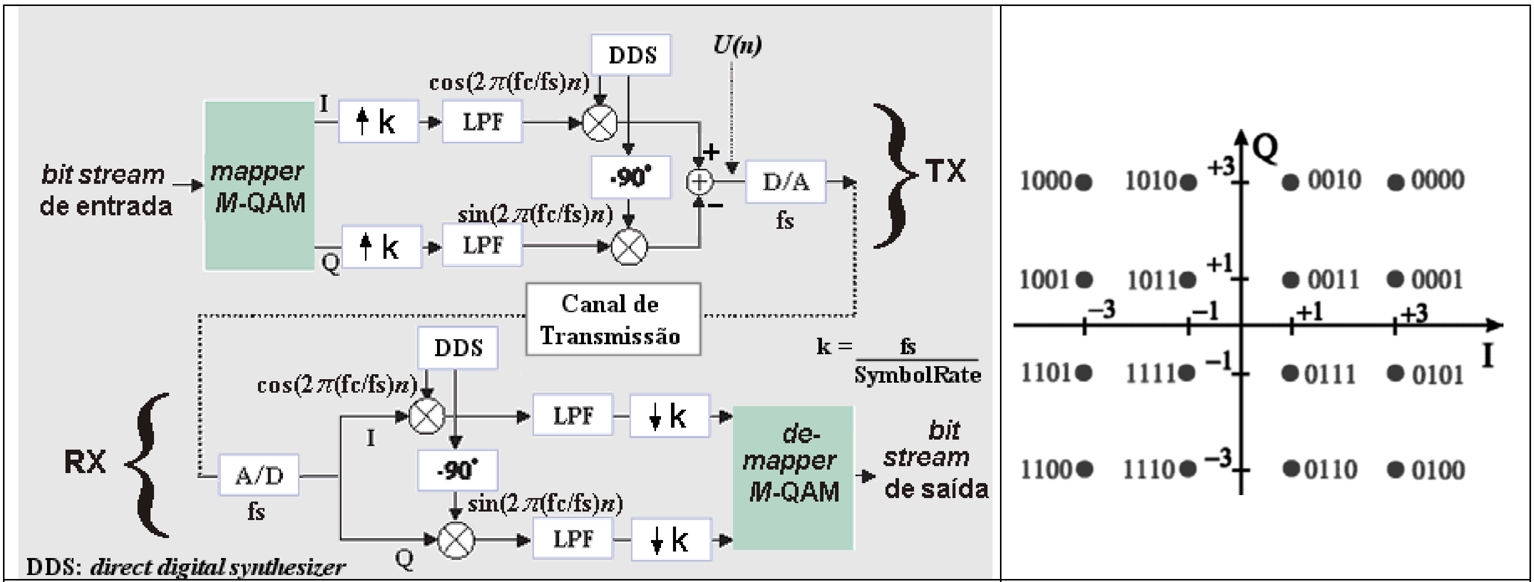
PUCRS – Escola Politécnica – Engenharia Elétrica

Tópicos Avançados em Comunicações – T450 – 20/08/2019

O diagrama abaixo mostra a etapa de modulação de um sistema de comunicação digital 16-QAM:



(a) Diagrama de blocos de um sistema *M*-QAM, *M*=16. (b) Constelação gerada no *mapper M*-QAM.

Figura 1: Etapa de modulação de um sistema de comunicação digital 16-QAM.

Sabe-se que a freqüência de amostragem do D/A é fs=128 MHz e que a freqüência da portadora é fc. Cada símbolo IQ tem uma duração $T = 1/$*symbol rate*, onde *symbol rate* = 16 MHz para este sistema. Os blocos "LPF" na Figura 1(a) representam o *shaping filter* no TX e o *matched filter* no RX, e são filtros tipo *root raised cosine* com resposta ao impulso $g_T(n)$ dada nas Figuras 2 e 3.

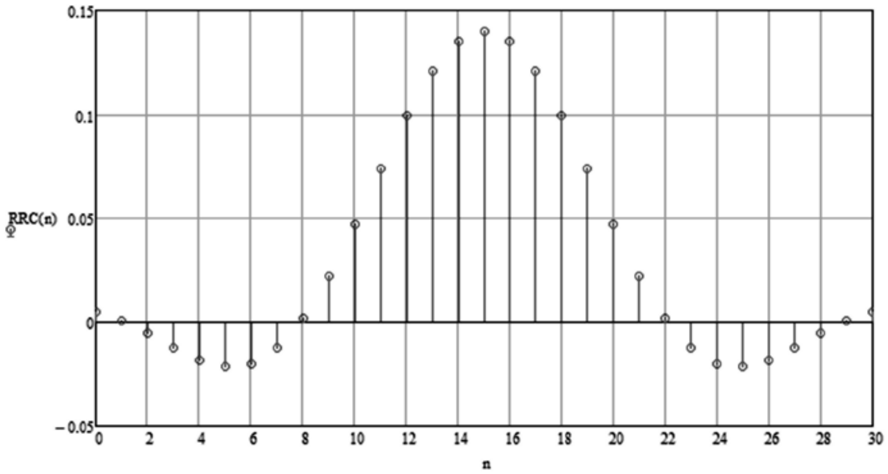


Figura 2: Resposta ao impulso $g_T(n) = \mathrm{RRC(n)}$ dos blocos LPF (*low pass filter*) na Figura 1(a).

VRRC =

n	VRRC(n)
	0
0	$4.497591\cdot10^{-3}$
1	$3.499097\cdot10^{-4}$
2	$-5.650389\cdot10^{-3}$
3	-0.01242
4	-0.018332
5	-0.02146
6	-0.019942
7	-0.012377
8	$1.813343\cdot10^{-3}$
9	0.022149
10	0.047036
11	0.073927
12	0.099672
13	0.121009
14	0.135103
15	...

VRRC =

n	VRRC(n)
	0
15	$140.028175\cdot10^{-3}$
16	$135.102873\cdot10^{-3}$
17	$121.008712\cdot10^{-3}$
18	$99.671511\cdot10^{-3}$
19	$73.926671\cdot10^{-3}$
20	$47.035786\cdot10^{-3}$
21	$22.148678\cdot10^{-3}$
22	$1.813343\cdot10^{-3}$
23	$-12.377001\cdot10^{-3}$
24	$-19.941796\cdot10^{-3}$
25	$-21.459842\cdot10^{-3}$
26	$-18.331798\cdot10^{-3}$
27	$-12.420442\cdot10^{-3}$
28	$-5.650389\cdot10^{-3}$
29	$349.909719\cdot10^{-6}$
30	$4.497591\cdot10^{-3}$
31	...

Figura 3: Valores numéricos da resposta ao impulso $g_T(n)$ do *shaping filter* (TX) e do *matched filter* na Figura 1(a). Os elementos do vetor VRRC são os valores numéricos de $g_T(n) = \mathrm{RRC(n)}$ na Figura 2.

Dadas estas condições operacionais, pede-se:

a) Determine a banda passante mínima necessária no bloco "Canal de Transmissão" da Figura 1(a) p/ que o mesmo não distorça o espectro dos pulsos *root raised cosine* que constituem o *stream* de símbolos com freqüência central fc gerados na saída $U(n)$ do TX.

b) Suponha que o sistema em questão seja um sistema de *broadcast* via cabo coaxial (um TX transmite para vários usuários, cada usuário possui um RX). Ainda, suponha também que a SNR no Canal de Transmissão (o cabo coaxial) seja suficientemente alta de modo que, em não havendo ruído no canal e para efeito de reduzir o custo do RX de cada usuário, o filtro *root raised cosine* do *matched filter* em cada RX é movido para o *shaping filter* no TX. O *shaping filter* no TX, nesta situação hipotética, passa a ser um filtro *raised cosine*. Determine, para esta situação, a banda passante mínima necessária no bloco "Canal de Transmissão" da Figura 1(a) p/ que o mesmo não distorça o espectro dos pulsos *raised cosine* que constituem o *stream* de símbolos com freqüência central fc gerados na saída $U(n)$ do TX.

c) Qual a taxa em Mbps do *bitstream* na saída do de-*mapper* do RX deste sistema?

Solução:

Do enunciado, um sistema TX-RX digital 16-QAM utiliza um filtro *root raised cosine* (RRC) como *shaping filter* no TX e como *matched filter* no RX conforme especificado abaixo:

$N := 31$ $\alpha := 0.44$ → N é o número de taps do filtro RRC e α é o *roll-off* do filtro.

$SymbolRate := 16 \cdot MHz$ → T= [Duração do símbolo IQ] =1/SymbolRate [μs]

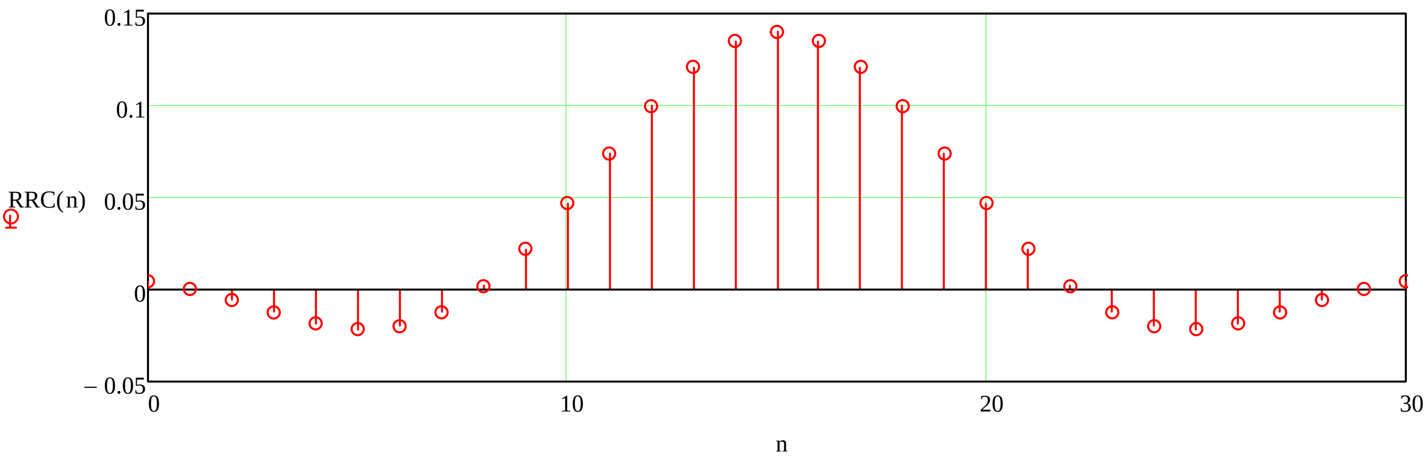
$Ks := 8$ → Fator de superamostragem (= k no enunciado = **<u>número de amostras por intervalo de duração T de símbolo IQ</u>**).

$Fs := Ks \cdot SymbolRate$ $Fs = 128 \cdot MHz$ → Freqüência de amostragem do D/A no TX e/ou A/D no RX.

A expressão analítica da resposta ao impulso de um filtro RRC discreto no tempo é dada pela equação (1):

$$RRC(n) := \frac{4\cdot\alpha}{\pi\cdot Ks}\cdot\left[\frac{\cos\left[\frac{n-\frac{N-1}{2}}{Ks}\cdot\pi\cdot(1+\alpha)\right]+\frac{\pi\cdot(1-\alpha)}{4\cdot\alpha}\cdot\mathrm{sinc}\left[\frac{n-\frac{N-1}{2}}{Ks}\cdot\pi\cdot(1-\alpha)\right]}{1-\left(\frac{n-\frac{N-1}{2}}{Ks}\cdot4\cdot\alpha\right)^2}\right] \qquad n := 0,1..N-1 \qquad \textbf{(1)}$$

O gráfico a seguir plota um pulso *root raised cosine* correspondente à resposta ao impulso do filtro RRC especificado acima. Note que, em um sistema TX-RX digital, a amplitude do pulso RRC é proporcional a amplitude do símbolo I (e/ou Q) que ele representa.



Registrando em uma tabela os valores numéricos do grafico de RRC(n) acima, obtemos os valores tabulados VRRC(n) mostrados abaixo (o quais já foram dados no enunciado):

n VRRC(n)

VRRC =

	0
0	$4.497591 \cdot 10^{-3}$
1	$3.499097 \cdot 10^{-4}$
2	$-5.650389 \cdot 10^{-3}$
3	-0.01242
4	-0.018332
5	-0.02146
6	-0.019942
7	-0.012377
8	$1.813343 \cdot 10^{-3}$
9	0.022149
10	0.047036
11	0.073927
12	0.099672
13	0.121009
14	0.135103
15	...

n VRRC(n)

VRRC =

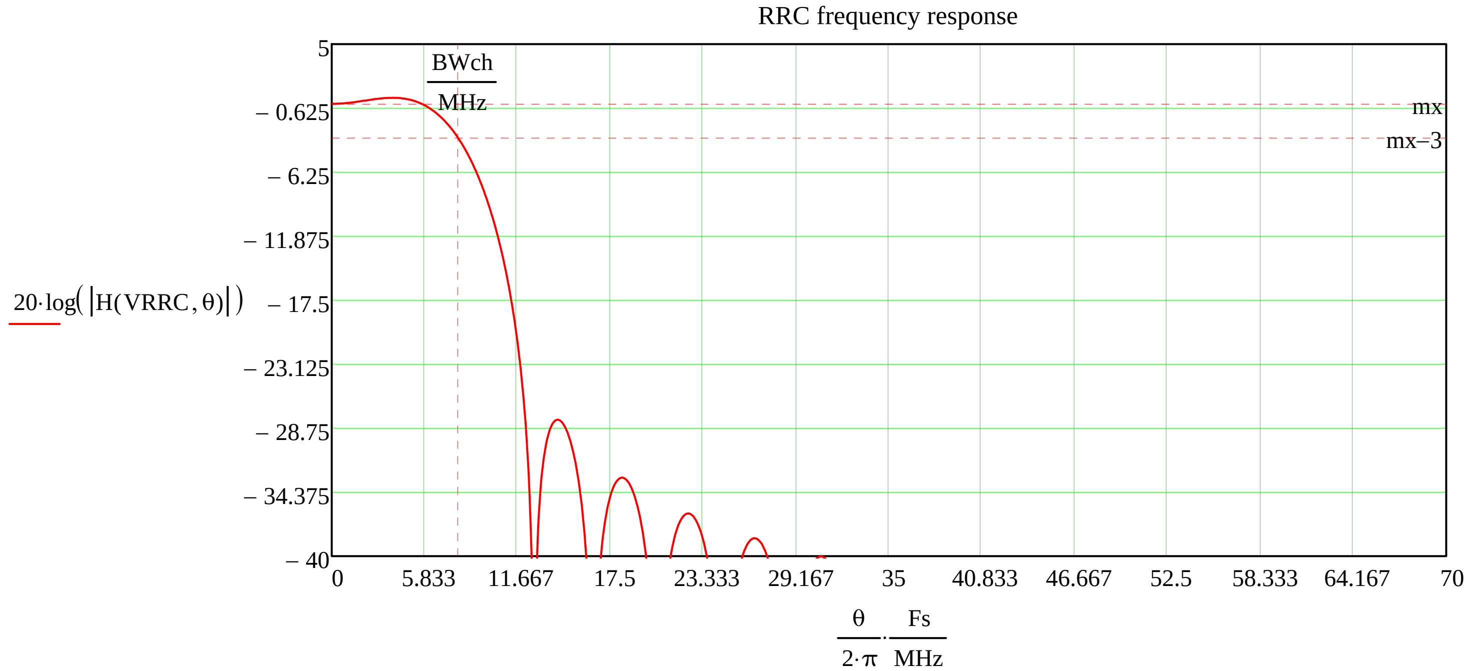
	0
15	$140.028175 \cdot 10^{-3}$
16	$135.102873 \cdot 10^{-3}$
17	$121.008712 \cdot 10^{-3}$
18	$99.671511 \cdot 10^{-3}$
19	$73.926671 \cdot 10^{-3}$
20	$47.035786 \cdot 10^{-3}$
21	$22.148678 \cdot 10^{-3}$
22	$1.813343 \cdot 10^{-3}$
23	$-12.377001 \cdot 10^{-3}$
24	$-19.941796 \cdot 10^{-3}$
25	$-21.459842 \cdot 10^{-3}$
26	$-18.331798 \cdot 10^{-3}$
27	$-12.420442 \cdot 10^{-3}$
28	$-5.650389 \cdot 10^{-3}$
29	$349.909719 \cdot 10^{-6}$
30	$4.497591 \cdot 10^{-3}$
31	...

a) A banda passante mínima necessária no canal de transmissão p/ que o mesmo não altere o espectro dos pulsos *root raised cosine* que constituem o *stream* de símbolos gerados na saída do TX deste sistema 16-QAM é determinada a partir da curva de resposta em freqüência $H(e^{j\theta})$ do *shaping filter* RRC no TX, sendo $0<\theta<\pi$ a faixa de variação permissível da freqüência digital θ (Nyquist - já visto na disciplina de DSP). P/ obtermos o $H(e^{j\theta})$ do filtro RRC é necessário aplicar a Transformada Z à resposta ao impulso do filtro RRC e fazer $z=e^{j\theta}$.

A Transformada Z para $z=e^{j\theta}$ de uma sequencia discreta C com N amostras é dada pela equação (2):

$$H(C,\theta) = \sum_{n=0}^{N-1}\left[C_n\cdot\left(e^{j\cdot\theta}\right)^{-n}\right] \qquad \theta = \left(0, \frac{\pi}{1000} .. \pi\right) \qquad \textbf{(2)}$$

Aplicando a equação (2) aos valores tabulados VRRC(n) acima obtemos a curva de resposta em freqüência $H(e^{j\theta})$ do *shaping filter* RRC no TX:



$BWch = 7.94\cdot MHz$ é a BW (**em *baseband***) mínima do canal de transmissão necessária p/ transmitir o pulso RRC, valor obtido por inspeção visual do ponto de -3dB no gráfico acima. Como a modulação é QAM, o espectro do sinal *U(n)* após o DDS estará centrado em fc e apresentará duas bandas laterais não idênticas. Assim, a BW mínima p/ transportar sem distorção o sinal ***passband*** *U(n)* no canal é
$2BWch = 15.88\cdot MHz$

b) Seja um sistema 16-QAM que usa um único filtro *raised cosine* como *shaping filter* no TX ao invés dos usuais dois filtros *root raised cosine* (um RRC como *shaping filter* no TX e outro RRC como *matched filter* no RX), conforme enunciado. Neste caso particular, a banda passante mínima necessária no canal de transmissão para que o mesmo não altere o espectro dos pulsos ***raised cosine*** que constituem o *stream* de símbolos gerados na saída do TX deste sistema 16-QAM é também determinada como em a) a partir da curva de resposta em freqüência $H(e^{j\theta})$ do *shaping filter* no TX.

Para obtermos o $H(e^{j\theta})$ deste filtro *raised cosine* é necessário aplicar a equação (2) à resposta ao impulso do filtro. Mas a resposta ao impulso de um filtro *raised cosine* é equivalente à resposta ao impulso combinada de dois filtros *root raised cosine* idênticos em série. A resposta ao impulso combinada de dois filtros (já visto na disciplina de DSP) é a convolução de suas respostas ao impulso individuais. Se x(n) e y(n) são respectivamente as respostas ao impulso dos dois filtros então a resposta combinada dos mesmos é dada pela convolução **z(n)=x(n)∗y(n)**, numéricamente expressa por:

$$z(n) = \left[\sum_{m=m1}^{m2}\left(x(m)\cdot y(n-m)\right)\right] \qquad \textbf{(3)}$$

onde m1 e m2 são tais que o produto de todas as amostras não nulas das seqüências x(n) e y(n) sejam contempladas no somatório.

O pseudocódigo genérico para a implementação numérica da convolução **z(n)=Conv(x,y)=x(n)∗y(n)** definida por (3) é conforme segue:

```
Conv(X, Y) := | Nx ← length(X) − 1
              | Ny ← length(Y) − 1
              | for  n ∈ 0 .. (Nx + Ny)
              |   | Z_n ← 0.0
              |   | if  Nx ≥ Ny
              |   |   | Z_n ← Z_n + Σ_{m=0}^{n} (X_m Y_{n−m})  if  n ≤ Ny
              |   |   | Z_n ← Z_n + Σ_{m=n−Ny}^{n} (X_m Y_{n−m})  if  (n > Ny)·(n ≤ Nx)
              |   |   | Z_n ← Z_n + Σ_{m=n−Ny}^{Nx} (X_m Y_{n−m})  if  (n > Nx)·[n ≤ (Nx + Ny)]
              |   | otherwise
              |   |   | Z_n ← Z_n + Σ_{m=0}^{n} (X_m Y_{n−m})  if  n ≤ Nx
              |   |   | Z_n ← Z_n + Σ_{m=0}^{Nx} (X_m Y_{n−m})  if  (n > Nx)·(n ≤ Ny)
              |   |   | Z_n ← Z_n + Σ_{m=n−Ny}^{Nx} (X_m Y_{n−m})  if  (n > Ny)·[n ≤ (Nx + Ny)]
              | return  Z
```

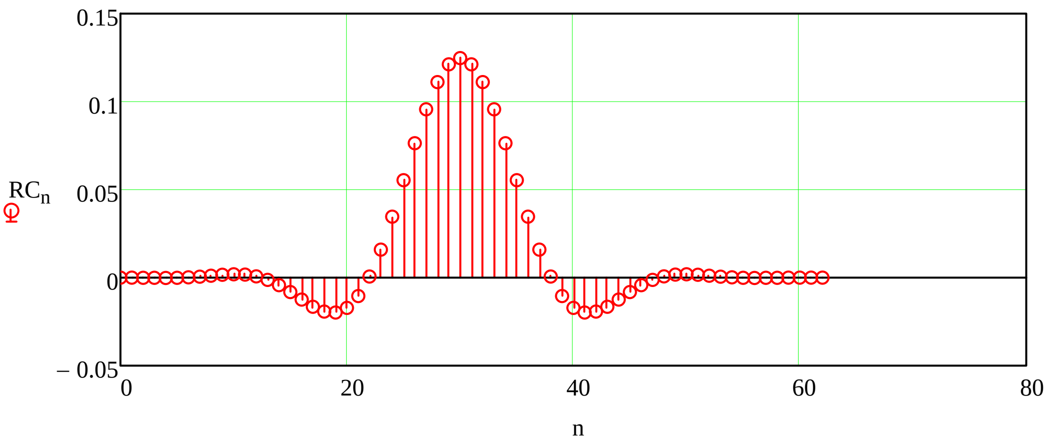
sendo que o operador length(▪) retorna o número de amostras da seqüência (▪) que é o argumento do operador .

Portanto, a resposta ao impulso RC(n) de um filtro *raised cosine* é a convolução das respostas ao impulso RRC(n) de dois filtros *root raised cosine.* A partir da equação (3) e do respectivo pseudocódigo acima RC(n) é obtido através de:

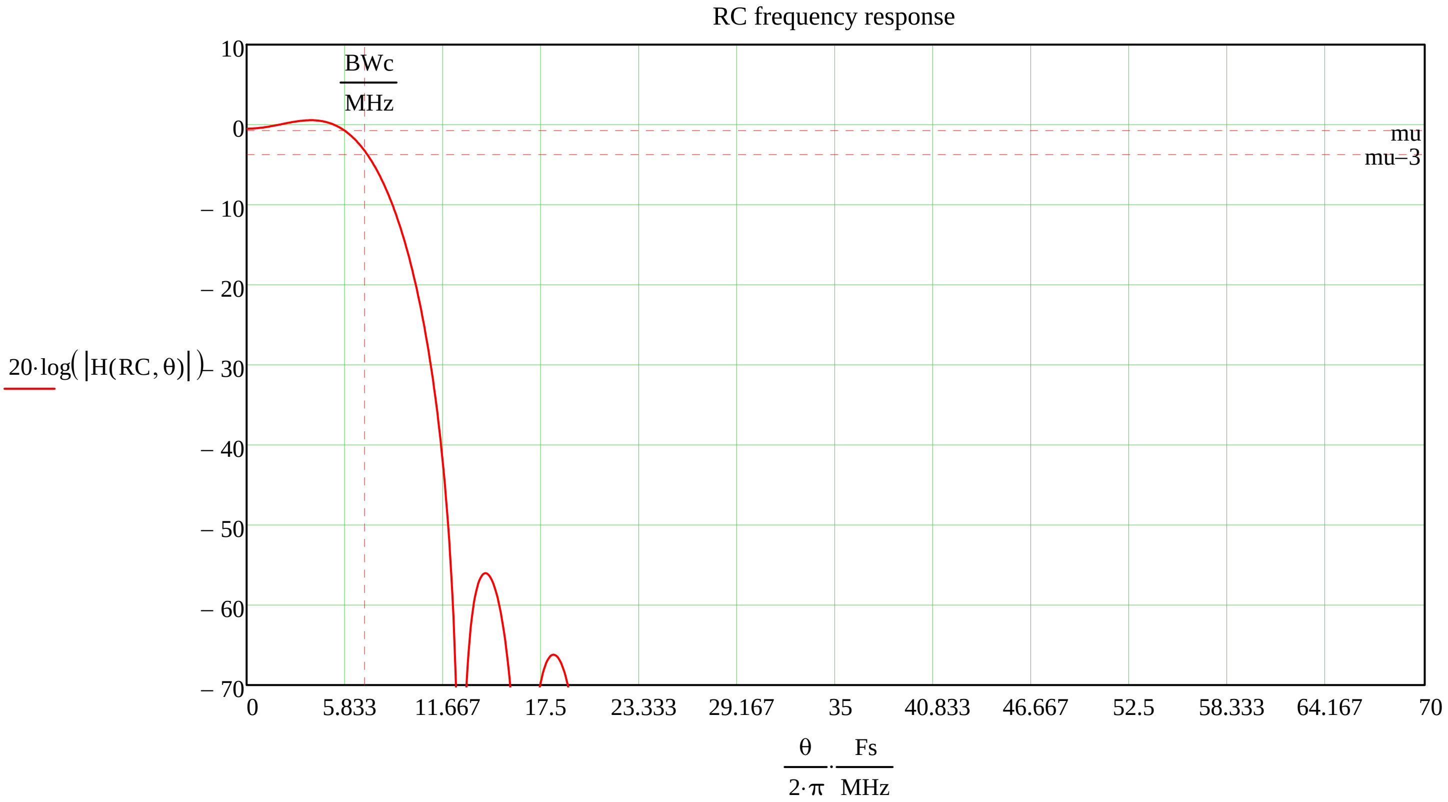
$RC := \mathrm{Conv}(VRRC, VRRC)$

Plotando o gráfico da resposta ao impulso RC(n) de um filtro *raised cosine* resultante da equação (3) acima, temos:

$n := 0, 1 .. \mathrm{length}(RC) - 1$



Para obtermos o $H(e^{j\theta})$ deste filtro *raised cosine* é necessário aplicar a equação (2) à resposta ao impulso do RC(n) filtro, o que resulta em:



$BWc = 7.09 \cdot MHz$ é a BW (**em *baseband***) mínima do canal de transmissão necessária p/ transmitir o pulso RC, valor obtido por inspeção visual do ponto de -3dB no gráfico acima. Como a modulação é QAM, o espectro do sinal *U(n)* após o DDS estará centrado em fc e apresentará duas bandas laterais não idênticas. Assim, a BW mínima p/ transportar sem distorção o sinal ***passband*** *U(n)* no canal é $2BWc = 14.18 \cdot MHz$

Nota: Para um filtro *raised cosine* analógico **(ou digital com pelo menos 12 cruzamentos por zero na sinc de sua resposta ao impulso)** a literatura indica a seguinte equação para o cálculo da BW mínima do canal de transmissão necessária para transmitir o pulso *raised cosine:*

$$BW := \frac{SymbolRate \cdot (1 + \alpha)}{2} \qquad BW = 11.52 \cdot MHz$$

c) Do enunciado, o sistema é M-QAM com $M = 16$ e $SymbolRate = 16 \cdot MHz$

Daí, a taxa do *bitstream* é:

$$NumBitsPorSimbolo := \frac{\ln(M)}{\ln(2)} \qquad NumBitsPorSimbolo = 4$$

$$Taxa := SymbolRate \cdot NumBitsPorSimbolo \qquad Taxa = 64 \cdot MHz$$ [Mbits/s]