



---

# *Matched filter tipo raised cosine e root raised cosine.*

---



Departamento de Eletrônica e Computação

Centro de Tecnologia

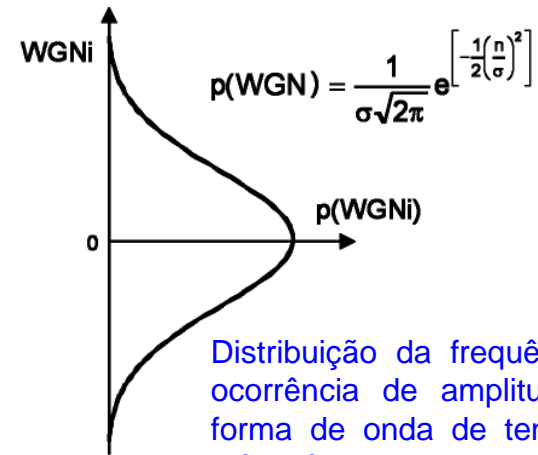
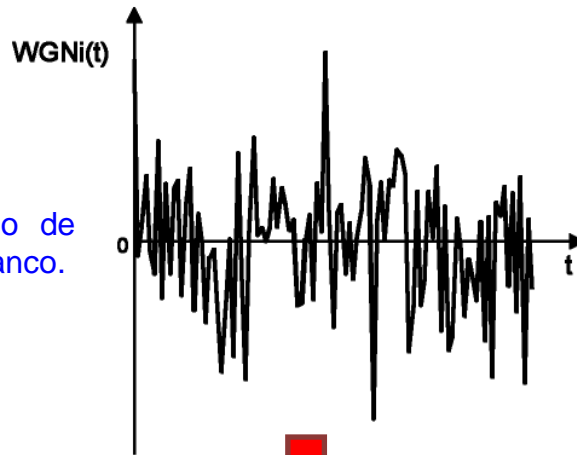
ELC1120 – Telecomunicações II

Profa. Candice Müller Prof. Fernando DeCastro

## O efeito do intervalo de integração no processo de correlação efetuado no *matched filter*

Vimos no Cap VIII.2 que as amplitudes de ruído ao longo do tempo se comportam de maneira tal que valores positivos e negativos de pequena amplitude ocorrem frequentemente no transcorrer do tempo, com picos de amplitude maior ocorrendo raramente, conforme mostra a figura. A função de autocorrelação do ruído branco é impulsiva, significando que o ruído branco é descorrelacionado com qualquer função do domínio tempo exceto consigo mesmo. Em consequência, a densidade espectral de potência é constante no domínio frequência.

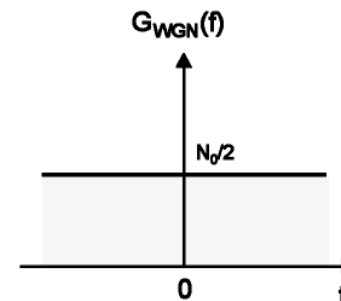
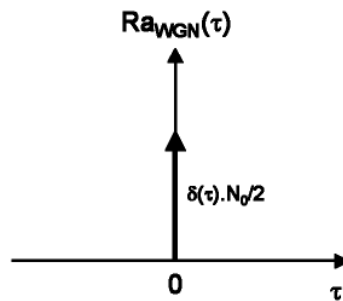
Forma de onda de tensão de ruído térmico Gaussiano branco.



Distribuição da frequência de ocorrência de amplitudes da forma de onda de tensão de ruído térmico.

Autocorrelação da forma de onda de tensão de ruído térmico Gaussiano branco.

$$\begin{aligned} Ra_{WGN}(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} WGN(t).WGN(t + \tau) dt = \\ &= F^{-1}\{G_{WGN}(f)\} = \frac{N_0}{2} \delta(\tau) \end{aligned}$$

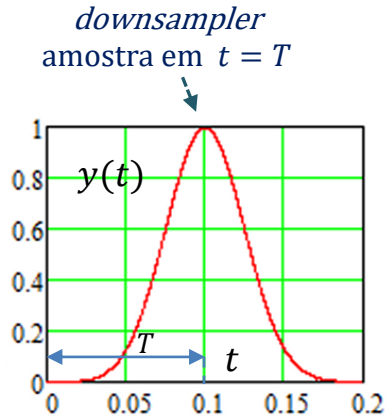
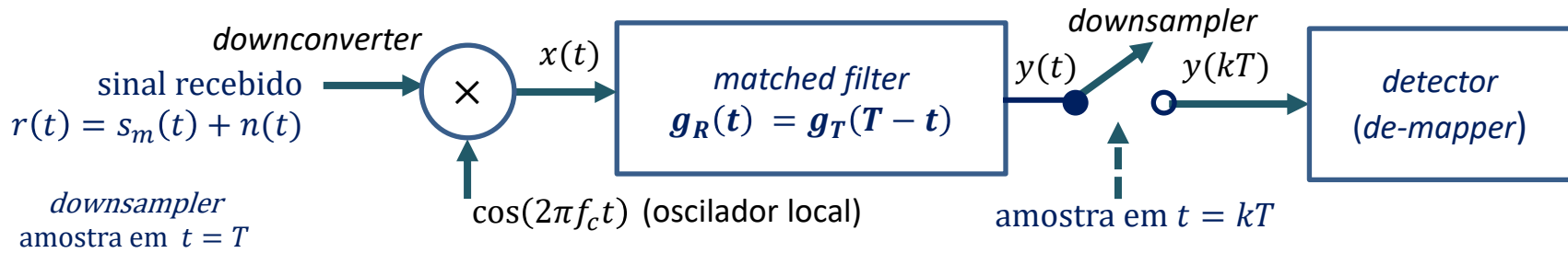


Densidade espectral de potência da forma de onda de tensão de ruído térmico.

## O efeito do intervalo de integração no processo de correlação efetuado no *matched filter*

Dado que as amplitudes de ruído ao longo do tempo se comportam de maneira tal que valores positivos e negativos de menor amplitude ocorrem frequentemente no transcorrer do tempo enquanto valores de amplitude maior ocorrem com menor frequência, conforme mostra a distribuição Gaussiana de amplitudes no slide anterior, então qualquer processo de média no tempo em que os valores de ruído sejam somados ao longo de um intervalo de tempo  $T$  resultará em um valor tanto menor quanto maior for o intervalo  $T$  em que a soma intrínseca ao processo de média for efetuada.

Conforme veremos a seguir, isto impacta diretamente na saída  $y(t)$  do *matched filter* – equação (4) do Cap VIII.2 das notas de aula – abaixo reproduzida na equação (1).



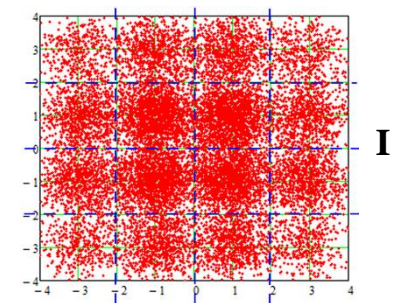
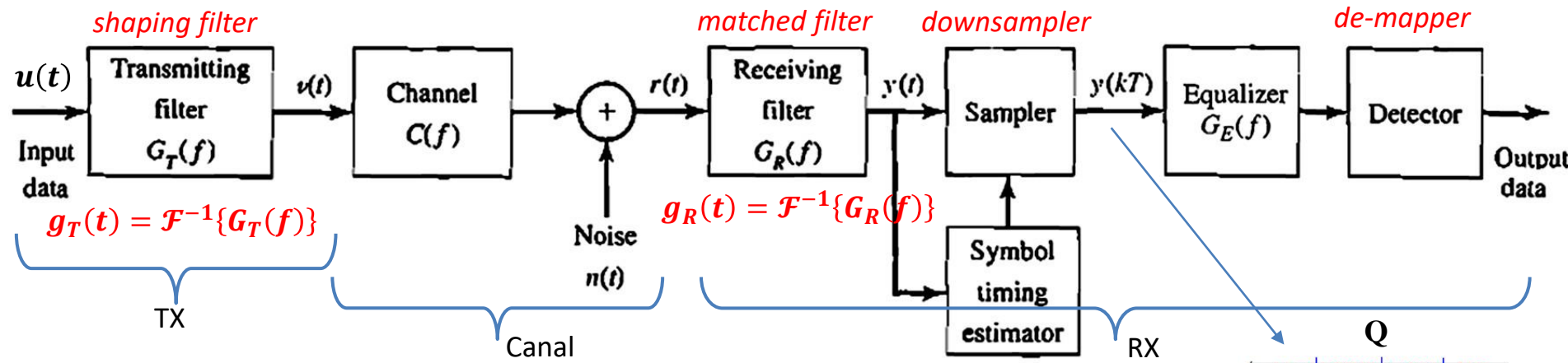
$$y(t) = \int_0^t A_m \cos^2(2\pi f_c \tau) g_T(\tau) g_T(\tau - t + T) d\tau + \int_0^t n(\tau) \cos(2\pi f_c \tau) g_T(\tau - t + T) d\tau \quad (1)$$

O *downsampler* na figura acima amostra  $y(t)$  em  $t = T$  e “capta” o valor máximo de  $y(t)$  resultante do 1º termo de (1), amplificando o sinal. Ao mesmo tempo o 2º termo de (1) atenua o ruído  $n(\tau)$  porque o ruído branco é descorrelacionado com o sinal. O período de integração em (1) se encerra no instante de amostragem  $t = T$  quando o filtro é resetado e é iniciado um novo período de integração para o próximo símbolo recebido.

Note que o intervalo de integração  $T$  impacta no resultado de (1) em consequência do processo de soma no tempo do ruído  $n(\tau)$  implementado pelo 2º termo de (1), porque o resultado da soma (resultado da integral) efetuada no 2º termo de (1) será um valor tanto menor quanto maior for o intervalo  $T$ . Isto ocorre porque  $\cos(2\pi f_c \tau) g_T(\tau - t + T)$  é descorrelacionado com  $n(\tau)$  e é como se tirássemos este fator do integrando da integral do 2º termo de (1), e ao longo do intervalo  $T$  a integral somará então mais valores de  $n(\tau)$  positivos e negativos de menor amplitude que ocorrem mais frequentemente no transcorrer do tempo do que valores de  $n(\tau)$  de maior amplitude que ocorrem menos frequentemente, atenuando assim o ruído. E este efeito é realçado a medida que  $T$  aumenta.

## O filtro *root-raised-cosine* como *shaping & matched filters*

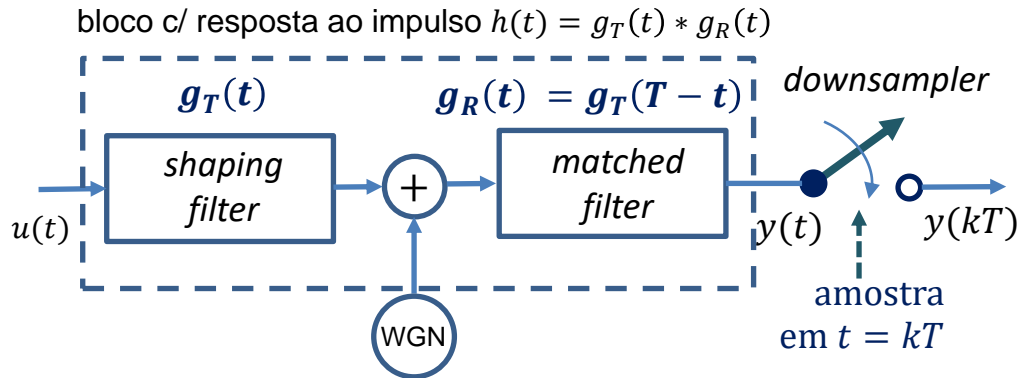
De acordo com a discussão no slide anterior, o ruído branco será mais atenuado na saída  $y(t)$  do *matched filter* se aumentarmos o intervalo de integração da equação (1) para além do período de símbolo  $T$ . No entanto, isto faria ocorrer a superposição dos pulsos  $g_T(t) * g_R(t)$  na saída  $y(t)$  do *matched filter* e isto faria ocorrer ISI (*Inter Symbol Interference*) no instante de amostragem  $t = T$ , causando um efeito similar ao *multipath* no canal, conforme já discutido no Cap VIII.1 das notas de aula. A ISI causa então dispersão de símbolos em torno dos símbolos IQ de referência da constelação na saída  $y(kT)$  do *downsampler*, conforme mostrado abaixo. Se a dispersão for significativa, de modo que símbolos da “nuvem” de símbolos dispersos em torno dos símbolos de referência invadam uma das regiões de decisão adjacentes, a BER (*Bit Error Rate*) não será nula na saída do *de-mapper*.



Para uma maior atenuação do ruído branco na saída  $y(t) = u(t) * g_T(t) * g_R(t)$  do *matched filter* é necessário, portanto, um *shaping filter* e um *matched filter* com respostas ao impulso  $g_T(t)$  e  $g_R(t)$  de duração maior que o período de símbolo  $T$  mas que simultaneamente evite a superposição dos pulsos  $g_T(t) * g_R(t)$  na saída  $y(kT)$  do *downsampler*, de modo a evitar a ocorrência de ISI (*Inter Symbol Interference*) no instante de amostragem  $t = T$ .

## O filtro *root-raised-cosine* como *shaping & matched filters*

Uma resposta ao impulso combinada  $h(t) = g_T(t) * g_R(t)$  que atende a condição de ter uma duração maior que o período de símbolo  $T$  mas que simultaneamente evita a superposição dos pulsos na saída  $y(kT)$  do *downsampler* no instante de amostragem  $t = T$  é a resposta ao impulso do filtro denominado *raised-cosine*, conforme (2) abaixo, denominação que resulta de sua função de transferência  $H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\}$  ser definida por um cosseno adicionado de um valor constante e unitário no domínio frequência que eleva os valores do cosseno, conforme equação (3):



$$h(t) = \frac{\sin \pi t / T}{\pi t / T} \frac{\cos(\pi \alpha t / T)}{1 - 4\alpha^2 t^2 / T^2}$$

$$= \text{sinc}(\pi t / T) \frac{\cos(\pi \alpha t / T)}{1 - 4\alpha^2 t^2 / T^2} \quad (2)$$

A Transformada de Fourier da resposta ao impulso  $h(t)$  resulta na função de transferência  $H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\}$ :

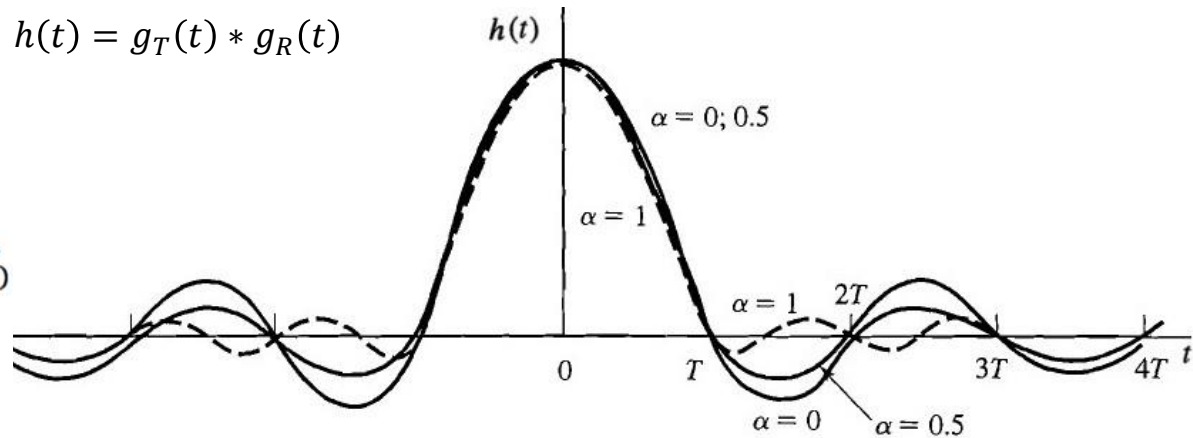
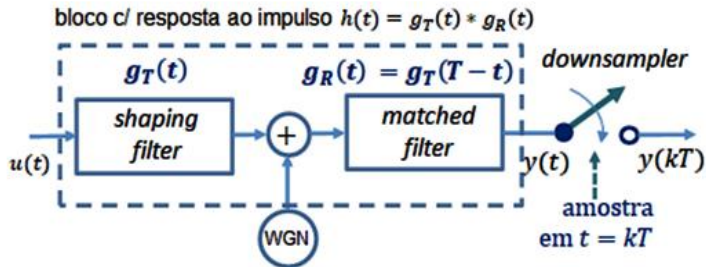
valor constante e unitário que eleva os valores do cosseno – daí a denominação *raised cosine*

$$H(f) = \begin{cases} T, & 0 \leq |f| \leq (1 - \alpha) / 2T \\ \frac{T}{2} \left[ 1 + \cos \frac{\pi T}{\alpha} \left( |f| - \frac{1 - \alpha}{2T} \right) \right], & \frac{1 - \alpha}{2T} \leq |f| \leq \frac{1 + \alpha}{2T} \\ 0, & |f| > \frac{1 + \alpha}{2T} \end{cases} \quad (3)$$

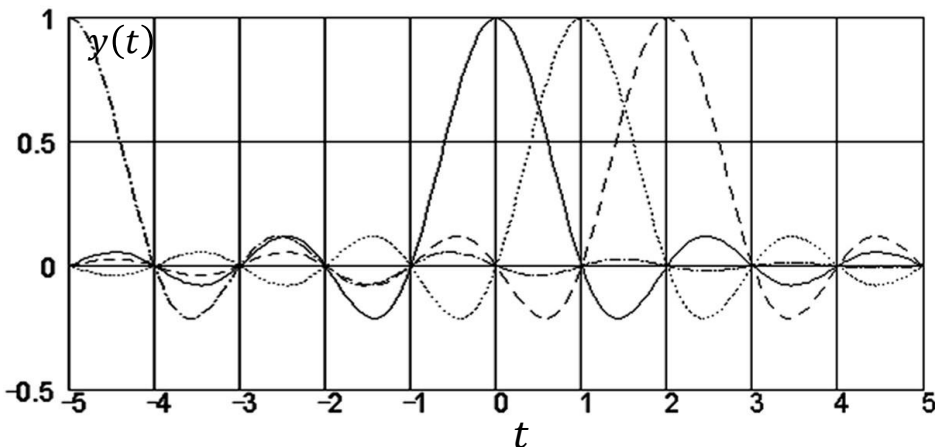
sendo  $0 \leq \alpha \leq 1$  o *roll-off* do filtro, que é o parâmetro que controla a declividade da curva  $|H(f)|$  na banda de transição, que é a banda situada entre a banda de passagem e a banda de rejeição do filtro *raised cosine* no domínio frequência  $f$ . Quanto menor for  $\alpha$  mais abrupta é a declividade da curva  $|H(f)|$  da banda de transição e mais longa é a duração de  $h(t)$ .

## O filtro root-raised-cosine como *shaping* & *matched filters*

Plotando a resposta ao impulso combinada  $h(t) = g_T(t) * g_R(t)$  dada por (2):



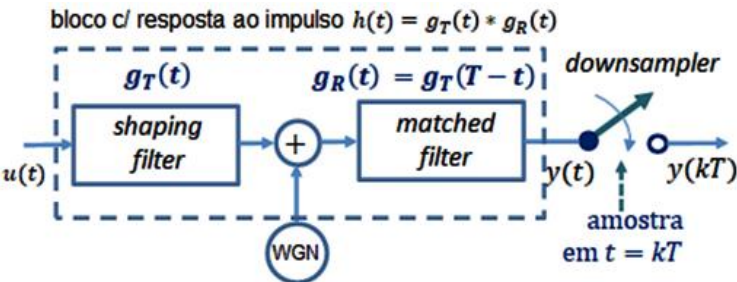
Note que a resposta ao impulso combinada  $h(t) = g_T(t) * g_R(t)$  tem uma duração de vários períodos de símbolo  $T$  (como é desejado para minimizar o ruído branco) e cruza por zero a cada  $t = kT$ , com  $k$  inteiro. Na prática, adota-se uma duração total de  $h(t)$  tal que a curva de  $h(t)$  contemple pelo menos 12 cruzamentos por zero ao longo do eixo do tempo  $t$ . Note também que o comportamento da curva de  $h(t)$  cruzar por zero a cada  $t = kT$  é o motivo de não haver ISI gerada no instante de amostragem  $t = kT$  do *downsampler*. Por exemplo, se aplicarmos na entrada  $u(t)$  do *shaping filter* a sequência de impulsos  $u(t) = \delta(t + 5T) + \delta(t) + \delta(t - T) + \delta(t - 2T)$  a resposta na saída  $y(t)$  será conforme o gráfico abaixo.



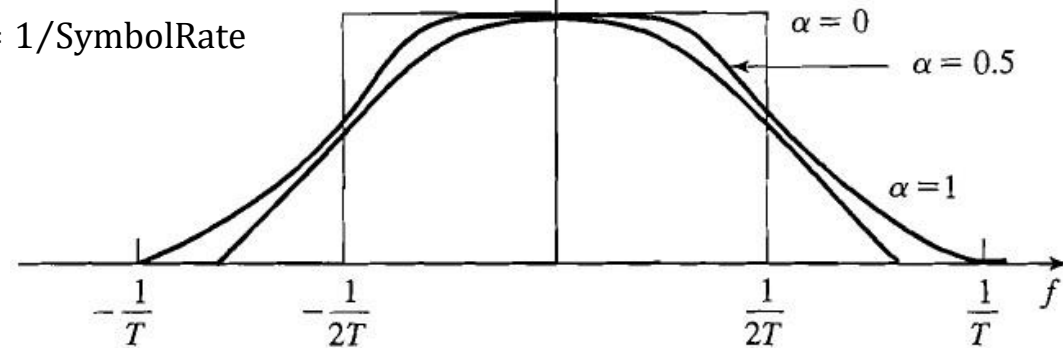
Observe que a resposta  $y(t)$  aos 4 impulsos é tal que os pulsos das respectivas respostas se superpõem ao longo do tempo  $t$ , gerando ISI em todos estes instantes em que ocorre superposição. No entanto, **em todos os instantes de amostragem  $t = kT$  do downsampler a amplitude instantânea de todos os pulsos são nulas exceto para o pulso da resposta respectiva ao impulso aplicado naquele instante  $kT$ . Portanto a saída  $y(kT)$  do downsampler não será corrompida por ISI.**

## O filtro root-raised-cosine como shaping & matched filters

Plotando a resposta em frequência combinada  $H(f) = G_T(f)G_R(f)$  dada por (3):  $H(f)$



$$T = 1/\text{SymbolRate}$$



$$G_R(f) = \mathcal{F}\{g_R(t)\} \quad G_T(f) = \mathcal{F}\{g_T(t)\}$$

Note no gráfico de  $H(f)$  que o pulso *raised cosine*  $h(t)$  dado por (2) ocupa uma banda espectral  $BW_{RC} = 0.5 \text{ SymbolRate} (1 + \alpha)$  para um canal de transmissão *baseband* e ocupa o dobro desta banda espectral para um canal *passband*. Note também que  $BW_{RC}$  é apenas uma aproximação da banda passante  $-3\text{dB}$  da  $H(f)$  do filtro *raised cosine* e que, pela simplicidade e praticidade da equação, acaba sendo utilizada como uma primeira aproximação. Em geral a banda passante  $-3\text{dB}$  da  $H(f)$  de um filtro *raised cosine digital* resulta aproximadamente 70% de  $BW_{RC}$ .

Para todas as aplicações práticas do mundo real  $g_T(t)$  é um pulso simétrico, de modo que  $g_R(t) = g_T(T - t) = g_T(t)$  (ver exemplo no slide 16 do Cap VIII.2 das notas de aula). Desta maneira  $G_R(f) = G_T(f)$  e a função de transferência do filtro *raised cosine* é dada por  $H(f) = G_T(f)G_T(f)$ . Isto permite determinar a função de transferência  $G_T(f)$  do *shaping filter* no TX e do *matched filter* no RX:

$$\sqrt{G_T(f)G_T(f)} = G_T(f) = \sqrt{H(f)} \quad (4)$$

Substituindo (3) em (4) obtemos a função de transferência  $G_{RRC}(f)$  individual dos dois **filtros root-raised-cosine (raiz do cosseno levantado) que operam respectivamente como shaping filter no TX e como matched filter no RX:**

$$G_{RRC}(f) = \sqrt{H(f)} = \begin{cases} \sqrt{T}, & 0 \leq |f| \leq (1 - \alpha)/2T \\ \sqrt{\frac{T}{2} [1 + \cos \frac{\pi T}{\alpha} (|f| - \frac{1-\alpha}{2T})]}, & \frac{1-\alpha}{2T} \leq |f| \leq \frac{1+\alpha}{2T} \\ 0, & |f| > \frac{1+\alpha}{2T} \end{cases} \quad (5)$$

## O filtro *root-raised-cosine* como *shaping & matched filters*

Aplicando a Transformada de Fourier Inversa em (5) obtemos a resposta ao impulso  $g_{\text{RRC}}(t) = \mathcal{F}^{-1}\{G_{\text{RRC}}(f)\}$  individual dos dois filtros *root-raised-cosine* (raiz do cosseno levantado) que operam respectivamente como *shaping filter* no TX e como *matched filter* no RX:

$$g_{\text{RRC}}(t) = \frac{2\alpha}{\pi\sqrt{T}} \frac{\cos[(1+\alpha)\pi t/T] + \frac{\sin[(1-\alpha)\pi t/T]}{4\alpha t/T}}{1 - (4\alpha t/T)^2} \quad (6)$$

A versão discreta de (6), utilizada para gerar a resposta ao impulso  $g_{\text{RRC}}[n]$  de um filtro FIR *root raised cosine* com *roll-off*  $\alpha$  e  $N$  coeficientes (lembre da disciplina de DSP: Os coeficientes de um filtro FIR representam a própria resposta ao impulso do filtro), é obtida fazendo  $t = n \frac{T}{K_s}$  em (6) (ver slide 5 do Cap VIII.1 das notas de aula) e atrasando a resposta discreta de  $(N-1)/2$  amostras para torná-la uma resposta causal realizável, sendo  $n = 0, 1, \dots, N-1$  e sendo  $K_s$  o *oversampling factor* do *upsampler* no modulador (número de amostras por símbolo IQ):

$$g_{\text{RRC}}[n] = \frac{4\alpha}{\pi \cdot K_s} \cdot \frac{\left[ \cos\left[ \frac{n - \frac{N-1}{2}}{K_s} \cdot \pi \cdot (1+\alpha) \right] + \frac{\pi \cdot (1-\alpha)}{4\alpha} \cdot \text{sinc}\left[ \frac{n - \frac{N-1}{2}}{K_s} \cdot \pi \cdot (1-\alpha) \right] \right]}{\left[ 1 - \left( \frac{n - \frac{N-1}{2}}{K_s} \cdot 4\alpha \right)^2 \right]} \quad (7)$$

onde  $\text{sinc}(u) = \sin(u)/u$



## Filtro root-raised-cosine – Exemplo

**Exemplo:** O diagrama abaixo mostra a etapa de modulação de um sistema de comunicação digital 16-QAM:

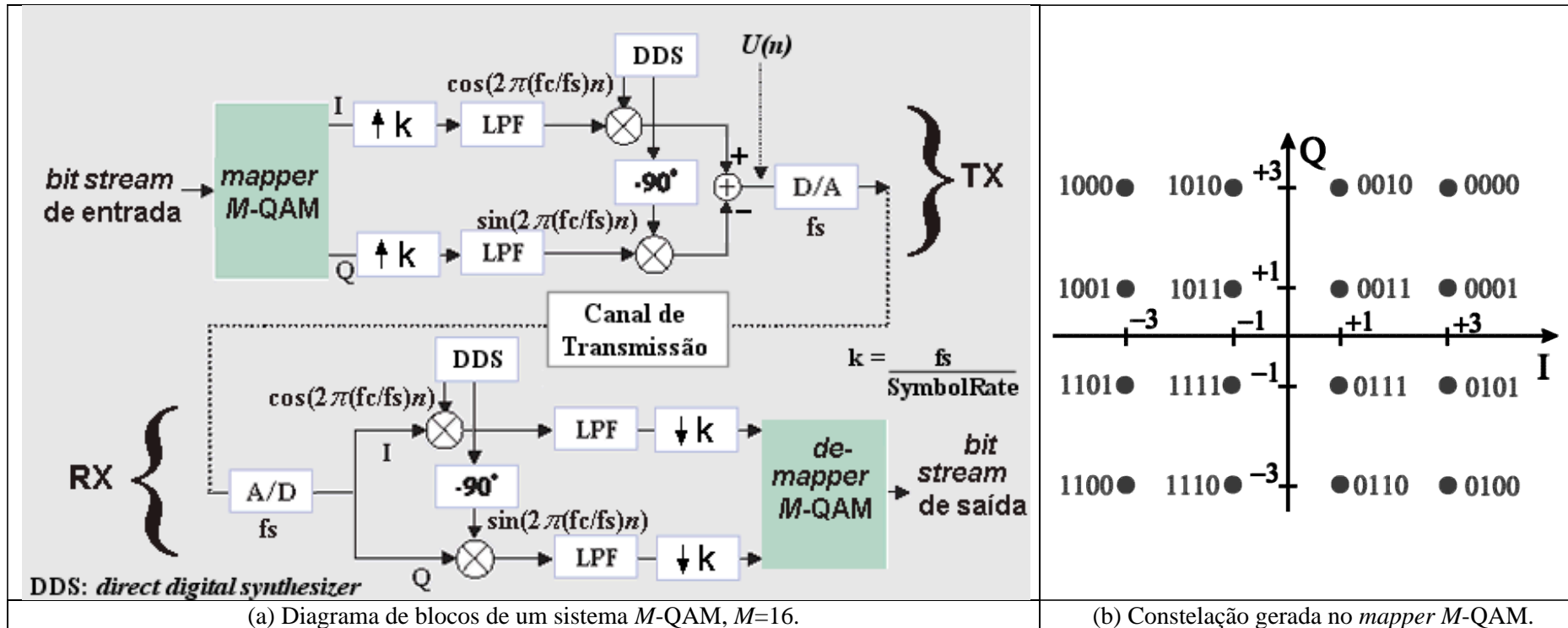


Figura 1: Etapa de modulação de um sistema de comunicação digital 16-QAM.

## Filtro root-raised-cosine – Exemplo

Sabe-se que a frequência de amostragem do D/A é  $f_s=128$  MHz e que a frequência da portadora é  $f_c$ . Cada símbolo IQ tem uma duração  $T = 1/\text{symbol rate}$ , onde  $\text{symbol rate} = 16$  MHz para este sistema. Os blocos “LPF” na Figura 1(a) representam o *shaping filter* no TX e o *matched filter* no RX, e são filtros tipo *root raised cosine* com resposta ao impulso  $g_T(n)$  dada nas Figuras 2 e 3.

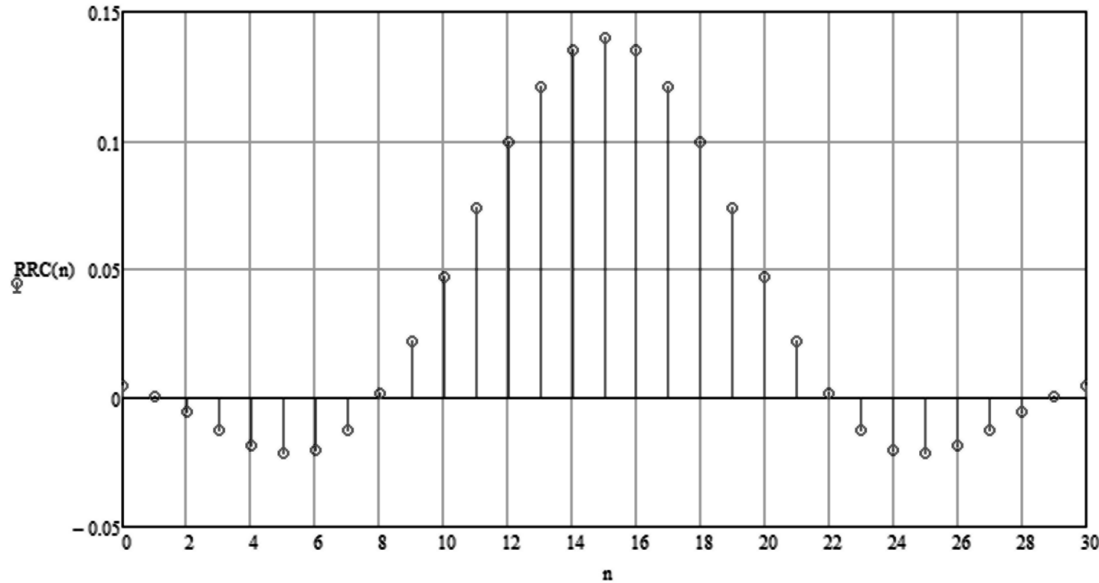


Figura 2: Resposta ao impulso  $g_T(n) = \text{RRC}(n)$  dos blocos LPF (*low pass filter*) na Figura 1(a).

n	VRRC(n)
0	$4.497591 \cdot 10^{-3}$
1	$3.499097 \cdot 10^{-4}$
2	$-5.650389 \cdot 10^{-3}$
3	-0.01242
4	-0.018332
5	-0.02146
6	-0.019942
7	-0.012377
8	$1.813343 \cdot 10^{-3}$
9	0.022149
10	0.047036
11	0.073927
12	0.099672
13	0.121009
14	0.135103
15	...

n	VRRC(n)
15	$140.028175 \cdot 10^{-3}$
16	$135.102873 \cdot 10^{-3}$
17	$121.008712 \cdot 10^{-3}$
18	$99.671511 \cdot 10^{-3}$
19	$73.926671 \cdot 10^{-3}$
20	$47.035786 \cdot 10^{-3}$
21	$22.148678 \cdot 10^{-3}$
22	$1.813343 \cdot 10^{-3}$
23	$-12.377001 \cdot 10^{-3}$
24	$-19.941796 \cdot 10^{-3}$
25	$-21.459842 \cdot 10^{-3}$
26	$-18.331798 \cdot 10^{-3}$
27	$-12.420442 \cdot 10^{-3}$
28	$-5.650389 \cdot 10^{-3}$
29	$349.909719 \cdot 10^{-6}$
30	$4.497591 \cdot 10^{-3}$
31	...

Figura 3: Valores numéricos da resposta ao impulso  $g_T(n)$  do *shaping filter* (TX) e do *matched filter* na Figura 1(a). Os elementos do vetor VRRC são os valores numéricos de  $g_T(n) = \text{RRC}(n)$  na Figura 2.

Dadas estas condições operacionais, pede-se:

- a) Determine a banda passante  $-3dB$  mínima necessária no bloco “Canal de Transmissão” da Figura 1(a) p/ que o mesmo não distorça o espectro dos pulsos *root raised cosine* que constituem o *stream* de símbolos com frequência central  $f_c$  gerados na saída  $U(n)$  do TX.
- b) Suponha que o sistema em questão seja um sistema de *broadcast* via cabo coaxial (um TX transmite para vários usuários, cada usuário possui um RX). Ainda, suponha também que a SNR no Canal de Transmissão (o cabo coaxial) seja suficientemente alta de modo que, em não havendo ruído no canal e para efeito de reduzir o custo do RX de cada usuário, o filtro *root raised cosine* do *matched filter* em cada RX é movido para o *shaping filter* no TX. O *shaping filter* no TX, nesta situação hipotética, passa a ser um filtro *raised cosine*. Determine, para esta situação, a banda passante  $-3dB$  mínima necessária no bloco “Canal de Transmissão” da Figura 1(a) p/ que o mesmo não distorça o espectro dos pulsos *raised cosine* que constituem o *stream* de símbolos com frequência central  $f_c$  gerados na saída  $U(n)$  do TX.
- c) Qual a taxa em Mbps do *bitstream* na saída do *de-mapper* do RX deste sistema?

Solução:

Do enunciado, um sistema TX-RX digital 16-QAM utiliza um filtro *root raised cosine* (RRC) como *shaping filter* no TX e como *matched filter* no RX conforme especificado abaixo:

$N := 31$        $\alpha := 0.44$        $\rightarrow N$  é o número de taps do filtro RRC e  $\alpha$  é o *roll-off* do filtro.

SymbolRate := 16·MHz       $\rightarrow T = [\text{Duração do símbolo IQ}] = 1/\text{SymbolRate}$  [μs]

$K_s := 8$        $\rightarrow$  Fator de superamostragem (= k no enunciado = número de amostras por intervalo de duração T de símbolo IQ).

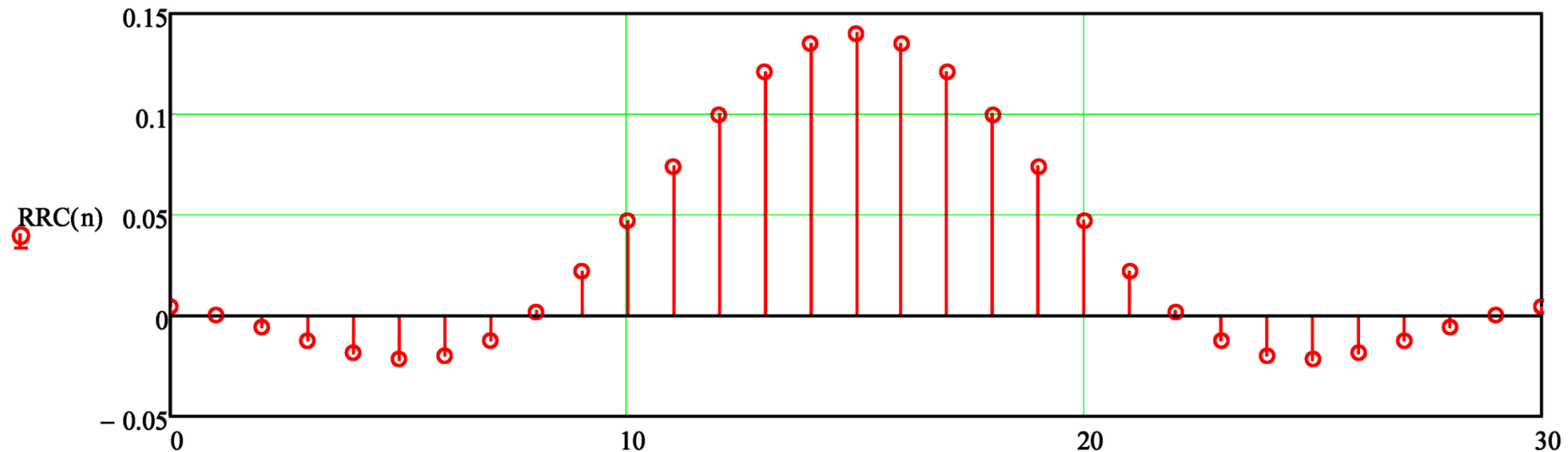
$F_s := K_s \cdot \text{SymbolRate}$        $F_s = 128 \cdot \text{MHz}$        $\rightarrow$  Frequência de amostragem do D/A no TX e/ou A/D no RX.

A expressão analítica da resposta ao impulso de um filtro RRC discreto no tempo é dada pela equação (1):

$$\text{RRC}(n) := \frac{4 \cdot \alpha}{\pi \cdot K_s} \cdot \frac{\cos \left[ \frac{n - \frac{N-1}{2}}{K_s} \cdot \pi \cdot (1 + \alpha) \right] + \frac{\pi \cdot (1 - \alpha)}{4 \cdot \alpha} \cdot \text{sinc} \left[ \frac{n - \frac{N-1}{2}}{K_s} \cdot \pi \cdot (1 - \alpha) \right]}{1 - \left( \frac{n - \frac{N-1}{2}}{K_s} \cdot 4 \cdot \alpha \right)^2} \quad n := 0, 1 \dots N - 1 \quad (1)$$

## Filtro *root-raised-cosine* – Exemplo

O gráfico a seguir plota um pulso *root raised cosine* correspondente à resposta ao impulso do filtro RRC especificado acima. Note que, em um sistema TX-RX digital, a amplitude do pulso RRC é proporcional a amplitude do símbolo I (e/ou Q) que ele representa.



## Filtro *root-raised-cosine* – Exemplo

Registrando em uma tabela os valores numéricos do gráfico de  $RRC(n)$  acima, obtemos os valores tabulados  $VRRC(n)$  mostrados abaixo (o quais já foram dados no enunciado):

n	VRRC(n)
	0
0	$4.497591 \cdot 10^{-3}$
1	$3.499097 \cdot 10^{-4}$
2	$-5.650389 \cdot 10^{-3}$
3	-0.01242
4	-0.018332
5	-0.02146
6	-0.019942
7	-0.012377
8	$1.813343 \cdot 10^{-3}$
9	0.022149
10	0.047036
11	0.073927
12	0.099672
13	0.121009
14	0.135103
15	...

n	VRRC(n)
	0
15	$140.028175 \cdot 10^{-3}$
16	$135.102873 \cdot 10^{-3}$
17	$121.008712 \cdot 10^{-3}$
18	$99.671511 \cdot 10^{-3}$
19	$73.926671 \cdot 10^{-3}$
20	$47.035786 \cdot 10^{-3}$
21	$22.148678 \cdot 10^{-3}$
22	$1.813343 \cdot 10^{-3}$
23	$-12.377001 \cdot 10^{-3}$
24	$-19.941796 \cdot 10^{-3}$
25	$-21.459842 \cdot 10^{-3}$
26	$-18.331798 \cdot 10^{-3}$
27	$-12.420442 \cdot 10^{-3}$
28	$-5.650389 \cdot 10^{-3}$
29	$349.909719 \cdot 10^{-6}$
30	$4.497591 \cdot 10^{-3}$
31	...

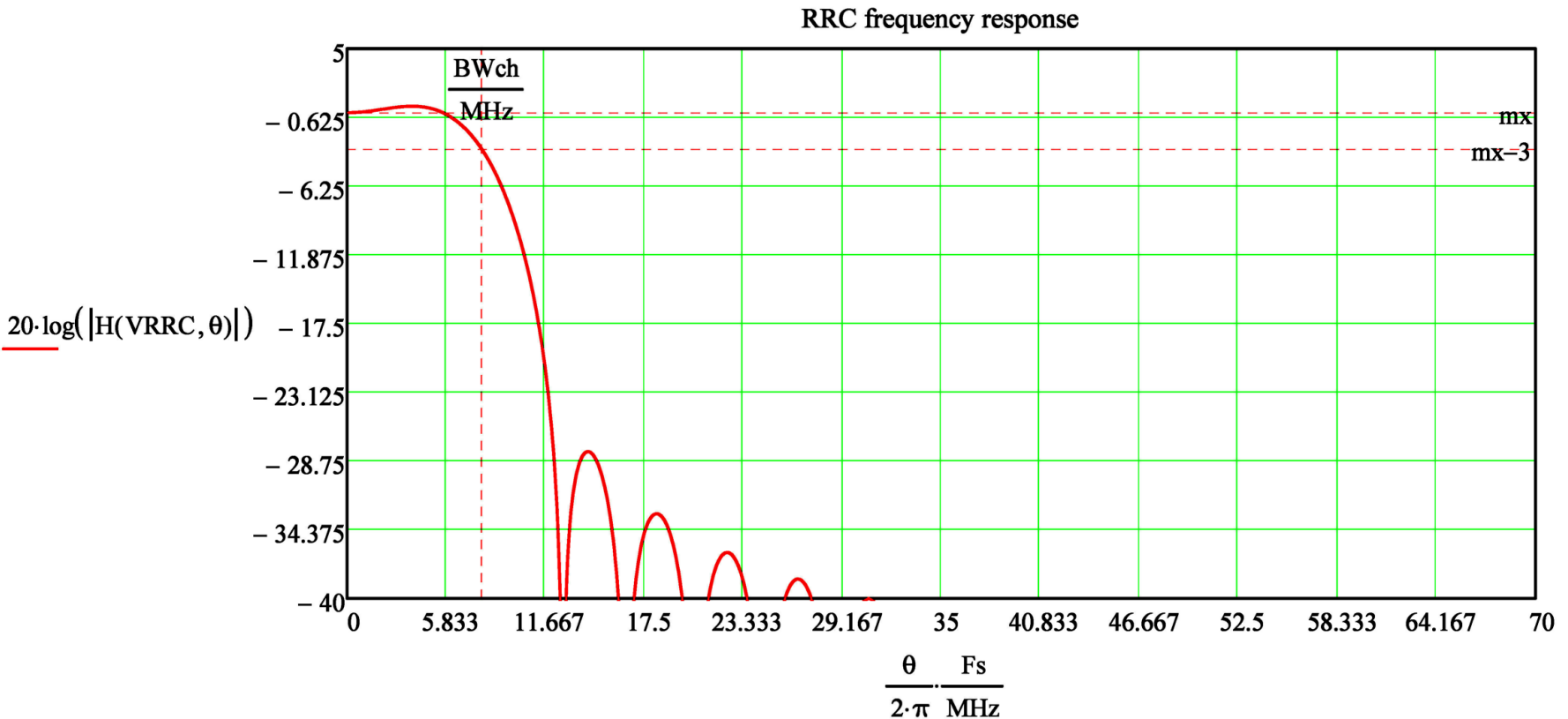
a) A banda passante mínima necessária no canal de transmissão  $p/$  que o mesmo não altere o espectro dos pulsos *root raised cosine* que constituem o *stream* de símbolos gerados na saída do TX deste sistema 16-QAM é determinada a partir da curva de resposta em frequência  $H(e^{j\theta})$  do *shaping filter* RRC no TX, sendo  $0 < \theta < \pi$  a faixa de variação permissível da frequência digital  $\theta$  (Nyquist - já visto na disciplina de DSP). P/ obtermos o  $H(e^{j\theta})$  do filtro RRC é necessário aplicar a Transformada Z à resposta ao impulso do filtro RRC e fazer  $z=e^{j\theta}$ .

A Transformada Z para  $z=e^{j\theta}$  de uma sequencia discreta C com N amostras é dada pela equação (2):

$$H(C, \theta) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[ C_n \cdot (e^{j \cdot \theta})^{-n} \right] \quad \theta = \left( 0, \frac{\pi}{1000} .. \pi \right) \quad (2)$$

## Filtro *root-raised-cosine* – Exemplo

Aplicando a equação (2) aos valores tabulados VRRRC(n) acima obtemos a curva de resposta em frequência  $H(e^{j\theta})$  do *shaping filter* RRC no TX:



$\text{BWch} = 7.94 \cdot \text{MHz}$  é a **BW (em *baseband*)** mínima do canal de transmissão necessária p/ transmitir o pulso RRC, valor obtido por inspeção visual do ponto de -3dB no gráfico acima. Como a modulação é QAM, o espectro do sinal  $U(n)$  após o DDS estará centrado em  $f_c$  e apresentará duas bandas laterais não idênticas. Assim, a BW mínima p/ transportar sem distorção o sinal ***passband***  $U(n)$  no canal é  $2\text{BWch} = 15.88 \cdot \text{MHz}$



**b)** Seja um sistema 16-QAM que usa um único filtro *raised cosine* como *shaping filter* no TX ao invés dos usuais dois filtros *root raised cosine* (um RRC como *shaping filter* no TX e outro RRC como *matched filter* no RX), conforme enunciado. Neste caso particular, a banda passante mínima necessária no canal de transmissão para que o mesmo não altere o espectro dos pulsos *raised cosine* que constituem o *stream* de símbolos gerados na saída do TX deste sistema 16-QAM é também determinada como em a) a partir da curva de resposta em frequência  $H(e^{j\theta})$  do *shaping filter* no TX.

Para obtermos o  $H(e^{j\theta})$  deste filtro *raised cosine* é necessário aplicar a equação (2) à resposta ao impulso do filtro. Mas a resposta ao impulso de um filtro *raised cosine* é equivalente à resposta ao impulso combinada de dois filtros *root raised cosine* idênticos em série. A resposta ao impulso combinada de dois filtros (já visto na disciplina de DSP) é a convolução de suas respostas ao impulso individuais. Se  $x(n)$  e  $y(n)$  são respectivamente as respostas ao impulso dos dois filtros então a resposta combinada dos mesmos é dada pela convolução  $z(n)=x(n)*y(n)$ , numericamente expressa por:

$$z(n) = \left[ \sum_{m=m1}^{m2} (x(m) \cdot y(n - m)) \right] \quad (3)$$

onde  $m1$  e  $m2$  são tais que o produto de todas as amostras não nulas das seqüências  $x(n)$  e  $y(n)$  sejam contempladas no somatório.

## Filtro *root-raised-cosine* – Exemplo

O pseudocódigo genérico para a implementação numérica da convolução  $z(n)=\text{Conv}(x,y)=x(n)*y(n)$  definida por (3) é conforme segue:

```

Conv(X, Y) :=
  Nx ← length(X) - 1
  Ny ← length(Y) - 1
  for n ∈ 0 .. (Nx + Ny)
    Zn ← 0.0
    if Nx ≥ Ny
      Zn ← Zn + ∑m=0n (Xm Yn-m) if n ≤ Ny
      Zn ← Zn + ∑m=n-Nyn (Xm Yn-m) if (n > Ny) · (n ≤ Nx)
      Zn ← Zn + ∑m=n-NyNx (Xm Yn-m) if (n > Nx) · [n ≤ (Nx + Ny)]
    otherwise
      Zn ← Zn + ∑m=0n (Xm Yn-m) if n ≤ Nx
      Zn ← Zn + ∑m=0Nx (Xm Yn-m) if (n > Nx) · (n ≤ Ny)
      Zn ← Zn + ∑m=n-NyNx (Xm Yn-m) if (n > Ny) · [n ≤ (Nx + Ny)]
  return Z
  
```

sendo que o operador  $\text{length}(\cdot)$  retorna o número de amostras da seqüência  $(\cdot)$  que é o argumento do operador .

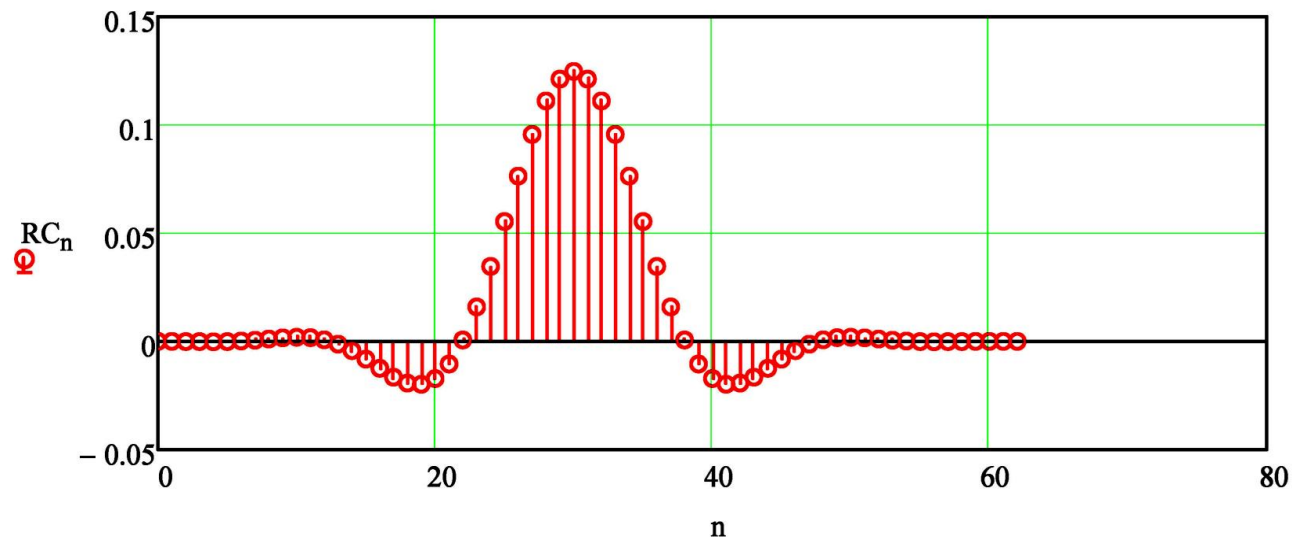
## Filtro *root-raised-cosine* – Exemplo

Portanto, a resposta ao impulso  $RC(n)$  de um filtro *raised cosine* é a convolução das respostas ao impulso  $RRC(n)$  de dois filtros *root raised cosine*. A partir da equação (3) e do respectivo pseudocódigo acima  $RC(n)$  é obtido através de:

$$RC := \text{Conv}(VRRRC, VRRRC)$$

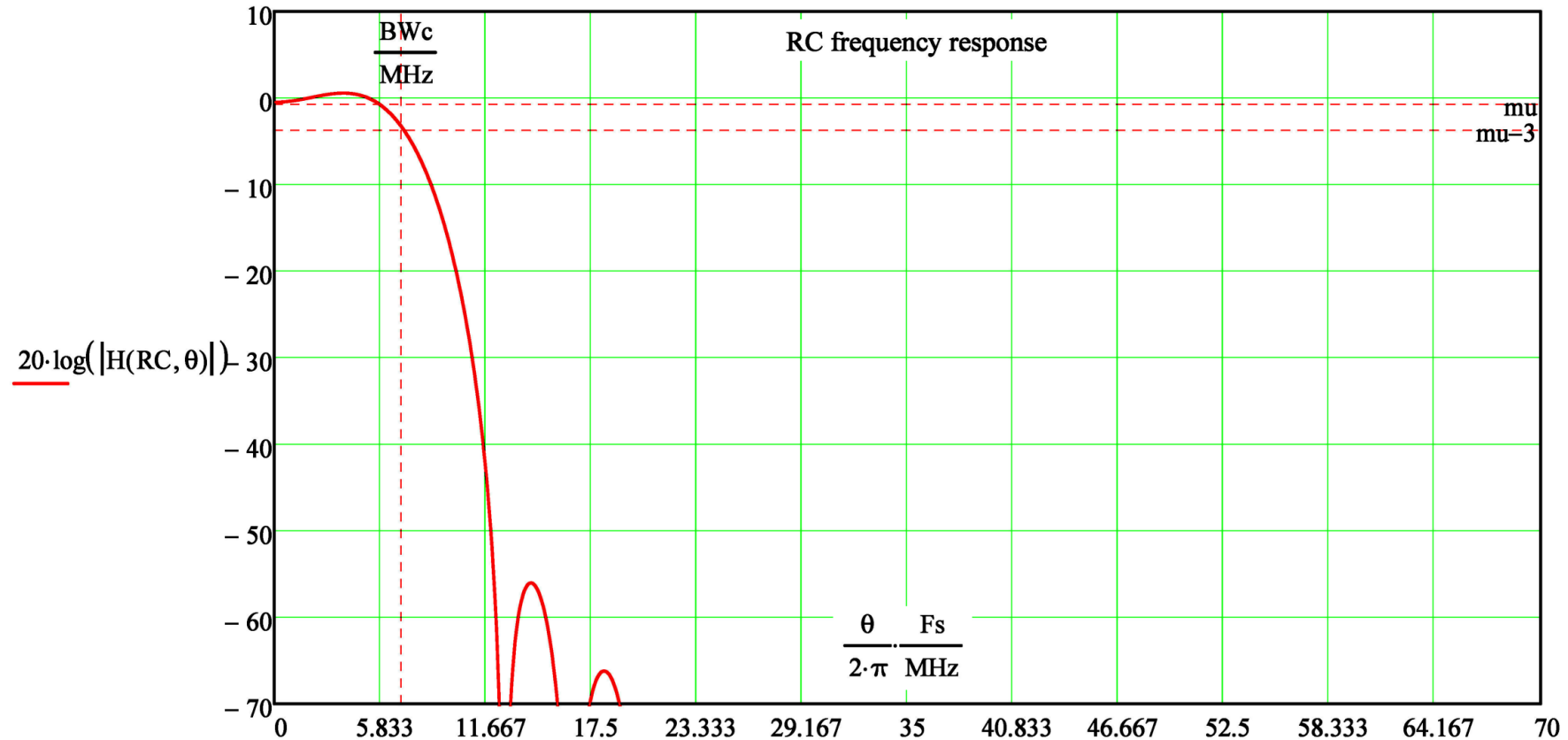
Plotando o gráfico da resposta ao impulso  $RC(n)$  de um filtro *raised cosine* resultante da equação (3) acima, temos:

$$n := 0, 1 \dots \text{length}(RC) - 1$$



## Filtro *root-raised-cosine* – Exemplo

Para obtermos o  $H(e^{j\theta})$  deste filtro *raised cosine* é necessário aplicar a equação (2) à resposta ao impulso do RC(n) filtro, o que resulta em:



$BW_c = 7.09 \cdot \text{MHz}$  é a BW (**em baseband**) mínima do canal de transmissão necessária p/ transmitir o pulso RC, valor obtido por inspeção visual do ponto de -3dB no gráfico acima. Como a modulação é QAM, o espectro do sinal  $U(n)$  após o DDS estará centrado em  $f_c$  e apresentará duas bandas laterais não idênticas. Assim, a BW mínima p/ transportar sem distorção o sinal **passband**  $U(n)$  no canal é  $2BW_c = 14.18 \cdot \text{MHz}$

**Nota:** Para um filtro *raised cosine* analógico (**ou digital com pelo menos 12 cruzamentos por zero na sinc de sua resposta ao impulso**) a literatura indica a seguinte equação para o cálculo da BW mínima do canal de transmissão necessária para transmitir o pulso *raised cosine*:

$$BW := \frac{\text{SymbolRate} \cdot (1 + \alpha)}{2} \quad BW = 11.52 \cdot \text{MHz}$$

c) Do enunciado, o sistema é M-QAM com  $M = 16$  e  $\text{SymbolRate} = 16 \cdot \text{MHz}$

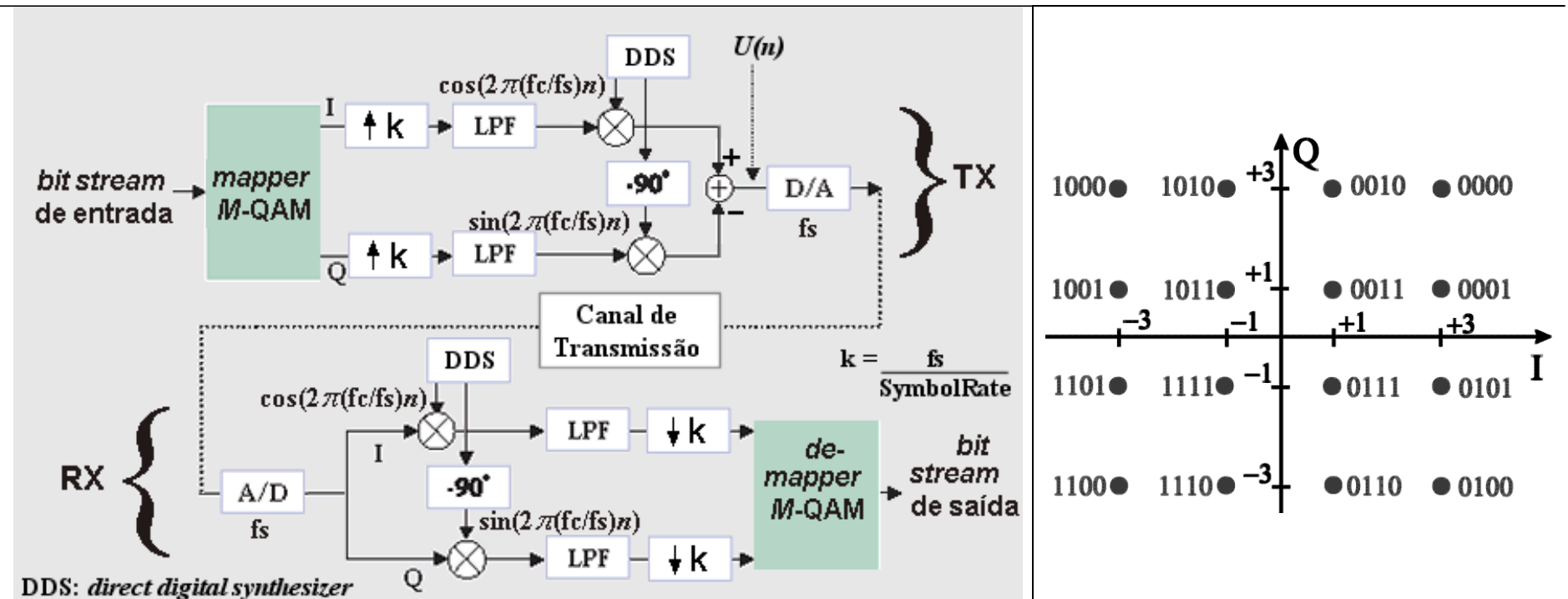
Daí, a taxa do *bitstream* é:

$$\text{NumBitsPorSimbolo} := \frac{\ln(M)}{\ln(2)} \quad \text{NumBitsPorSimbolo} = 4$$

$$\text{Taxa} := \text{SymbolRate} \cdot \text{NumBitsPorSimbolo} \quad \text{Taxa} = 64 \cdot \text{MHz} \quad [\text{Mbits/s}]$$

# Homework

O diagrama abaixo mostra a etapa de modulação de um sistema de comunicação digital 16-QAM:



(a) Diagrama de blocos de um sistema M-QAM, M=16.

(b) Constelação gerada no mapper M-QAM.

Figura 1: Etapa de modulação de um sistema de comunicação digital 16-QAM.

## Homework

Sabe-se que a frequência de amostragem do D/A é  $f_s=28\text{MHz}$  e que a frequência da portadora é  $f_c$ . Cada símbolo IQ tem uma duração  $T = 1/\text{symbol rate}$ , onde  $\text{symbol rate} = 7\text{MHz}$  para este sistema. Os blocos “LPF” na Figura 1(a) representam o *shaping filter* no TX e o *matched filter* no RX, e são filtros tipo *root raised cosine* com resposta ao impulso  $g_T(n)$  dada nas Figuras 2 e 3.

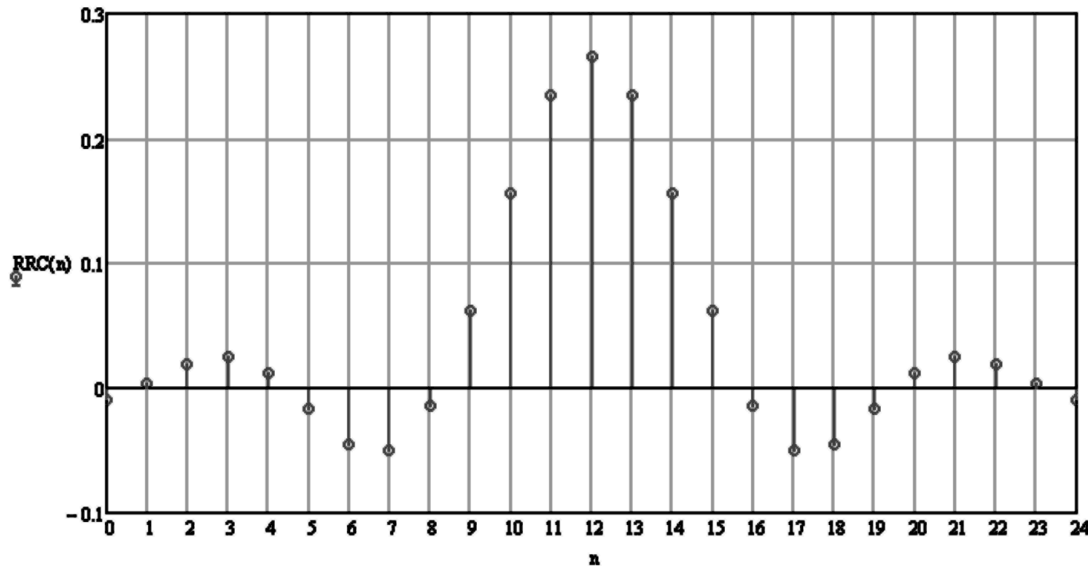


Figura 2: Resposta ao impulso  $g_T(n) = \text{RRC}(n)$  dos blocos LPF (*low pass filter*) na Figura 1(a).

n	VRRC(n)
0	$-9.545 \cdot 10^{-3}$
1	$3.722 \cdot 10^{-3}$
2	0.019
3	0.025
4	0.012
5	-0.016
6	-0.045
7	-0.05
8	-0.014
9	0.062
10	0.156
11	0.235
12	...

n	VRRC(n)
12	0
13	0.265
14	0.235
15	0.156
16	-0.014
17	-0.05
18	-0.045
19	-0.016
20	0.012
21	0.025
22	0.019
23	$3.722 \cdot 10^{-3}$
24	$-9.545 \cdot 10^{-3}$
25	...

Figura 3: Valores numéricos da resposta ao impulso  $g_T(n)$  do *shaping filter* (TX) e do *matched filter* na Figura 1(a). Os elementos do vetor VRRC são os valores numéricos de  $g_T(n) = \text{RRC}(n)$  na Figura 2.

Dadas estas condições operacionais, pede-se:

- a) Determine a banda passante mínima necessária no bloco “Canal de Transmissão” da Figura 1(a) p/ que o mesmo não distorça o espectro dos pulsos *root raised cosine* que constituem o *stream* de símbolos com frequência central  $f_c$  gerados na saída  $U(n)$  do TX.
- b) Suponha que o sistema em questão seja um sistema de *broadcast* via cabo coaxial (um TX transmite para vários usuários, cada usuário possui um RX). Ainda, suponha também que a SNR no Canal de Transmissão (o cabo coaxial) seja suficientemente alta de modo que, em não havendo ruído no canal e para efeito de reduzir o custo do RX de cada usuário, o filtro *root raised cosine* do *matched filter* em cada RX é movido para o *shaping filter* no TX. O *shaping filter* no TX, nesta situação hipotética, passa a ser um filtro *raised cosine*. Determine, para esta situação, a banda passante mínima necessária no bloco “Canal de Transmissão” da Figura 1(a) p/ que o mesmo não distorça o espectro dos pulsos *raised cosine* que constituem o *stream* de símbolos com frequência central  $f_c$  gerados na saída  $U(n)$  do TX.
- c) Qual a taxa em Mbps do *bitstream* na saída do *de-mapper* do RX deste sistema?



## Apêndice A:

<b>Operation</b>	<b>Formula</b>
<b>Rectangular to Polar Conversion</b>	$z = x + jy = re^{j\theta}$ where $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ and $\theta = \arctan(y/x)$
<b>Polar to Rectangular Conversion</b>	$z = re^{j\theta} = r [\cos(\theta) + j\sin(\theta)] = x + jy$ where $x = r \cos(\theta)$ and $y = r \sin(\theta)$
<b>Add: <math>z_3 = z_1 + z_2</math></b>	$(x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$
<b>Subtract: <math>z_3 = z_1 - z_2</math></b>	$(x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$
<b>Multiply: <math>z_3 = z_1 z_2</math> (polar form)</b>	$(x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + y_1 x_2)$ $r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$
<b>Divide: <math>z_3 = z_1 / z_2</math>  (polar form)</b>	$\frac{(x_1 x_2 - y_1 y_2) - j(x_1 y_2 - y_1 x_2)}{x_2^2 + y_2^2}$ $\frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$

## Apêndice B:

Sejam  $u = 2\pi f_1 t$  e  $v = 2\pi f_2 t$ . Valem as seguintes relações (*relationships*) trigonométricas:

<i>Relationship</i>	<i>Relationship</i>
$\sin u = \cos(u - \pi/2)$	$\cos u = \sin(u + \pi/2)$
$\cos(-u) = \cos u$	$\sin(-u) = -\sin(u)$
$\sin^2 u + \cos^2 u = 1$	$\cos^2 u = \frac{1}{2}(1 + \cos 2u)$
$\sin^2 u = \frac{1}{2}(1 - \cos 2u)$	$\cos(u \pm v) = \cos u \cos v \mp \sin u \sin v$
$\sin(u \pm v) = \sin u \cos v \pm \cos u \sin v$	$\cos u \cos v = \frac{1}{2}[\cos(u - v) + \cos(u + v)]$
$\sin u \sin v = \frac{1}{2}[\cos(u - v) - \cos(u + v)]$	$\sin u \cos v = \frac{1}{2}[\sin(u - v) + \sin(u + v)]$
$\cos u = \frac{1}{2}[e^{ju} + e^{-ju}]$	$\sin u = \frac{1}{2j}[e^{ju} - e^{-ju}]$
$e^{ju} = \cos u + j \sin u$	

→ **heterodinação**  
das frequências  $f_1$  e  $f_2$