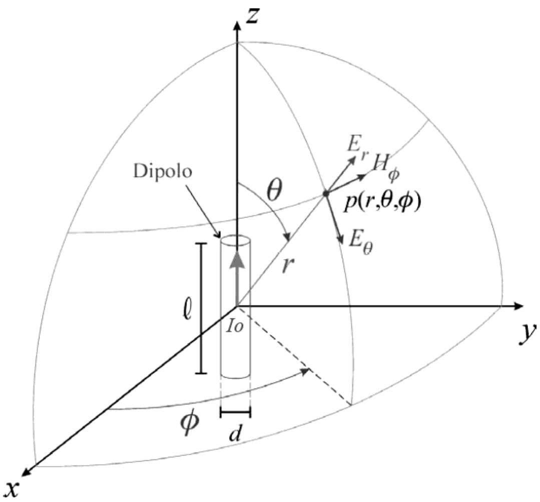
PUCRS – Faculdade de Engenharia – Engenharia Elétrica

Antenas – T480 – Exercício aula 20/08/2019

Um dipolo elementar de comprimento $\ell =$ 28 cm, encontra-se centrado na origem e alinhado com o eixo z do sistema cartesiano que é referência para o espaço $\Re^3$, conforme mostra a figura abaixo. A corrente que percorre o dipolo elementar é dada por $I_o(t) = 131\cos(2\pi 105.4\times 10^6 t + 50^\circ)$ [A].



Seja $p(r,\theta,\phi)$ na figura acima um ponto do espaço $\Re^3$ tal que $r =$ 500m. Dado que nesta situação a condição $r \geq 10\lambda$ é obedecida (**verifique!**), então é válido afirmar que p situa-se na região de *farfield* (= campo distante) do dipolo elementar. Portanto, o campo eletromagnético em p pode ser determinado pelas equações (51) e (52) da apostila:

$$E_\theta = 60\pi I_0\left(\frac{\ell}{r\lambda}\right)e^{j\left(\omega t-\beta r+\frac{\pi}{2}\right)}\operatorname{sen}\theta\left[\frac{V}{m}\right] \qquad \text{e} \qquad \frac{E_\theta}{H_\phi} = 120\pi \ \ [\Omega]$$

a) Determine o valor máximo $S_{\max}$ do Vetor de Poynting S [W/m²] no ponto $p(r,\theta,\phi)$ e o ângulo $\theta = \theta_{\max}$ para o qual $S = S_{\max}$ [W/m²] em $p(r,\theta,\phi)$.

b) Determine o valor mínimo $S_{\min}$ do Vetor de Poynting S [W/m²] no ponto $p(r,\theta,\phi)$ e os ângulos $\theta = \theta'_{\min}$ e $\theta = \theta''_{\min}$ para o quais $S = S_{\min}$ [W/m²] em $p(r,\theta,\phi)$.

c) Para estabelecer as direções do espaço $\Re^3$ nas quais é significativa a "iluminação" gerada por uma antena transmissora determina-se as direções (θ,ϕ) para as quais o Vetor de Poynting S tem maior módulo (intensidade) no *farfield* da antena. Um critério aproximado consiste em calcular S nos pontos $p(r,\theta,\phi)$ da superfície de uma esfera de raio $r \geq 10\lambda$, verificando se $S(r,\theta,\phi) \geq \frac{S_{\max}}{4}$, sendo $S_{\max}$ o valor de S calculado conforme item a). Para o dipolo elementar da figura acima, sejam $\theta = \theta'_q$ e $\theta = \theta''_q$ os ângulos para os quais $S \geq S_q = \frac{S_{\max}}{4}$, de forma que, de acordo com o referido critério, podemos desprezar toda a irradiação fora da faixa equatorial na superfície da esfera de raio r delimitada por $\theta = \theta'_q$ e $\theta = \theta''_q$. Determine os ângulos θ'_q e θ''_q que delimitam a faixa equatorial "iluminada" pelo dipolo elementar da figura acima.

d) Determine a potência útil P entregue ao dipolo elementar pela fonte externa (não mostrada na figura acima) geradora da corrente $I_o(t)$ que percorre o mesmo. Para tanto, considere que não há perdas nem no dipolo nem no espaço livre e que, portanto, P é igual à potência total irradiada pelo dipolo elementar. Especificamente, P é igual à potência total que atravessa a superfície de uma esfera de raio $r \geq 10\lambda$ (*farfield*). Para efeito de simplicidade no cálculo da potência total que atravessa a superfície da esfera, assuma que a "iluminação" gerada pelo dipolo concentra-se apenas na faixa equatorial delimitada por θ'_q e θ''_q (vide item c)), sendo nula fora desta faixa. Assuma também que o Vetor de Poynting seja constante e de valor $S_{\max}$ ao longo da superfície da faixa equatorial "iluminada" pelo dipolo, sendo nulo fora desta região.

e) A partir de d), determine a resistência vista pelo gerador nos terminais de entrada do dipolo elementar. Compare o resultado obtido em e) com o resultado obtido pela equação (62) do Cap II da apostila (equação exata).

Solução:

$f := 105.4 \cdot 10^6 \cdot Hz$ → freqüência de operação

$Io := 131 \cdot e^{j \cdot 50 \cdot deg} \cdot A$ → fasor (amplitude e fase) da corrente que percorre o dipolo elementar

$l := 28 \cdot cm$ → tamanho do dipolo elementar

$\eta := 120 \cdot \pi \cdot \Omega$ → impedância do espaço livre

$\lambda := \frac{c}{f}$ $\quad \lambda = 2.844\,m$ → comprimento de onda da onda eletromagnética $\quad \frac{l}{\lambda} = 0.098$ → Portanto, é um dipolo elementar

$\beta := \frac{2 \cdot \pi}{\lambda}$ $\quad \beta = 2.209 \cdot \frac{rad}{m}$ → constante de propagação da onda eletromagnética

$\omega := 2 \cdot \pi \cdot f$ $\quad \omega = 6.622 \times 10^8 \cdot \frac{rad}{s}$ → velocidade angular da onda eletromagnética

$r := 500 \cdot m$ → distância do ponto *p* à origem do sistema cartesiano $\quad \frac{r}{\lambda} = 175.788$ → Portanto, o ponto *p* encontra-se no *farfield*

A expressão analítica no tempo das componentes vetoriais do campo eletromagnético é dada por:

$E\theta(t) = |E\theta| \cos(\omega t + \arg(E\theta))$ [V/m]

$H\phi(t) = |H\phi| \cos(\omega t + \arg(H\phi))$ [A/m]

onde $E\theta$ e $H\phi$ são fasores da forma:

$E\theta = |E\theta| \cdot e^{j \cdot \arg(E\theta)}$ [V/m]

$H\phi = |H\phi| \cdot e^{j \cdot \arg(H\phi)}$ [A/m]

a) Analisando as equações (51) e (52) da apostila, infere-se que:

$\theta := 90 \cdot deg$ → $\theta = \theta_{max}$

Daí:

$E\theta := 0.5 \cdot \eta \cdot Io \cdot \left(\frac{l}{r \cdot \lambda}\right) \cdot e^{-j \cdot \left(\beta \cdot r - \frac{\pi}{2}\right)} \cdot \sin(\theta)$ $\quad |E\theta| = 4.862 \frac{V}{m}$ $\quad \arg(E\theta) = -143.78\,deg$

$H\phi := \frac{E\theta}{\eta}$ $\quad |H\phi| = 0.013 \frac{A}{m}$ $\quad \arg(H\phi) = -143.78\,deg$

$Smax := \frac{1}{2} \cdot E\theta \cdot \overline{H\phi}$ $\quad Smax = 0.031 \frac{W}{m^2}$

b) Analisando as equações (51) e (52) da apostila, infere-se que:

$\theta := 0 \cdot deg$ $\quad \theta\_ := 180 \cdot deg$ → $\theta = \theta'_{min}$ e $\theta\_ = \theta''_{min}$

Daí:

$E\theta := 0.5 \cdot \eta \cdot Io \cdot \left(\frac{l}{r \cdot \lambda}\right) \cdot e^{-j \cdot \left(\beta \cdot r - \frac{\pi}{2}\right)} \cdot \sin(\theta)$ $\quad |E\theta| = 0 \cdot \frac{V}{m}$

$H\phi := \frac{E\theta}{\eta}$ $\quad |H\phi| = 0 \frac{A}{m}$

$Smin := \frac{1}{2} \cdot E\theta \cdot \overline{H\phi}$ $\quad Smin = 0 \cdot \frac{W}{m^2}$

c) Para que S = Smax/4 é necessário que Eθ e Hϕ sejam reduzidos para 1/2 de seus valores máximos. Logo, analisando as equações (51) e (52) da apostila, conclue-se que:

$\theta q := \operatorname{asin}\left(\frac{1}{2}\right)$ $\quad \theta q = 30 \cdot deg$ $\quad \theta q\_ := 180 \cdot deg - \theta q$ $\quad \theta q\_ = 150 \cdot deg$ $\quad \theta := \theta q$ $\quad \rightarrow \theta_q = \theta'_q$ e $\theta_{q\_} = \theta''_q$

Verificando se para θ_q e $\theta_{q\_}$ calculados acima obtemos S = S_q=Smax/4:

$$E\theta := 0.5 \cdot \eta \cdot Io \cdot \left(\frac{1}{r \cdot \lambda}\right) \cdot e^{-j \cdot \left(\beta \cdot r - \frac{\pi}{2}\right)} \cdot \sin(\theta) \qquad |E\theta| = 2.431 \cdot \frac{V}{m} \qquad \arg(E\theta) = -143.78 \cdot deg$$

$$H\phi := \frac{E\theta}{\eta} \qquad |H\phi| = 6.448 \times 10^{-3} \frac{A}{m} \qquad \arg(H\phi) = -143.78 \cdot deg$$

$$Sq := \frac{1}{2} \cdot E\theta \cdot \overline{H\phi} \qquad Sq = 7.837 \times 10^{-3} \cdot \frac{W}{m^2} \qquad \frac{Sq}{Smax} = 0.25$$

→ OK! (válido tanto para θ_q como para $\theta_{q\_}$, visto que $\theta_{q\_}$ = 180 - θ_q)

d)

$$Ae := 4 \cdot \pi \cdot r^2 \qquad Ae = 3.142 \times 10^6 \, m^2$$

$$\Delta\theta := \theta q\_ - \theta q$$

$$P := Ae \cdot Smax \cdot \frac{\Delta\theta}{180 \cdot deg} \qquad P = 6.565 \times 10^4 \, W$$

e)

$$P = \left(\frac{|Io|}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot Ri$$

→ Potência entregue ao dipolo pela fonte externa geradora da corrente Io.

$$Ri := \frac{2 \cdot P}{(|Io|)^2} \qquad Ri = 7.651 \, \Omega$$

→ Note que para o cálculo de P (item d)) foi utilizada uma aproximação baseada no critério de definição da região de "iluminação" gerada pela antena.

$$Rr := 80 \cdot \pi^2 \cdot \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \cdot \Omega \qquad Rr = 7.651 \, \Omega$$

→ Eq. (62) Cap II apostila - Equação exata

Portanto a equação exata resulta no mesmo valor de resistência de radiação Rr obtido pela aproximação baseada no critério de definição da região de "iluminação" gerada pela antena.