



Detecção por filtro casado (*matched filter*) e por correlator



Departamento de Eletrônica e Computação

Centro de Tecnologia

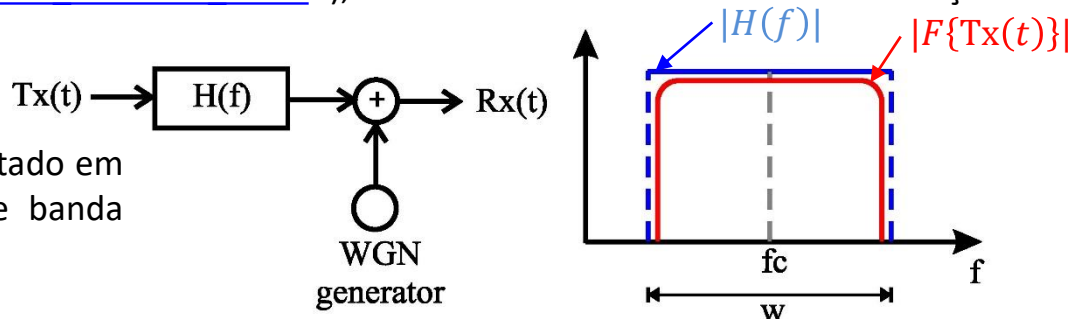
ELC1120 – Telecomunicações II

Profa. Candice Müller Prof. Fernando DeCastro

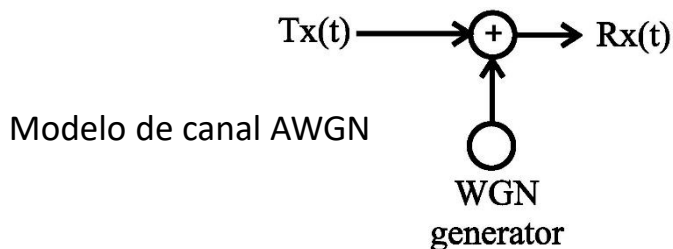
Porque é necessário minimizar o ruído branco Gaussiano aditivo

Conforme discutido no Cap II das notas de aula, o canal de transmissão do enlace entre TX e RX é modelado por um filtro passabanda com função de transferência $H(f)$ que idealmente apresenta uma curva de magnitude $|H(f)|$ plana ao longo de toda largura W do espectro $F\{Tx(t)\}$ do sinal $Tx(t)$ do transmissor, sendo $F\{\cdot\}$ o operador que retorna a Transformada de Fourier do argumento $\{\cdot\}$. Na saída do filtro é acrescentado um gerador de ruído branco (WGN – *White Gaussian Noise*), conforme mostra a figura abaixo, para efeito de modelar o conjunto de todas as fontes de ruído cujo ruído se somam ao sinal $Tx(t)$ ao longo do canal de transmissão, e que, pelo teorema do limite central (ver https://en.wikipedia.org/wiki/Additive_white_Gaussian_noise), resulta em um ruído com distribuição Gaussiana de amplitudes.

Modelo de canal ideal limitado em banda. W é a largura de banda (*bandwidth*) do canal.

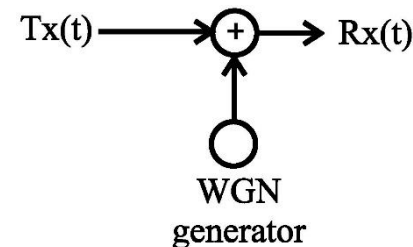
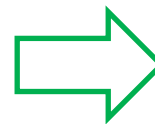
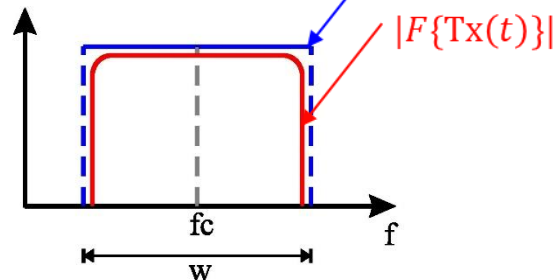
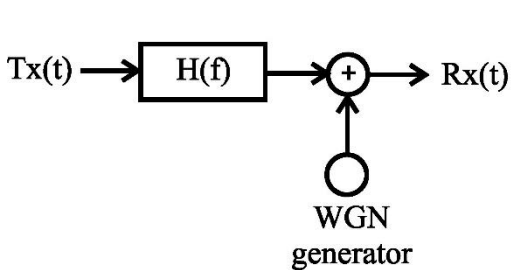
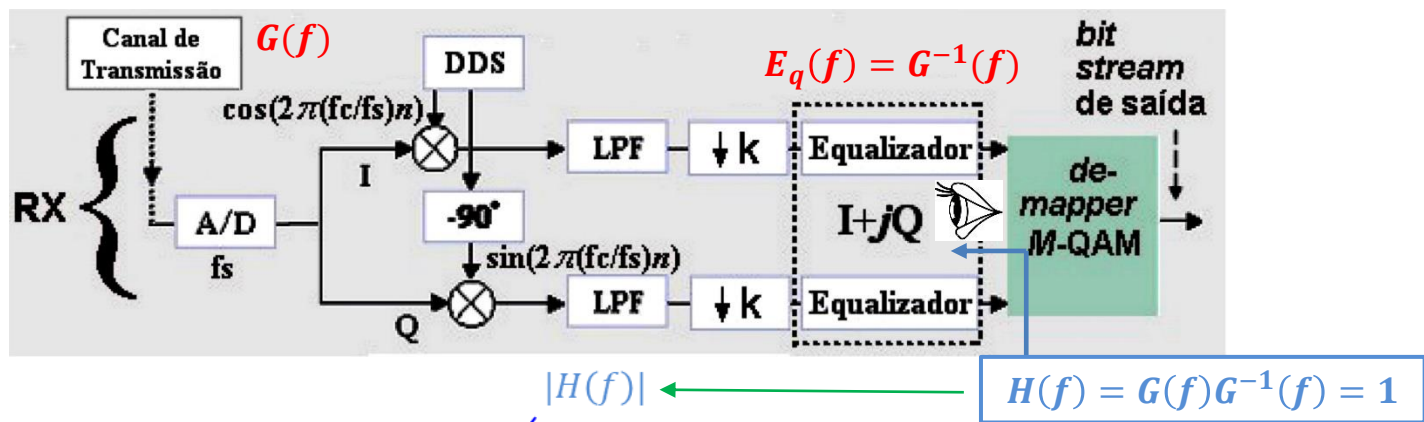


Dado que, idealmente, a curva de magnitude $|H(f)|$ é plana ao longo de toda largura W da curva de magnitude $|F\{Tx(t)\}|$ do espectro do sinal $Tx(t)$, então a função de transferência $H(f)$ do filtro que representa o canal deixa passar sem qualquer alteração de magnitude ou fase a totalidade das componentes espectrais do sinal $Tx(t)$. Portanto a única degradação do sinal $Tx(t)$ em um canal cuja $H(f)$ do filtro deixa passar “intocáveis” (sem qualquer alteração de magnitude ou fase) a totalidade das componentes espectrais de $Tx(t)$ é a degradação causada pela adição do ruído do gerador WGN. Assim, por não interagir com as componentes espectrais do sinal $Tx(t)$, o filtro com função de transferência $H(f)$ pode ser retirado do modelo de canal acima, simplificando o modelo de canal ideal limitado em banda para o modelo de canal AWGN (*Additive White Gaussian Noise*), em que a única degradação imposta pelo canal é a adição de ruído branco Gaussiano:



Porque é necessário minimizar o ruído branco Gaussiano aditivo

Conforme já discutido no Cap II, o modelo de canal ideal limitado em banda só existe na prática por ação do equalizador do RX, conforme figura abaixo, cujo hardware implementa um filtro adaptativo com função de transferência $E_q(f)$ que idealmente aproxima a função de transferência inversa $G^{-1}(f)$ da função de transferência $G(f)$ do canal (equalizadores serão estudados adiante na disciplina). Como o bloco do canal de transmissão está em série com o bloco do equalizador no diagrama do RX (vide abaixo), então a função de transferência conjunta dos dois blocos, que é o que o *de-mapper* “vê” na sua entrada, é $H(f) = G(f)G^{-1}(f) = 1$. Especificamente, o equalizador é um sistema adaptativo que busca identificar as frequências dos zeros da $G(f)$ que são estabelecidos pelo cenário de *multipath* no canal, tentando fazer com que os pólos de sua função de transferência $E_q(f) \cong G^{-1}(f)$ ocorra nas frequências dos zeros de $G(f)$, de modo que os polos do equalizador anulem os zeros do canal, e a função de transferência resultante $H(f) = G(f)G^{-1}(f) = 1$ “vista” pelo *de-mapper* seja a função de transferência de um canal ideal limitado em banda, e, em consequência, o canal seja “visto” pelo RX como um canal AWGN:



Modelo de canal ideal limitado em banda. W é a largura de banda (*bandwidth*) do canal.

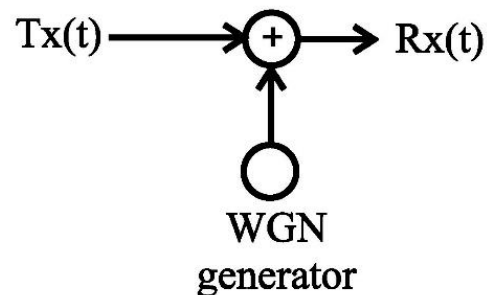
Modelo de canal AWGN

Porque é necessário minimizar o ruído branco Gaussiano aditivo

Ao ruído gerado pelo gerador de ruído branco WGN na entrada do RX que modela a soma de todas as fontes de ruído no canal de transmissão é necessário acrescentar o ruído branco Gaussiano gerado pelo movimento aleatório dos elétrons nas estruturas condutoras de componentes do *front-end* de RF do RX. O *front-end* é constituído basicamente pelo LNA (*Low Noise Amplifier*) na entrada do RX, incluindo antena e cabo coaxial. Este movimento aleatório dos elétrons em estruturas condutoras (trilhas de PCB, junções de transistores, diodos, etc...) é causada por inúmeros tipos de fontes de radiação térmica.

A fonte de radiação térmica primordial é a radiação eletromagnética do *cosmic microwave background* (CMB) (ver <https://www.testandmeasurementtips.com/noise-floor-come/>). O pico do espectro do CMB ocorre em 150GHz, o que caracteriza o CMB como sendo uma radiação térmica porque ocorre na faixa da luz infra-vermelha, que é a faixa de frequências de radiação que causa calor. O CMB é a radiação que restou no universo desde a fase denominada *recombination* na cosmologia do Big Bang ([https://en.wikipedia.org/wiki/Recombination_\(cosmology\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Recombination_(cosmology))). O espectro da radiação CMB está situado principalmente na banda de microondas, e, uma vez que luz é uma radiação eletromagnética, o CMB é a luz mais antiga do universo. A radiação solar é outra fonte importante de radiação térmica que contribui de maneira significativa para elevar o *noise-floor* em enlaces wireless (<https://www.qsl.net/n1bwt/chap10.pdf>).

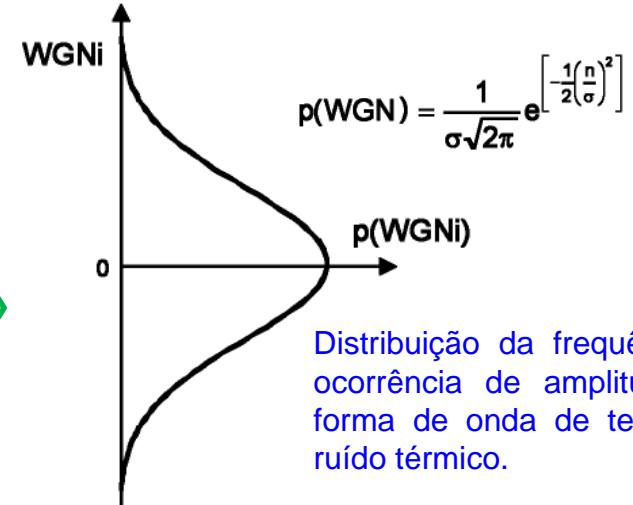
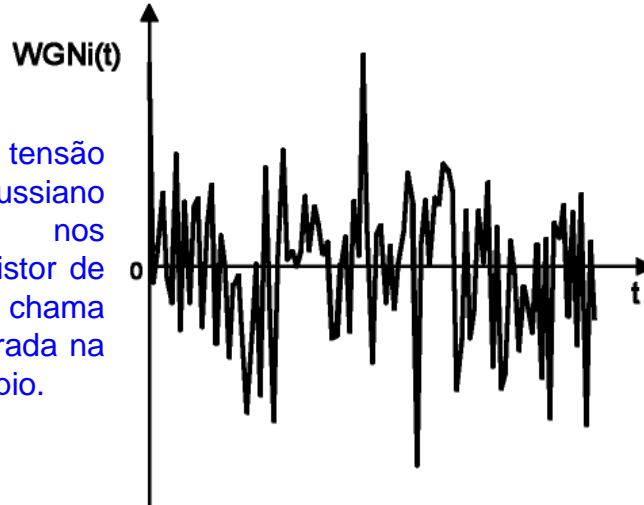
O movimento aleatório dos elétrons imersos no campo eletromagnético irradiado por uma fonte de radiação térmica é uma corrente elétrica aleatória que gera uma tensão de ruído térmico na impedância intrínseca de qualquer estrutura condutora, afetando a integridade do sinal em amplificadores e circuitos eletrônicos, e corrompendo o sinal de modo aditivo, da mesma forma que o ruído aditivo que ocorre no canal. O ruído térmico está presente em todos os sistemas de comunicação e é a fonte de ruído predominante para enlaces acima de 30 MHz.



Porque é necessário minimizar o ruído branco Gaussiano aditivo

Uma tensão de ruído com distribuição Gaussiana de média zero se comporta de maneira tal que valores positivos e negativos de pequena amplitude ocorrem frequentemente ao longo do tempo. Picos de amplitude maior ocorrem raramente, conforme mostra a figura. A função de autocorrelação do ruído branco é impulsiva, significando que o ruído branco é descorrelacionado com qualquer função do domínio tempo exceto consigo mesmo. Em consequência, a densidade espectral de potência (a transformada de Fourier da função autocorrelação) é constante no domínio frequência, o que justifica o ruído ser chamado de branco em uma alusão ao fato de o espectro da luz branca apresentar magnitude constante na faixa de frequências do espectro da luz visível.

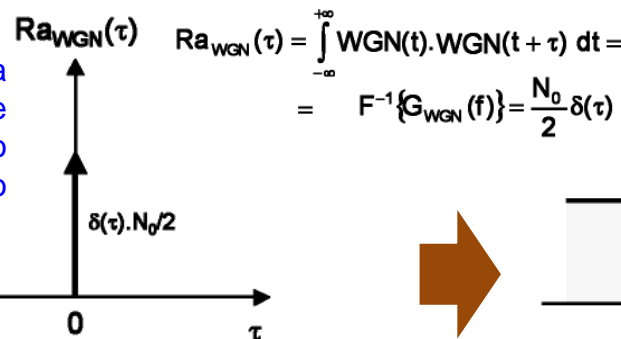
Forma de onda de tensão de ruído térmico Gaussiano branco medida nos terminais de um resistor de $10M\Omega$ aquecido na chama de uma vela e mostrada na tela de um osciloscópio.



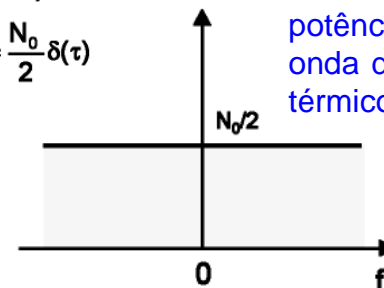
Distribuição da frequência de ocorrência de amplitudes da forma de onda de tensão de ruído térmico.



Autocorrelação da forma de onda de tensão de ruído térmico Gaussiano branco.



Densidade espectral de potência da forma de onda de tensão de ruído térmico.



Porque é necessário minimizar o ruído branco Gaussiano aditivo

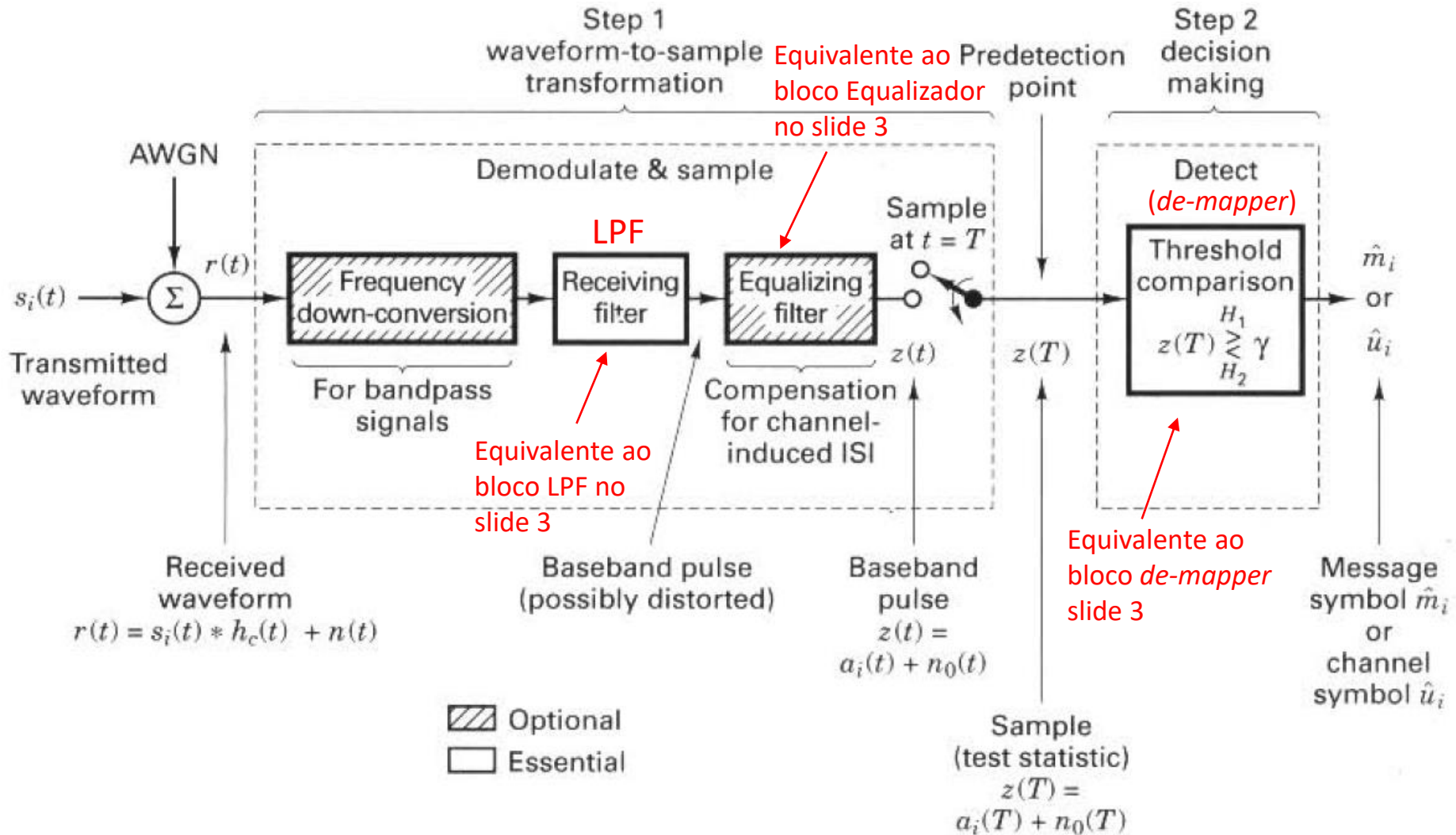


Figure 3.1 Two basic steps in the demodulation/detection of digital signals.

Porque é necessário minimizar o ruído branco Gaussiano aditivo

Dois processos principais são efetuados no diagrama de blocos simplificado do RX do slide anterior para estimativa do símbolo (e palavra binária associada) originalmente transmitido:

- 1) Processo de demodulação que recupera a forma de onda do pulso bandabase originalmente transmitido, o qual é amostrado a intervalos de tempo de duração do símbolo T , gerando na saída a amostra $z(T)$
- 2) Processo de decisão que converte a amostra $z(T)$ na saída do processo de demodulação na palavra binária detectada na saída do processo de decisão.

A transmitância do bloco *receiving filter* – filtro de recepção – é de importância crucial para a fidelidade da palavra binária detectada em presença de ruído, tendo como referência a palavra binária originalmente transmitida. O *receiving filter* é um filtro passa-baixa (LPF - *low pass filter*) cuja transmitância objetiva maximizar o sinal em relação ao ruído Gaussiano branco aditivo proveniente do canal de transmissão e do *front-end* de RF analógico (= maximizar a SNR). Nota: Transmitância é a operação realizada pelo bloco no domínio tempo – ver slide 21 de http://www.fccdecastro.com.br/pdf/SS_Aula2_12032020.pdf.

Duas transmitâncias ótimas no sentido de maximizar a SNR em presença de ruído branco Gaussiano são usualmente adotadas para o *receiving filter*:

- **Filtro casado (*matched filter*)**
- **Correlator**

Para maximizar a SNR na entrada do processo de decisão e portanto minimizar a BER na sua saída, ambas as transmitâncias fazem uso do fato de que a função de autocorrelação do ruído branco é impulsiva, sendo descorrelacionada com o sinal (conforme discutido no slide 5, o ruído branco é descorrelacionado com qualquer função do domínio tempo exceto consigo mesmo).

Para efeito de simplificar a análise que segue, vamos considerar que a modulação adotada é BPSK (Ver slide 23 do Cap VIII.1 das notas de aula). Se um sinal BPSK é transmitido através de um canal AWGN, a saída do processo de demodulação referido em 1) acima pode ser definida por

$$z(T) = a_i(T) + n_0(T), \quad i = 1,2 \quad \text{onde } a_i(T) \text{ é a componente desejada do sinal e } n_0(T) \text{ é a componente de ruído.}$$

Porque é necessário minimizar o ruído branco Gaussiano aditivo

A função densidade de probabilidade do ruído Gaussiano n_0 é dada por

$$p(n_0) = \frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{n_0}{\sigma_0}\right)^2\right]$$

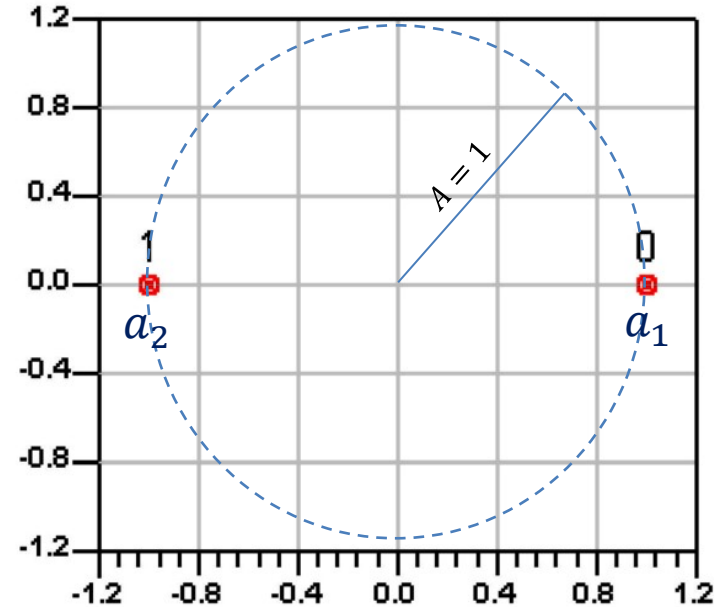
onde σ_0^2 é a variância do ruído.

As **probabilidades condicionais** de detecção de símbolos são dadas por

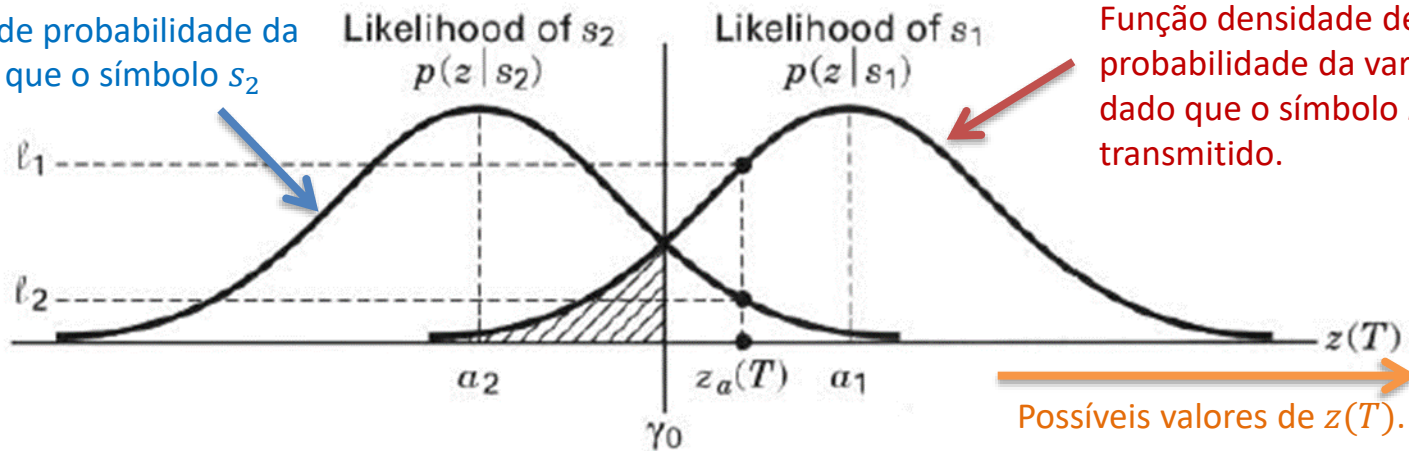
$$p(z|s_1) = \frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z - a_1}{\sigma_0}\right)^2\right]$$

$$p(z|s_2) = \frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z - a_2}{\sigma_0}\right)^2\right]$$

BPSK (Binary PSK)



Função densidade de probabilidade da variável $z(T)$ dado que o símbolo s_2 foi transmitido.



Função densidade de probabilidade da variável $z(T)$ dado que o símbolo s_1 foi transmitido.

Figure 3.2 Conditional probability density functions: $p(z|s_1)$ and $p(z|s_2)$.

Porque é necessário minimizar o ruído branco Gaussiano aditivo

Deste modo, o processo de decisão é baseado na **escolha entre duas**

hipóteses:

$$z(T) \begin{cases} \leq \gamma_0 & H_1 \\ > \gamma_0 & H_2 \end{cases}$$

onde H_1 e H_2 representam as duas hipóteses e γ_0 o limiar de decisão.

Se a variância do ruído σ_0^2 for muito alta (SNR muito baixa), de modo a causar dispersão excessiva dos símbolos $\{s_2, s_1\}$ na entrada do bloco de decisão (*de-mapper* no *slide 6*) as palavras binárias {bit 1, bit 0} associadas aos respectivos símbolos originalmente transmitidos serão recuperadas com erro na saída do *de-mapper* para aqueles símbolos da “nuvem” de símbolos dispersos em torno dos símbolos de referência $\{a_2, a_1\}$ que invadirem uma das regiões de decisão adjacentes, separadas pelo limiar de decisão γ_0 (ver *slide 20* do Cap VIII.1):

bit 1

$$z(T) \leq \gamma_0 \rightarrow H_2 \rightarrow s_2$$

bit 0

$$z(T) > \gamma_0 \rightarrow H_1 \rightarrow s_1$$

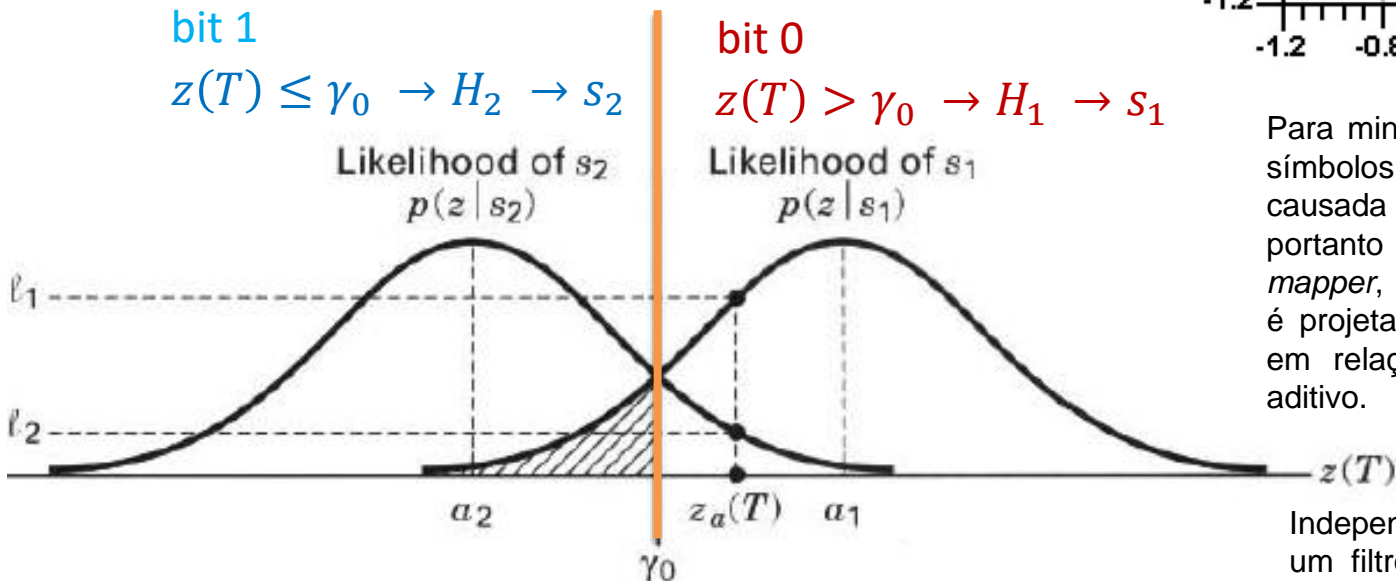
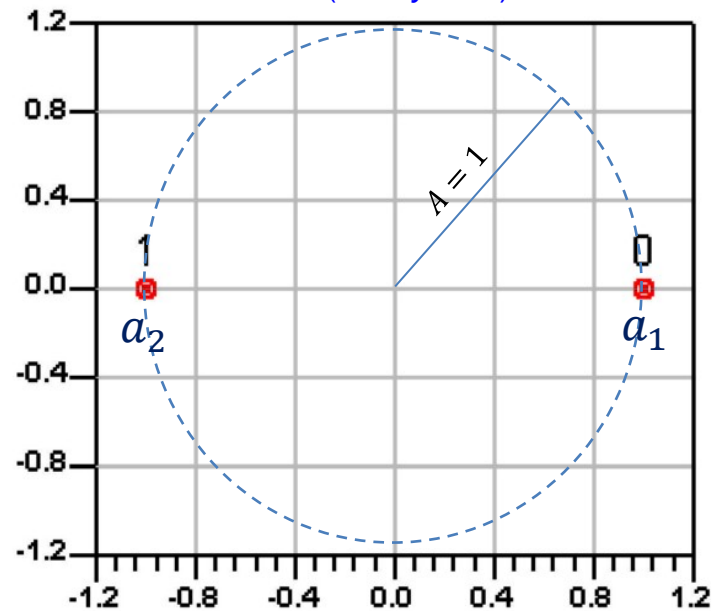


Figure 3.2 Conditional probability density functions: $p(z|s_1)$ and $p(z|s_2)$.

BPSK (*Binary PSK*)

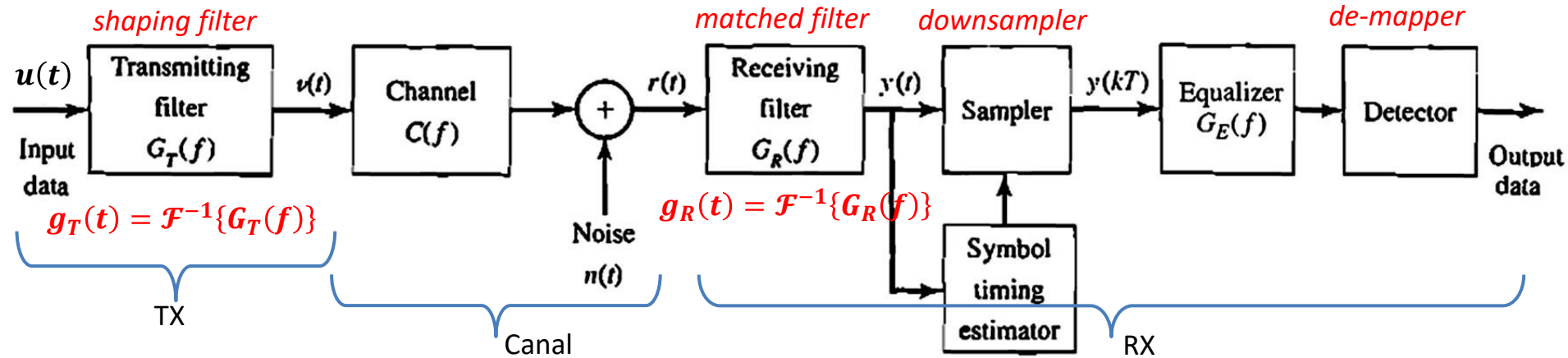


Para minimizar a dispersão excessiva dos símbolos na entrada do *de-mapper* causada por uma alta variância de ruído, e portanto minimizar a BER na saída do *de-mapper*, a transmitância do *receiving filter* é projetada de modo a maximizar o sinal em relação ao ruído Gaussiano branco aditivo.

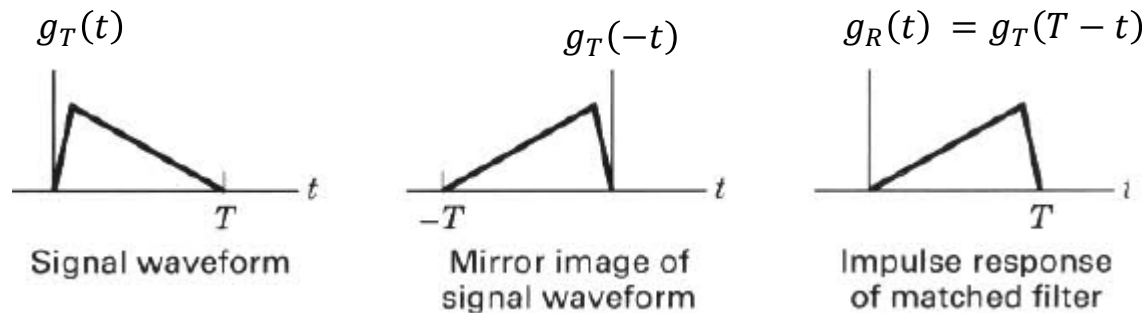
Independente desta transmitância ser a de um filtro casado ou a de um correlator, ambas se baseiam no fato de que o ruído é decorrelacionado com o sinal, conforme veremos a seguir.

Filtro Casado (*matched filter*) – resposta ao impulso

Para efeito de simplificar a análise que segue, consideraremos um sistema c/ modulação M -PAM, com símbolos $A_m \in \{A_0, A_1, \dots, A_{M-1}\}$ e c/ diagrama de blocos simplificado em bandabase mostrado na figura abaixo.



Seja a resposta ao impulso $g_T(t)$ do *shaping filter* no TX uma forma de onda qualquer no domínio tempo limitada ao intervalo $0 \leq t \leq T$, sendo $T = 1/\text{SymbolRate}$ o período do símbolo, conforme mostrado abaixo. Seja a resposta ao impulso $g_R(t)$ do *receiving filter* no RX tal que ela resulte do espelhamento de $g_T(t)$ seguido de um deslocamento T no tempo, resultando $g_R(t) = g_T(T - t)$, situação em que o *receiving filter* se torna um *matched filter*, i.e., $g_R(t)$ é *matched (casada)* à $g_T(t)$, conforme exemplificado abaixo:



Espelha $g_T(t)$ em relação à origem do eixo t e desloca T segundos a direita (para tornar o filtro causal).

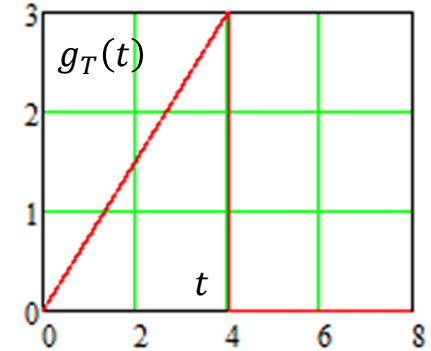
Vamos supor p/ efeito da análise que segue, que o processo adaptativo do equalizador convergiu, tal que $G_E(f) = C^{-1}(f)$, e, portanto $G_E(f)$ e $C(f)$ podem ser desconsideradas no diagrama de blocos. Assim, basicamente temos $g_T(t)$ do *shaping filter* do TX em série com $g_R(t)$ do *matched filter* do RX no fluxo de sinal entre TX e RX.

Filtro Casado (*matched filter*) – resposta ao impulso

Vamos analisar a interação da resposta ao impulso $g_T(t)$ do *shaping filter* no TX com a resposta ao impulso $g_R(t)$ do *matched filter* no RX através de um exemplo.

Exemplo: Seja o sistema M -PAM mostrado na figura do slide anterior e seja a resposta ao impulso $g_T(t)$ do *shaping filter* no TX dada conforme abaixo, sendo a amplitude $A = 3$ e o período do símbolo $T = 4$.

$$g_T(t) = \begin{cases} \frac{A}{T}t & 0 \leq t \leq T \\ 0 & t < 0 \text{ ou } t > T \end{cases}$$

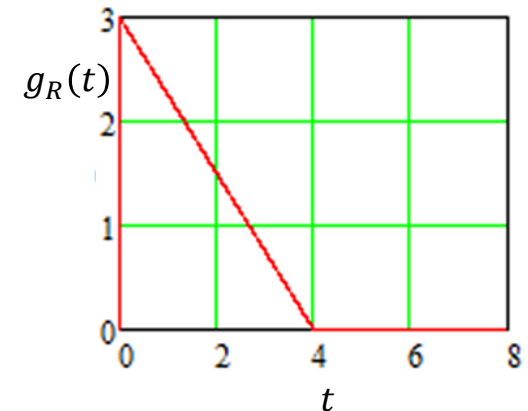


Pede-se: (a) Determine e plote a resposta ao impulso $g_R(t)$ do *matched filter* no RX.

(b) Determine e plote a resposta $y(t)$ na saída do *matched filter* para um impulso aplicado na entrada $u(t)$ do *shaping filter*. **(c)** Determine e plote a função de auto-correlação de $g_T(t)$ e compare com o resultado obtido em (b).

Solução: (a) A resposta ao impulso $g_R(t)$ de um *matched filter* sempre é dada por $g_R(t) = g_T(T - t)$. Portanto, da definição da resposta ao impulso $g_T(t)$ do *shaping filter* dada no enunciado temos:

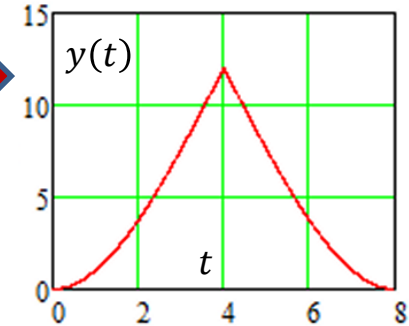
$$g_R(t) = \begin{cases} -\frac{A}{T}t + A & 0 \leq t \leq T \\ 0 & t < 0 \text{ ou } t > T \end{cases}$$



Filtro Casado (*matched filter*) – resposta ao impulso

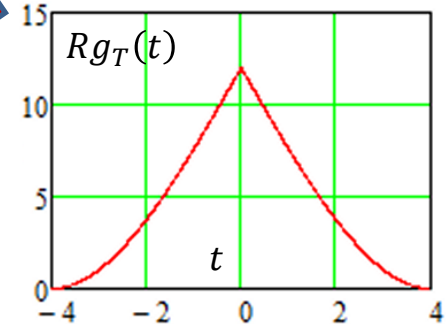
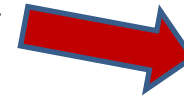
(b) A resposta $y(t)$ na saída do *matched filter* para um impulso aplicado na entrada $u(t)$ do *shaping filter* é dada pela resposta ao impulso do bloco equivalente formado pelo bloco *shaping filter* do TX seguido pelo bloco *matched filter* no RX (ver slide 10). A resposta ao impulso do bloco equivalente *shaping filter+matched filter* é dada pela convolução entre $g_T(t)$ e $g_R(t)$:

$$y(t) = g_T(t) * g_R(t) = \int_0^t g_T(\tau) g_R(t - \tau) d\tau$$



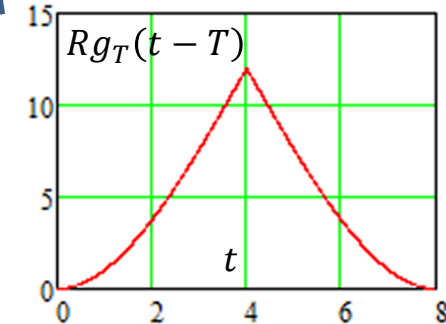
(c) A função de auto-correlação $Rg_T(t)$ de $g_T(t)$ é dada por

$$Rg_T(t) = \int_0^T g_T(\tau) g_T(\tau + t) d\tau$$



Atrasando de T a função de auto-correlação $Rg_T(t)$ para efeito de comparação com a resposta $y(t)$ na saída do *matched filter*:

$$Rg_T(t - T) = \int_0^T g_T(\tau) g_T(\tau + t - T) d\tau$$



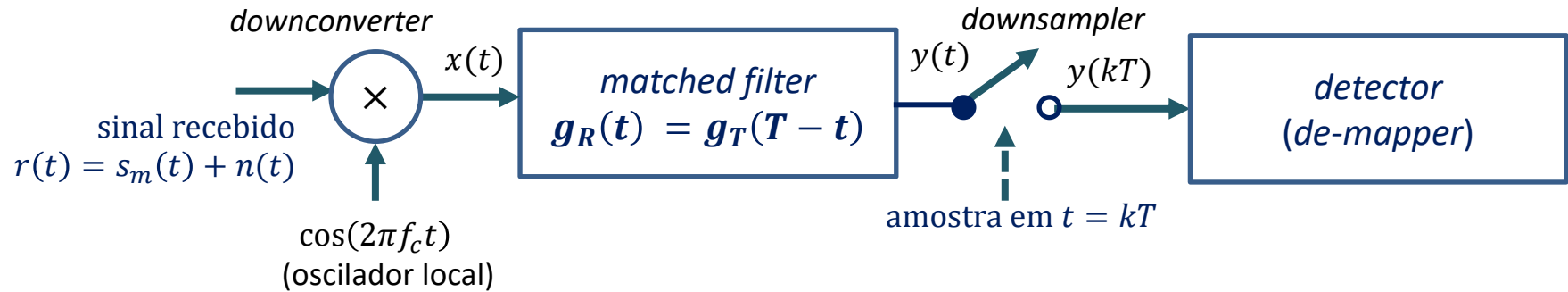
Note que a resposta $y(t)$ na saída do *matched filter* à uma excitação $\delta(t)$ aplicada na entrada $u(t)$ do *shaping filter* (ver slide 10) é idêntica à função de auto-correlação $Rg_T(t - T)$ de $g_T(t)$. Isto evidencia que cada pulso de duração T transmitido pelo *shaping filter* é correlacionado com uma réplica dele mesmo ao chegar no *matched filter*, após ter trafegado através do canal de transmissão. **Portanto, o ruído branco Gaussiano adicionado ao sinal no canal será minimizado no processo de correlação efetuado pelo *matched filter* porque o ruído branco é descorrelacionado com qualquer função do domínio tempo exceto consigo mesmo (ver slide 5), conforme veremos a seguir.**

Homework

Para o exemplo do slide 11 e para a $g_T(t)$ dada em seu enunciado, desenvolva analiticamente as integrais dos itens (b) e (c) do referido exemplo. Plote os gráficos das funções $y(t)$, $Rg_T(t)$ e $Rg_T(t - T)$ resultantes do desenvolvimento analítico das referidas integrais. Verifique a consistência dos gráficos assim obtidos comparando com os resultados obtidos numericamente no exemplo do slide 11.

Filtro Casado (*matched filter*) – minimização do ruído branco e maximização do sinal

Consideremos agora um sistema c/ modulação M -PAM, com símbolos $A_m \in \{A_0, A_1, \dots, A_{M-1}\}$, frequência central do canal f_c e c/ diagrama de blocos simplificado do RX mostrado na figura abaixo.



Seja o sinal M -PAM transmitido no canal com frequência central f_c dado por

$$s_m(t) = A_m g_T(t) \cos(2\pi f_c t) \quad , 0 \leq t \leq T \quad (1)$$

De modo que o sinal recebido na entrada do RX é

$$r(t) = s_m(t) + n(t) = A_m g_T(t) \cos(2\pi f_c t) + n(t) \quad , 0 \leq t \leq T \quad (2)$$

E na entrada do *matched filter* temos:

$$x(t) = r(t) \cos(2\pi f_c t) = A_m g_T(t) \cos^2(2\pi f_c t) + n(t) \cos(2\pi f_c t) \quad (3)$$

Filtro Casado (*matched filter*) – minimização do ruído branco e maximização do sinal

O *matched filter* efetua a convolução de $x(t)$ com a sua resposta ao impulso $g_R(t) = g_T(T - t)$:

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * g_R(t) = \int_0^t x(\tau) g_R(t - \tau) d\tau = \int_0^t x(\tau) g_T(\tau - t + T) d\tau = \\ &= \int_0^t [A_m g_T(\tau) \cos^2(2\pi f_c \tau) + n(\tau) \cos(2\pi f_c \tau)] g_T(\tau - t + T) d\tau = \\ &= \int_0^t A_m \cos^2(2\pi f_c \tau) g_T(\tau) g_T(\tau - t + T) d\tau + \int_0^t n(\tau) \cos(2\pi f_c \tau) g_T(\tau - t + T) d\tau \end{aligned} \quad (4)$$

O ruído branco $n(\tau)$ é descorrelacionado com qualquer função do domínio tempo exceto consigo mesmo (ver slide 5) – portanto o ruído resulta significativamente minimizado por ação desta integral.

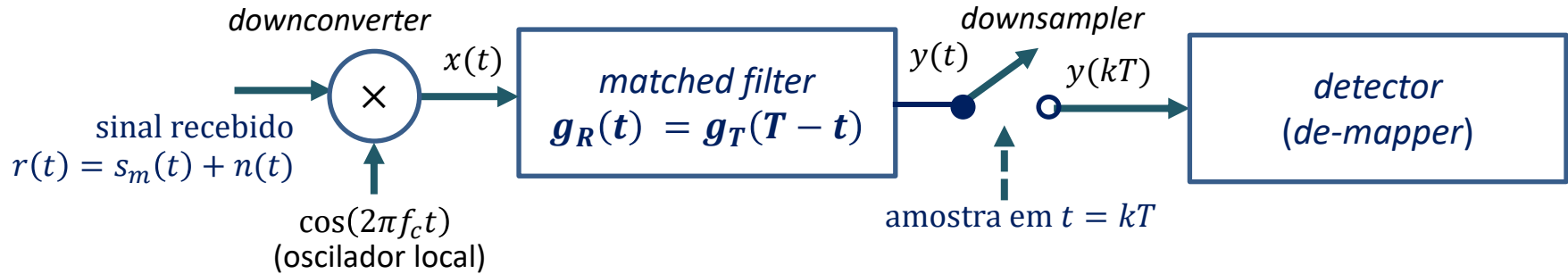
Dado que o *downsampler* (vide figura no slide anterior) amostra $y(t)$ ao final do período T de cada símbolo, podemos fazer $t = T$ em (4), resultando:

$$y(T) = \int_0^T A_m \cos^2(2\pi f_c \tau) g_T(\tau) g_T(\tau) d\tau = A_m \int_0^T \underbrace{g_T^2(\tau) \cos^2(2\pi f_c \tau)}_{> 0} d\tau \quad (5)$$

Note que o integrando em (5) é sempre um número positivo, de modo que ao final do período T de integração o sinal terá sido significativamente maximizado, assim como simultaneamente o ruído foi significativamente minimizado conforme equação (4). Este efeito maximiza a SNR, minimizando a dispersão dos símbolos na entrada do *de-mapper* causada pelo ruído branco Gaussiano, e portanto minimiza a BER na saída do *de-mapper*.

Filtro Casado (*matched filter*) – Exemplo

Exemplo: Considere o RX de um sistema M -PAM com frequência central do canal $f_c = 40\text{MHz}$, $\text{SymbolRate} = 10\text{MHz}$ e com símbolos $A_m \in \{A_0, A_1, \dots, A_{M-1}\}$, cujo diagrama de blocos simplificado é mostrado na figura abaixo.

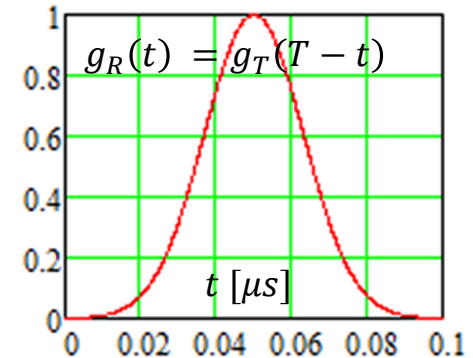
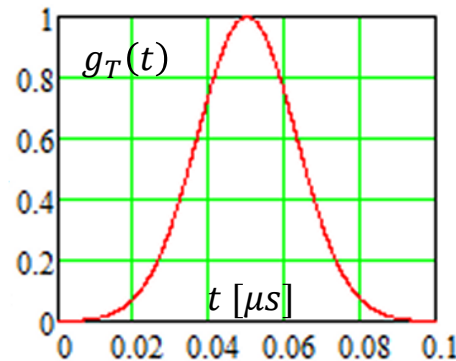


A resposta ao impulso $g_T(t)$ do *shaping filter* no TX e a resposta ao impulso $g_R(t)$ do *matched filter* no RX é conforme abaixo:

$$g_T(t) = K_0 e^{-\pi \left(\frac{t - \frac{T}{2}}{\tau} \right)^2}$$

$$K_0 = 1 \quad \tau = 0.033 \mu\text{s}$$

$$T = 1/\text{SymbolRate} = 0.1 \mu\text{s}$$

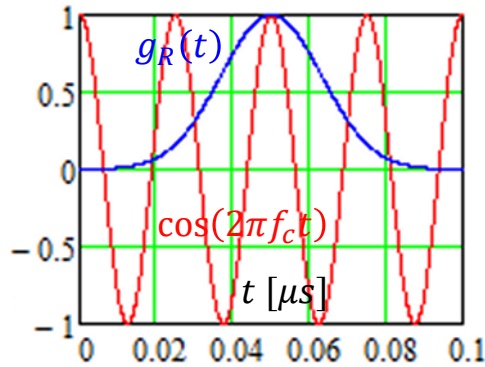


A SNR medida na entrada do RX é maior do que 60 dB, de modo que o ruído $n(t)$ na entrada pode ser desprezado.

Pede-se: (a) Plote em um mesmo gráfico o sinal do oscilador local e a resposta ao impulso $g_R(t)$ do *matched filter*. (b) Assumindo que o símbolo transmitido seja $A_m = 1$, plote $p/ 0 < t < 2T$ a resposta $y(t)$ ao símbolo transmitido $A_m = 1$.

Filtro Casado (*matched filter*) – Exemplo

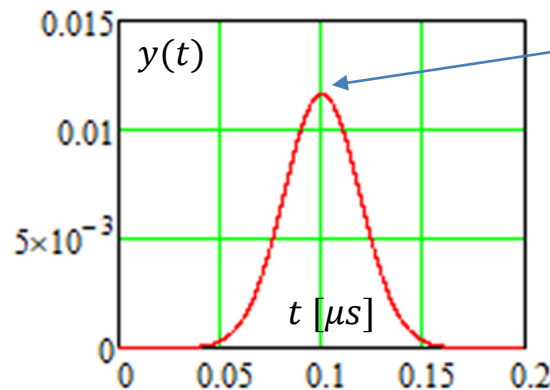
Solução: (a) Gráfico do sinal do oscilador local e da resposta ao impulso $g_R(t)$ do *matched filter*:



(b) Para obter a resposta $y(t)$ ao símbolo transmitido $A_m = 1$ e plotar a resposta no intervalo $0 < t < 2T$, vamos utilizar a equação (4) com $n(t) = 0$:

$$y(t) = \int_0^t A_m \cos^2(2\pi f_c \tau) g_T(\tau) g_T(\tau - t + T) d\tau \quad (6)$$

Resolvendo numericamente (6) para o intervalo $0 < t < 2T$ obtemos a resposta $y(t)$ ao símbolo transmitido $A_m = 1$:

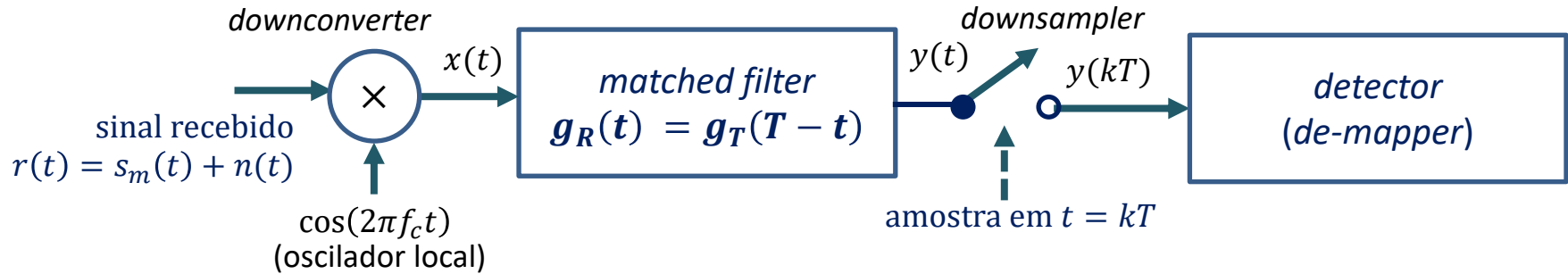


O *downsampler* na figura do enunciado amostra $y(t)$ em $t = kT$ e portanto “capta” o valor máximo de $y(t)$, amplificando o sinal e atenuando o *noise-floor* de ruído. Em operação real o período de integração se encerra no instante de amostragem em $t = T = 0,1 \mu\text{s}$, quando o filtro é resetado e é iniciado um novo período de integração para o próximo símbolo recebido.

Nota: A solução numérica de (6) foi feita com o software Mathcad. Uma versão “free” do MathCad 14 pode ser obtida p/ *download* em https://www.dropbox.com/sh/3wtjenppcic9c5c/AABvk3RlIf_xDxjfOIH6Hphgza?dl=0MathCad14.rar&preview=MathCad14.rar .

Homework

Considere o RX de um sistema M -PAM com frequência central do canal $f_c = 43\text{MHz}$, SymbolRate = 10MHz e com símbolos $A_m \in \{A_0, A_1, \dots, A_{M-1}\}$, cujo diagrama de blocos simplificado é mostrado na figura abaixo.

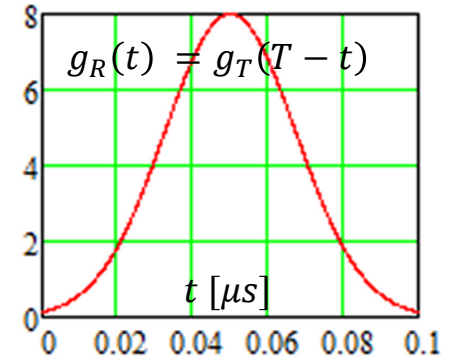
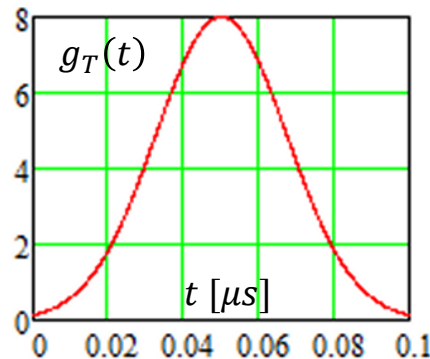


A resposta ao impulso $g_T(t)$ do *shaping filter* no TX e a resposta ao impulso $g_R(t)$ do *matched filter* no RX é conforme abaixo:

$$g_T(t) = K_0 e^{-\pi \left(\frac{t - \frac{T}{2}}{\tau} \right)^2}$$

$$K_0 = 8 \quad \tau = 0.044 \mu\text{s}$$

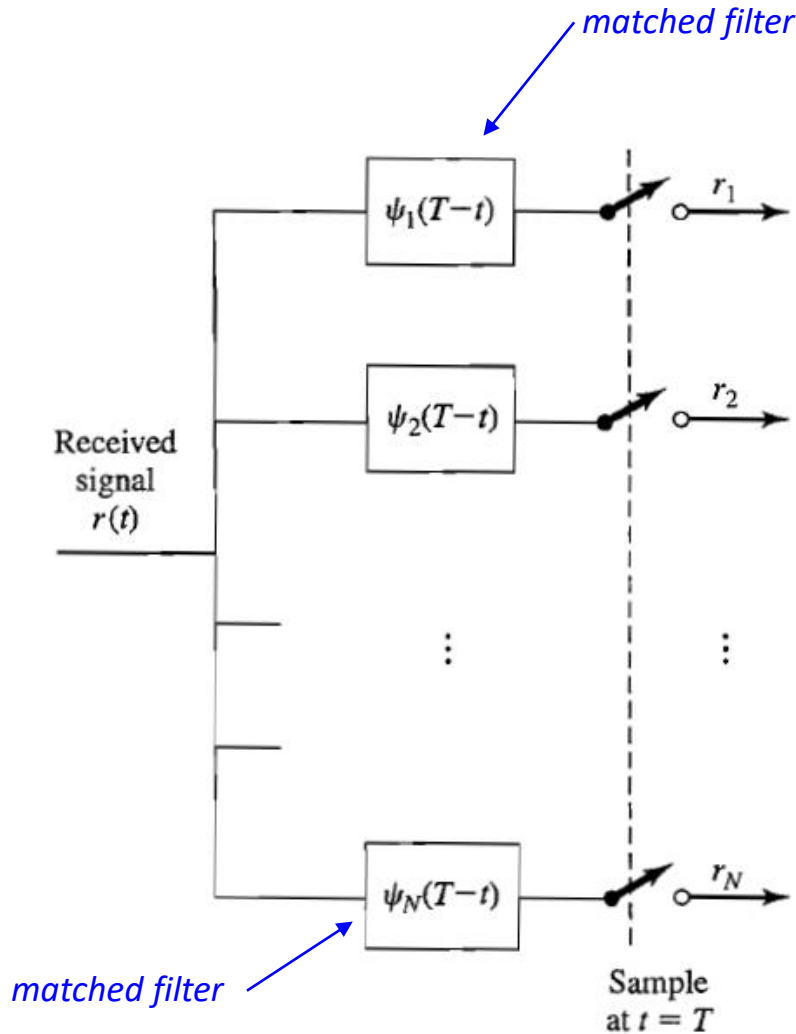
$$T = 1/\text{SymbolRate} = 0.1 \mu\text{s}$$



A SNR medida na entrada do RX é maior do que 60 dB, de modo que o ruído $n(t)$ na entrada pode ser desprezado.

Pede-se: **(a)** Plote em um mesmo gráfico o sinal do oscilador local e a resposta ao impulso $g_R(t)$ do *matched filter*. **(b)** Assumindo que o símbolo transmitido seja $A_m = 1$, plote $p/ 0 < t < 2T$ a resposta $y(t)$ ao símbolo transmitido $A_m = 1$.

Filtro Casado (*matched filter*) – número N de filtros em função do tipo de modulação adotada



Para um espaço de sinal multidimensional, de dimensão N , a demodulação por filtro casado deve implementar um banco de N filtros, um para cada dimensão do espaço de sinal:

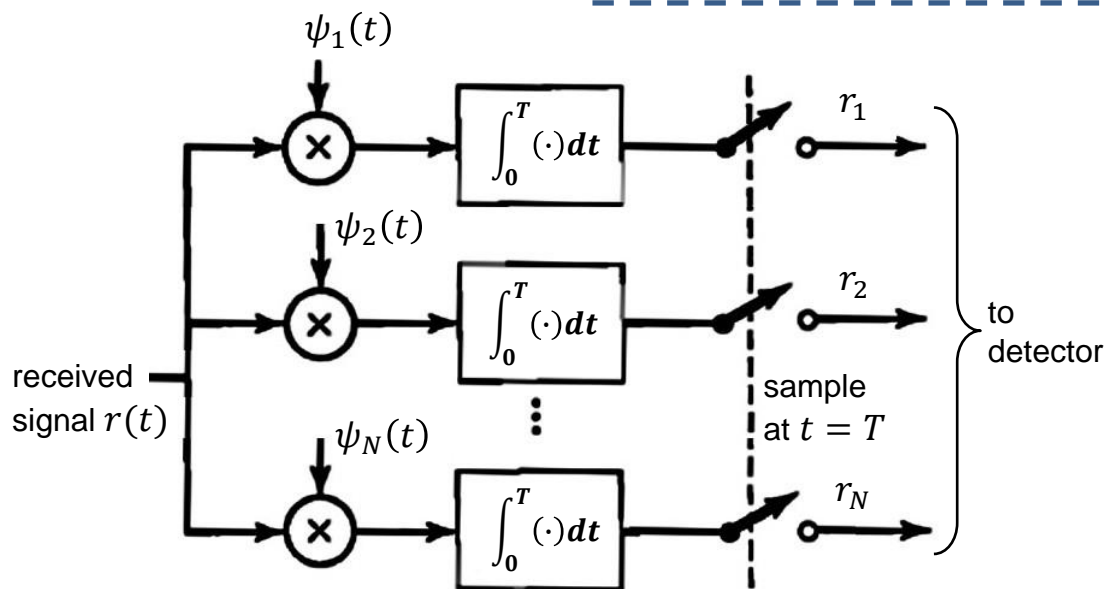
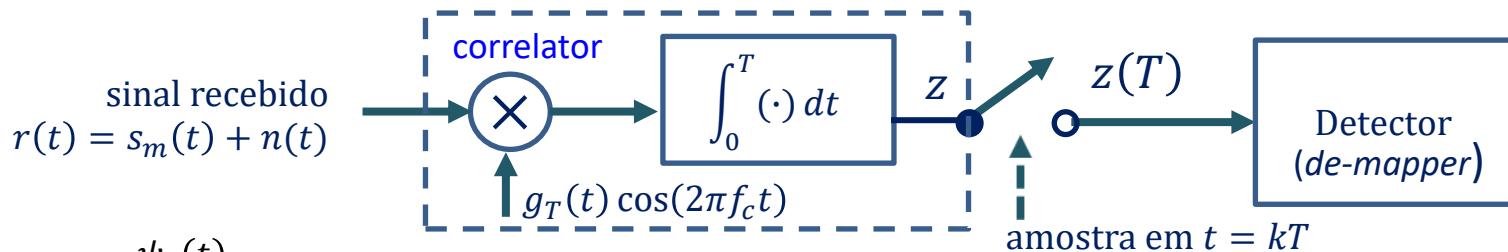
- Para modulações M -PAM, $N = 1$.
- Para modulações M -QAM e M -PSK (modulações IQ), $N = 2$ (sub-canal I e sub-canal Q).
- Para modulações M -FSK, $N = M$ é o número de tons ortogonais (FSK será estudada adiante).

Demodulação por Correlador

Um correlador tem finalidade idêntica à de um *matched filter* no processo de demodulação visto nos slides anteriores. Conforme mostra a figura abaixo, um correlador efetua a integração do produto do sinal recebido $r(t)$ (ver equação (2)) por um template (uma réplica armazenada em memória no hardware do RX) da resposta ao impulso $g_T(t)$ do *shaping filter* do TX, realizando, portanto, o mesmo processo de correlação efetuado por um *matched filter*. A integração é efetuada ao longo do intervalo de duração T de um símbolo, sendo f_c a frequência central do canal de transmissão.

$$z(T) = \int_0^T r(t) g_T(t) \cos(2\pi f_c t) dt = \int_0^T [A_m g_T(t) \cos(2\pi f_c t) + n(t)] g_T(t) \cos(2\pi f_c t) dt \quad (7)$$

Note a semelhança de (7) com as equações (4) e (5) obtidas para o *matched filter*. Ao final do intervalo de integração T a saída z do correlador é amostrada e o valor $z(T)$ é enviado ao detector (de-mapper), que converte este valor na palavra binária correspondente à amplitude do pulso $g_T(t)$ transmitido:



De forma similar à demodulação por *matched filter*, para um espaço de sinal multidimensional, de dimensão N , a demodulação por correlação deve implementar um banco de N correladores, um para cada dimensão do espaço de sinal.

Demodulação por *Matched Filter* e Correlator - Exemplo

Exemplo: O diagrama abaixo mostra a etapa de modulação de um sistema de comunicação digital 16-QAM:

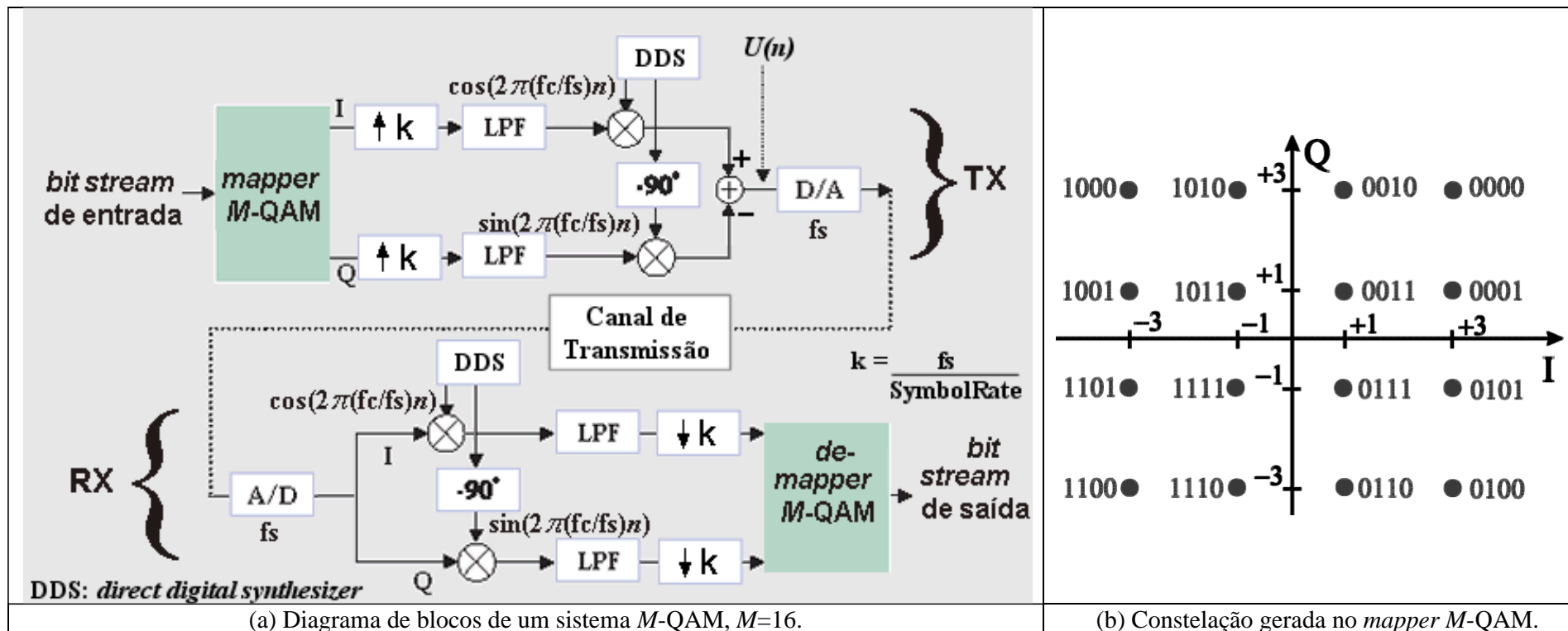


Figura 1: Etapa de modulação de um sistema de comunicação digital 16-QAM.

A taxa do *bitstream* na entrada do *mapper* é 24Mbps. Sabe-se que a frequência de amostragem do D/A é $f_s=30\text{MHz}$ e que a frequência da portadora é f_c . Cada símbolo IQ tem uma duração $T = 1/\text{symbol rate}$, onde *symbol rate* é a taxa de símbolos na saída do *mapper*.

Demodulação por *Matched Filter* e Correlador - Exemplo

A Figura 2 mostra a resposta $h_u(n)$ do *upsampler* $\uparrow k$ a um pulso de amplitude 1 e de largura T . Conforme mostra a Figura 1(a), o *upsampler* recebe em sua entrada os pulsos de saída do *mapper*. Note que para 16-QAM, a cada palavra binária de 4 bits do *bitstream*, a saída I (e Q) do *mapper* gera um pulso de largura T cujas possíveis amplitudes são $\{-3, -1, +1, +3\}$.

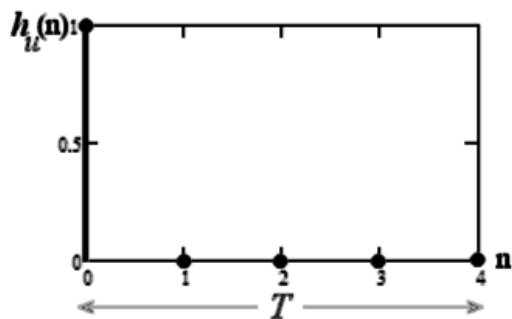


Figura 2: Resposta ao impulso $h_u(n)$ do *upsampler* $\uparrow k$ no TX.

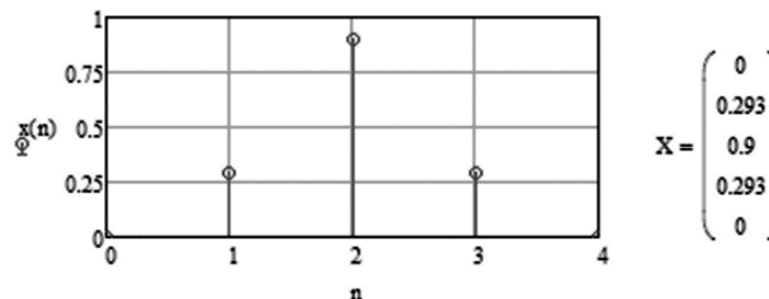


Figura 3: Resposta ao impulso $g_T(n)$ do *shaping filter* (TX) e do *matched filter* (RX) – LPF (*low pass filter*) na Figura 1(a). Os elementos do vetor X são os valores numéricos de $x(n) = g_T(n)$.

O *downsampler* $\downarrow k$ no RX efetua o processo inverso: Para cada seqüência de duração total T composta por k amostras consecutivas na entrada do *downsampler*, a primeira amostra é mantida e as $k - 1$ amostras subseqüentes são retiradas (decimadas) da seqüência de modo a resultar uma seqüência de duração total T com 1 única amostra após o *downsampler*.

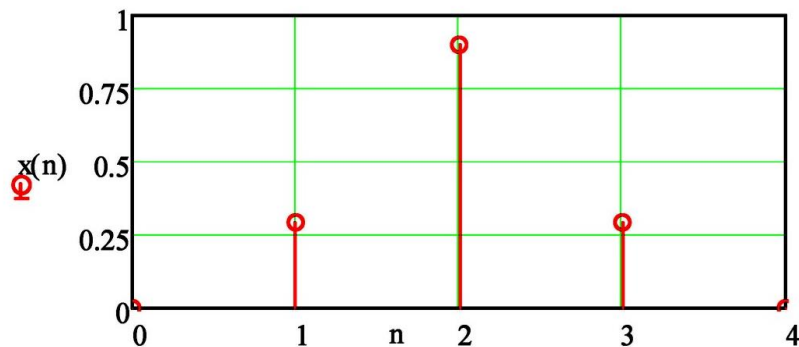
O *shaping filter* do TX (LPF na Figura 1) e o *matched filter* do RX (LPF na Figura 1) apresentam resposta ao impulso $g_T(n)$, conforme $x(n)$ mostrado na Figura 3, sendo T a duração total de $g_T(n) = x(n)$.

Para as condições operacionais especificadas nos slides anteriores, pede-se:

- a) O gráfico da seqüência de amostras $z(n)$ na saída do *matched filter* do sub-canal I do RX que resulta da palavra binária **0101** aplicada na entrada do *mapper* 16-QAM do TX. Assuma que a SNR no canal de transmissão é maior que 120dB e que o CAG e o equalizador no RX (matéria a ser vista adiante) eliminam totalmente os efeitos de multipercurso, tornando unitária a transmitância do canal de transmissão (i.e., não ocorre atenuação nem degradação do sinal entre TX e RX). **Dica:** O resultado $z(n)$ da convolução entre duas seqüências $x(n)$ e $y(n)$, isto é, $z(n) = x(n) * y(n)$, é dado por $z(n) = \sum_{m=m1}^{m2} x(m)y(n-m)$ onde $m1$ e $m2$ são tais que o produto de todas as amostras não nulas das seqüências x e y sejam contempladas no somatório.
- b) Repita a) assumindo que o RX utilize um correlator analógico ao invés de um *matched filter* digital.
- c) Assumindo que o canal seja AWGN, qual amostra deve ser mantida na saída $z(n)$ do *matched filter* do RX, após a operação de decimação efetuada pelo *downsampler*, para que seja maximizada a SNR na entrada do *de-mapper* (i.e., seja minimizada a BER na saída do mesmo)?
- d) Repita c) assumindo que o RX utilize um correlator analógico ao invés de um *matched filter* digital.

Solução:

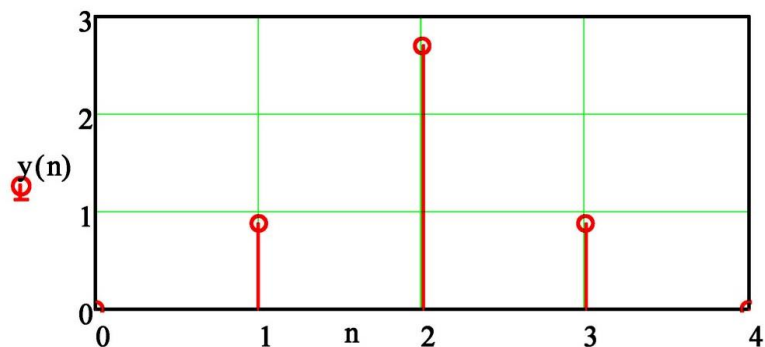
a) $g_T(n) = x(n)$ é a resposta ao impulso do *shaping filter* (LPF) no TX que é idêntica à resposta ao impulso do *matched filter* (LPF) no RX:



$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.293 \\ 0.9 \\ 0.293 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$N = 5$ → número de amostras em $x(n)$ obtido por $N = k = f_s / \text{symbolrate}$. $f_s = 30\text{MHz}$ é dado no enunciado e o symbolrate é obtido de $\text{symbolrate} = \text{bitrate} / \text{numbitspersymbol} = 24\text{Mbps} / 4\text{bpsymb} = 6\text{ MHz}$

O *upsampler* $\uparrow k$ do sub-canal I do TX mantém o valor I de entrada na amostra inicial e insere $k-1$ amostras adicionais nulas, sendo todas as amostras uniformemente espaçadas no intervalo T de um símbolo IQ. Para a palavra binária **0101**, o *mapper* do TX gerará um valor **I=3** em sua saída (vide Figura 1 do enunciado). Portanto, a saída $y(n)$ do *shaping filter* (LPF) do sub-canal I do TX para esta palavra binária será a dado por $I * g_T(n)$:



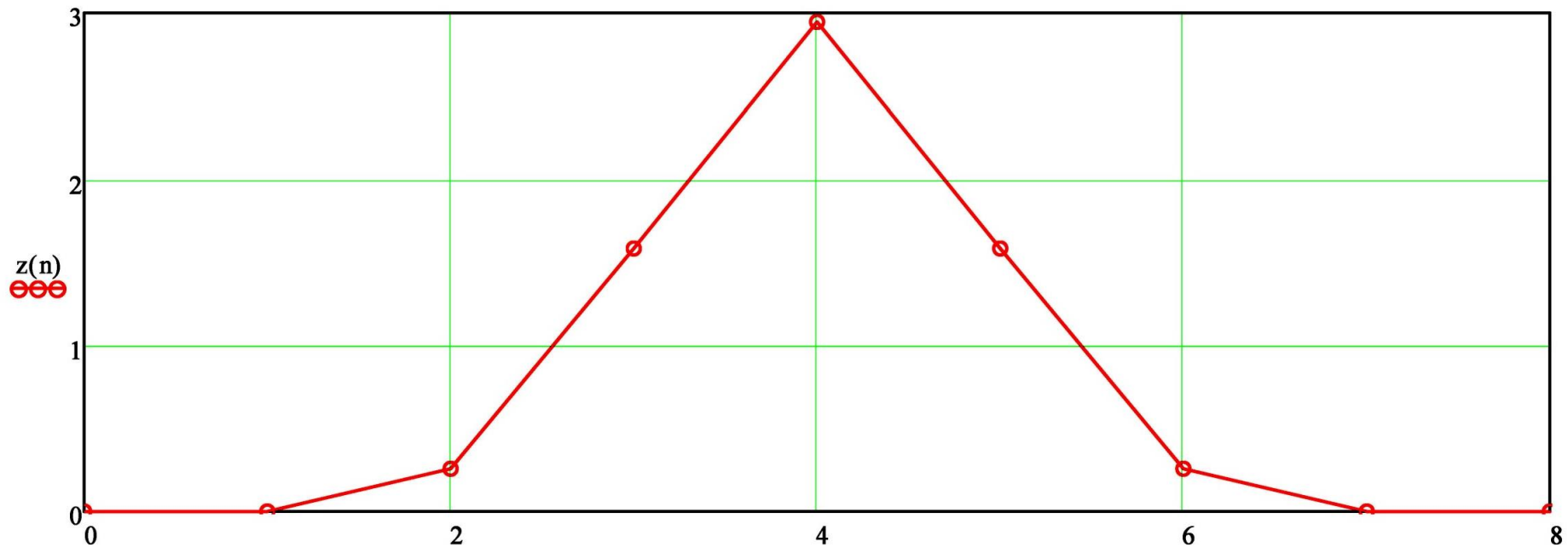
$$Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.88 \\ 2.7 \\ 0.88 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Demodulação por *Matched Filter* e Correlador - Exemplo

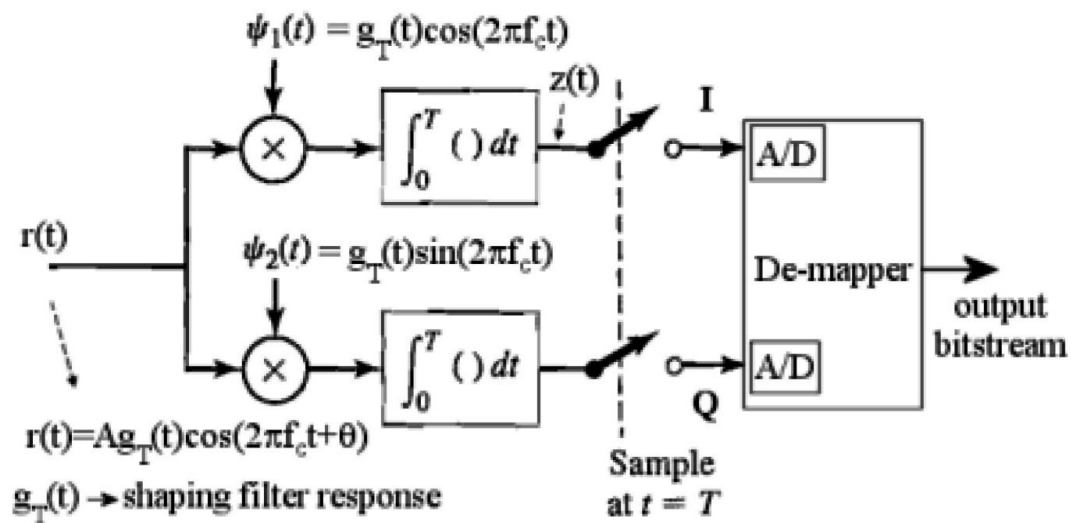
Do enunciado, não há atenuação nem degradação do sinal transmitido no canal de transmissão, sendo unitária a transmitância entre TX e RX. Portanto, o sinal na entrada do *matched filter* do sub-canal I do RX é o próprio sinal $y(n)$. A saída $z(n)$ do *matched filter* será a convolução de $y(n)$ com a resposta ao impulso $x(n)$ do *matched filter*:

$$m1 := 0 \quad m2 := N - 1 \quad n := 0, 1, \dots, 2 \cdot N - 2$$

$$z(n) := \left[\sum_{m=m1}^{m2} (x(m) \cdot y(n - m)) \right]$$



b) Para o caso em que o RX utiliza detecção por correlator, o demodulador é caracterizado pelo diagrama de blocos abaixo:



Na figura acima, a operação de correlação utiliza um circuito integrador analógico ($RC \gg T$):

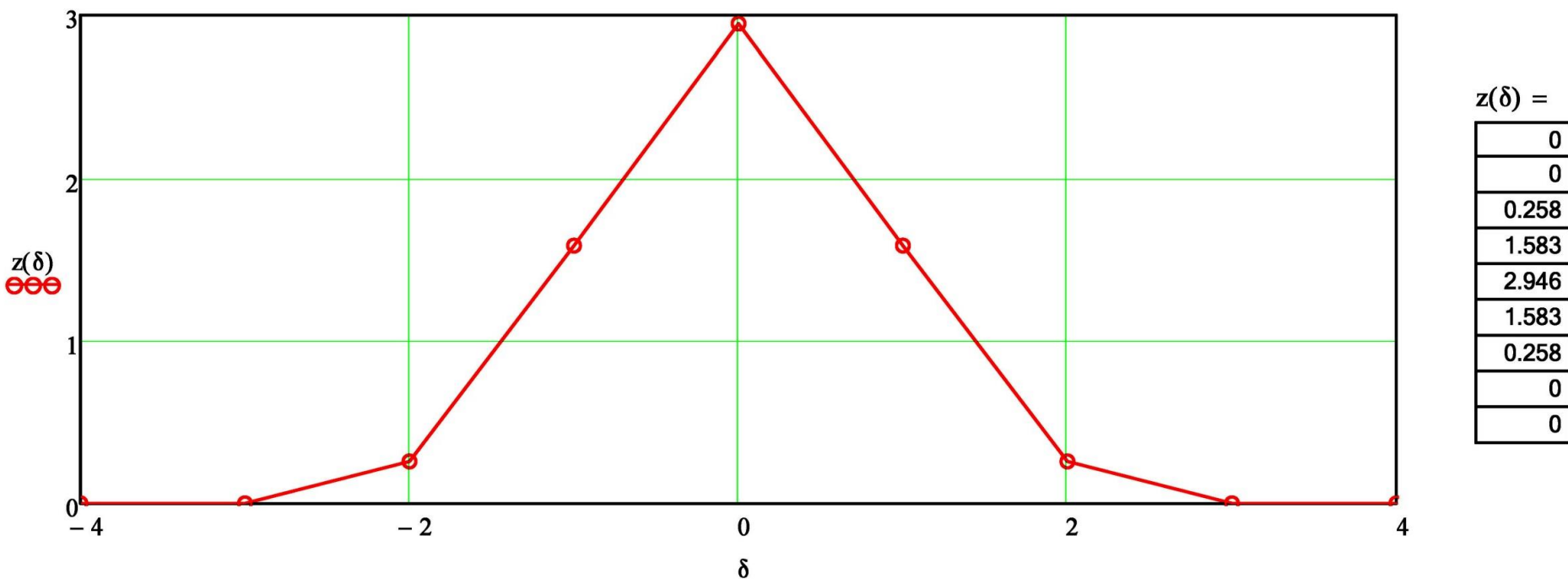
$$z(\tau) = \int_0^T \psi_1(t) \cdot r(t + \tau) dt \quad , \quad \tau = t$$

Demodulação por *Matched Filter* e Correlator - Exemplo

Na versão totalmente digital, os dois A/D são substituídos por um único A/D na entrada do demodulador. Neste caso, a operação de correlação, antes baseada em integração analógica, passa a ser efetuada através de um somatório discreto realizado por operações aritméticas implementadas em um processador p/ DSP ou em uma FPGA:

$$z(\delta) := \sum_{n=0}^{N-1} (x(n) \cdot y(n + \delta)) \quad , \quad \delta = n$$

onde $x(n)$ é a versão discreta em bandabase de $\psi_1(t)$ e é gravado em uma LUT (*look up table*) no RX. Nesta abordagem puramente digital, a saída z resulta em:



Portanto, a seqüência z na saída do correlator resultou na mesma forma de onda que a seqüência z na saída do *matched filter* obtida por convolução no item a).

c) Se o canal é AWGN a seqüência z na saída do *matched filter* ainda estará "levemente" (é claro que depende da SNR) corrompida por ruído aditivo, apesar da operação de correlação implícita efetuada pelo *matched filter* ter atenuado o nível de ruído pelo fato deste ser descorrelacionado (branco). Portanto, a amostra que o *downsampler* deve "capturar" é aquela de maior amplitude absoluta na seqüência z , pois quanto maior for a amplitude da amostra "capturada" mais desprezível será o efeito do ruído a ela adicionado, maximizando assim a SNR.

d) Tanto para o correlator digital como para o analógico, vale exatamente o mesmo arrazoado do item c. Para o caso específico do correlator analógico (vide diagrama do detetor por correlação analógica na figura do item b acima), se o canal é AWGN o sinal z na saída do correlator ainda estará "levemente" (depende da SNR) corrompido por ruído aditivo, apesar de a operação de correlação ter atenuado o nível de ruído pelo fato deste ser descorrelacionado (branco). Portanto, o instante em que o amostrador (vide figura acima) amostra a saída $z(t)$ deve ser tal que corresponda à maior amplitude do sinal z , pois quanto maior for a amplitude absoluta do sinal no instante de amostragem mais desprezível será o efeito do ruído adicionado ao sinal naquele instante, maximizando assim a SNR.

Homework

Refazer o exemplo do slide 21 para a palavra binária 1011 aplicada na entrada do mapper 16-QAM do TX.

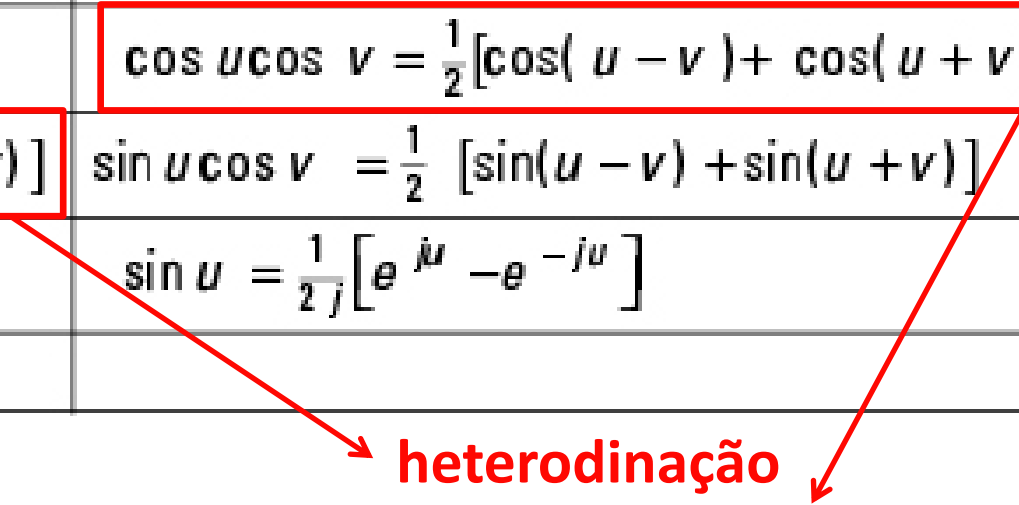
Apêndice A:

Operation	Formula
Rectangular to Polar Conversion	$z = x + jy = re^{j\theta}$ where $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ and $\theta = \arctan(y/x)$
Polar to Rectangular Conversion	$z = re^{j\theta} = r [\cos(\theta) + j\sin(\theta)] = x + jy$ where $x = r \cos(\theta)$ and $y = r \sin(\theta)$
Add: $z_3 = z_1 + z_2$	$(x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$
Subtract: $z_3 = z_1 - z_2$	$(x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$
Multiply: $z_3 = z_1 z_2$ (polar form)	$(x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + y_1 x_2)$ $r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$
Divide: $z_3 = z_1 / z_2$ (polar form)	$\frac{(x_1 x_2 - y_1 y_2) - j(x_1 y_2 - y_1 x_2)}{x_2^2 + y_2^2}$ $\frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$

Apêndice B:

Sejam $u = 2\pi f_1 t$ e $v = 2\pi f_2 t$. Valem as seguintes relações (*relationships*) trigonométricas:

<i>Relationship</i>	<i>Relationship</i>
$\sin u = \cos(u - \pi/2)$	$\cos u = \sin(u + \pi/2)$
$\cos(-u) = \cos u$	$\sin(-u) = -\sin(u)$
$\sin^2 u + \cos^2 u = 1$	$\cos^2 u = \frac{1}{2}(1 + \cos 2u)$
$\sin^2 u = \frac{1}{2}(1 - \cos 2u)$	$\cos(u \pm v) = \cos u \cos v \mp \sin u \sin v$
$\sin(u \pm v) = \sin u \cos v \pm \cos u \sin v$	$\cos u \cos v = \frac{1}{2}[\cos(u - v) + \cos(u + v)]$
$\sin u \sin v = \frac{1}{2}[\cos(u - v) - \cos(u + v)]$	$\sin u \cos v = \frac{1}{2}[\sin(u - v) + \sin(u + v)]$
$\cos u = \frac{1}{2}[e^{ju} + e^{-ju}]$	$\sin u = \frac{1}{2j}[e^{ju} - e^{-ju}]$
$e^{ju} = \cos u + j \sin u$	


heterodinação
 das frequências f_1 e f_2