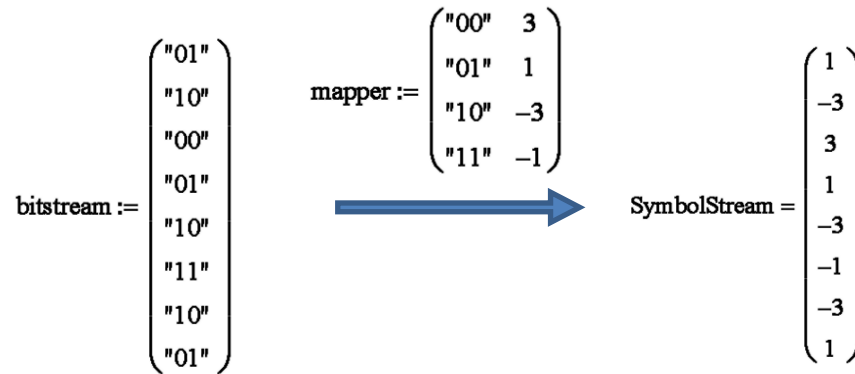
a)  $\text{SymbolRate} := 18 \cdot \text{MHz}$

$\text{NBitsPerSymbol} := 2$

$\text{FClock} := \text{SymbolRate} \cdot \text{NBitsPerSymbol}$

$\text{FClock} = 36 \cdot \text{MHz}$

b)



c)

Seja  $A = 1$

$d_{\min} := |(-3) - (-1)| \quad d_{\min} = 2$

Dal

$\text{BinWord1}_0 := "00" \xrightarrow{\text{mapper}} S1 = (3)$

$\text{BinWord2}_0 := "01" \xrightarrow{\text{mapper}} S2 = (1)$

$\text{SNR} := 20 \cdot \log \left( \frac{|S1|}{|S1 - S2| - \frac{d_{\min}}{2}} \right) \quad \text{SNR} = 9.542 \text{ dB}$

d)

$$\text{BinWord1}_0 := "00" \xrightarrow{\text{mapper}} S1 = (3)$$

$$\text{BinWord2}_0 := "10" \xrightarrow{\text{mapper}} S2 = (-3)$$

$$\text{SNR} := 20 \cdot \log \left( \frac{|S1|}{|S1 - S2| - \frac{d_{\min}}{2}} \right) \quad \text{SNR} = -4.437 \quad \text{dB}$$

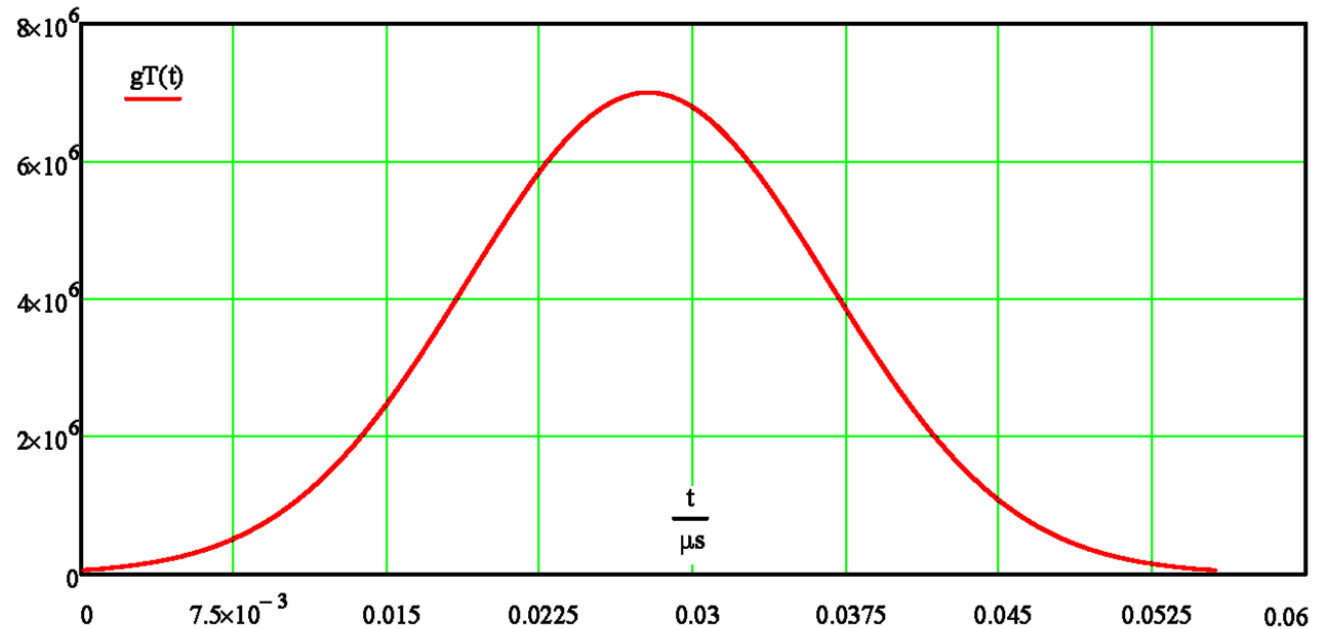
e)  $g_T(t)$  no domínio tempo tem a forma

$$T := \frac{1}{\text{SymbolRate}} = 0.056 \cdot \mu\text{s}$$

$$\tau = 0.022 \cdot \mu\text{s}$$

$$K_0 := 7 \cdot 10^6$$

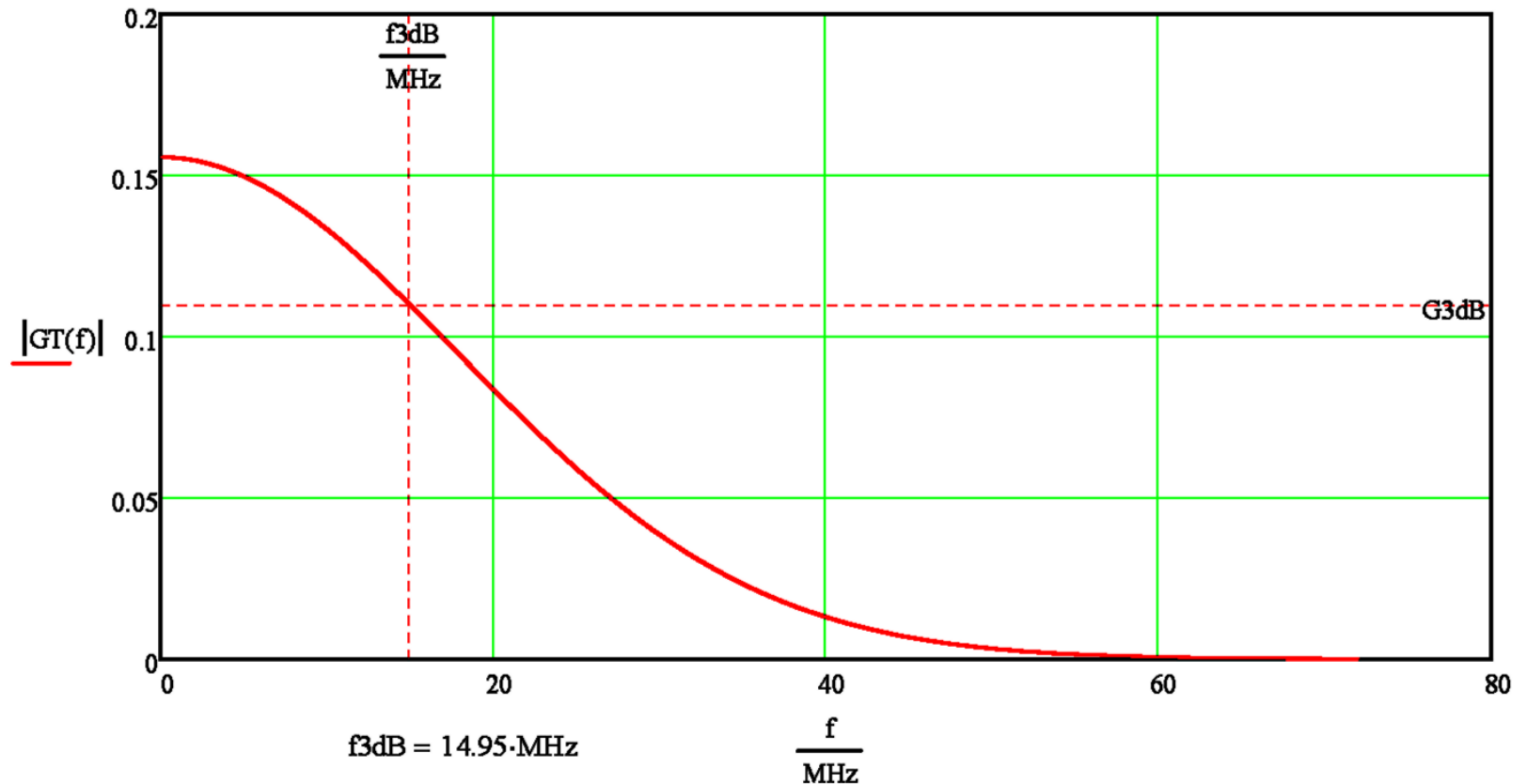
$$g_T(t) := K_0 \cdot e^{-\pi \cdot \left( \frac{t - \frac{T}{2}}{\tau} \right)^2}$$



## Modulação PAM - exemplo

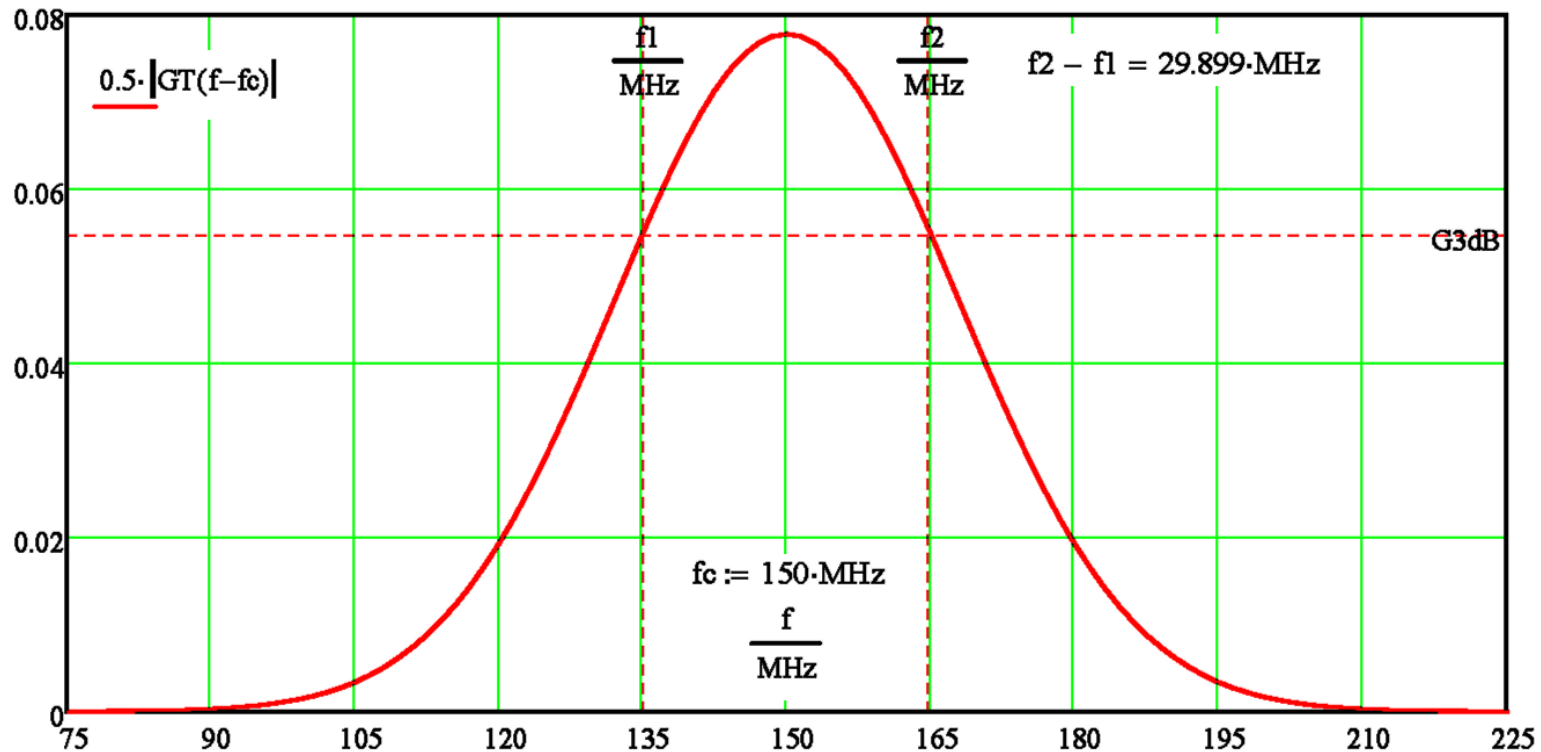
E seu espectro  $G_T(f) = \mathcal{F}[g_T(t)]$  no domínio frequência  $f > 0$  tem a forma:

$$G_T(f) := K_0 \cdot \tau \cdot e^{-\pi \cdot f^2 \cdot \tau^2} \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot f \cdot T}$$



## Modulação PAM - exemplo

f) Conforme discutido no slide 7  $U_m(f) = \frac{A}{2} [G_T(f - f_c) + G_T(f + f_c)]$ , e para  $f > 0$  tem a forma:



Conforme discutido no slide 7, o processo aqui efetuado é denominado de heterodinação do sinal *baseband*. Este processo transforma o sinal *baseband* em sinal *passband* elevando a frequência central do espectro do sinal *baseband* para a frequência  $f_c = 150\text{-MHz}$ , conforme mostra o gráfico acima. Note que o processo de heterodinação duplica a faixa de frequência (banda definida por  $f_2 - f_1$  no gráfico acima) necessária para transmitir o sinal *passband* através do canal de transmissão. Especificamente, compare a banda-passante  $f_2 - f_1 = 29.899\text{-MHz}$  no gráfico acima com a banda-passante  $f_{3\text{dB}} = 14.95\text{-MHz}$  no gráfico do espectro  $|GT(f)|$  do sinal *baseband* (note o dobro do valor necessário para transmitir o sinal em banda-base ou *baseband*).



## Modulação QAM - exemplo

**Exemplo:** O diagrama abaixo mostra a etapa de modulação de um sistema de comunicação digital 16-QAM:

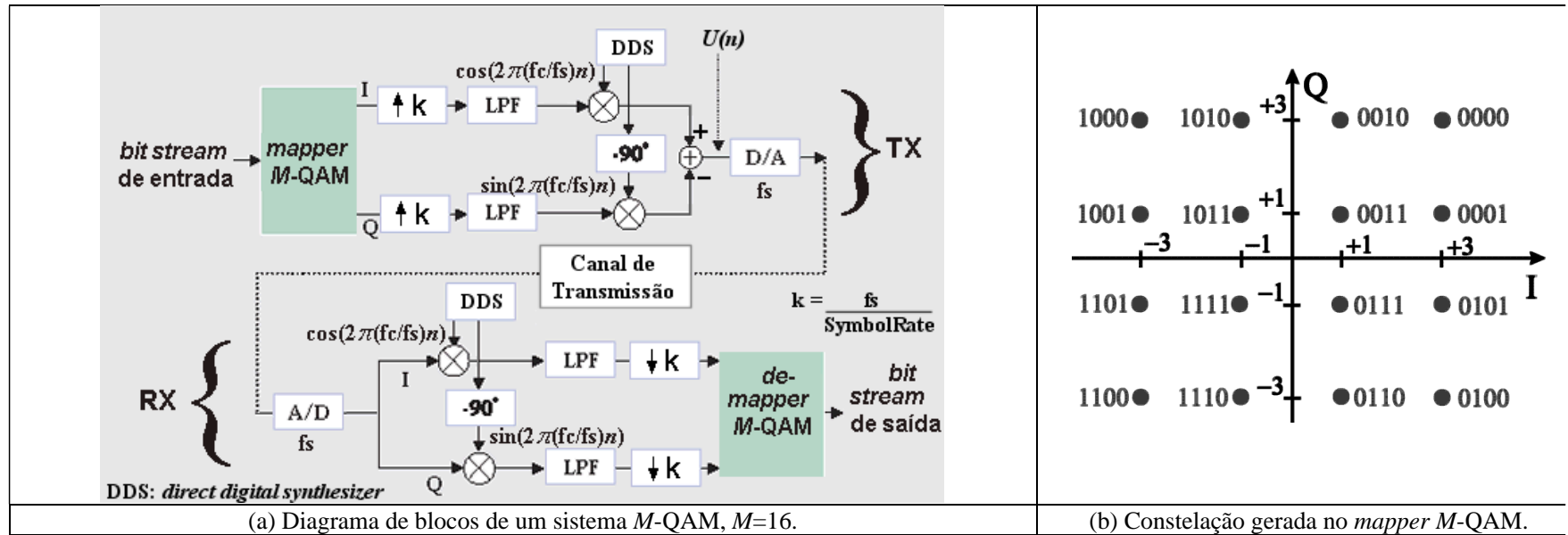


Figura 1: Etapa de modulação de um sistema de comunicação digital 16-QAM.

Sabe-se que a frequência de amostragem do D/A é  $f_s=128\text{MHz}$ , a frequência da portadora é  $f_c=16\text{MHz}$  e o *symbol rate* do sistema é  $8.0\text{ MHz}$ . A resposta  $h(n)$  do *shaping filter* do TX (LPF) a um impulso  $\delta(n)$  aplicado em sua entrada é caracterizada na Figura 2.

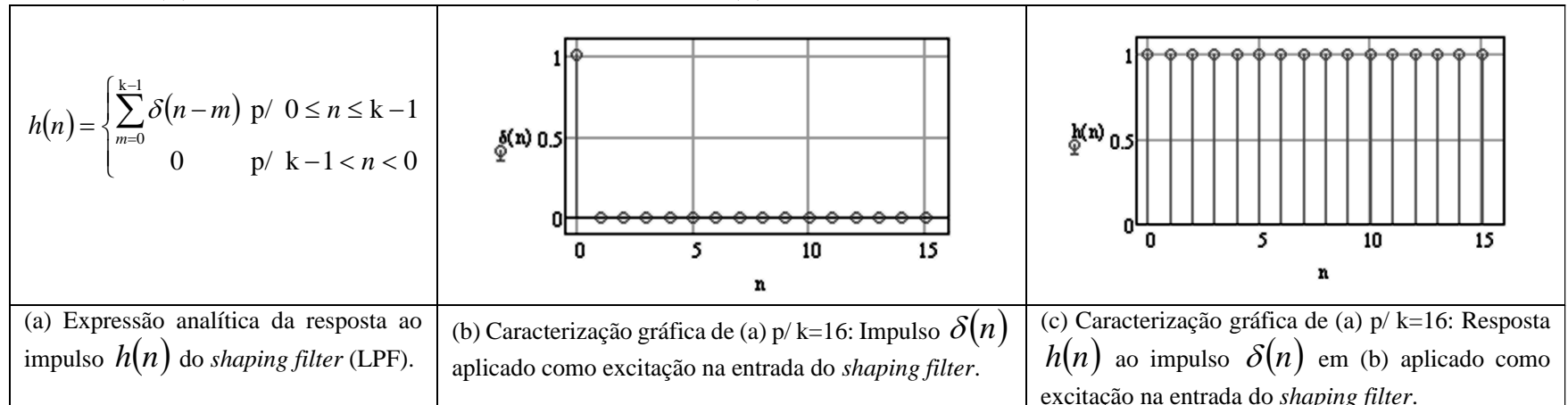


Figura 2: Caracterização da resposta ao impulso  $h(n)$  do *shaping filter* – LPF na Figura 1(a).

## Modulação QAM - exemplo

Conforme mostram as Figuras 1 e 2, a seqüência de amostras  $U(n)$  resultantes na entrada do D/A é dada por

$$U(n) = \operatorname{Re}\{S_n\} \cos\left(2\pi \frac{f_c}{f_s} n\right) - \operatorname{Im}\{S_n\} \sin\left(2\pi \frac{f_c}{f_s} n\right), \text{ sendo } S_n = I_n + jQ_n \text{ o símbolo gerado na saída do mapper na Figura 1(a) no instante } n.$$

Seja o *bit stream* na entrada do *mapper* em um determinado instante dado por  $B = \{\dots 1011010101110100\dots\}$ .

- Determine quantos ciclos da portadora formam um símbolo IQ.
- Determine quantas amostras na entrada do D/A formam um símbolo IQ.
- Determine a frequência do *clock* do *bit stream* na entrada do *mapper* na Figura 1(a). Assuma que os bits entrem em formato serial no *mapper*.
- A seqüência de símbolos  $I + jQ$  da constelação 16-QAM gerados na saída do *mapper* na Figura 1(a).
- Plote o gráfico de  $U(n)$  na entrada do D/A resultante do *bit stream* B. Dica:  $U(n)$  é também dado por  $U(n) = |S_n| \cos\left(2\pi \frac{f_c}{f_s} n + \angle S_n\right)$ .

### Solução:

São dados:  $f_s := 128 \cdot \text{MHz}$     $f_c := 16 \cdot \text{MHz}$     $\text{SymbolRate} := 8 \cdot \text{MHz}$   
 $\text{BitStream} := ("1011" "0101" "0111" "0100")^T$

- $\text{NCyclesPerSymbol} := \frac{f_c}{\text{SymbolRate}} = 2 \rightarrow$  Número de ciclos da portadora por duração do símbolo IQ
- $\text{NSampPerSymbol} := \frac{f_s}{\text{SymbolRate}} = 16 \rightarrow$   $k =$  Número de amostras por duração de um símbolo IQ na saída do D/A
- $\text{NBitsPerSymbol} := 4$   
 $\text{FClock} := \text{SymbolRate} \cdot \text{NBitsPerSymbol} = 32 \text{ MHz}$

## Modulação QAM - exemplo

d)

$$\text{BinWords} := \begin{pmatrix} \text{"1000"} & \text{"1010"} & \text{"0010"} & \text{"0000"} \\ \text{"1001"} & \text{"1011"} & \text{"0011"} & \text{"0001"} \\ \text{"1101"} & \text{"1111"} & \text{"0111"} & \text{"0101"} \\ \text{"1100"} & \text{"1110"} & \text{"0110"} & \text{"0100"} \end{pmatrix}$$

mapper  
→

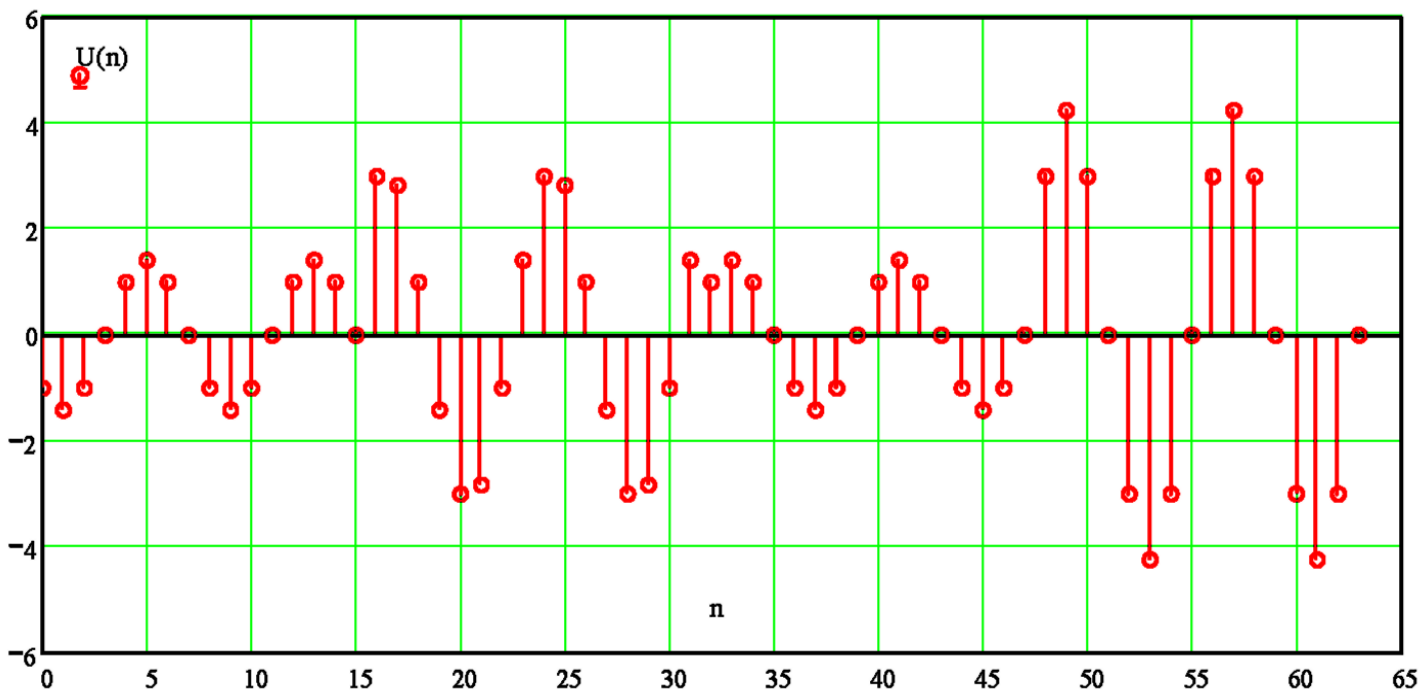
$$\text{Symbols} = \begin{pmatrix} -3 + 3i & -1 + 3i & 1 + 3i & 3 + 3i \\ -3 + i & -1 + i & 1 + i & 3 + i \\ -3 - i & -1 - i & 1 - i & 3 - i \\ -3 - 3i & -1 - 3i & 1 - 3i & 3 - 3i \end{pmatrix}$$

$$\text{BitStream} := (\text{"1011"} \quad \text{"0101"} \quad \text{"0111"} \quad \text{"0100"})^T$$

mapper  
→

$$S = \begin{pmatrix} -1 + i \\ 3 - i \\ 1 - i \\ 3 - 3i \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} |s| = \begin{pmatrix} 1.414 \\ 3.162 \\ 1.414 \\ 4.243 \end{pmatrix} \\ \angle S = \begin{pmatrix} 135 \\ -18.435 \\ -45 \\ -45 \end{pmatrix}^\circ \end{array} \right.$$

e)  $U(n) = |S_n| \cos\left(2\pi \frac{f_c}{f_s} n + \angle S_n\right)$       $k := \frac{f_s}{\text{SymbolRate}} = 16 \rightarrow$  **Número de amostras por símbolo na saída do D/A**



## Homework

Refaça os itens d) e e) do slide 42 para o *bit stream* na entrada do *mapper* dado por  $B=\{\dots 1111010001100101\dots\}$ .

## Desempenho de Uma Técnica de Modulação

O desempenho de uma técnica de modulação normalmente é medido em termos de:

**Eficiência de potência:** É uma medida da potência necessária ao sinal modulado para que uma determinada BER (*Bit Error Rate*) na saída do *de-mapper* (usualmente,  $BER = 10^{-5}$ ) seja atingida em presença de ruído AWGN com densidade espectral de potência  $N_o$  na entrada do RX. Especificamente, este parâmetro é dado pela razão  $\eta_{BER}$  entre a energia do sinal por bit  $E_b$  e a densidade espectral de potência de ruído  $N_o$  na entrada do RX demandada para que uma  $BER = 10^{-5}$  seja atingida.

$$\eta_{BER} = \frac{E_b}{N_o} \Big|_{BER = 10^{-5}}$$

Quanto menor  $\eta_{BER}$  menor a potência necessária do sinal modulado para que os bits recebidos sejam recuperados no RX com fidelidade em relação aos bits transmitidos. Note que  $\eta_{BER}$  também pode ser interpretada como uma medida da SNR/bit necessária p/ que se obtenha uma determinada BER.

**Eficiência espectral (*bandwidth BW efficiency*):** Capacidade da modulação em transmitir informação dentro de uma largura de banda BW limitada. É medida pela razão entre a taxa de transmissão de informação  $R$  em bits por segundo e a largura de banda BW ocupada pelo sinal de RF modulado, em Hz:

$$\eta_{BW} = \frac{R}{BW} \text{ [bps/Hz]}$$

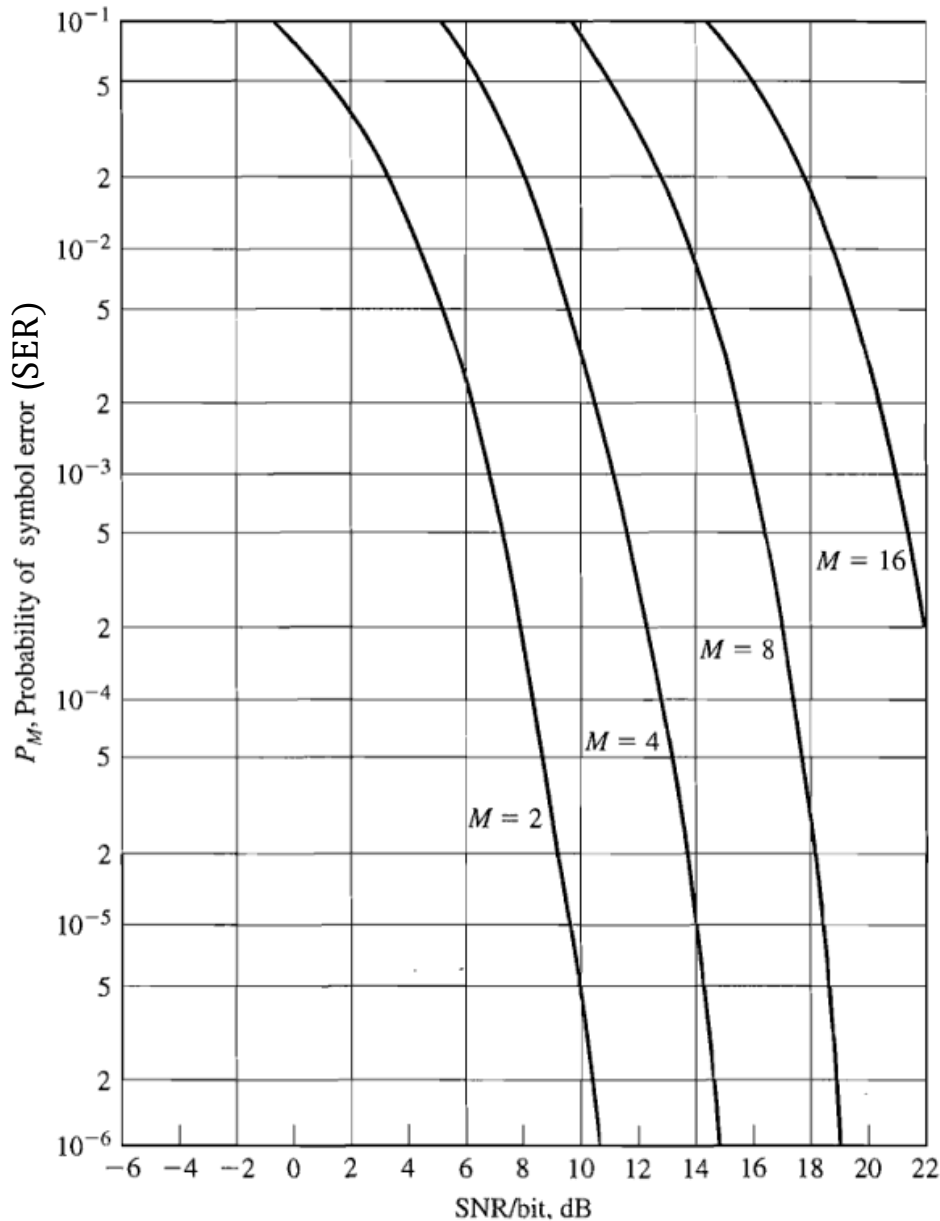
A capacidade de um sistema digital está diretamente relacionada ao  $\eta_{BW}$  do esquema de modulação adotado:

- Uma modulação com maior  $\eta_{BW}$  transmite mais dados dentro da banda BW de uma determinada alocação do espectro estabelecida pelo órgão regulador (ANATEL, FCC, etc...). O limite é dado pelo teorema de codificação de canal de Shannon.

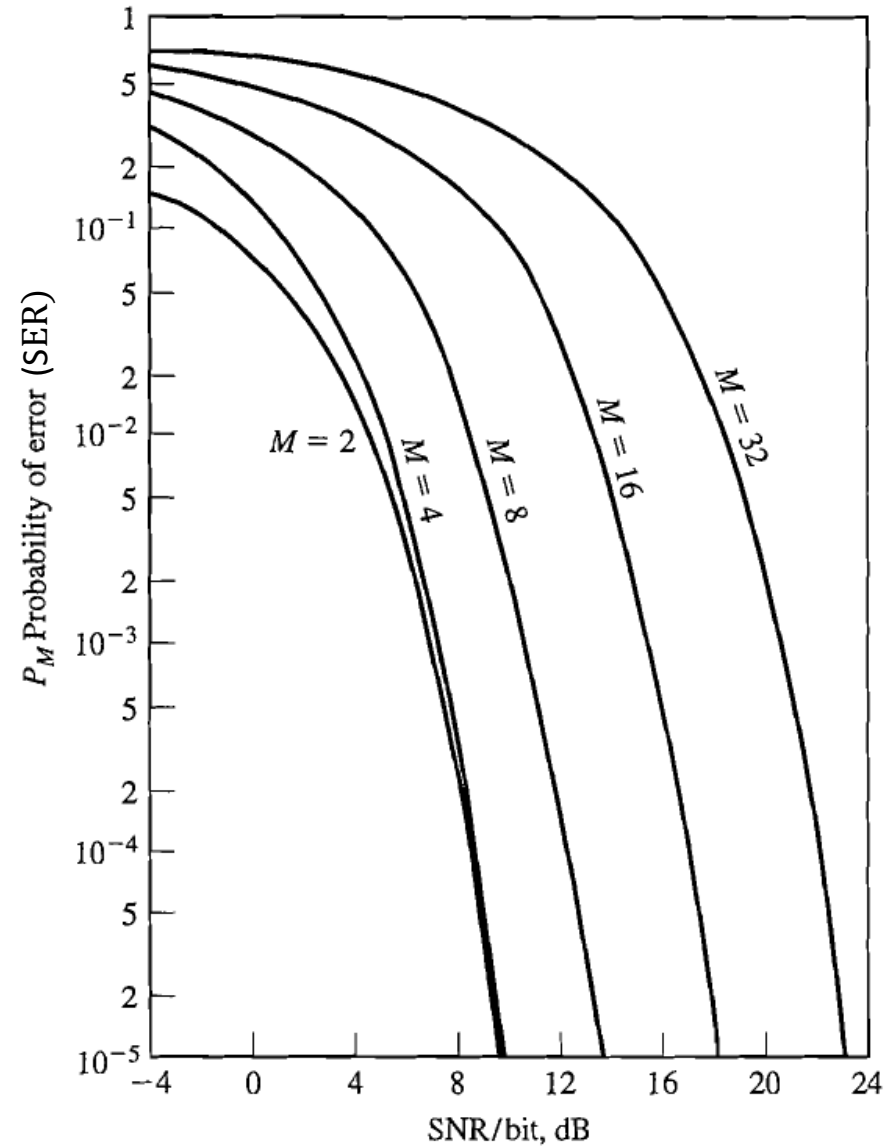
Frequentemente existe um compromisso entre eficiência espectral  $\eta_{BW}$  e eficiência de potência  $\eta_{BER}$

- A inclusão de **codificação p/ controle de erro** aumenta a ocupação de banda BW, mas reduz a potência do sinal modulado exigida para que determinada BER seja atingida (i.e. reduz  $\eta_{BER}$ ).
- Esquemas de **modulação com mais níveis** ( $M$ -ários) diminuem a ocupação da banda BW, porém aumentam a potência recebida necessária – portanto trocam eficiência de potência  $\eta_{BER}$  por eficiência espectral  $\eta_{BW}$ .

## Comparação de desempenho entre as modulações PAM, PSK e QAM



**Figure 7.55** Probability of a symbol error for PAM.



**Figure 7.57** Probability of a symbol error for PSK signals.

Nota: SER – Symbol Error Rate

## Comparação de desempenho entre as modulações PAM, PSK e QAM

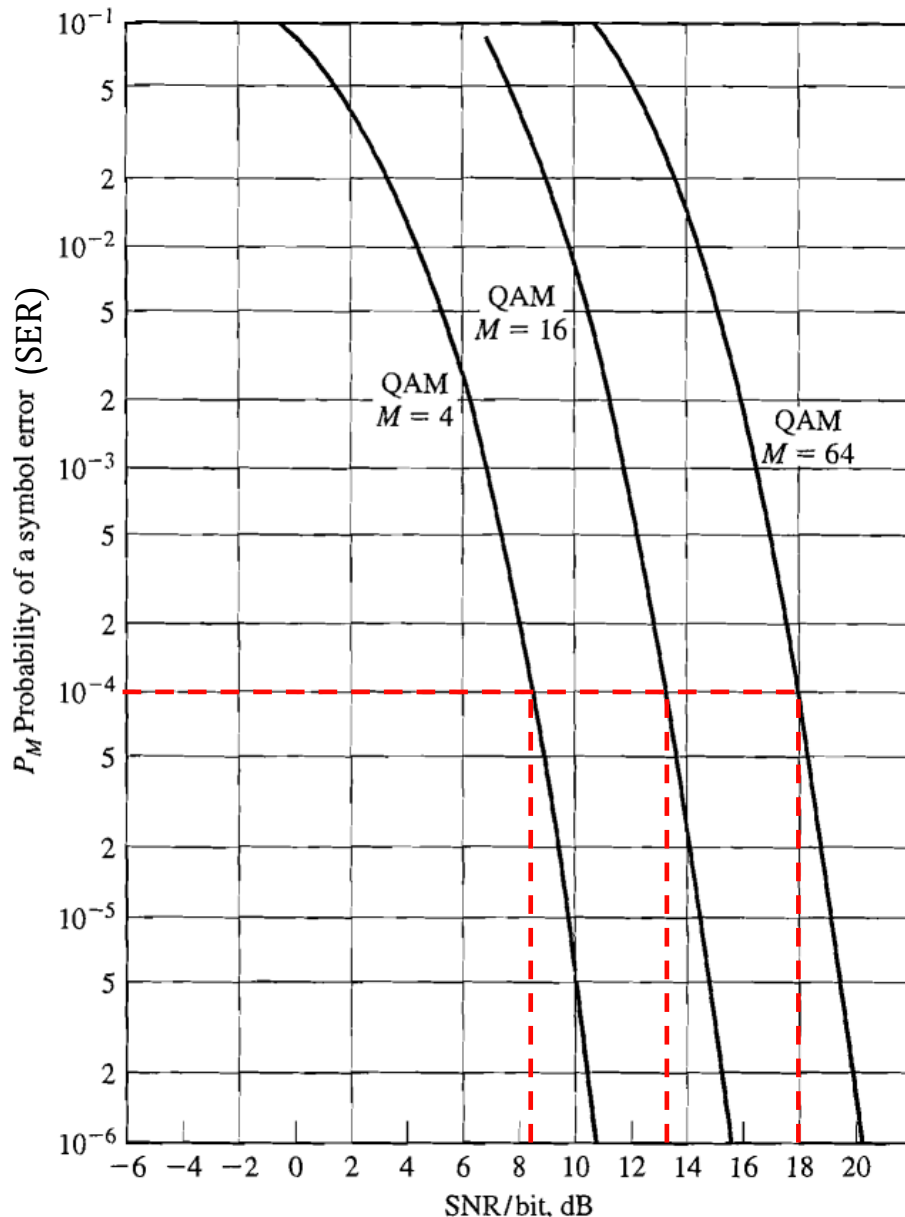
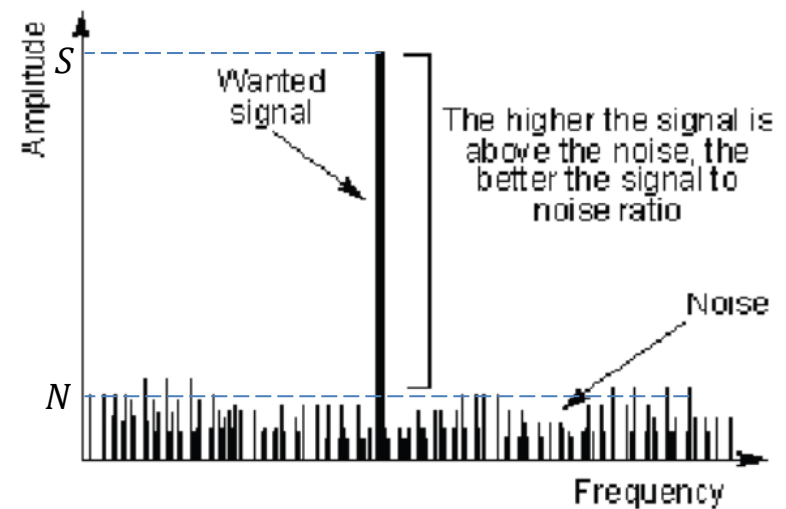


Figure 7.62 Probability of a symbol error for QAM.

Quanto maior for o número  $M$  de símbolos mais densa será a constelação, e maior deverá ser a SNR para evitar aumento na SER:

Para manter a SER em  $10^{-4}$  (1 símbolo errado a cada  $1 \times 10^4$  símbolos recebidos):

- 4-QAM necessita uma SNR/bit mínima de 8 dB
- 16-QAM necessita uma SNR/bit mínima de 13.5 dB
- 64-QAM necessita uma SNR/bit mínima de 18 dB



$$\text{SNR}_{\text{dB}} = 20 \log \left( \frac{S}{N} \right)$$

onde  $S$  é o valor RMS do sinal modulado e  $N$  é o valor RMS do ruído

## Apêndice A:

<b>Operation</b>	<b>Formula</b>
<b>Rectangular to Polar Conversion</b>	$z = x + jy = re^{j\theta}$ where $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ and $\theta = \arctan(y/x)$
<b>Polar to Rectangular Conversion</b>	$z = re^{j\theta} = r [\cos(\theta) + j\sin(\theta)] = x + jy$ where $x = r \cos(\theta)$ and $y = r \sin(\theta)$
<b>Add: <math>z_3 = z_1 + z_2</math></b>	$(x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$
<b>Subtract: <math>z_3 = z_1 - z_2</math></b>	$(x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$
<b>Multiply: <math>z_3 = z_1 z_2</math> (polar form)</b>	$(x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + y_1 x_2)$ $r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$
<b>Divide: <math>z_3 = z_1 / z_2</math>  (polar form)</b>	$\frac{(x_1 x_2 - y_1 y_2) - j(x_1 y_2 - y_1 x_2)}{x_2^2 + y_2^2}$ $\frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$



## Apêndice B:

Sejam  $u = 2\pi f_1 t$  e  $v = 2\pi f_2 t$ . Valem as seguintes relações (*relationships*) trigonométricas:

<i>Relationship</i>	<i>Relationship</i>
$\sin u = \cos(u - \pi/2)$	$\cos u = \sin(u + \pi/2)$
$\cos(-u) = \cos u$	$\sin(-u) = -\sin(u)$
$\sin^2 u + \cos^2 u = 1$	$\cos^2 u = \frac{1}{2}(1 + \cos 2u)$
$\sin^2 u = \frac{1}{2}(1 - \cos 2u)$	$\cos(u \pm v) = \cos u \cos v \mp \sin u \sin v$
$\sin(u \pm v) = \sin u \cos v \pm \cos u \sin v$	$\cos u \cos v = \frac{1}{2}[\cos(u - v) + \cos(u + v)]$
$\sin u \sin v = \frac{1}{2}[\cos(u - v) - \cos(u + v)]$	$\sin u \cos v = \frac{1}{2}[\sin(u - v) + \sin(u + v)]$
$\cos u = \frac{1}{2}[e^{ju} + e^{-ju}]$	$\sin u = \frac{1}{2j}[e^{ju} - e^{-ju}]$
$e^{ju} = \cos u + j \sin u$	

→ **heterodinação**  
das frequências  $f_1$  e  $f_2$