

A Figura 1 abaixo mostra um amplificador de microondas implementado com um transistor bipolar na configuração emissor comum. A impedância “vista” (medida) à esquerda da interface A da Figura 1 (linha tracejada), no prolongamento do terminal “coletor” do transistor, é $Z_{ce} = 10 - j19 \Omega$ na frequência de operação $f_{op} = 15$ GHz. Nesta figura encontra-se detalhado o acoplador de impedâncias entre os terminais “coletor”-“emissor” do transistor e o *output port* do amplificador. O acoplador é constituído pela *microstrip line* de comprimento ℓ_{line} em paralelo com um *open stub* de comprimento ℓ_{stub} , conforme mostra a Figura 1. A saída do acoplador é soldada ao pino central do conector SMA no *output port*. O terminal “emissor” do transistor e o terminal *ground* dos conectores SMA são soldados à face inferior da placa de circuito impresso. A impedância de carga $Z_L = 50 + j10 \Omega$, externa ao amplificador, é conectada ao SMA do *output port*. As perdas ôhmicas e dielétricas são desprezíveis tanto na *microstrip line* como no *stub* na frequência de operação f_{op} .

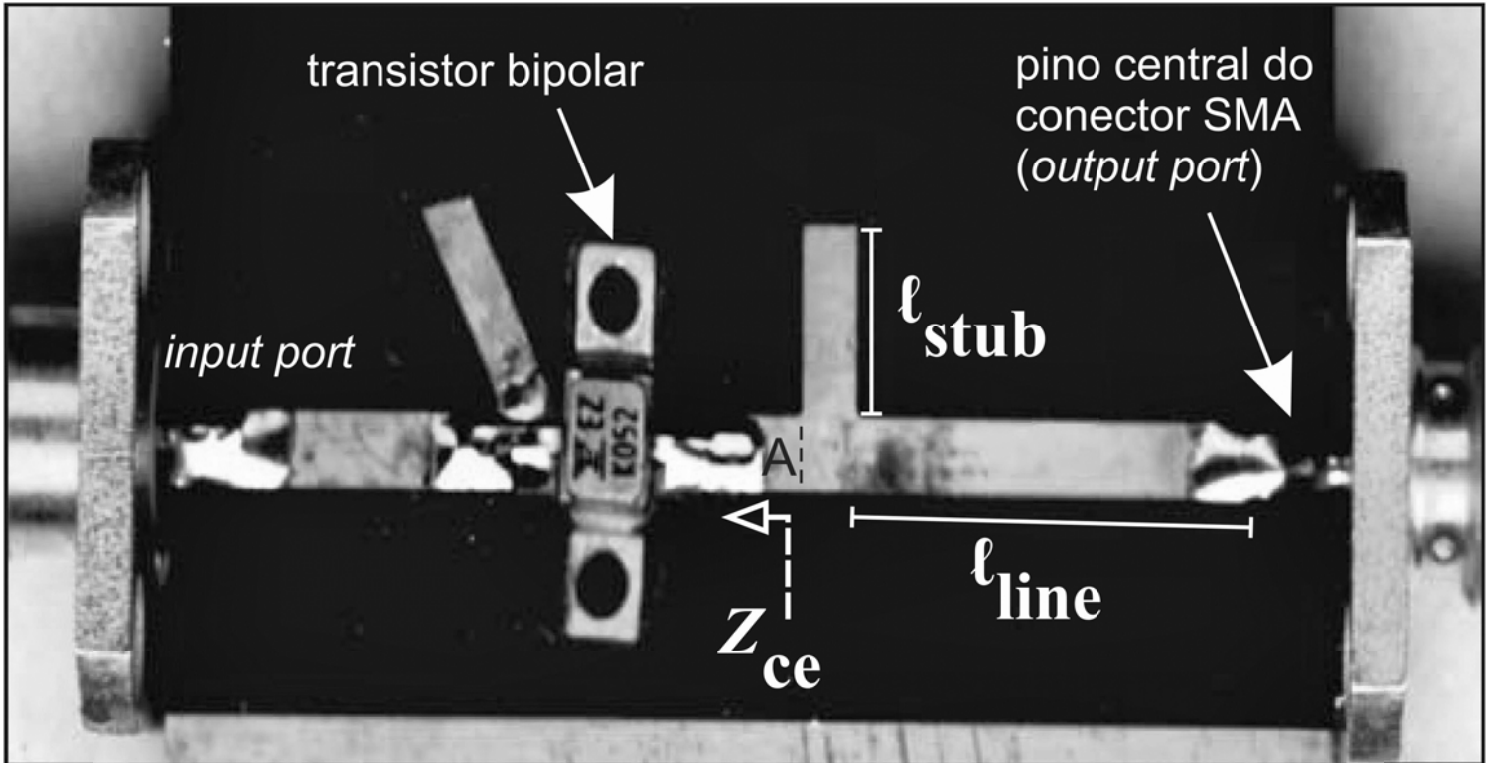


Figura 1: Amplificador de microondas com transistor bipolar e detalhe do acoplador de impedâncias no *output port*.

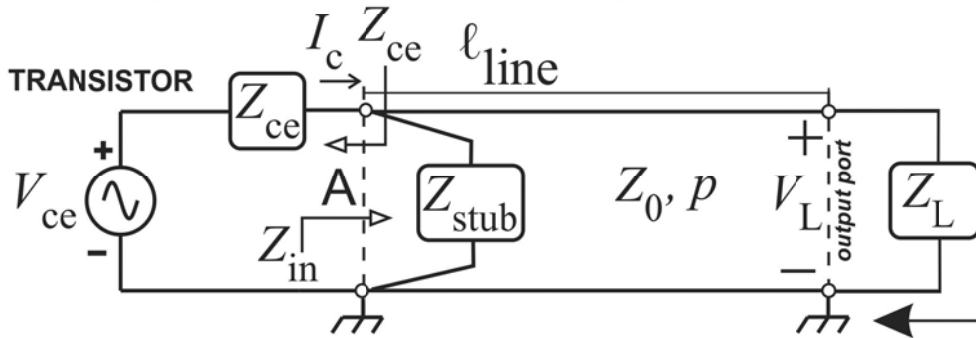


Figura 2: Circuito elétrico equivalente do acoplador no *output port* do amplificador mostrado na Figura 1.

ground soldado à face inferior da placa de circuito impresso

A Figura 2 mostra o circuito elétrico equivalente do acoplador. O gerador senoidal de impedância interna Z_{ce} e com amplitude instantânea máxima $V_{ce} = 2.0 V_{pk}$ e fase 30° a terminais abertos é o equivalente de Thévenin que representa o circuito de coletor do transistor na frequência de operação f_{op} . A interface A na Figura 2 (linha tracejada) corresponde à interface A na Figura 1. A impedância Z_{in} é a impedância “vista” à direita da interface A e que resulta do paralelo da impedância de entrada da *microstrip line* com a impedância Z_{stub} do *open shunt stub*.

Tanto a *microstrip line* como o *stub* apresentam fator de velocidade $p = 0.65$ e impedância característica Z_0 (a ser determinada).

Pede-se:

- (1) Determine ℓ_{line} e ℓ_{stub} objetivando maximizar a potência entregue à impedância de carga Z_L na frequência de operação f_{op} . Das duas soluções possíveis adote aquela que resulta no menor valor para ℓ_{stub} .

Para a condição operacional de máxima transferência de potência obtida em (1), pede-se:

- (2) Determine a amplitude instantânea máxima e a fase em graus da onda de tensão incidente V_o^+ , resultante da superposição das múltiplas ondas geradas por reflexão na interface A e por reflexão no *output port* e que trafegam entre estes dois pontos de reflexão.
- (3) Determine a amplitude instantânea máxima e a fase em graus da tensão V_L medida no *output port*.
- (4) Determine a potência entregue à impedância de carga Z_L .
- (5) Determine a amplitude instantânea máxima e a fase em graus da corrente I_c (ver Figura 2) drenada do circuito de coletor do transistor. Note que I_c é a corrente AC na frequência de operação f_{op} , não tendo relação direta com a corrente DC de polarização do transistor.
- (6) Determine a consistência do resultado obtido em (4) comparando a potência entregue à impedância de carga Z_L com a potência entregue pelo gerador V_{ce} à interface A da Figura 2 acima. Lembre que, conforme enunciado, as perdas ôhmicas e dielétricas são desprezíveis tanto na *microstrip line* como no *stub* na frequência de operação f_{op} , e, portanto, as duas potências devem resultar iguais.

Solução:

(1) A Figura 3 abaixo detalha o equivalente elétrico do acoplador de impedâncias entre os terminais “coletor”-“emissor” do transistor e o *output port* do amplificador. O acoplador é constituído pela *microstrip line* de comprimento $l_{Line} = d$ em paralelo com o *open stub* de comprimento $l_{Stub} = l$ (compare a Figura 3 abaixo com a Figura 2 do enunciado):

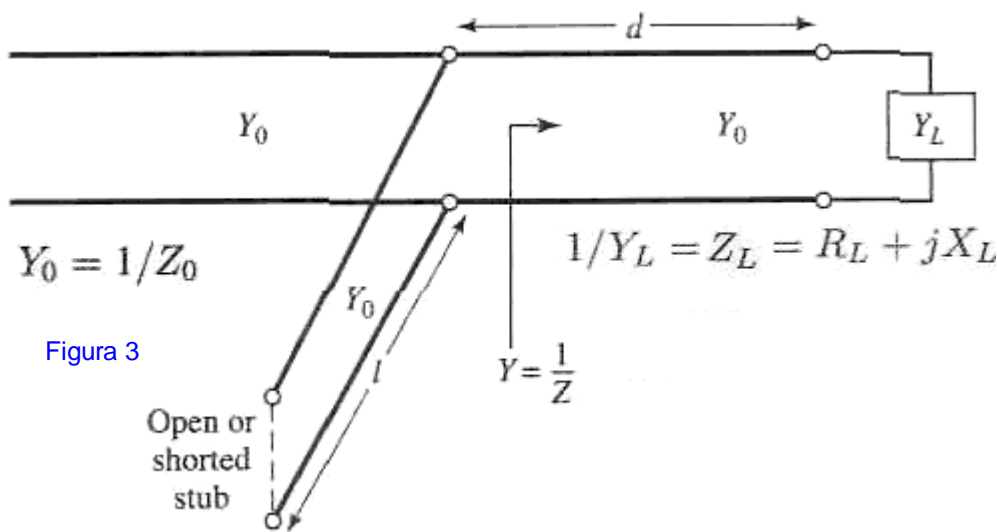


Figura 3

O equivalente elétrico da Figura 3 acima obedece ao seguinte equacionamento, conforme equações 5.7 a 5.11 do Cap III das notas de aula, abaixo reproduzidas:

$$1/Y_L = Z_L = R_L + jX_L \quad (\#1)$$

$$Y_0 = 1/Z_0 \quad (\#2)$$

$$Y = G + jB = \frac{1}{Z} \quad (\#3)$$

$$t = \tan \beta d \quad (\#4)$$

$$G = \frac{R_L(1 + t^2)}{R_L^2 + (X_L + Z_0 t)^2} \quad (\#5)$$

$$B = \frac{R_L^2 t - (Z_0 - X_L t)(X_L + Z_0 t)}{Z_0 [R_L^2 + (X_L + Z_0 t)^2]} \quad (\#6)$$

$$t = \frac{X_L \pm \sqrt{R_L [(Z_0 - R_L)^2 + X_L^2] / Z_0}}{R_L - Z_0} \quad \text{for } R_L \neq Z_0 \quad (\#7)$$

$$t = -X_L / 2Z_0 \quad \text{for } R_L = Z_0 \quad (\#8)$$

$$d/\lambda = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \tan^{-1} t & \text{for } t \geq 0 \\ \frac{1}{2\pi} (\pi + \tan^{-1} t) & \text{for } t < 0 \end{cases} \quad (\#9)$$

short circuited stub:

$$\frac{\ell_s}{\lambda} = \frac{-1}{2\pi} \tan^{-1} \left(\frac{Y_0}{B_s} \right) = \frac{1}{2\pi} \tan^{-1} \left(\frac{Y_0}{B} \right) \quad (\#10)$$

open circuited stub:

$$\frac{\ell_o}{\lambda} = \frac{1}{2\pi} \tan^{-1} \left(\frac{B_s}{Y_0} \right) = \frac{-1}{2\pi} \tan^{-1} \left(\frac{B}{Y_0} \right) \quad (\#11)$$

If length ℓ is negative, $\lambda/2$ can be added to give a positive result.

São dados no enunciado:

$$f := 15 \cdot \text{GHz} \quad \lambda := \frac{c}{f} \quad \lambda = 0.02 \text{ m} \quad Z_{ce} := (10 - j \cdot 19) \cdot \Omega \quad \rightarrow \quad Y_{ce} := \frac{1}{Z_{ce}} \quad \rightarrow \quad Y_{ce} = (0.022 + 0.041j) \frac{1}{\Omega}$$

$$p := 0.65 \quad \rightarrow \quad \lambda_g := p \cdot \lambda \quad \rightarrow \quad \lambda_g = 0.013 \text{ m} \quad V_{ce} := 2.0 \cdot e^{j \cdot 30 \cdot \text{deg}} \text{ V}$$

$$Z_{L_} := (50 + j \cdot 10) \cdot \Omega \quad R_{L_} := \text{Re}(Z_{L_}) \quad X_{L_} := \text{Im}(Z_{L_})$$

Comparando a Figura 3 acima com a Figura 2 do enunciado, nota-se que $\text{Re}(Y_{ce}) = \text{Re}\left(\frac{1}{Z_{ce}}\right)$ na Figura 2 é equivalente a

Y_0 na Figura 3 acima, isto é:

$$Y_{0_} := \text{Re}(Y_{ce}) \quad \rightarrow \quad Y_{0_} = 0.022 \frac{1}{\Omega}$$

onde Y_0 é denotada por $Y_{0_}$ na equação acima por conveniência de notação.

Note da Figura 3 acima que, uma vez obtido $Y_{o_}$, a impedância característica da *microstrip line* e do *open stub* é obtida através de:

$$Z_{o_} := \frac{1}{Y_{o_}} \rightarrow Z_{o_} = 46.1 \Omega$$

No entanto, devemos ter aqui o cuidado de considerar o fato de que $\text{Im}(Y_{ce}) = 0.041 \frac{1}{\Omega}$ é não-nula e deve ser levada em conta no cálculo da susceptância B_s do *open stub* necessária para zerar a susceptância total na interface A da Figura 2 do enunciado, isto é, $\text{Im}(Y_{ce} + Y_{stub} + Y) = 0$, onde $Y = G + jB = \frac{1}{Z}$ é a admitância de entrada da *microstrip line* conforme mostra a Figura 3 acima, sendo Z a impedância de entrada da *microstrip line*.

Note que, conforme solicitado no enunciado da questão (1), a condição $\text{Im}(Y_{ce} + Y_{stub} + Y) = 0$ para zerar a susceptância total na interface A da Figura 2 é a condição necessária e suficiente p/ maximizar a transferência de potência na interface A, e, portanto, maximizar a potência entregue à impedância de carga $Z_{L_}$. Especificamente, para atender a referida condição, temos que a susceptância B_s do *open stub* deve ser dada por $B_s = \text{Im}(Y_{stub}) = -\text{Im}(Y_{ce} + Y) = -\text{Im}(Y_{ce}) - B$, sendo B a parte imaginária da admitância de entrada da *microstrip line* $Y = G + jB = \frac{1}{Z}$ conforme mostra a Figura 3.

Desta maneira, a partir das equações 5.7 a 5.11 do Cap III das notas de aula, resumidas nas equações (#1) a (#11) acima, temos duas possíveis soluções:

1ª solução: $s := -1 \rightarrow s = \{+1, -1\}$ e controla os dois possíveis valores do sinal algébrico em (#7)

De (#7)& (#8) temos:
$$t := \text{if} \left[\text{RL}_- \neq Z_{o_}, \left[\frac{XL_- + s \cdot \sqrt{\frac{\text{RL}_- \cdot (Z_{o_} - \text{RL}_-)^2 + XL_-^2}{Z_{o_}}}}{\text{RL}_- - Z_{o_}}, \frac{-XL_-}{2 \cdot Z_{o_}} \right], t = -0.302 \right]$$

De (#9):
$$d := \text{if} \left[t < 0, \left(\frac{\lambda_g}{2 \cdot \pi} \right) (\pi + \text{atan}(t)), \left(\frac{\lambda_g}{2 \cdot \pi} \right) \text{atan}(t) \right] \quad d = 5.889 \cdot \text{mm} \rightarrow \text{Comprimento da microstrip line}$$

De (#6):
$$B := \frac{\text{RL}_-^2 \cdot t - (Z_{o_} - t \cdot \text{XL}_-) \cdot (\text{XL}_- + t \cdot Z_{o_})}{Z_{o_} \cdot [\text{RL}_-^2 + (\text{XL}_- + Z_{o_} \cdot t)^2]} \quad B = -4.85 \times 10^{-3} \frac{1}{\Omega}$$

Conforme discutido acima, a susceptância B_s do *open stub* é dada por

$B_s = \text{Im}(Y_{stub}) = -\text{Im}(Y_{ce} + Y) = -\text{Im}(Y_{ce}) - B$, isto é:

$$B_s := -(B + \text{Im}(Y_{ce})) \rightarrow B_s = -0.036 \frac{1}{\Omega}$$

De (#10):
$$l_s := \frac{-\lambda_g}{2 \cdot \pi} \cdot \text{atan} \left(\frac{Y_{o_}}{B_s} \right) \quad l_s := \text{if} \left(l_s < 0, l_s + \frac{\lambda_g}{2}, l_s \right) \quad l_s = 1.112 \cdot \text{mm} \rightarrow \text{Comprimento do short circuited stub}$$

(não solicitado no enunciado - determinado apenas p/ complementar a solução)

De (#11):
$$l_o := \frac{\lambda_g}{2 \cdot \pi} \cdot \text{atan} \left(\frac{B_s}{Y_{o_}} \right) \quad l_o := \text{if} \left(l_o < 0, l_o + \frac{\lambda_g}{2}, l_o \right) \quad l_o = 4.36 \cdot \text{mm} \rightarrow \text{Comprimento do open circuited stub}$$

Verificando se a impedância de entrada da *microstrip line* // *shunt stub* é igual a Z_{ce}^* :

$$\frac{1}{\frac{1}{Z_{L_-} + j \cdot Z_{o_} \cdot \tan \left(\frac{2 \cdot \pi}{\lambda_g} \cdot d \right)} + j \cdot B_s} - \overline{Z_{ce}} = 0 \Omega \quad \sim 0 \rightarrow \text{OK!}$$

2ª solução: $s := 1 \rightarrow s = \{+1, -1\}$ e controla os dois possíveis valores do sinal algébrico em (#7)

De (#7)& (#8) temos: $t := \text{if} \left[\text{RL}_- \neq \text{Zo}_-, \left[\frac{\text{XL}_- + s \cdot \sqrt{\frac{\text{RL}_- \cdot (\text{Zo}_- - \text{RL}_-)^2 + \text{XL}_-^2}{\text{Zo}_-}}}{\text{RL}_- - \text{Zo}_-} \right], \frac{-\text{XL}_-}{2 \cdot \text{Zo}_-} \right]$ $t = 5.43$

De (#9): $d := \text{if} \left[t < 0, \left(\frac{\lambda_g}{2 \cdot \pi} \right) (\pi + \text{atan}(t)), \left(\frac{\lambda_g}{2 \cdot \pi} \right) \text{atan}(t) \right]$ $d = 2.871 \cdot \text{mm} \rightarrow$ **Comprimento da microstrip line**

De (#6): $B := \frac{\text{RL}_-^2 \cdot t - (\text{Zo}_- - t \cdot \text{XL}_-) \cdot (\text{XL}_- + t \cdot \text{Zo}_-)}{\text{Zo}_- \cdot [\text{RL}_-^2 + (\text{XL}_- + \text{Zo}_- \cdot t)^2]}$ $B = 4.85 \times 10^{-3} \frac{1}{\Omega}$

Conforme discutido acima, a susceptância B_s do open stub é dada por

$B_s = \text{Im}(Y_{\text{stub}}) = -\text{Im}(Y_{\text{ce}} + Y) = -\text{Im}(Y_{\text{ce}}) - B$, isto é:

$B_{s_{\text{mm}}} := -(B + \text{Im}(Y_{\text{ce}})) \rightarrow B_s = -0.046 \frac{1}{\Omega}$

De (#10): $l_s := \frac{-\lambda_g}{2 \cdot \pi} \cdot \text{atan} \left(\frac{Y_{o-}}{B_s} \right)$ $l_s := \text{if} \left(l_s < 0, l_s + \frac{\lambda_g}{2}, l_s \right)$ $l_s = 0.91 \cdot \text{mm} \rightarrow$ **Comprimento do short circuited stub**
(não solicitado no enunciado - determinado apenas p/ complementar a solução)

De (#11): $l_o := \frac{\lambda_g}{2 \cdot \pi} \cdot \text{atan} \left(\frac{B_s}{Y_{o-}} \right)$ $l_o := \text{if} \left(l_o < 0, l_o + \frac{\lambda_g}{2}, l_o \right)$ $l_o = 4.158 \cdot \text{mm} \rightarrow$ **Comprimento do open circuited stub**


Verificando se a impedância de entrada da microstrip line // shunt stub é igual a Z_{ce}^* :

$$\frac{1}{\frac{1}{Z_{L-} + j \cdot Z_{o-} \cdot \tan \left(\frac{2 \cdot \pi}{\lambda_g} \cdot d \right)} + j \cdot B_s} - \overline{Z_{\text{ce}}} = 0 \Omega \quad \sim 0 \rightarrow \text{OK!}$$

$$Z_{o-} \cdot \frac{1}{Z_{o-} + j \cdot Z_{L-} \cdot \tan \left(\frac{2 \cdot \pi}{\lambda_g} \cdot d \right)}$$

A solução que resulta no menor comprimento do stub no acoplador constituído pela microstrip line de comprimento

$l_{\text{Line}} = d$ em paralelo com o open stub de comprimento $l_{\text{Stub}} = l_o$ e de susceptância $B_{\text{Stub}} = B_s$ é, portanto, dada por:

$l_{\text{Line}} = 2.871 \cdot \text{mm} \quad l_{\text{Stub}} = 4.158 \cdot \text{mm} \quad B_{\text{Stub}} = -0.046 \frac{1}{\Omega}$ 

(2) Para o presente caso a equação (A4) do slide 35 do Cap II das notas de aula não é aplicável para a determinação de V_{oP} , equação abaixo reproduzida por conveniência de análise:

$$V_{oP} = V_g \cdot \left(\frac{Z_{o-}}{Z_{o-} + Z_g} \right) \cdot \frac{e^{-j \cdot \beta \cdot l_{Line}}}{1 - \Gamma_L \cdot \Gamma_g \cdot e^{-j \cdot 2(\beta \cdot l_{Line})}}$$

Isto ocorre porque a equação (A4) do slide 35 do Cap II das notas de aula foi deduzida para uma linha de transmissão sem o *shunt stub* na interface entre os terminais do equivalente de Thévenin do gerador e os terminais de entrada da linha de transmissão, o que afeta a impedância "vista" pelo gerador nos terminais da linha. É necessário, portanto, levar em consideração a existência do *shunt stub* conectado aos terminais de entrada da *microstrip line* para que se possa determinar V_{oP} corretamente. Para tanto, primeiramente precisamos determinar a impedância Z_{in} "vista" à direita da interface A na Figura 2 do enunciado. Note que, sob a condição de máxima transferência de potência da questão (1), Z_{in} é o conjugado de Z_{ce} , ou, equivalentemente, o paralelo da impedância de entrada Z da *microstrip line* (vide Figura 3 acima) com a impedância do *open shunt stub*:

$$Z_{in} := \frac{1}{\frac{1}{Z_{L-} + j \cdot Z_{o-} \cdot \tan\left(\frac{2 \cdot \pi}{\lambda_g} \cdot l_{Line}\right)} + j \cdot B_{Stub}} \rightarrow Z_{in} = (10 + 19i) \Omega$$

$$\overline{Z_{ce}} = (10 + 19i) \Omega$$

Para que se possa determinar V_{oP} , denotada a seguir por V_{oP} por conveniência de notação, é necessário igualar a tensão resultante do divisor de tensão $\frac{V_{ce} \cdot Z_{in}}{Z_{ce} + Z_{in}}$ (ver Figura 2) com a tensão na entrada da *microstrip line* $V(-l_{Line})$:

$$\frac{V_{ce} \cdot Z_{in}}{Z_{ce} + Z_{in}} = V_{oP} \cdot \left[e^{-j \cdot \beta \cdot (-l_{Line})} + \Gamma_L \cdot e^{j \cdot \beta \cdot (-l_{Line})} \right]$$

Note na equação acima que $\frac{V_{ce} \cdot Z_{in}}{Z_{ce} + Z_{in}}$ leva em consideração a existência do *shunt stub* conectado aos terminais de

entrada da *microstrip line*. Isolando V_{oP} na equação acima e definindo a constante de propagação $\beta := \frac{2 \cdot \pi}{\lambda_g} \rightarrow$

$$\beta = 483.657 \cdot \frac{\text{rad}}{\text{m}} \text{ e o coeficiente de reflexão na carga da } microstrip \text{ line (no output port) } \Gamma_L := \frac{Z_{L-} - Z_{o-}}{Z_{L-} + Z_{o-}} \rightarrow$$

$\Gamma_L = 0.051 + 0.099i$ temos que:

$$V_{oP} := \frac{V_{ce} \cdot Z_{in}}{\left(e^{\beta \cdot l_{Line} \cdot i} + \Gamma_L \cdot e^{-\beta \cdot l_{Line} \cdot i} \right) \cdot (Z_{ce} + Z_{in})} \rightarrow |V_{oP}| = 2.16 \text{ V} \quad \arg(V_{oP}) = 19.054 \cdot \text{deg}$$

(3) Módulo e fase da tensão V_L no *output port* $\rightarrow V_L = V(z=0)$:

$$V(z) := V_{oP} \cdot \left(e^{-j \cdot \beta \cdot z} + \Gamma_L \cdot e^{j \cdot \beta \cdot z} \right) \quad |V(0)| = 2.28 \cdot \text{volt(pk)} \quad \arg(V(0)) = 24.423 \cdot \text{deg} \quad \leftarrow$$

(4) Potência entregue à impedância de carga Z_L no *output port*:

$$P_L := \frac{(|V_{oP}|)^2}{2 \cdot Z_{o-}} \cdot [1 - (|\Gamma_L|)^2] \quad P_L = 50 \cdot \text{mW} \quad \leftarrow$$

(5) A amplitude instantânea máxima e a fase em graus da corrente I_c drenada do circuito de coletor do transistor (ver Figura 2) é dada por:

$$I_c := \frac{V_{ce}}{Z_{ce} + Z_{in}} \quad |I_c| = 100 \cdot \text{mA(pk)} \quad \arg(I_c) = 30 \cdot \text{deg} \quad \leftarrow$$

(6) A potência entregue pelo gerador V_{ce} à interface A da Figura 2 é dada por:

$$\left(\frac{|I_c|}{\sqrt{2}} \right)^2 \cdot \text{Re}(Z_{in}) = 50 \cdot \text{mW}$$

Que é consistente com a potência entregue à impedância de carga Z_L no *output port* obtida em (4):

$$P_L = 50 \cdot \text{mW}$$

E que também é consistente com a potência entregue à impedância de carga Z_L no *output port* pela tensão $V_L = V(z=0)$:

$$\left(\frac{\frac{V(0)}{\sqrt{2}}}{Z_L} \right)^2 \cdot \text{Re}(Z_L) = 50 \cdot \text{mW}$$