Codificação de Fonte – I
DPCM, DM e ADM

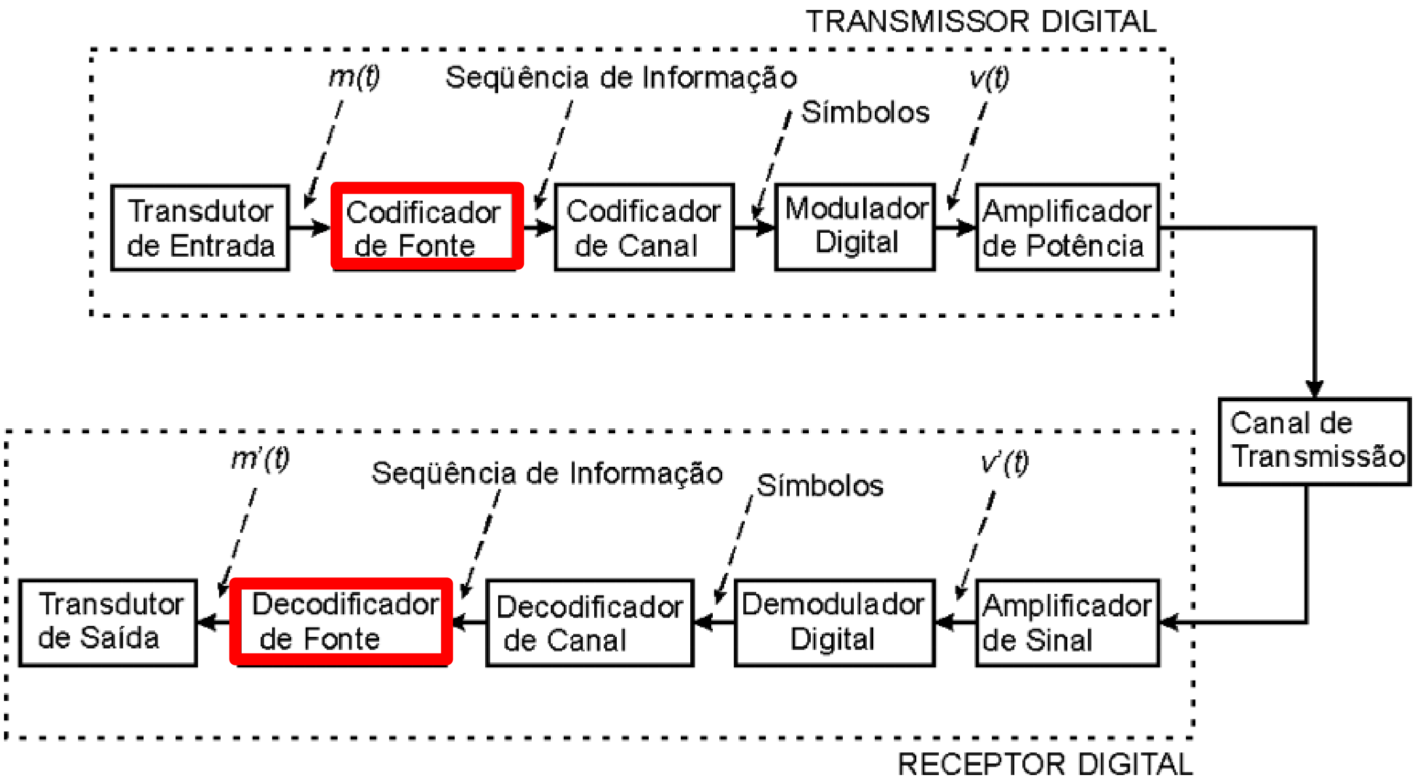
Departamento de Eletrônica e Computação

Centro de Tecnologia

ELC1120 – TELECOMUNICAÇÕES II

Profa. Candice Müller   Prof. Fernando DeCastro

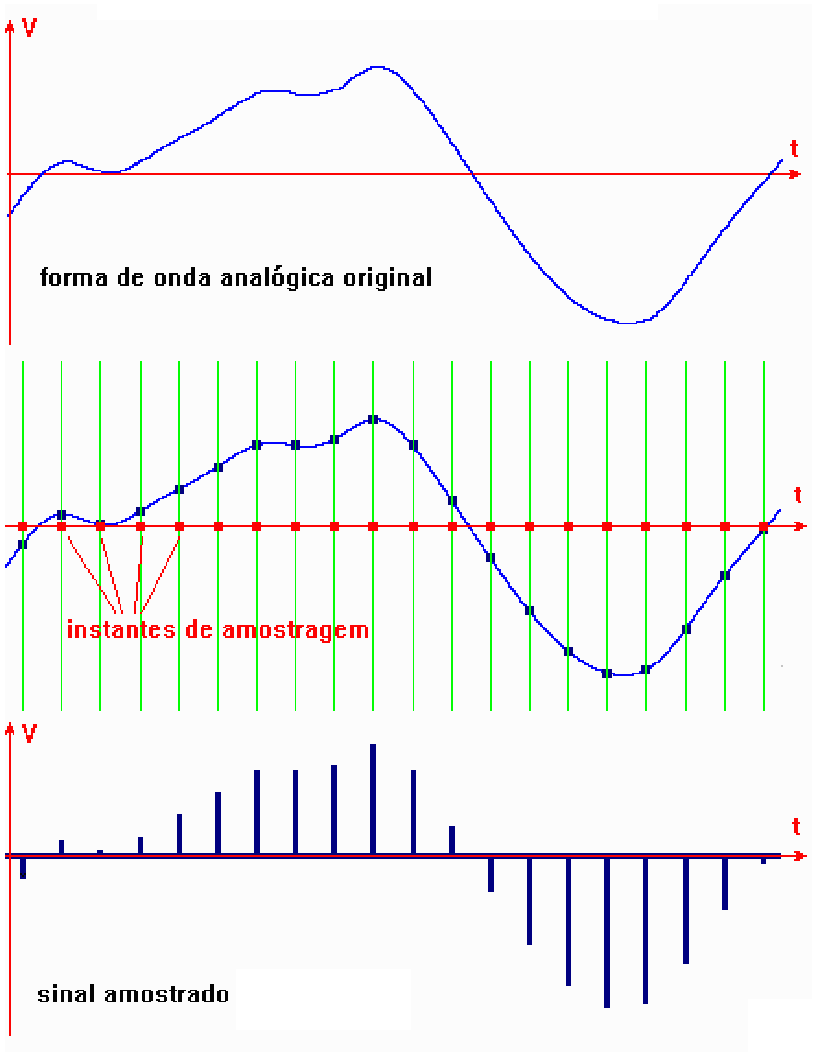
Codificação de Fonte



- **Codificador de Fonte**: A Codificação de Fonte é o processo que visa reduzir o máximo possível a informação redundante da *Sequência de Informação* em sua saída, sequência esta obtida a partir do processamento do sinal de entrada

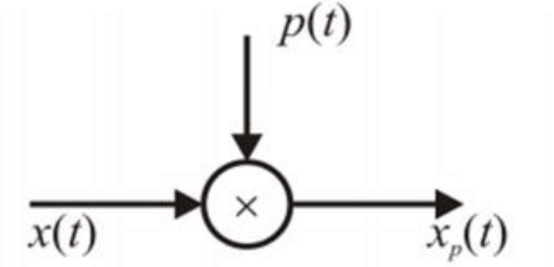
Conversão A/D

1. Amostragem: Processo através do qual o sinal contínuo no tempo $x(t)$ é transformado em um sinal discreto no tempo, representado por $x_p(t)$ ou $x_p(n)$, onde n é interpretado como o instante de tempo no qual o valor do sinal $x(t)$ é levado à saída do processo de amostragem.



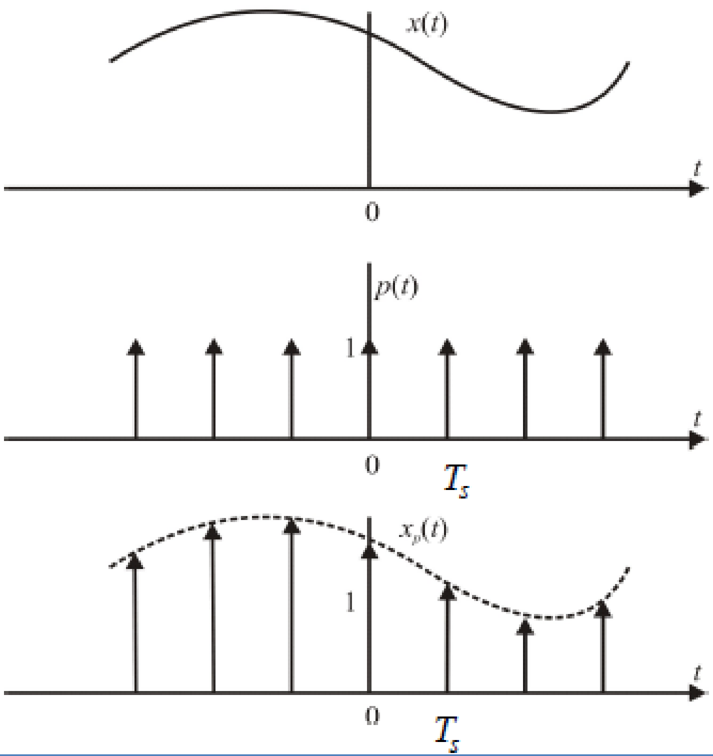
Conversão A/D

1. Amostragem



$$x(t).p(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2\pi} X(\omega) * P(\omega)$$

- No domínio do tempo: multiplicação entre sinal $x(t)$ e sequência de impulsos.



Processo de amostragem:

(a) Sinal $x(t)$ a ser amostrado;

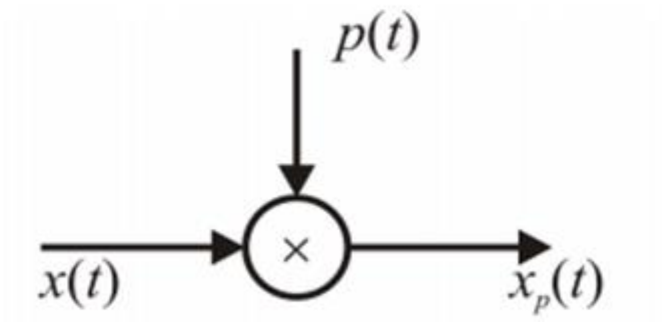
(b) Função de amostragem $p(t)$;

(c) Operação de amostragem $p(t).x(t)$;

(d) Sinal $x_p(t)$ amostrado.

Conversão A/D

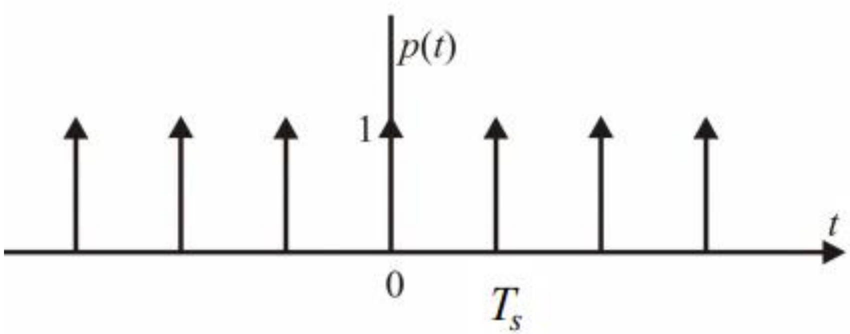
1. Amostragem

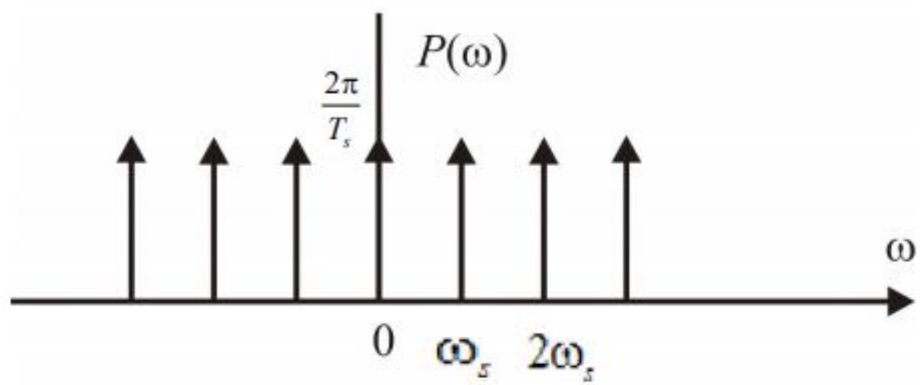


$$x(t).p(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2\pi} X(\omega) * P(\omega)$$

A transformada de Fourier de uma sequência de impulsos é:

$$p(t) \xleftrightarrow{F} P(\omega) = \frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s)$$





Conversão A/D

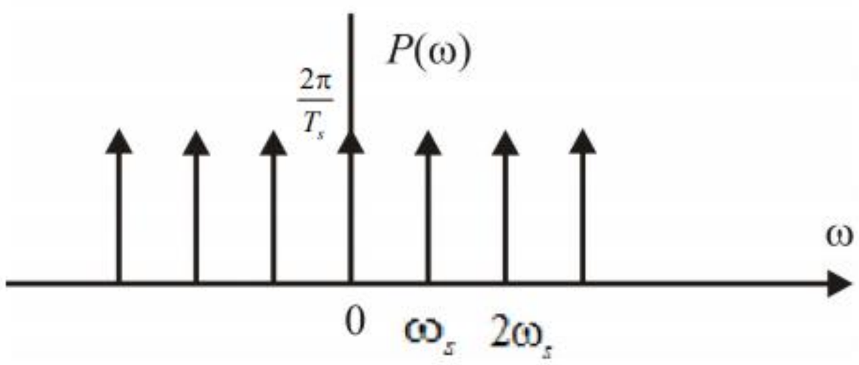
1. Amostragem

- No domínio da frequência: convolução entre espectro do sinal $x(t)$ e espectro da sequência de impulsos.

Transformada de Fourier de do sinal analógico.

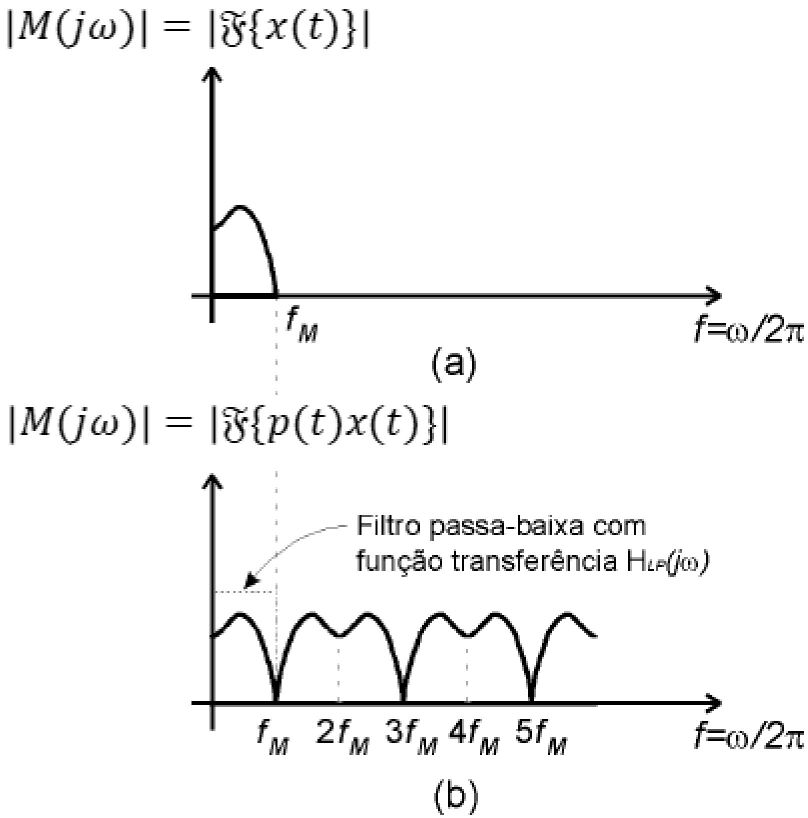
Transformada de Fourier de uma sequência de impulsos.

*



Conversão A/D

1. Amostragem



(a) Espectro do sinal $x(t)$

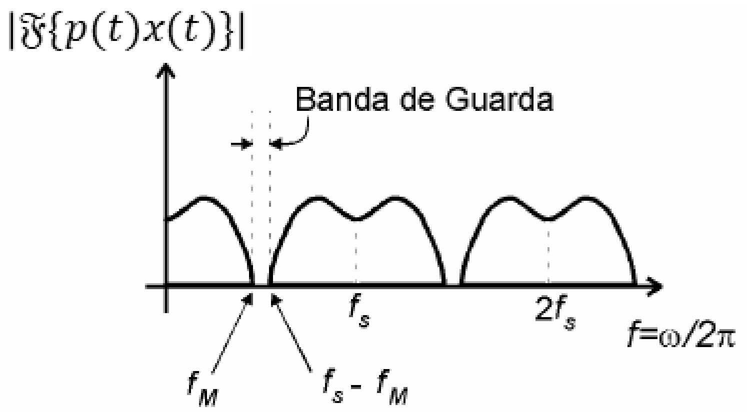
(b) Espectro do sinal amostrado $x_p(t)$ com $f_s = 2f_M$

- O espectro do sinal $x(t)$ sofre translação em frequência, com frequência central kf_s , onde $k = 1, 2, 3 \ldots$

- Se $f_s = 2f_M$, onde f_M é a máxima frequência do espectro do sinal a ser amostrado $x(t)$, o sinal original pode ser recuperado aplicando-se um filtro passa-baixa.

Conversão A/D

1. Amostragem



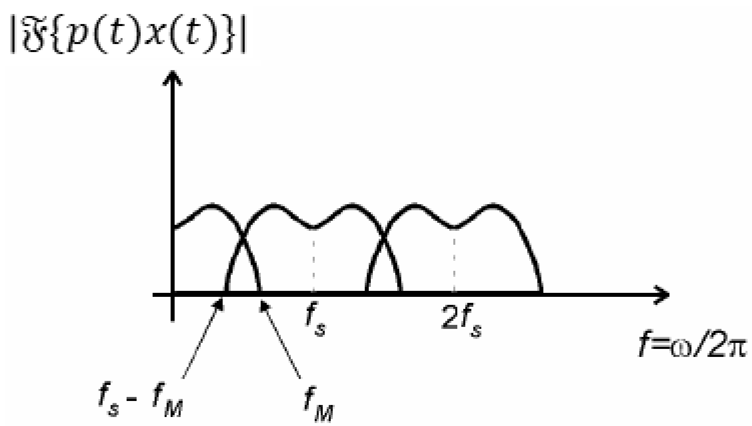
Espectro do sinal amostrado $x_p(t)$ com $f_s > 2f_M$

- No caso de $f_s = 2f_M$, seria necessário utilizar um filtro ideal na recuperação do sinal.

- Em função disso, utiliza-se $f_s > 2f_M$, de modo a criar uma banda de guarda entre o espectro do sinal $x(t)$ e suas réplicas.

Conversão A/D

1. Amostragem



Espectro do sinal amostrado $x_p(t)$ com $f_s < 2f_M$

- No entanto, se $f_s < 2f_M$, torna-se impossível recuperar o sinal original sem distorção, devido a sobreposição dos espectros.

- Tal distorção é denominada *aliasing* (*alias*: pseudônimo – em inglês), porque o espectro original sofre interferência de uma réplica dele mesmo com "outro nome", isto é, sofre interferência dele mesmo, só que transladado em frequência.

Teorema da Amostragem

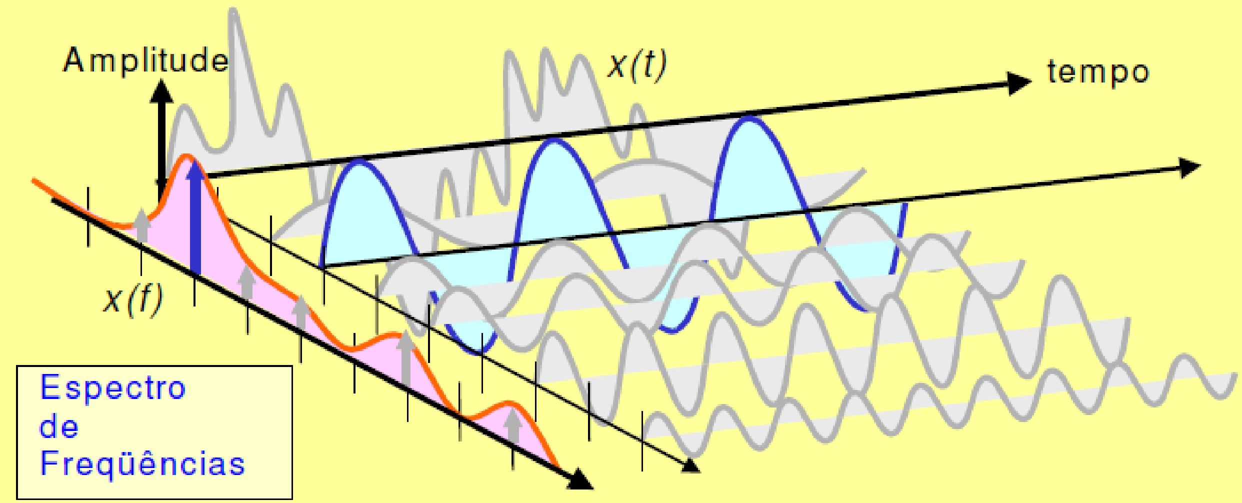
- Seja $x(t)$ um sinal limitado em banda, tal que f_M seja a frequência mais alta de seu espectro, frequência a partir da qual as componentes espectrais de $x(t)$ podem ser consideradas de magnitude desprezível.

- Sejam os valores de $x(t)$ determinados a intervalos constantes de T_s segundos, tais que $T_s \leq 1/2f_M$, isto é, $x(t)$ é periodicamente amostrado a cada $T_s \leq 1/2f_M$ segundos.

- Desta forma, a frequência de amostragem será maior ou igual a $2f_M$ ($f_s = 1/T_s \geq 2f_M$).

- Então as amostras $x(nT_s)$ de $x(t)$, $n = 0{,}1, \dots$, univocamente determinam $x(t)$. Em decorrência deste fato, o sinal $x(t)$ pode ser reconstruído a partir do sinal amostrado $x(nT_s)$, através de um filtro adequado.

Teorema da Amostragem



$f_s =$ freqüência de amostragem

$f_M =$ componente espectral de $m(t)$ de maior freqüência

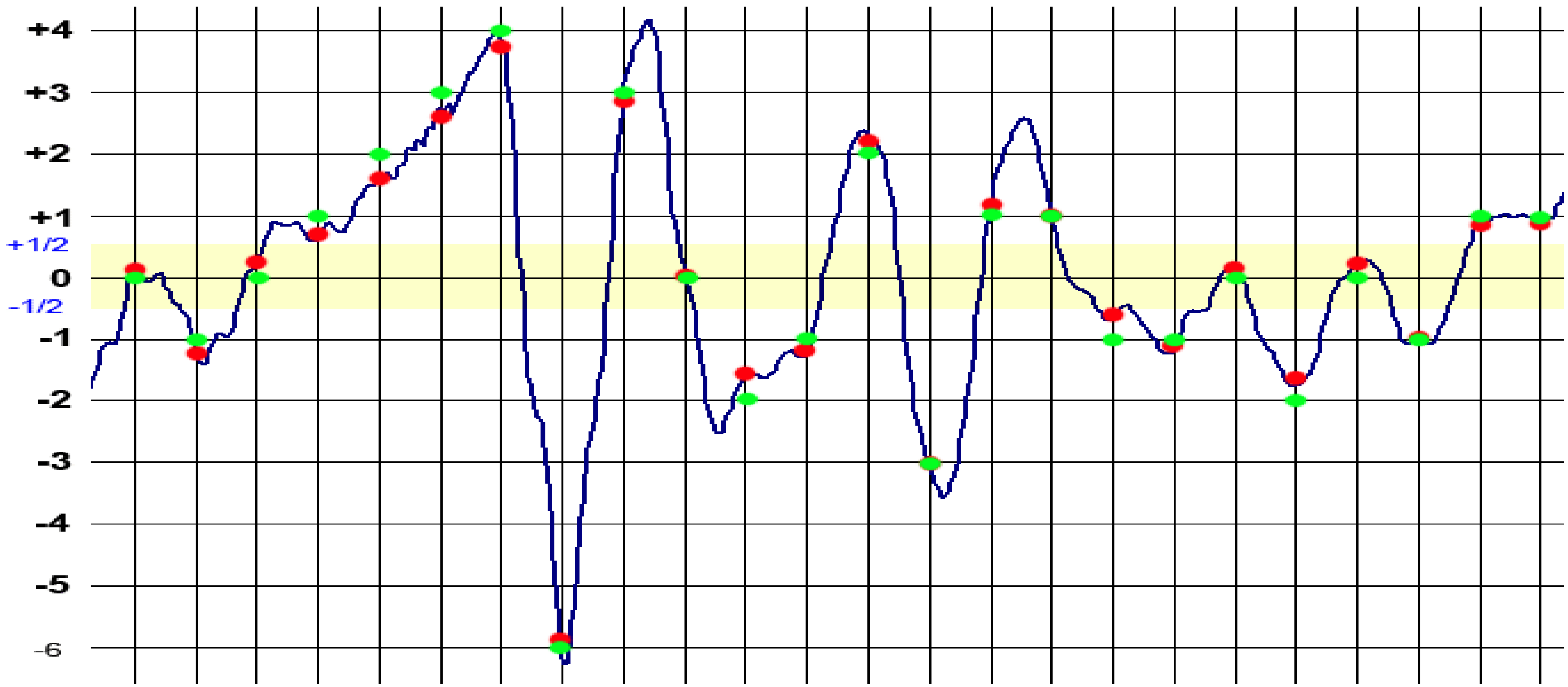
Se $f_s = 1/T_s \geq 2 f_M$, após o processo de amostragem, o sinal $m(t)$ original pode ser recuperado sem distorção, na saída de um filtro passa-baixa com freqüência de corte f_M, próximo do filtro ideal.

A frequência de amostragem mínima $f_s = 2f_M$ para que não haja ocorrência de *aliasing* é também denominada de **Frequência de Nyquist**.

Conversão A/D

2. Quantização

- Processo através do qual o sinal contínuo em amplitude é transformado em um sinal discreto em amplitude.
- Por exemplo, se o processador digital tem 3-bits, as amplitudes podem ser convertidas em oito diferentes níveis.



Conversão A/D

2. Quantização

- Sinal quantizado

$$x_q(t) = Q\{x(t)\}$$

ou $x_q(n) = Q\{x(n)\}$ se considerarmos que, antes de ser quantizado $x(t)$ é amostrado a intervalos de tempo T_s.

- Excursão do sinal original $x(t)$ que varia entre os limites V_L e V_H,

$$V_L - V_H$$

- Níveis de quantização

$$M = 2^N$$

representa o número de valores que o sinal pode assumir.

- Passo de quantização

$$S = (V_L - V_H)/M$$

Conversão A/D

2. Quantização

- Erro de quantização

$$e_q(n) = x(n) - x_q(n)$$

- Limites do erro de quantização

$$|e_q| \leq \frac{S}{2}$$

- Logo, quanto maior M, mais $x_q(n)$ se assemelha a $x(n)$, e portanto, menor será o erro de quantização $e_q(n)$.
- Quanto maior M, menor o ruído inserido pelo processo de quantização.

Conversão A/D

2. Quantização

- Baseado na teoria de probabilidades e variáveis aleatórias, a potência do ruído de quantização é dada por:

$$\overline{{e_q}^2} = \left[\frac{S^2}{12}\right]$$

- A relação sinal ruído de quantização

$$SNR_Q = 6N\ [dB]$$

$$N = log_2(M)$$

- sendo N o número de bits e M o número de níveis de quantização.

Conversão A/D

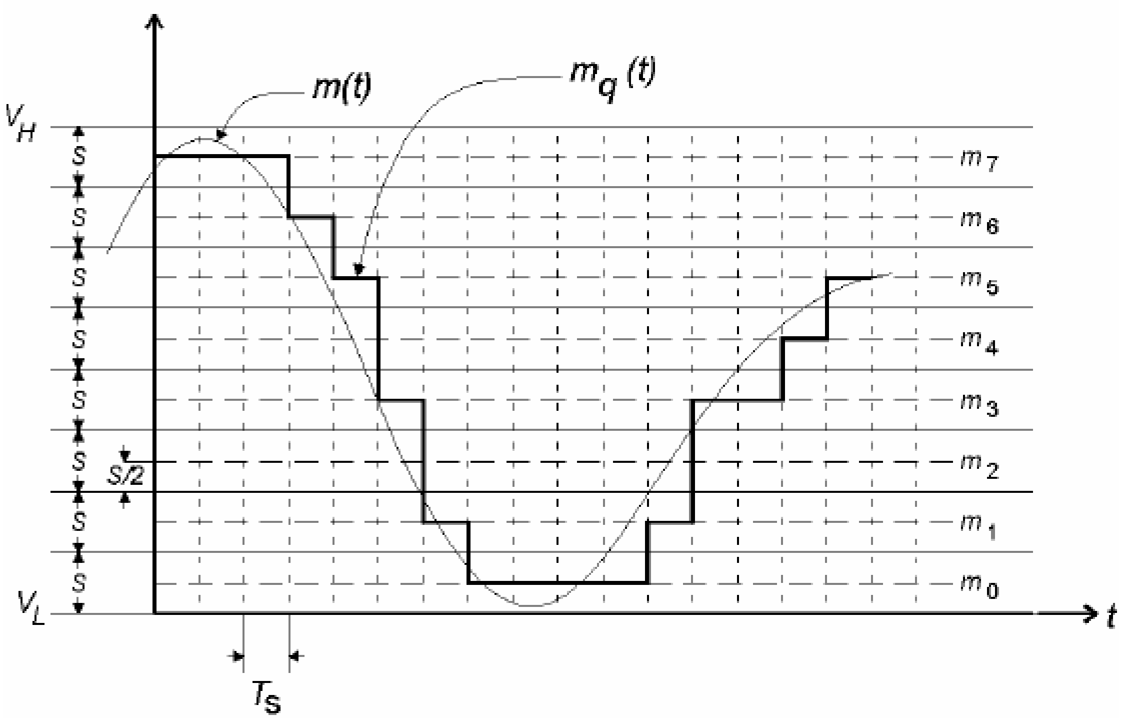
2. Quantização

Se $M = 8; N = 3;\ \mathrm{SNR_Q} = 18\,\mathrm{dB}$

(representação menos fiel do sinal)

Se $M = 16; N = 4;\ \mathrm{SNR_Q} = 24\,\mathrm{dB}$

(representação mais fiel do sinal)



Conversão A/D

3. Codificação PCM

- Conversão do sinal quantizado $x_q(n)$ em uma sequência de bits.

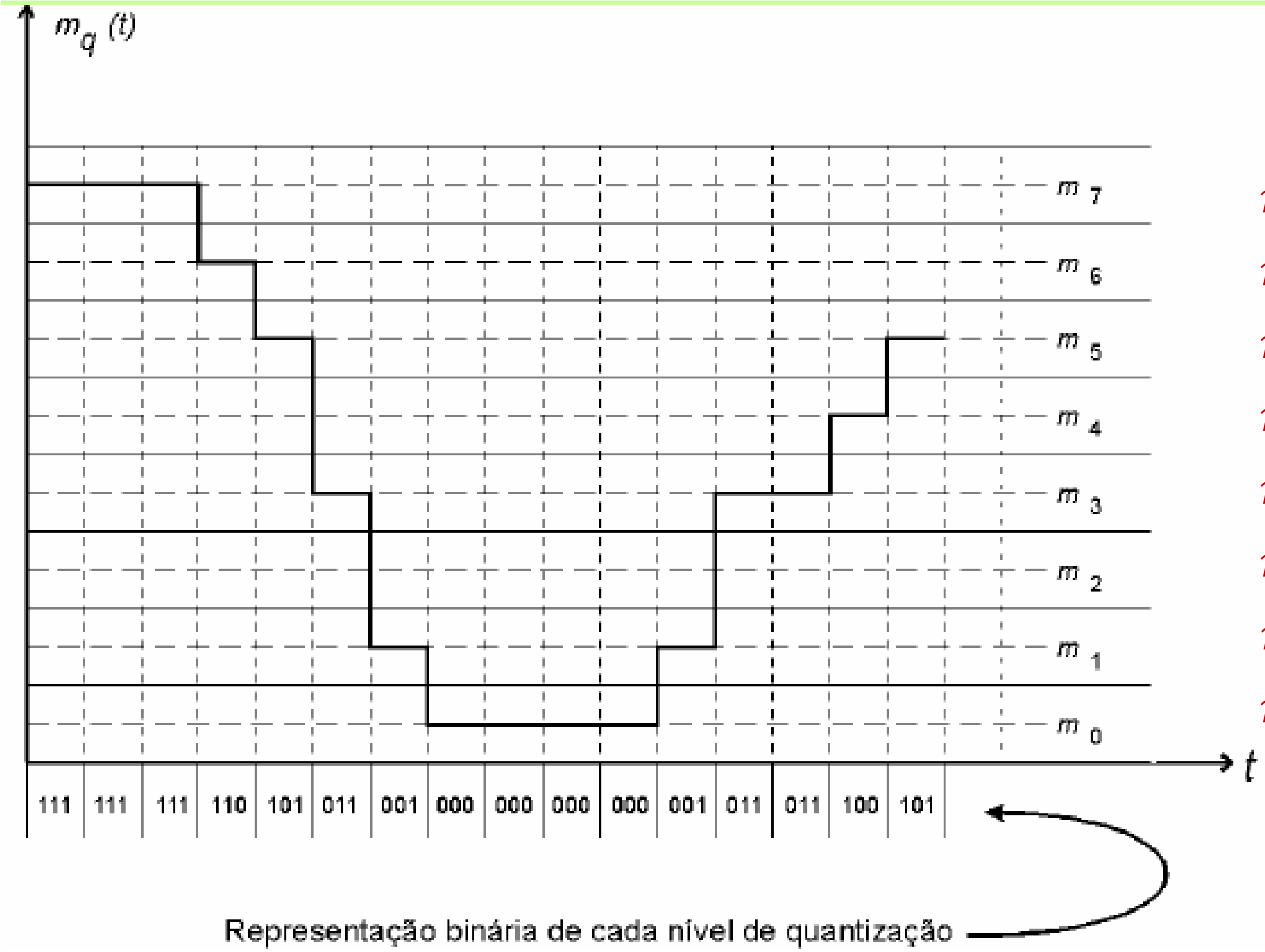
- Cada amostra $x_q(n) \in \Theta$ é mapeada em uma sequência de $N = log_2(M)$ bits.

- O processo de codificação do sinal $x_q(n)$ em uma sequência de bits é muitas vezes referido como PCM – *Pulse Code Modulation*.

Conversão A/D

3. Codificação PCM

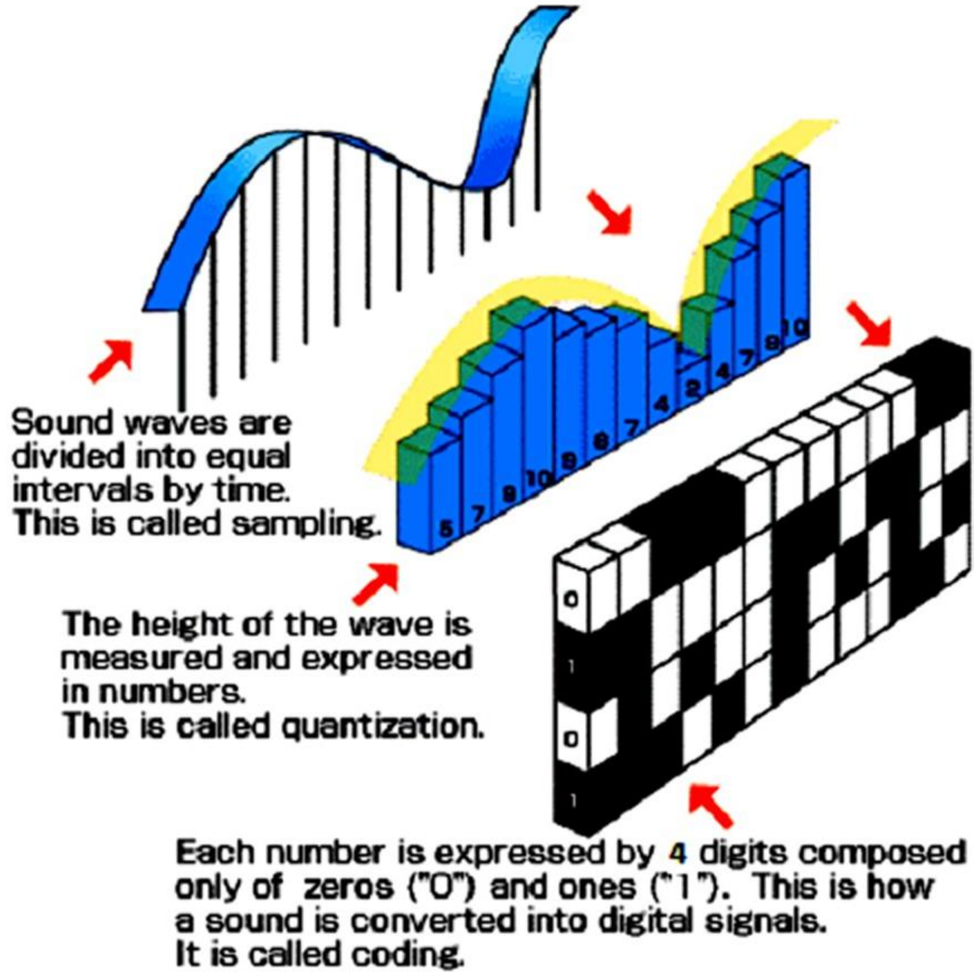
Para uma representação de $N = 3\ bits$, $M = 8\ níveis$ de quantização, mapeamento:



$$m_7 \leftarrow 111$$
$$m_6 \leftarrow 110$$
$$m_5 \leftarrow 101$$
$$m_4 \leftarrow 100$$
$$m_3 \leftarrow 011$$
$$m_2 \leftarrow 010$$
$$m_1 \leftarrow 001$$
$$m_0 \leftarrow 000$$

Conversão A/D

Amostra quantizada	Codificação original	Nº. de Ocorrências	Nº. de Bits Necessários	Compressão (Código)	Nº. de Bits Necessários
0	1111	0	0	001	0
1	0110	0	0	010	0
2	0010	1	4	10	2
3	1110	0	0	100	0
4	0100	2	8	00	4
5	0101	1	4	11	2
6	0001	0	0	111	0
7	0111	3	12	0	3
8	0000	1	4	000	3
9	1001	3	12	1	3
10	1010	2	8	01	4
...	...	...	...	...	...
15	1000	0	0		0
		(13)	(13x4=52)		(21)



(explo.: sinal de voz $f_M = 3.3k\,\text{Hz}$, $f_s = 8.0k\,\text{Hz}$)

Codificação PCM Diferencial

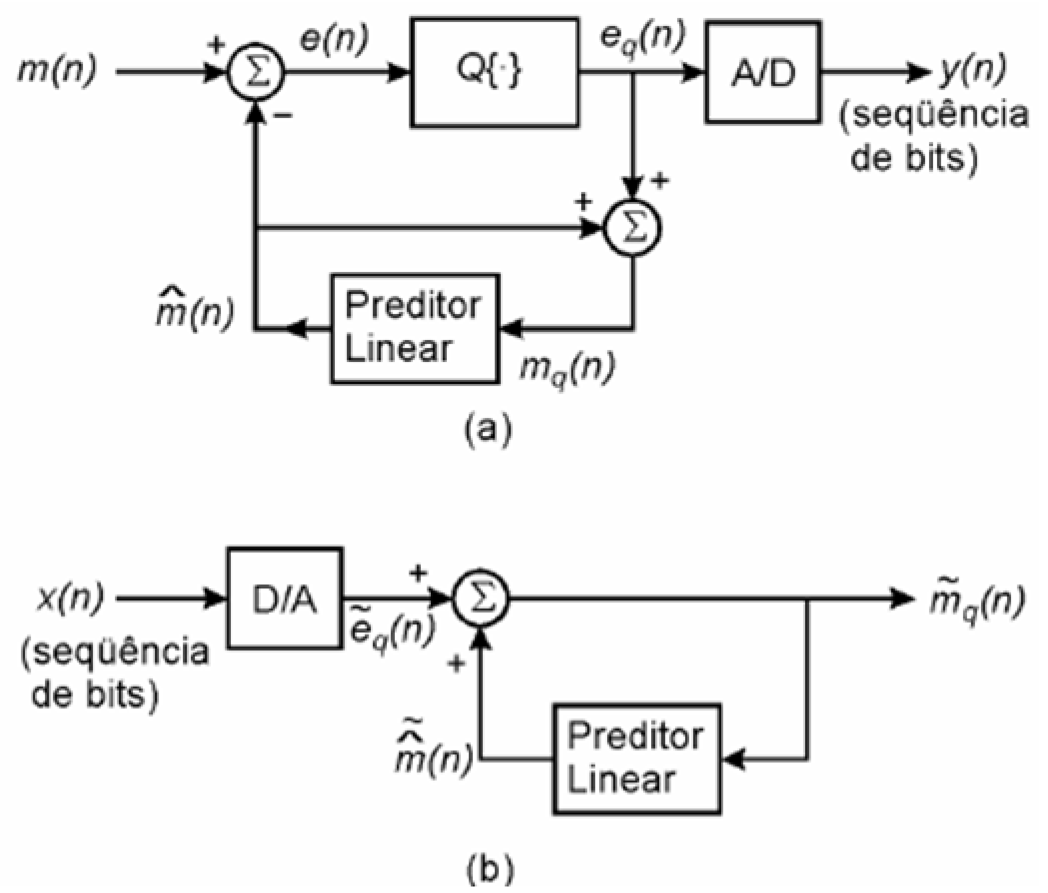
- Quando um sinal de áudio ou vídeo o é amostrado a uma razão ligeiramente maior que a Frequência de Nyquist, sinal amostrado resultante exibe uma alta correlação entre amostras adjacentes.
- O significado desta alta correlação é que, na média, o sinal não varia rapidamente de uma amostra para a outra.
- Quando amostras altamente correlacionadas são codificadas em um codificador PCM padrão, a sequência resultante de bits apresentará informação redundante.
- Logo, mensagens que não são absolutamente essenciais à transmissão de informação são geradas como resultado do processo de codificação.
- Remover esta redundância implica em um aumento da eficiência do sinal codificado, em transportar informação.

Codificação PCM Diferencial

- Se conhecemos uma parcela suficiente de um sinal redundante podemos inferir o resto do sinal, ou pelo menos tentar fazer uma estimativa provável.
- Em particular, se conhecemos o comportamento passado de um sinal até um determinado ponto no tempo, então é possível fazer alguma inferência sobre seus valores futuros.
- Tal processo de inferência é conhecido como **predição**.
- Embora existam inúmeros métodos de predição, no contexto de codificação DPCM nos limitaremos à denominada **Predição Linear**.
- Na Predição Linear uma amostra futura é obtida como uma combinação linear de um conjunto de amostras passadas.

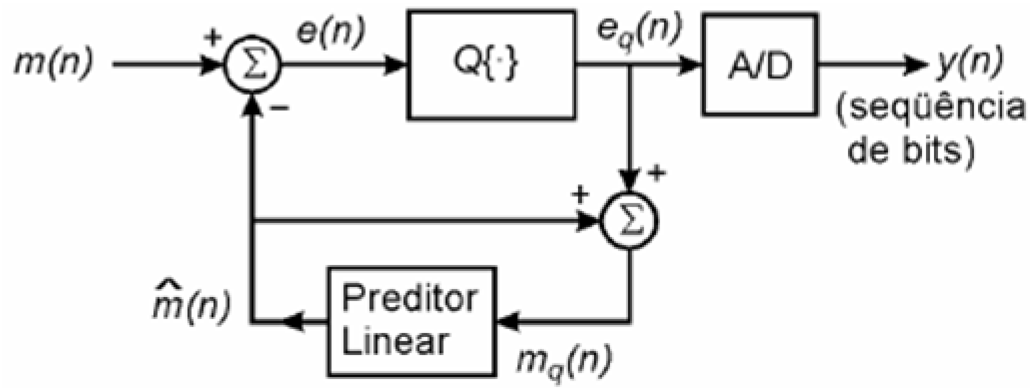
Codificação PCM Diferencial

- Suponha que um sinal $m(t)$ seja amostrado a uma razão $f_s > 2f_{Nyquist}$ produzindo uma sequência de amostras correlacionadas $m(n)$ espaçadas no tempo de um intervalo T_s.
- O fato de que é possível predizer valores futuros de $m(n)$ provê motivação para a implementação do esquema de quantização diferencial mostrado DPCM ao lado.



(a) Codificador (no transmissor digital)
(b) Decodificador (no receptor digital).

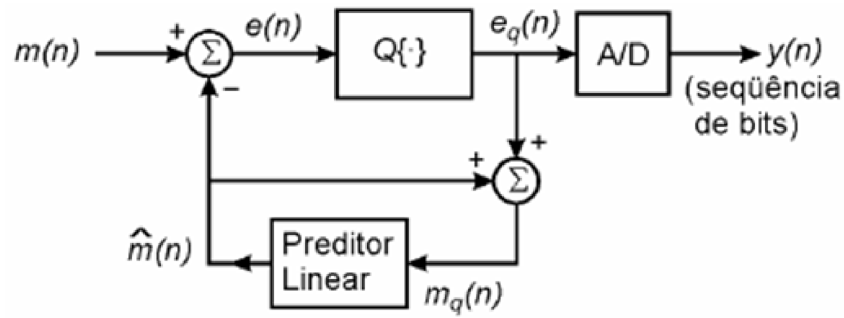
Codificação PCM Diferencial



- No sistema DPCM a entrada do quantizador $Q\{\cdot\}$ não é o sinal a ser codificado e, sim o sinal de erro $e(n) = m(n) - \widehat{m}(n)$ o qual é a diferença entre o sinal de amostrado entrada $m(n)$ e a predição $\widehat{m}(n)$ do mesmo.

- O sinal $\widehat{m}(n)$ é o resultado do processo de predição linear aplicado sobre um conjunto de amostras passadas do sinal $m_q(n)$, este último sendo uma versão quantizada do sinal $m(n)$.

Codificação PCM Diferencial



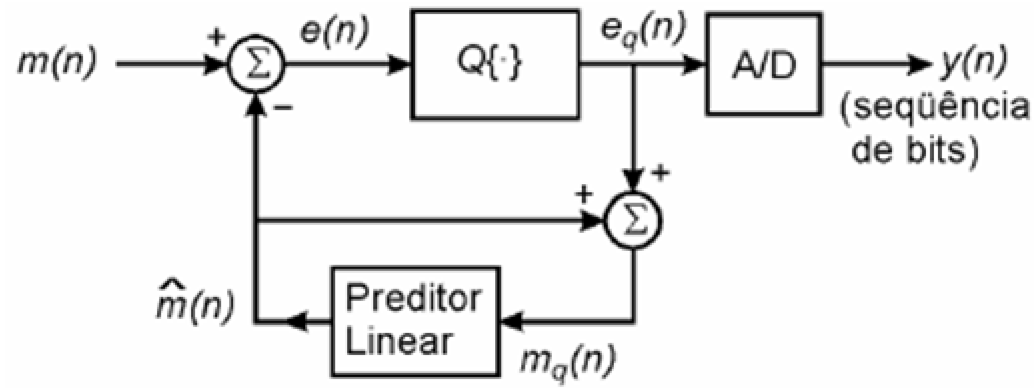
- O sinal de erro $e(n)$ é denominado de erro de predição visto que seu valor representa a incapacidade do Preditor Linear em prever $m(n)$ com exatidão.

- $Q\{\cdot\}$ realiza o processo de quantização do erro de predição, inserindo, deste modo, o chamado erro de quantização.

- O erro de quantização pode ser considerado um ruído superposto ao sinal pelo processo de quantização.

- Deste modo, a saída do quantizador pode ser decomposta em $e_q(n) = Q\{e(n)\} = e(n) + q_e(n)$ onde $q_e(n)$ representa o erro de quantização.

Codificação PCM Diferencial



- O sinal de entrada do Preditor Linear é formado pela soma do sinal predito $\hat{m}(n)$ e da saída do quantizador $e_q(n)$, logo

$$m_q(n) = \hat{m}(n) + e_q(n)$$

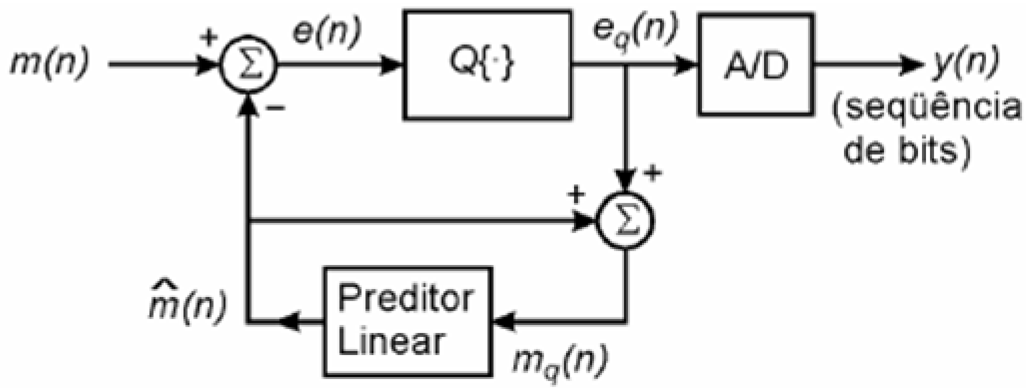
$$m_q(n) = \hat{m}(n) + e(n) + q_e(n)$$

$$m_q(n) = m(n) - e(n) + e(n) + q_e(n)$$

$$m_q(n) = m(n) + q_e(n)$$

- Logo, não importa a capacidade de predição do Preditor Linear: o sinal aplicado na sua entrada $m_q(n)$ difere do original apenas do valor do erro de quantização $q_e(n)$.

Codificação PCM Diferencial

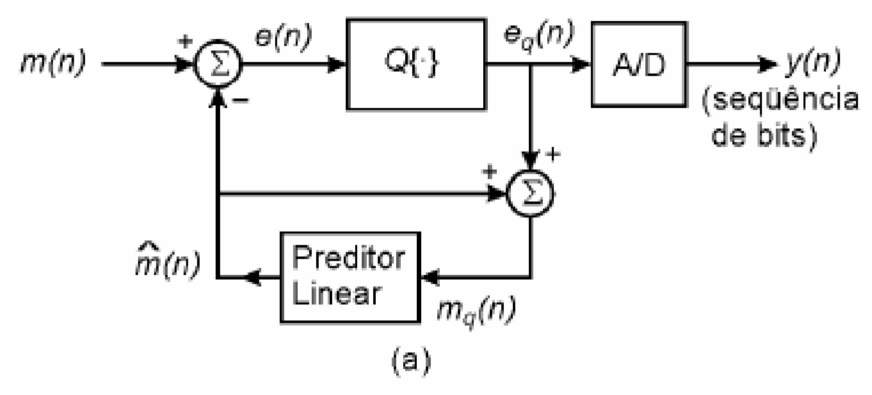


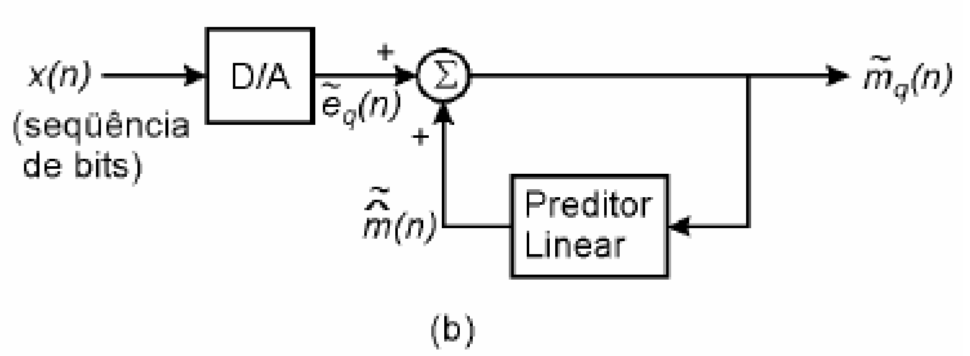
- Ao aplicar a saída do quantizador $e_q(n) = Q\{e(n)\}$ ao conversor A/D se obtém a sequência $y(n)$ de bits DPCM ou mensagens codificadas em DPCM .

Codificação PCM Diferencial

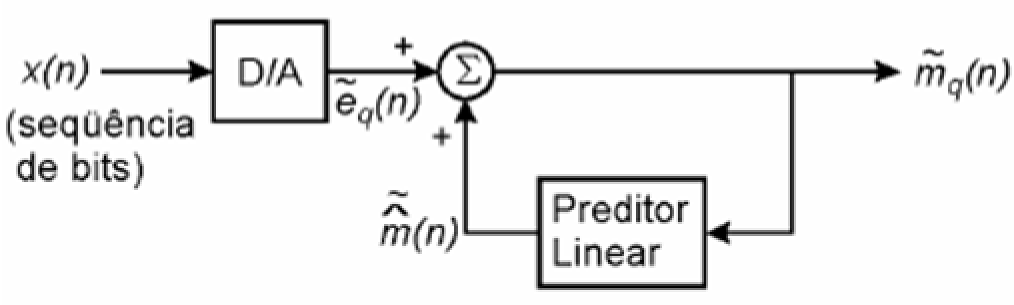
Codificador

Decodificador





Codificação PCM Diferencial



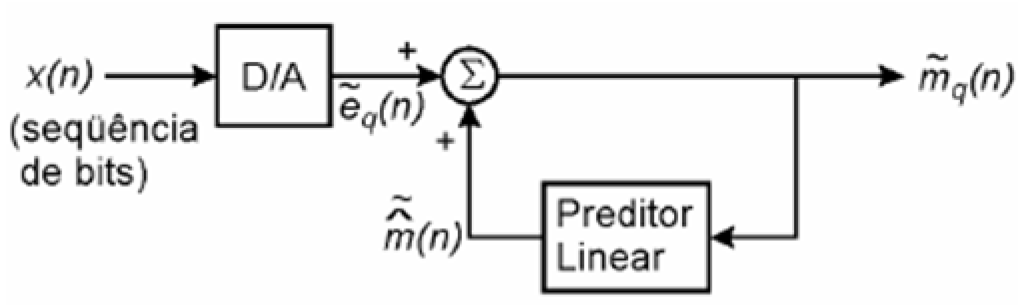
- O sinal aplicado a entrada do decodificador $x(n)$ corresponde a sequência de bits recebida

- Quando o canal de comunicação não gera nenhuma degradação no sinal, $x(n)$ corresponde ao sinal obtido na saída do codificador, ou seja $x(n) = y(n)$.

- O D/A converte a sequência binária no valor analógico correspondente, resultando no erro de quantização $\tilde{e}_q(n)$.

- $\tilde{e}_q(n)$ é uma aproximação do sinal $e_q(n)$, aproximação resultante de uma eventual degradação inserida no canal.

Codificação PCM Diferencial

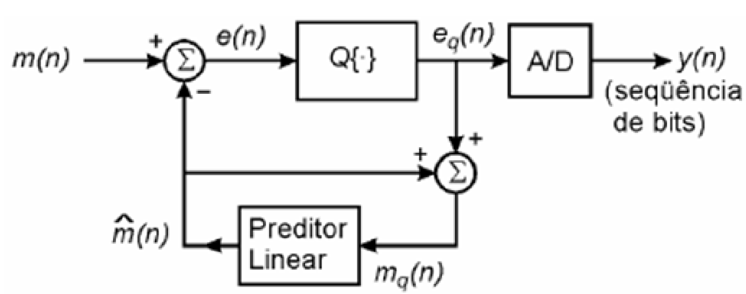


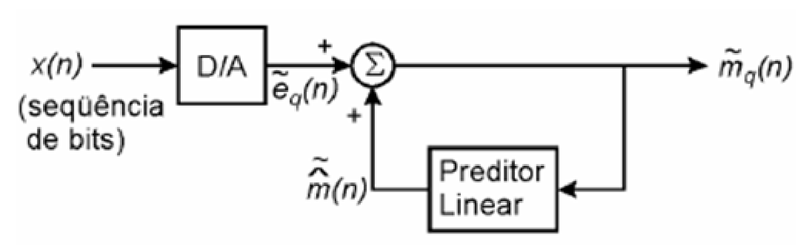
- O processo de predição é idêntico ao processo realizado no codificador.

- A saída do decodificador é dada pela soma do sinal predito $\tilde{\hat{m}}(n)$ com o erro de quantização $\tilde{e}_q(n)$, conforme segue

$$\tilde{m}_q(n) = \tilde{e}_q(n) + \tilde{\hat{m}}(n)$$

- Se o canal de comunicação não introduz nenhuma degradação, $\tilde{m}_q(n) = m_q(n)$





Vantagem do sistema DPCM sobre o sistema PCM

- Seja $Q\{\cdot\}$ um quantizador com M níveis de quantização e passo de quantização $S = (V_H - V_L)/M$, sendo $V_H - V_L$ a faixa dinâmica do sinal em sua entrada.

- No caso do sistema DPCM, se o Preditor Linear prevê $m(n)$ com exatidão, então a **faixa dinâmica** $V_H - V_L$**do sinal** $e(n)$ **na entrada de** $Q\{\cdot\}$ **será muito menor do que a faixa dinâmica do sinal** $m(n)$ **na entrada de** $Q\{\cdot\}$ para o caso do sistema PCM.

- Portanto, para um mesmo M, $S = (V_H - V_L)/M$ será menor para o sistema DPCM do que para o sistema PCM, o que implica que a potência do erro de quantização $\overline{q^2} = \frac{S^2}{12}$ menor no sistema DPCM do que no sistema PCM, permitindo a <u>redução do número de bits na representação das amostras.</u>

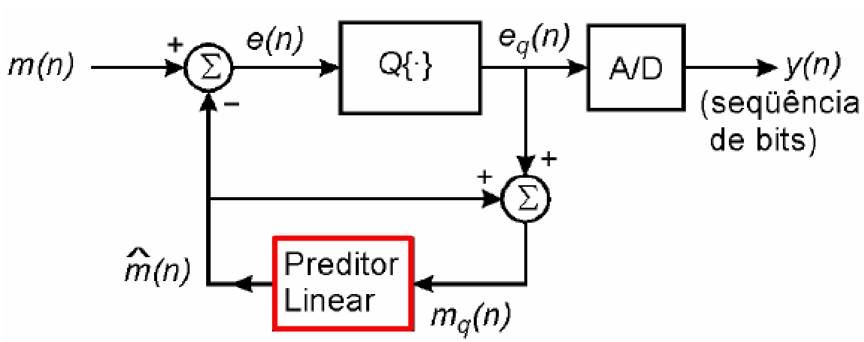
Vantagem do sistema DPCM sobre o sistema PCM

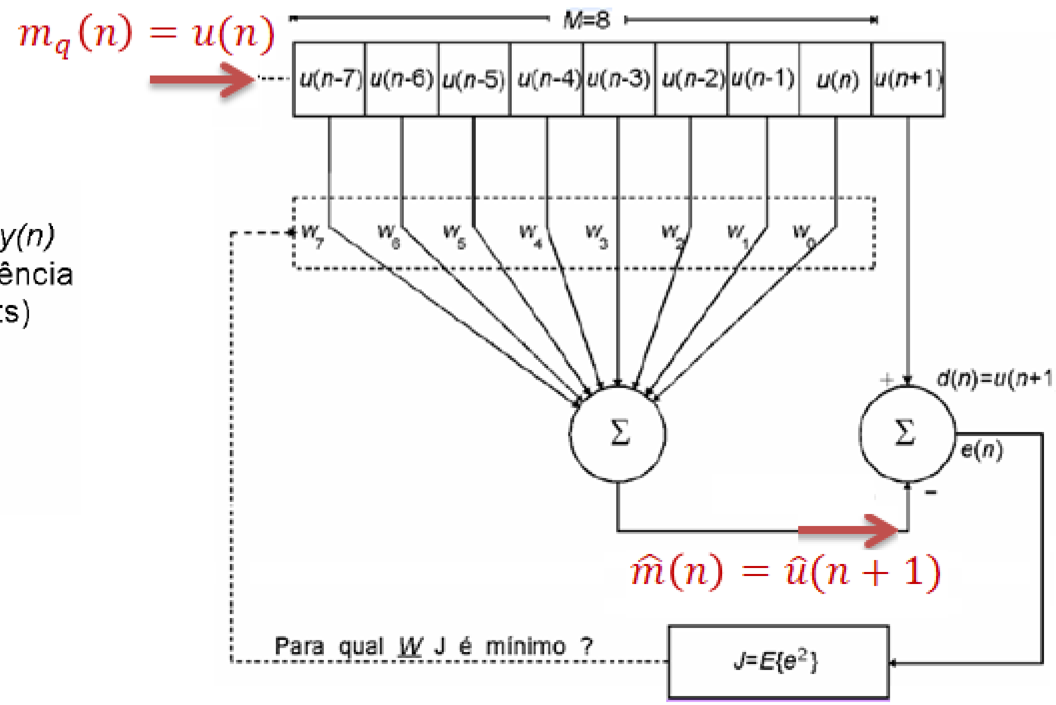
- Com a diminuição da potência do erro de quantização, a SNR de quantização aumentará grandemente, permitindo a redução do número de bits do codificador.

- A SNR de quantização é proporcional ao número N de bits ($SNR_Q = 6N\ [dB]$) portanto, se pudermos reduzir a SNR, poderemos reduzir o número de bits utilizados, de tal forma que o codificador DPCM poderá trabalhar com número de bits reduzido com respeito ao sistema PCM, atingindo desempenho comparável ou superior (A/D de menos bits).

- Para a típica aplicação de sinais de voz, com $f_S = 8KHz$, um preditor DPCM de ordem 5 necessita de 2 bits a menos por amostra do que o sistema PCM. Deste modo, um sistema DPCM economiza $8KHz \cdot 2\text{bits} = 16\text{Kbps}$ na taxa de transmissão, resultando em menor banda passante que o sistema PCM.

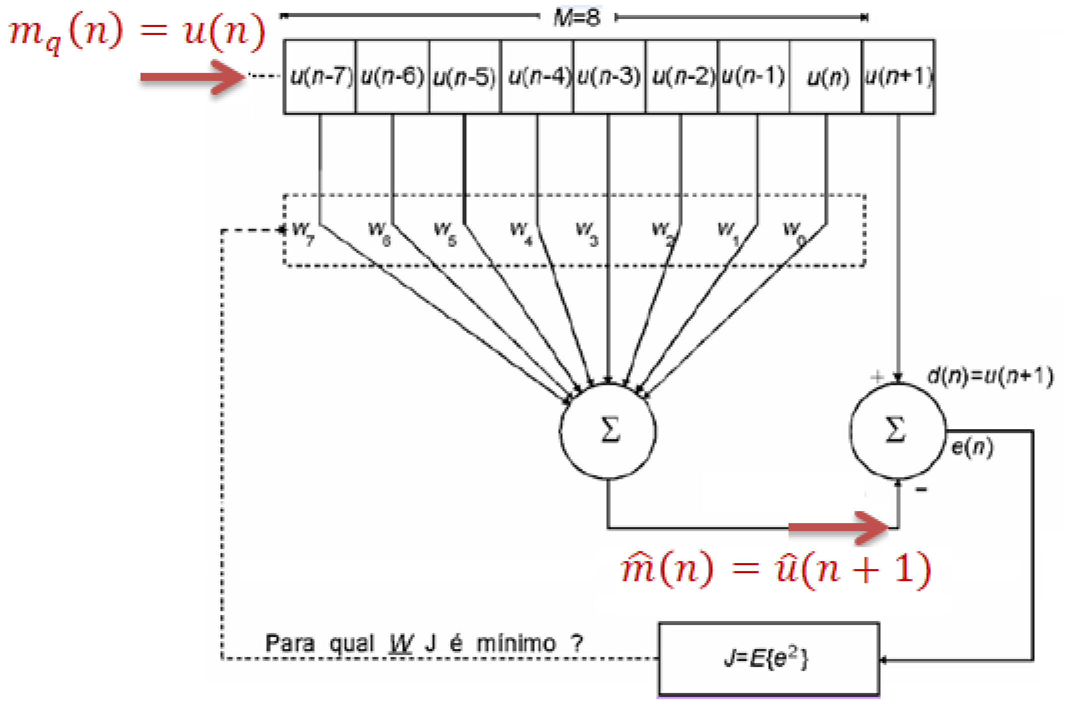
Predição Linear





- O preditor linear é um filtro transversal de ordem L.

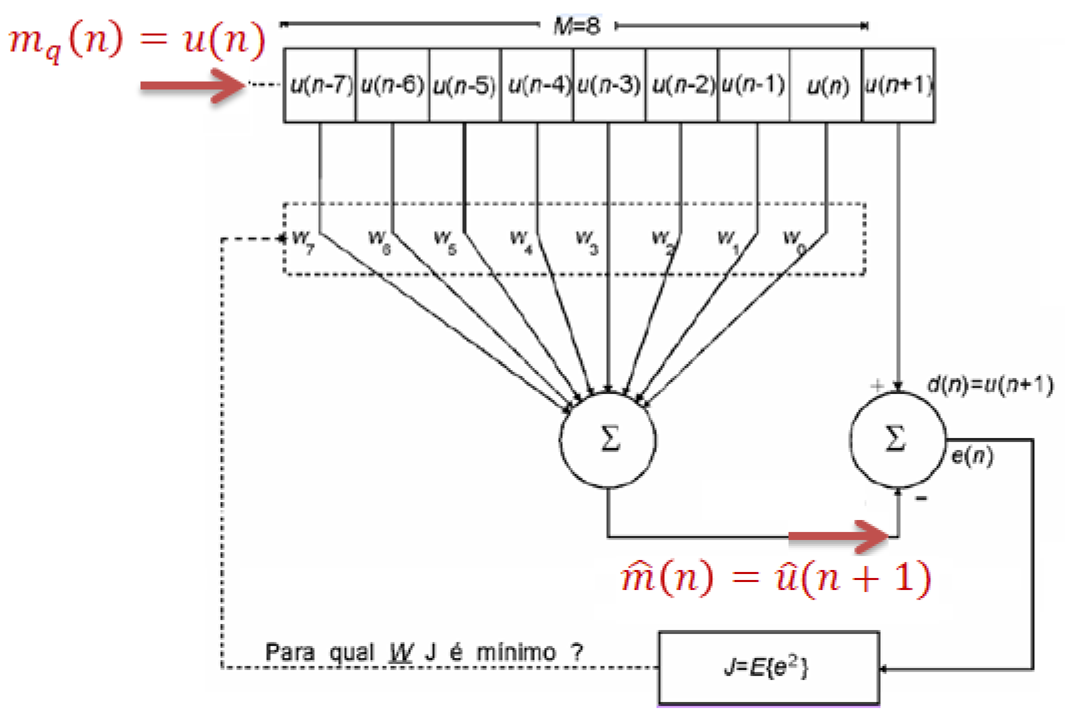
Predição Linear



- Os coeficientes do preditor $\underline{W}$ são definidos de forma a minimizar a função de custo J.
- A função de custo J mede o erro médio quadrático entre a estimativa da predição e o valor efetivamente obtido para a amostra em questão.
- O operador gradiente é aplicado com o intuito de obter os valores para os pesos w_i do filtro transversal que minimizem a função de custo J, resolvendo-se a equação $\nabla J = 0.$
- A solução é dada por

Equação de Wiener-Hopf $\boxed{\underline{W} = \boldsymbol{R}^{-1}\underline{P}}$

Predição Linear

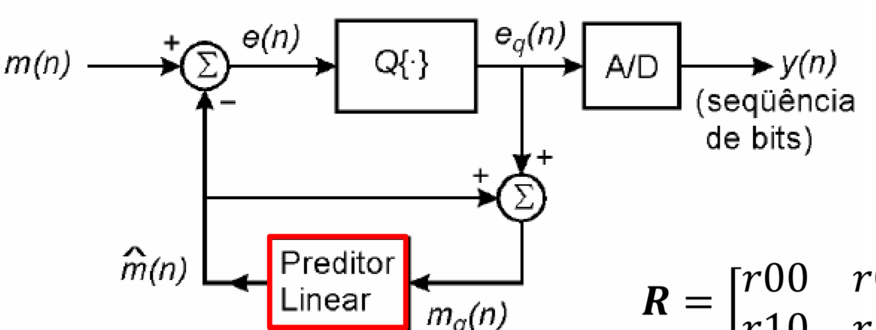


$$\underline{W} = \boldsymbol{R}^{-1}\underline{P}$$

- $\boldsymbol{R}$ é a mariz de autocorrelação.
- $\underline{P}$ é o vetor de correlação cruzada
- A saída do preditor é dada por

$$\hat{u}(n+1) = \sum_{k=0}^{L-1} w_k u(n-k)$$

$$\boxed{\hat{u}(n+1) = \underline{W}^T \underline{u}}$$



$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} r00 & r01 \\ r10 & r11 \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{R}^{-1} = \frac{1}{(r00 \cdot r11 - r01 \cdot r10)} \begin{bmatrix} r11 & -r01 \\ -r10 & r00 \end{bmatrix}$$

Predição Linear

- Para determinar $\boldsymbol{R}$ e $\underline{P}$, utiliza-se um conjunto suficientemente grande de amostras passadas mais recentes de $m_q(n)$.
- $\boldsymbol{R}$ e $\underline{P}$ são reavaliados a cada N_p predições.
- A cada reavaliação de $\boldsymbol{R}$ e $\underline{P}$, os novos coeficientes do filtro $\underline{W}$ são obtidos e enviados ao receptor através do canal de comunicação.
- Note que, a partir da inicialização de um sistema DPCM, devido à saída do preditor ser realimantada para a sua entrada, tanto o preditor do transmissor quanto do receptor necessitam de um razoável número de amostras até que consigam reduzir o erro de predição a níveis aceitáveis.

Exemplo de Predição Linear

A seqüência $m_q(n)$ é aplicada à entrada do Preditor Linear do codificador DPCM mostrado na figura ao lado.

Para

$$m_q(n) = \{-2,\ -1.414,\ 0,\ 1.414,\ 2,\ 1.414,\ 0,\ -1.414,\ -2,\ -1.414,\ 0\cdots\}$$

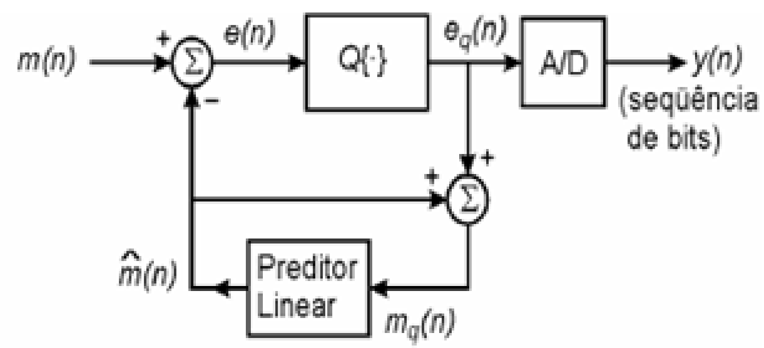
determine $\hat{m}(n)$ sabendo que o Preditor Linear é de ordem 2 e utiliza 11 amostras consecutivas de $m_q(n)$ para a definição da matriz de correlação.

Determine $e(n)$ para $\hat{m}(n)$.

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} r00 & r01 \\ r10 & r11 \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{R}^{-1} = \frac{1}{(r00 \cdot r11 - r01 \cdot r10)} \begin{bmatrix} r11 & -r01 \\ -r10 & r00 \end{bmatrix}$$

$$\underline{W} = \boldsymbol{R}^{-1}\underline{P}$$

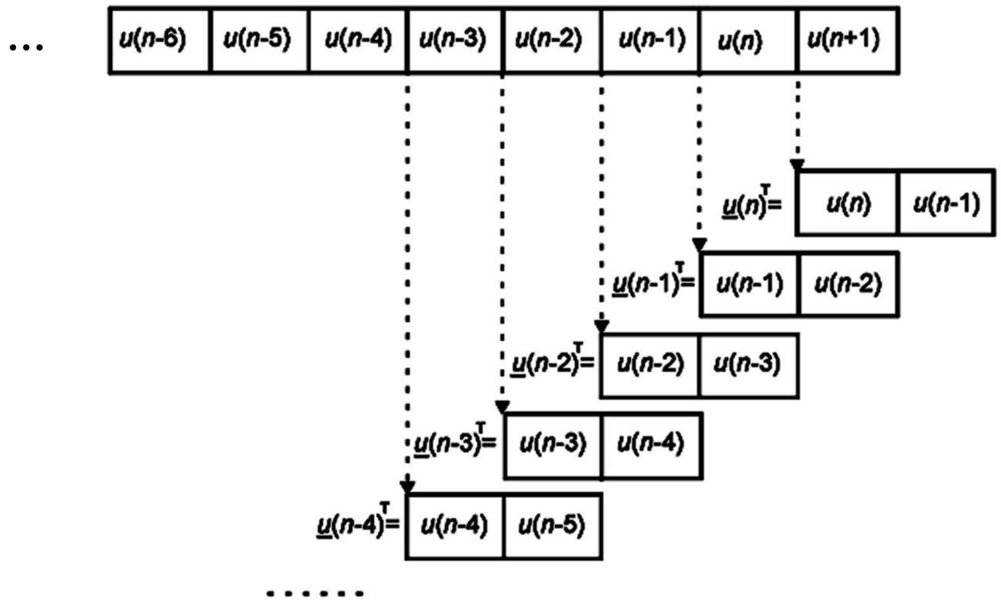
$$\hat{m}(n) = \hat{u}(n+1) = \sum_{k=0}^{L-1} w_k u(n-k) = \underline{W}^T \underline{u}$$



Codificador DPCM do TX digital.

Exemplo de Predição Linear

A estrutura de dados para a predição é composta por K vetores, sendo $K = número\ de\ amostras\ para\ predição\ - 1$.
Cada vetor possui L elementos, sendo $L =\ ordem\ do\ preditor$.



$$m_q(n) = \{-2,\ -1.414,\ 0,\ 1.414,\ 2,\ 1.414, 0, -1.414, -2, -1.414,\ 0\cdots\} =$$

$$= \{u(n-10),\ u(n-9), u(n-8),\ u(n-7),\ u(n-6),\ u(n-5), u(n-4), u(n-3), u(n-2), u(n-1), u(n)\cdots\}$$

$$\underline{u}(n) = \begin{bmatrix} u(n) \\ u(n-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1.414 \end{bmatrix}$$

$$\underline{u}(n-2) = \begin{bmatrix} u(n-2) \\ u(n-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1.414 \end{bmatrix}$$

...

$$\underline{u}(n-1) = \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.414 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{u}(n-9) = \begin{bmatrix} u(n-9) \\ u(n-10) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.414 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Exemplo de Predição Linear

DETERMINAÇÃO DA MATRIZ DE AUTOCORRELÇÃO R:

$$\underline{u}(n)\underline{u}^T(n)=\begin{bmatrix}0\\-1.414\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1.414\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1.9994\end{bmatrix}_0$$

$$\underline{u}(n-1)\underline{u}^T(n-1)=\begin{bmatrix}-1.414\\-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1.414 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.9994 & 2.8280\\2.8280 & 4\end{bmatrix}_1$$

$$\underline{u}(n-2)\underline{u}^T(n-2)=\begin{bmatrix}-2\\-1.414\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & -1.414\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 2.8280\\2.8280 & 1.9994\end{bmatrix}_2$$

$$\underline{u}(n-3)\underline{u}^T(n-3)=\begin{bmatrix}-1.414\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1.414 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.9994 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}_3$$

$$\underline{u}(n-4)\underline{u}^T(n-4)=\begin{bmatrix}0\\1.414\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1.414\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1.9994\end{bmatrix}_4$$

Exemplo de Predição Linear

DETERMINAÇÃO DA MATRIZ DE AUTOCORRELÇÃO R:

$$\underline{u}(n-5)\underline{u}^T(n-5)=\begin{bmatrix}1.414\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1.414 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.9994 & 2.8280\\2.8280 & 4\end{bmatrix}_5$$

$$\underline{u}(n-6)\underline{u}^T(n-6)=\begin{bmatrix}2\\1.414\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1.414\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 2.8280\\2.8280 & 1.9994\end{bmatrix}_6$$

$$\underline{u}(n-7)\underline{u}^T(n-7)=\begin{bmatrix}1.414\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1.414 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.9994 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}_7$$

$$\underline{u}(n-8)\underline{u}^T(n-8)=\begin{bmatrix}0\\-1.414\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1.414\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1.9994\end{bmatrix}_8$$

$$\underline{u}(n-9)\underline{u}^T(n-9)=\begin{bmatrix}-1.414\\-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1.414 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.9994 & 2.8280\\2.8280 & 4\end{bmatrix}_9$$

$$\mathbf{R}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}17.9970 & 14.1400\\14.1400 & 21.9970\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix}1.7997 & 1.4140\\1.4140 & 2.1997\end{bmatrix}$$

Exemplo de Predição Linear

DETERMINAÇÃO DA MATRIZ DE AUTOCORRELÇÃO R:

$$p\,/\,\underline{u}(n) \rightarrow d(n)\underline{u}(n) = \hat{u}(n+1)\underline{u}(n) = \hat{u}(n+1)\begin{bmatrix} 0 \\ -1.414 \end{bmatrix} = ?$$

$$p\,/\,\underline{u}(n-1) \rightarrow d(n)\underline{u}(n-1) = u(n)\underline{u}(n-1) = 0\begin{bmatrix} -1.414 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_0$$

$$p\,/\,\underline{u}(n-2) \rightarrow d(n)\underline{u}(n-2) = u(n-1)\underline{u}(n-2) = -1.414\begin{bmatrix} -2 \\ -1.414 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.8280 \\ 1.9994 \end{bmatrix}_1$$

$$p\,/\,\underline{u}(n-3) \rightarrow d(n)\underline{u}(n-3) = u(n-2)\underline{u}(n-3) = -2\begin{bmatrix} -1.414 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.8280 \\ 0 \end{bmatrix}_2$$

Exemplo de Predição Linear

DETERMINAÇÃO DA MATRIZ DE AUTOCORRELÇÃO R:

$$p / \underline{u}(n-4) \rightarrow d(n)\underline{u}(n-4) = u(n-3)\underline{u}(n-4) = -1.414\begin{bmatrix} 0 \\ -1.414 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1.9994 \end{bmatrix}_3$$

$$p / \underline{u}(n-5) \rightarrow d(n)\underline{u}(n-5) = u(n-4)\underline{u}(n-5) = 0\begin{bmatrix} 1.414 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_4$$

$$p / \underline{u}(n-6) \rightarrow d(n)\underline{u}(n-6) = u(n-5)\underline{u}(n-6) = 1.414\begin{bmatrix} 2 \\ 1.414 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.8280 \\ 1.9994 \end{bmatrix}_5$$

$$p / \underline{u}(n-7) \rightarrow d(n)\underline{u}(n-7) = u(n-6)\underline{u}(n-7) = 2\begin{bmatrix} 1.414 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.8280 \\ 0 \end{bmatrix}_6$$

Exemplo de Predição Linear

DETERMINAÇÃO DA MATRIZ DE AUTOCORRELÇÃO R:

$$p/\underline{u}(n-8) \rightarrow d(n)\underline{u}(n-8) = u(n-7)\underline{u}(n-8) = 1.414\begin{bmatrix} 0 \\ -1.414 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1.9994 \end{bmatrix}_7$$

$$p/\underline{u}(n-9) \rightarrow d(n)\underline{u}(n-9) = u(n-8)\underline{u}(n-9) = 0\begin{bmatrix} -1.414 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_8$$

$$\underline{P} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 11.3120 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{P} = \begin{bmatrix} 1.2569 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo de Predição Linear

DETERMINAÇÃO DA MATRIZ DE AUTOCORRELÇÃO R:

$$\underline{W} = \mathbf{R}^{-1}\underline{P} = \begin{bmatrix} 1.7997 & 1.4140 \\ 1.4140 & 2.1997 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1.2569 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{W} = \begin{bmatrix} 1.1226 & -0.7216 \\ -0.7216 & 0.9185 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.2569 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{W} = \begin{bmatrix} 1.4110 \\ -0.9070 \end{bmatrix}$$

Exemplo de Predição Linear

DETERMINAÇÃO DO VALOR ESTIMADO $\hat{u}(n+1)$ PARA A PRIMEIRA AMOSTRA SUBSEQUENTE À SÉRIE CONHECIDA:

$$\hat{u}(n+1) = \sum_{k=0}^{1} W_k \; u(n-k) = W_0 u(n) + W_1 u(n-1)$$

$$\hat{u}(n+1) = (1.4110)(0) + (-0.9070)(-1.414)$$

$$\hat{u}(n+1) = 1.2825$$

DETERMINAÇÃO DO ERRO DE PREDIÇÃO $e(n)$:

$$m_q(n) = \{-2,\ -1.414,\ 0,\ 1.414,\ 2,\ 1.414,\ 0,\ -1.414,\ -2,\ -1.414,\ 0,\ \underline{1.414}, \cdots\}$$

$$e(n) = 1.414 - 1.2825 = 0.1315$$

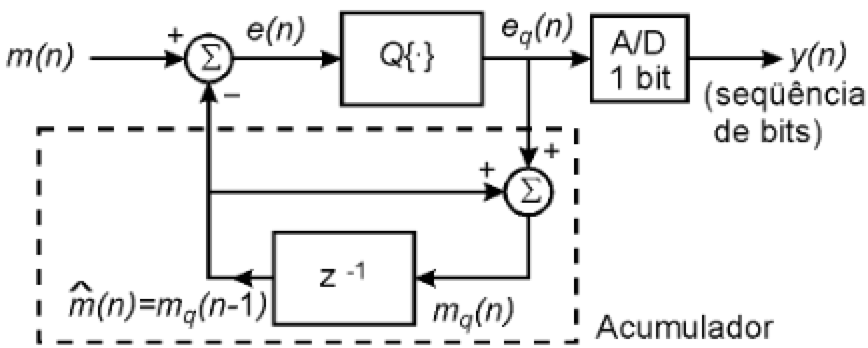
Modulação Delta - DM

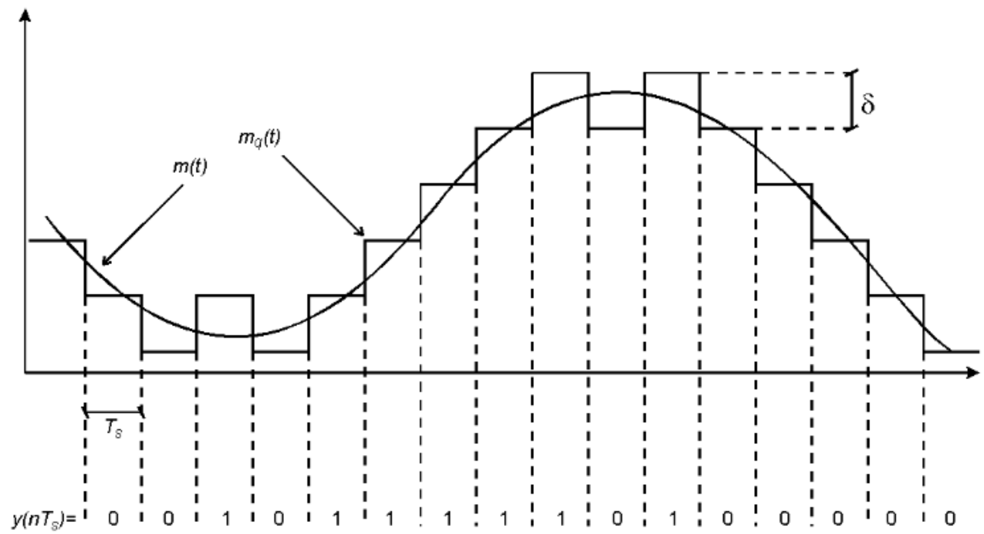
- Se utilizarmos uma frequência de amostragem bem acima da Frequência de Nyquist ($f_s \gg f_{Nyquist}$) poderemos obter uma predição tão boa (devido a alta correlação resultante da super-amostragem) que a faixa dinâmica $V_H - V_L$ do sinal $e(n)$ na entrada de $Q\{\cdot\}$ tenderá para zero e com isto poderemos reduzir o número M de níveis de quantização necessários para $M = 2$.
- Esta é a ideia básica que rege o funcionamento da Modulação Delta.
- Na realidade, a DM nada mais é do que um sistema DPCM com um A/D de 1 bit ($M = 2$).

Modulação Delta - DM

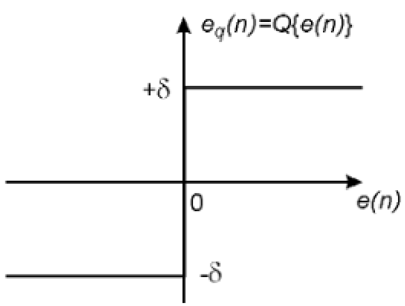
- Um sistema DM provê uma aproximação em forma de escada para uma versão super-amostrada do sinal em banda-base $m(t)$.

Codificador

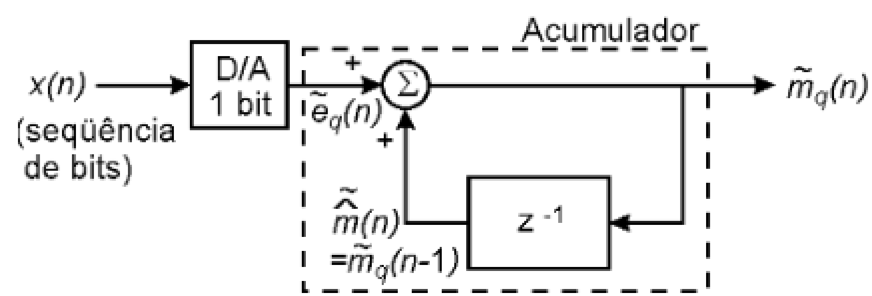




Curva de transferência do quantizador

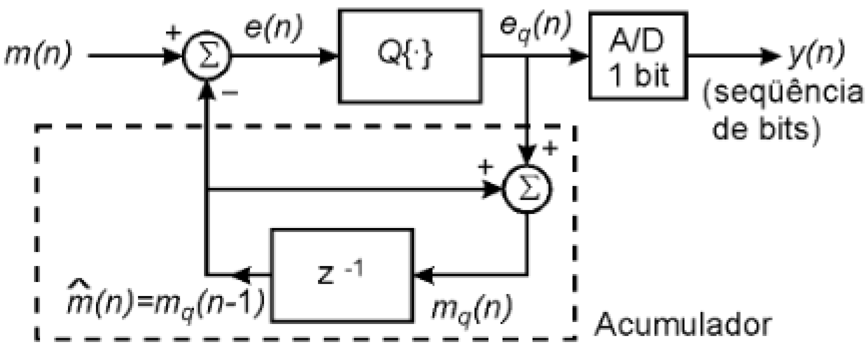


Decodificador

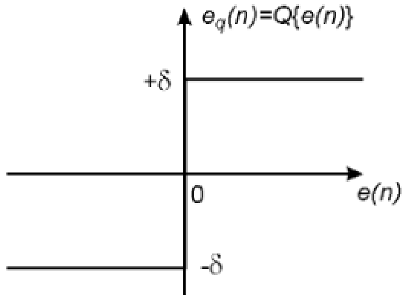


Modulação Delta - DM

Codificador



Curva de transferência do quantizador



- Erro de predição $e(n)$ na entrada do quantizador $Q\{\cdot\}$:

$$e(n) = m(n) - m_q(n-1)$$

- Saída do quantizador $e_q(n)$:

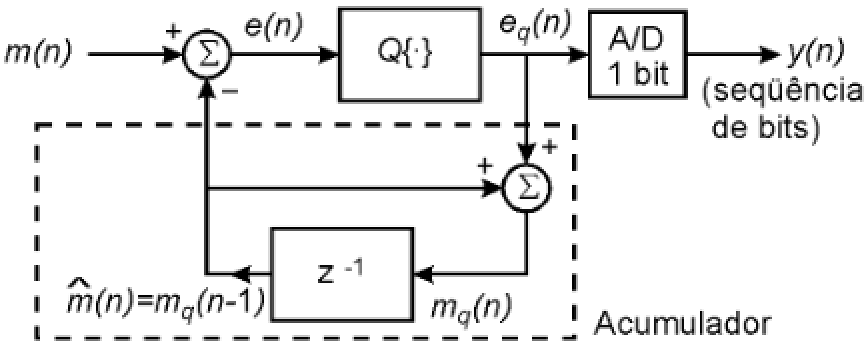
$$e_q(n) = \delta \operatorname{sgn}(e(n))$$

onde

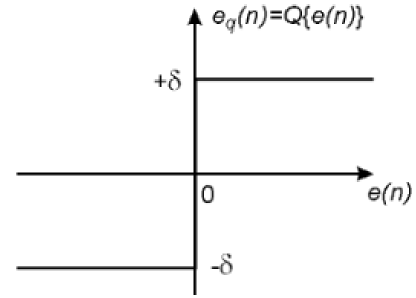
$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} +1, x \geq 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}$$

Modulação Delta - DM

Codificador



Curva de transferência do quantizador



- Entrada do preditor z^{-1}:

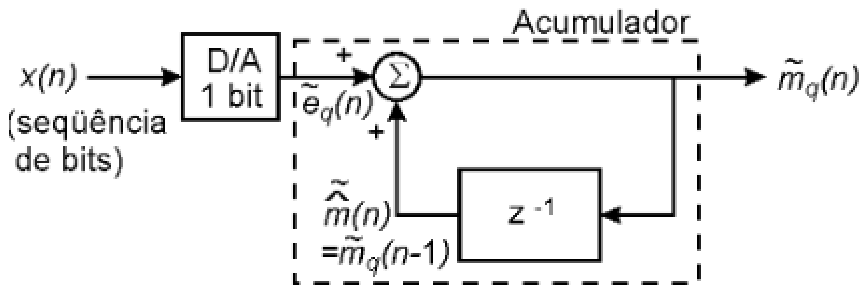
$$m_q(n) = m_q(n-1) + e_q(n)$$

- A realimentação da saída do preditor z^{-1} à sua entrada através de um somador forma um bloco acumulador:

$$m_q(n) = \sum_{i=0}^{n} e_q(n) = \sum_{i=0}^{n} \delta \operatorname{sgn}(e(n)) = \delta \sum_{i=0}^{n} \operatorname{sgn}(e(n))$$

- O acumulador incrementa a aproximação $m_q(t)$ da direção positiva ou negativa dependendo do sinal algébrico do erro de predição $e(n)$.

Modulação Delta - DM



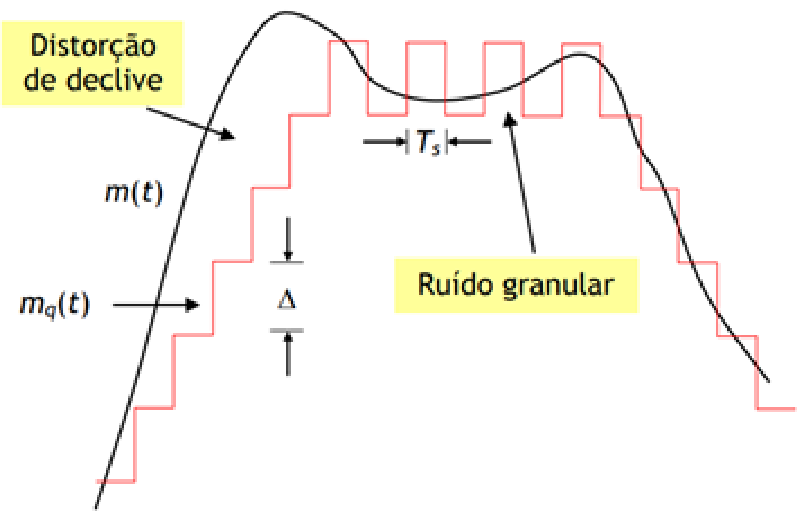
- No decodificador, cada bit é transformado em um pulso $+\delta/-\delta$, que representa o sinal $\tilde{e}_q(n)$.
- O acumulador gera o sinal de saída

$$\tilde{m}_q(n) = \tilde{e}_q(n) + \tilde{\hat{m}}(n)$$

- Utilizando o preditor de última amostra z^{-1}.

Modulação Delta - DM

- Sistemas DM são sujeitos a dois tipos de erro de quantização
  - Distorção por declividade excessiva em $m(t)$ (*slope-overload distortion*).
  - Ruído granular.
- Percebe-se que existe a necessidade de um valor grande para δ objetivando acomodar sinais de grande faixa dinâmica, enquanto que um δ pequeno é necessário para representar com precisão sinais aproximadamente constantes.
- A escolha do δ adequado resulta, como consequência, em um compromisso entre distorção *slope-overload* e ruído granular.



Modulação Delta Adaptativo - ADM

- Objetivando acomodar sinais de faixa dinâmica e de estatística variáveis surgiram os sistemas ADPCM (*Adaptive Differential Pulse-Code Modulation*) e ADM (*Adaptive Delta Modulation*).

- Um sistema ADM tipicamente utiliza a seguinte regra de adaptação para δ

$$\delta_n = \delta_{n-1}\gamma^{\rho(b_n)\rho(b_{n-1})}$$

onde $\gamma > 1$ é uma constante determinada experimentalmente objetivando a redução do erro de quantização,

$$\rho(b) = 2b - 1$$

e b_n e b_{n-1} são respectivamente o último e o penúltimo bit gerados na saída $y(n)$ do codificador de um sistema DM.

Modulação Delta Adaptativo - ADM

$$\delta_n = \delta_{n-1}\gamma^{\rho(b_n)\rho(b_{n-1})}$$

$$\rho(b) = 2b - 1$$

- Assim, se em um determinado instante n começa a ocorrer distorção *slope-overload*, então forçosamente

$$b_n = b_{n-1}, \qquad \rho(b_n)\rho(b_{n-1}) = 1, \qquad \delta_n = \delta_{n-1}\gamma$$

- δ_n é multiplicado por γ, aumentando δ e reduzindo a distorção.

- Por outro lado, se em um determinado instante n começa a ocorrer ruído granular, então forçosamente

$$b_n \neq b_{n-1}, \qquad \rho(b_n)\rho(b_{n-1}) = -1, \qquad \delta_n = \frac{\delta_{n-1}}{\gamma}$$

- δ_n é dividido por γ, diminuindo δ e reduzindo o ruído.