

O diagrama abaixo mostra o demodulador de um receptor digital para um link de telemetria que utiliza modulação FSK binária:

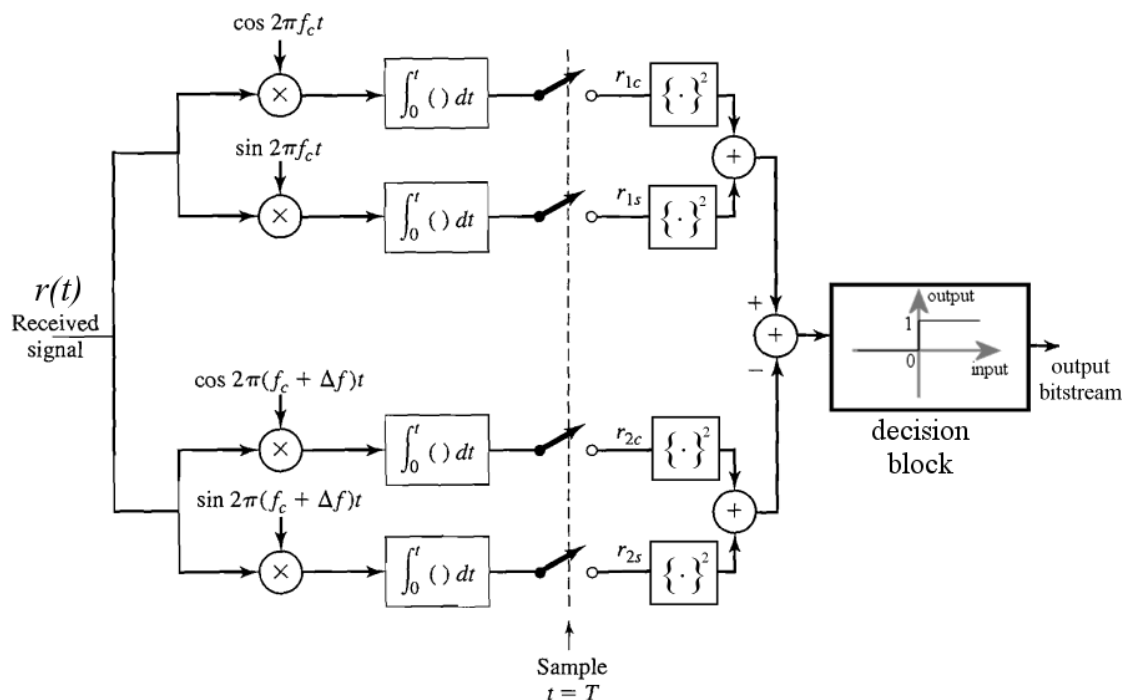


Figura 1: Etapa de demodulação de um RX FSK binário. T é o intervalo de símbolo do sistema. O operador $\{\cdot\}^2$ retorna o quadrado de seu argumento. Note que TX e RX operam de modo assíncrono, isto é, não há qualquer mecanismo no RX que identifique o início de um símbolo ou que garanta que o oscilador local do RX esteja exatamente na mesma frequência do oscilador local do TX.

O sinal recebido na entrada do demodulador é da forma $r(t) = A \cos(2\pi f_r t + \phi)$, onde $f_r \in \{f_c, f_c + \Delta f\}$ assume respectivamente cada um dos dois valores conforme o TX transmita o bit “1” ou o bit “0”. $f_c = 433\text{MHz}$ é a frequência da portadora e a taxa no *output bitstream* é 4800 bps. O ângulo ϕ representa a fase com que a frente da onda eletromagnética chega ao RX, após ter percorrido a distância $l = 1.7\text{ Km}$ entre os pontos nos quais estão localizados o TX e o RX.

- Determine Δf de forma a maximizar a capacidade do *decision block* discriminar entre o bit “1” e o bit “0”, mas simultaneamente de forma a minimizar a banda passante ocupada no canal de transmissão.
- Determine a que velocidade v o RX deveria estar se movendo em relação ao TX para que o efeito *Doppler* induza o demodulador a um erro de decisão (Nota: $f_{\text{doppler}} = vf/c$).
- Determine o ângulo ϕ em $r(t) = A \cos(2\pi f_r t + \phi)$, assumindo que o TX transmita o sinal $u(t) = A_{\text{TX}} \cos(2\pi f_c t)$. Considere $c = 2.99792458 \times 10^8$ m/s a velocidade de propagação da onda portadora (= velocidade de propagação da onda eletromagnética que transporta a informação do TX ao RX).
- Qual o efeito do ângulo ϕ no processo de demodulação mostrado na Figura 1 em função da distância l entre TX e RX. Justifique.
- Sabe-se que a BER (*bit error rate*) no *output bitstream* é 3.2×10^{-4} para uma SNR de 14 dB no canal de transmissão. Qual a SNR no canal de transmissão que resultaria na mesma BER quando o RX está se movendo a 2800 Km/h em relação ao TX?

Solução:

É dado no enunciado:

$$f_c := 433\text{-MHz}$$

SymbolRate := 4800 Hz → Como o FSK é binário (1bit/símbolo), o *bitrate* do *bitstream* na saída do demodulador é de mesmo valor do SymbolRate.

$$T := \frac{1}{\text{SymbolRate}} \quad T = 0.208\text{ms} \rightarrow \text{intervalo de duração de um símbolo}$$

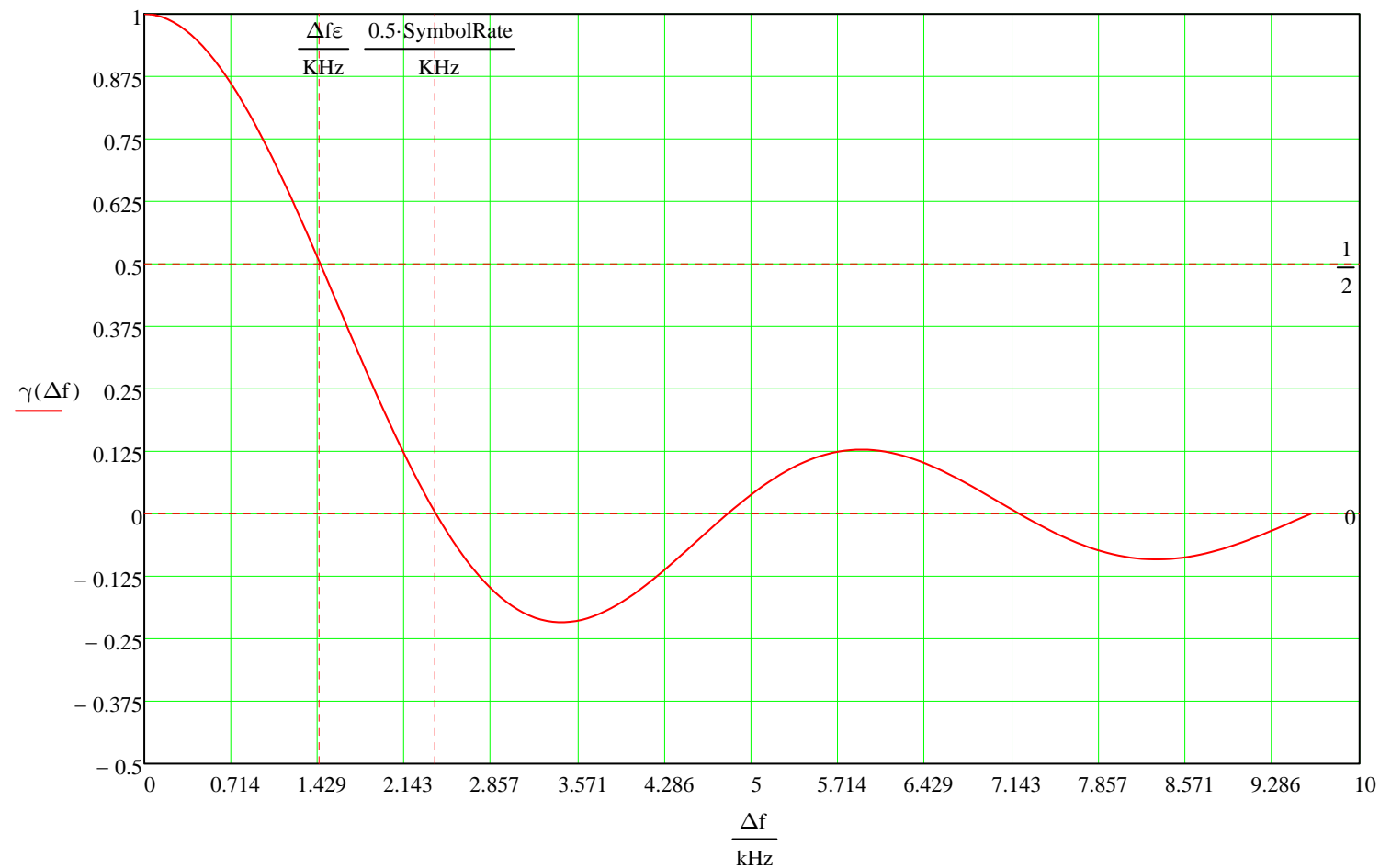
$$l := 1.7\text{-km} \rightarrow \text{distância entre TX e RX}$$

a) Da equação 7.4.10 do Slide 78 "Modulação FSK - Δf mínimo" - Vol 1 da apostila - o grau de "similaridade" entre 2 símbolos FSK é dada pela correlação entre eles:

$m := 1$ $n := 0$ → define a condição p/ FSK binário na equação 7.4.10 abaixo

$$\gamma(\Delta f) := \frac{\sin[2\pi(m-n)\cdot\Delta f\cdot T]}{2\pi(m-n)\cdot\Delta f\cdot T} \quad (\text{equação 7.4.10})$$

O gráfico resultante da equação 7.4.10 é:



→ Portanto, analisando o gráfico acima, o menor valor de Δf para o qual $\gamma=0$ ocorre quando é obedecida a relação abaixo (Nota: $\gamma=0$ implica que os dois símbolos FSK mantêm nenhuma similaridade entre si, maximizando assim a capacidade do demodulador discriminar entre um e outro):

$$\Delta f := 0.5\text{SymbolRate} \quad \Delta f = 2.4\text{-KHz}$$

Note no gráfico que para múltiplos inteiros de $f_1 = \Delta f = \text{SymbolRate}/2$ (isto é, para $f_2 = 4.8\text{-KHz}$, $f_3 = 7.2\text{-KHz}$, $f_4 = 9.6\text{-KHz}$, ...) a correlação também é nula, isto é, $\gamma=0$. No entanto, se escolhessemos um destes pontos do gráfico para Δf não estaríamos minimizando a banda passante do canal, conforme exige o enunciado.

b) O *decision block* na Figura 1 do enunciado começa a decidir erroneamente quando o valor em sua entrada é nulo, isto é, quando os dois símbolos apresentam o mesmo grau de similaridade um para o outro. Isto significa que $\gamma=1/2$ na equação 7.4.10 acima. Daí, por inspeção visual do gráfico acima, o valor de Δf que resulta em $\gamma=0.5$ é:

$$\Delta f_c = 1.448\text{-KHz} \rightarrow \text{desvio de frequência que torna nulo o nível de sinal na entrada do } \textit{decision block} \text{ da Figura 1 do enunciado quando qualquer um dos dois símbolos é recebido}$$

Se o desvio de frequência Δf_ϵ é consequência do efeito Doppler, então a velocidade relativa entre TX e RX é:

$$v := \frac{\Delta f_\epsilon}{f_c} \cdot c \quad v = 3.609 \times 10^3 \cdot \frac{\text{km}}{\text{hr}}$$

c) $\lambda := \frac{c}{f_c} \quad \lambda = 0.692 \text{ m} \quad \rightarrow$ comprimento de onda da onda eletromagnética na frequência da portadora

$\text{Num}\lambda := \frac{1}{\lambda} \quad \text{floor}(\text{Num}\lambda) = 2455 \quad \rightarrow$ número inteiro de comprimentos de onda que separam TX e RX um do outro

$\text{Frac}\lambda := \text{Num}\lambda - \text{floor}(\text{Num}\lambda) \quad \text{Frac}\lambda = 0.365 \quad \rightarrow$ fator de um comprimento de onda que, se somado ao número inteiro de comprimentos de onda que separam TX e RX, define a distância entre TX e RX em comprimentos de onda.

$\phi := \text{Frac}\lambda \cdot 360 \quad \phi = 131.51 \text{ graus}$

d) Aplicando a identidade trigonométrica $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ na expressão do sinal recebido $r(t) = A\cos(2\pi \cdot f_r \cdot t + \phi)$, resulta em:

$$r(t) = A \cdot \cos(2\pi \cdot f_r \cdot t + \phi) = A \cdot \cos(2\pi \cdot f_r \cdot t) \cdot \cos(\phi) - A \cdot \sin(2\pi \cdot f_r \cdot t) \cdot \sin(\phi)$$

ou

$$r(t) = A \cdot \cos(2\pi \cdot f_r \cdot t - \phi) = A \cdot \cos(2\pi \cdot f_r \cdot t) \cdot \cos(\phi) + A \cdot \sin(2\pi \cdot f_r \cdot t) \cdot \sin(\phi)$$

A expressão acima indica que, sendo o sinal $r(t)$ processado pela arquitetura do *hardware* mostrado no diagrama de blocos da Figura 1 do enunciado, duas situações podem ocorrer:

- (I) $r1c = A\cos(\phi)$, $r1s = A\sin(\phi)$ e $r2c = r2s = 0$ para $f_r = f_c$
- (II) $r1c = r1s = 0$, $r2c = A\cos(\phi)$ e $r2s = A\sin(\phi)$ para $f_r = f_c + \Delta f$

Note que na saída de cada integrador na Figura 1 há um operador quadrático e que as saídas ao quadrado de cada um dos dois integradores são adicionadas através de um somador. Portanto, em função das duas possíveis situações (I) e (II) acima, os valores possíveis de saída para os somadores são 0 ou $A^2 \cos^2(\phi) + A^2 \sin^2(\phi) = A^2 [\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)] = A^2$. Ou seja, este *hardware* resulta na saída de cada somador no módulo quadrático do envelope complexo da onda eletromagnética, que é independente da fase ϕ . Logo, por estarmos utilizando apenas o módulo do envelope complexo para efeito de decisão, a influência do ângulo ϕ é descartada, e, portanto, a distância entre TX e RX é irrelevante nest processo de demodulação FSK.

e) Do enunciado, o RX move-se a uma velocidade $v := 2800 \cdot \frac{\text{km}}{\text{hr}}$

Resultando no seguinte desvio Doppler: $f_{\text{doppler}} := f_c \cdot \frac{v}{c} \quad f_{\text{doppler}} = 1.123 \times 10^3 \cdot \text{Hz}$

Vimos que a equação 7.4.10 dá o grau de "similaridade" entre 2 símbolos, isto é, a correlação γ entre eles. De fato, para $\Delta f=0$ obtemos $\gamma=1$, isto é, similaridade absoluta, indicando que o símbolo é ele próprio. Portanto $10\log\gamma$ define uma medida em dB quanto um símbolo torna-se diferente de si mesmo a medida em que Δf se afasta do valor zero. Em outras palavras, $10\log\gamma$ define a variação em dB da amplitude do envelope complexo do símbolo na saída dos integradores quando há uma diferença de frequência entre a portadora do TX e o oscilador local do RX. Portanto, de 7.4.10, o valor de Δf correspondente a

$f_{\text{doppler}} = 1.123 \times 10^3 \cdot \text{Hz}$ determina uma queda em dB da amplitude do envelope complexo no valor de:

$$\alpha := 10 \cdot \log\left(\frac{\sin(2\pi f_{\text{doppler}} \cdot T)}{2\pi f_{\text{doppler}} \cdot T}\right) \quad \alpha = -1.696 \quad \text{dB}$$

Daí, a SNR no canal necessária para que seja mantida $\text{BER}=3.2 \times 10^{-4}$ quando o RX move-se a $v = 2.8 \times 10^3 \cdot \text{kph}$ é:

$\text{SNR} := 14 - \alpha \quad \text{SNR} = 15.696 \text{ dB}$