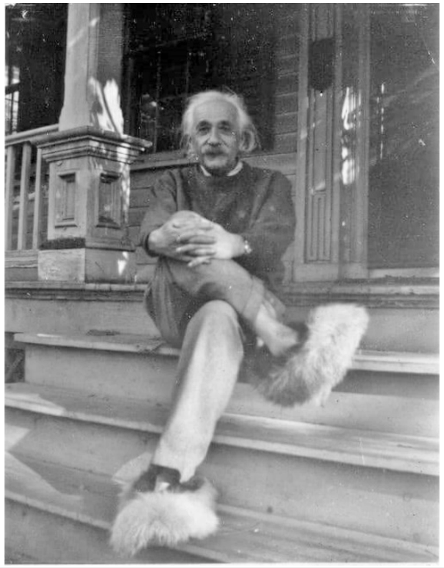
Introdução à Lógica Fuzzy

Lógica Fuzzy

Albert Einstein, 1928	*Lotfi Zadeh, 1973*
"À medida que as proposições matemáticas se referem à realidade, elas não são certas; e, à medida que são certas, elas não se referem à realidade." 	 "Dito informalmente, a essência do princípio da incompatibilidade é que, <u>à medida que a complexidade de um sistema aumenta, nossa habilidade de fazer afirmações precisas e significativas sobre o seu comportamento diminui</u> até um limite além do qual precisão e relevância se tornam características quase mutuamente exclusivas."

- Lógica Fuzzy (Fuzzy Sets, Lógica Nebulosa) foi concebida e formalmente descrita por Lotfi Zadeh
- Generalização da Teoria Clássica dos Conjuntos
- Representa e trata "noções lingüísticas" → objetos com <u>limites não definidos</u>
- Lógica multi-valores x Lógica clássica binária

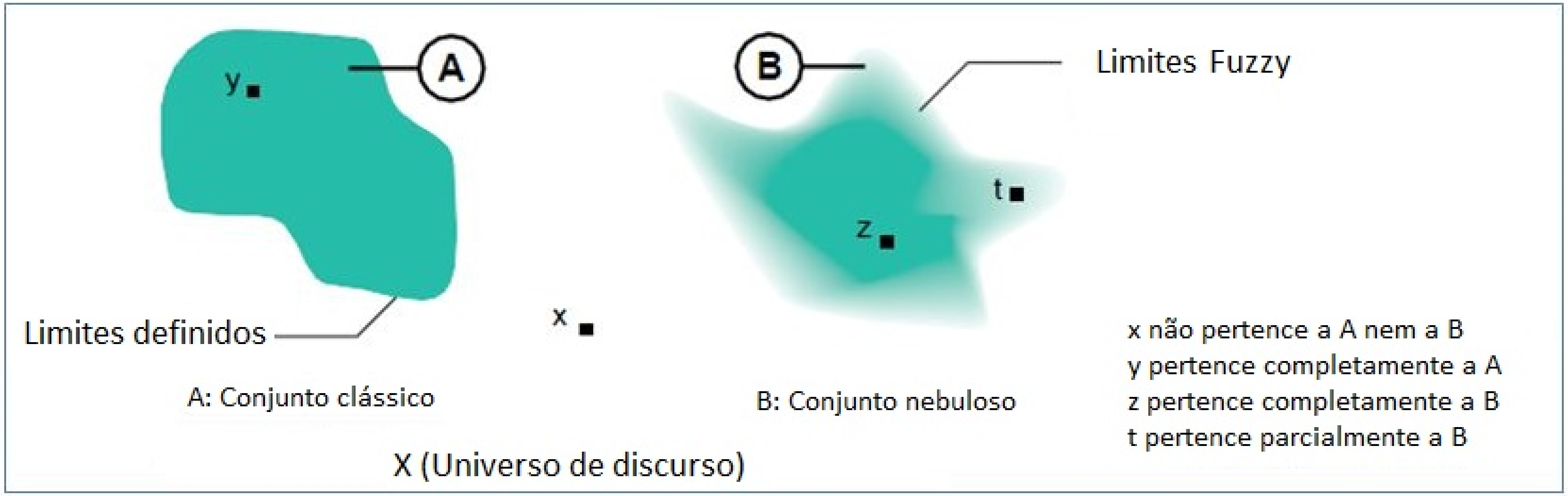
Conjuntos Clássicos e Conjuntos Fuzzy

- O conceito de conjuntos clássicos (***crisp sets***) introduz a noção intuitiva fundamental de aceitar ou rejeitar um objeto como pertencente a uma dada coleção (ou categoria).

- O processo de dicotomia impõe uma decisão binária: tudo ou nada, 0 ou 1, verdadeiro ou falso.

- O conceito de conjuntos fuzzy (***fuzzy sets***) consiste em relaxar este requerimento e admitir valores intermediários de classes de pertinência.

- Este conceito permite um cenário de interpretação mais rico e realístico, acomodando afirmações com quantificações parciais de pertinência.



Função de pertinência (=função característica= *membership function*)

- Fuzzy sets são caracterizados por funções de pertinência.
- O valor da função de pertinência descreve o grau de pertinência da variável linguística em questão, com relação ao conceito que ela descreve (o quão relacionada a variável é com o conceito).

O valor de H(t) descreve o grau de pertinência de t em H.

t: variável linguística

T: **universo de discurso** de t, T=[0,50] (= domínio de H(t))

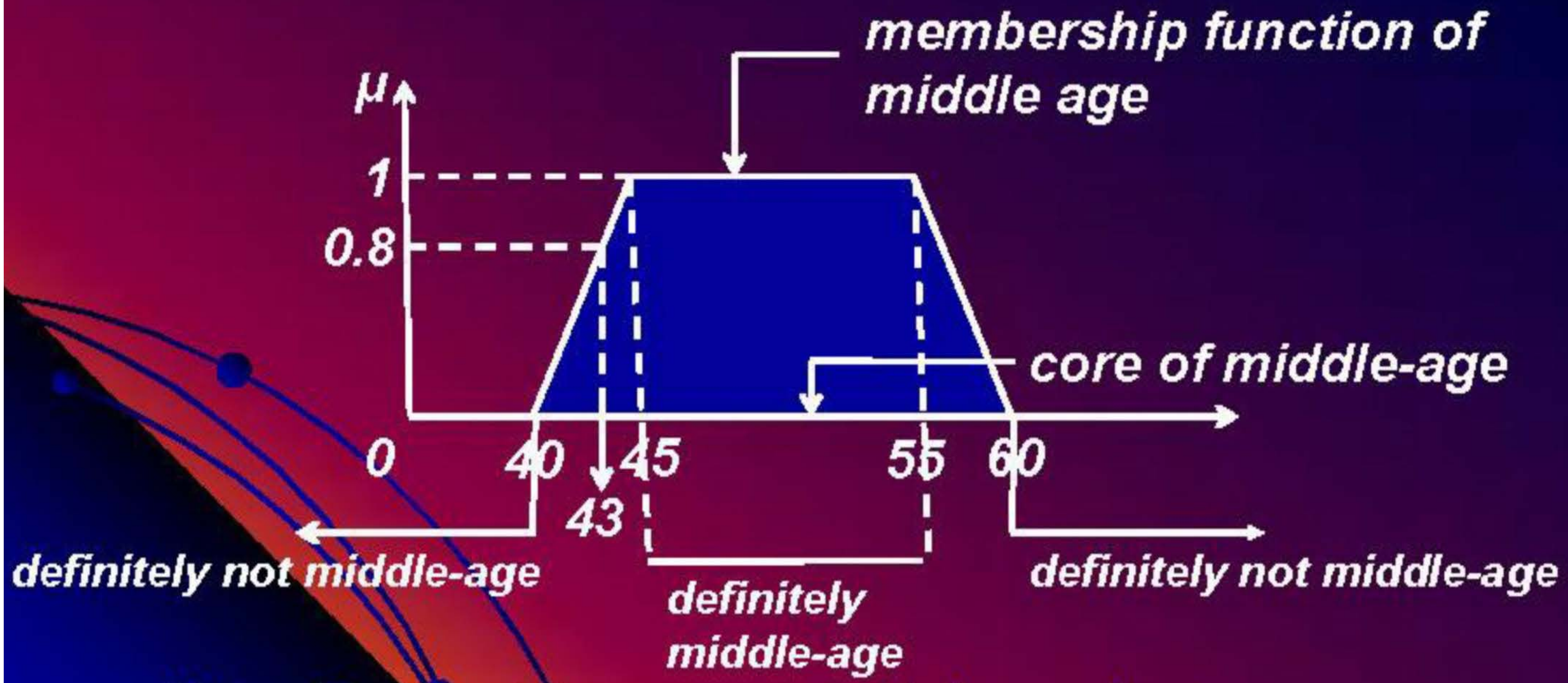
*Note que aqui consideramos o conceito de Alta Temperatura (HT) em um contexto ambiental, com temperaturas distribuídas no intervalo [0, 50^{o}C].

Caracterização do FS H de "Alta Temperatura (HT)" no universo de discurso T=[0,50]

Temperatura em questão $t \in T$	Relação com o conceito "Alta Temperatura = HT"	Valor de H(t) relacionado à compatibilidade de t com o conceito de HT
0^oC	Não é entendido como HT	Grau de Pertinência = 0
$t \geq 30^oC$	Certamente é entendido como HT	Grau de Pertinência = 1
$30^oC < t \leq 50^oC$	Certamente é entendido como HT	Grau de Pertinência = 1
$12.5^oC \leq t < 30^oC$	$\neq$s relações com o conceito	$\neq$s valores em [0,1]

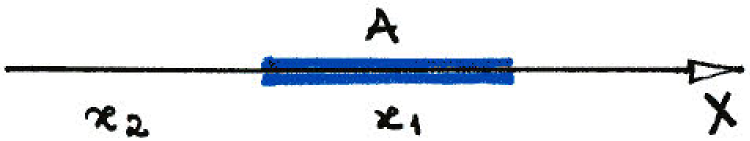
EXAMPLE—GRADUATION OF MIDDLE-AGE

- *Imprecision of meaning = fuzziness of meaning*
- *Computational model of middle-age (trapezoidal fuzzy set)*



- *Note: Parameters are context-dependent*

Função de pertinência p/ conjuntos clássicos



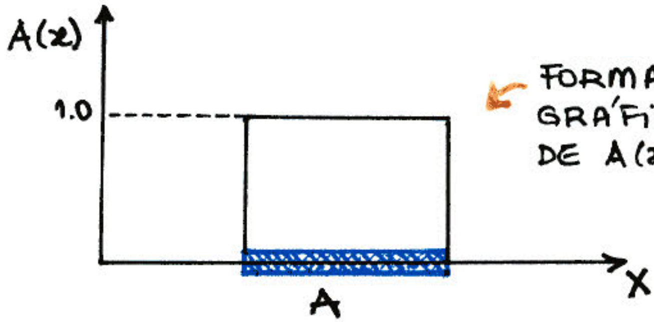
$x_1 \in A$; $x_2 \notin A$

CONSIDERANDO O CONJUNTO A MOSTRADO NA FIGURA AO LADO, NO UNIVERSO X, PODE-SE AFIRMAR CLARAMENTE QUE O OBJETO (PONTO) x_1 PERTENCE AO CONJUNTO A, ENQUANTO x_2 NÃO PERTENCE.

SE DENOTARMOS A DECISÃO DE ACEITAÇÃO POR 1 E A DECISÃO DE REJEIÇÃO POR 0, PODE-SE EXPRESSAR A DECISÃO POR MEIO DE UMA FUNÇÃO CARACTERÍSTICA (OU FUNÇÃO DE PERTINÊNCIA) $A(x)$, $x \in X$, CONFORME:

$$A(x) = \begin{cases} 1, & \text{SE } x \in A \\ 0, & \text{SE } x \notin A \end{cases}$$

E



FORMA ANALÍTICA DE A(x)

FORMA GRÁFICA DE A(x)

- O CONJUNTO VAZIO ϕ TEM FUNÇÃO CARACTERÍSTICA NULA, $\phi(x) = 0$, $\forall x \in X$;

- O CONJUNTO UNIVERSO X TEM FUNÇÃO CARACTERÍSTICA UNITÁRIA, $X(x) = 1$, $\forall x \in X$;

- UM CONJUNTO QUE CONTENHA APENAS 1 ELEMENTO (a, POR EXEMPLO) $A = \{a\}$ TEM FUNÇÃO CARACTERÍSTICA:

$$A(x) = \begin{cases} 1, & \text{SE } x = a \\ 0, & \text{EM CASO CONTRÁRIO.} \end{cases}$$

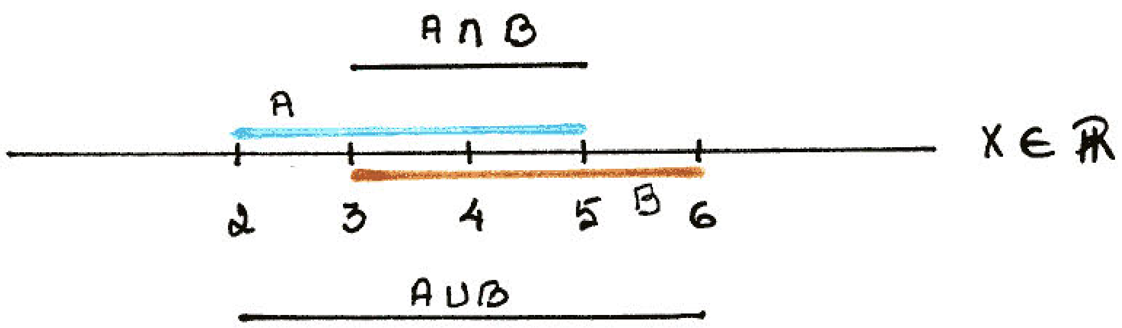
A FUNÇÃO DE PERTINÊNCIA $A : X \to \{0,1\}$ INDUZ UMA RESTRIÇÃO COM LIMITES BEM DEFINIDOS SOBRE OS OBJETOS DO UNIVERSO X QUE PODEM SER ATRIBUÍDOS AO CONJUNTO A.

EXEMPLO 1 :

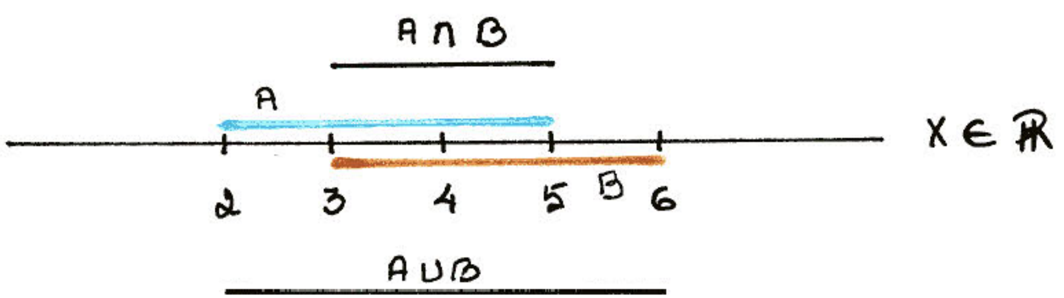
CONSIDERE OS CONJUNTOS $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 5\}$ E $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 6\}$, OS QUAIS MODELAM INTERVALOS SOBRE A RETA REAL $\mathbb{R}$.

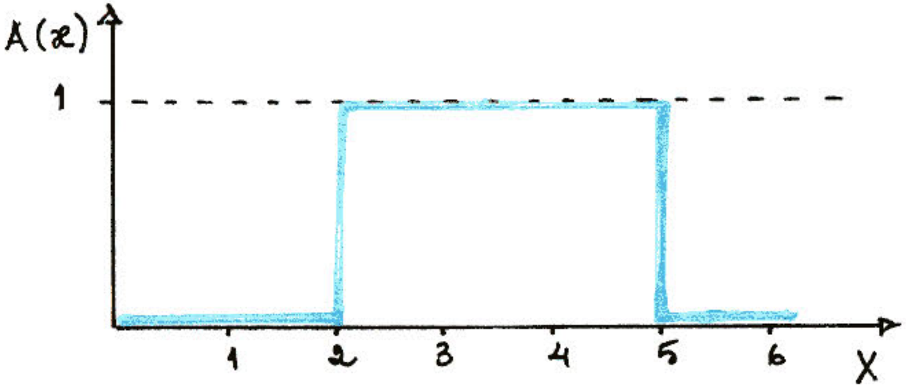
* DETERMINE AS FUNÇÕES CARACTERÍSTICAS DE A E B.

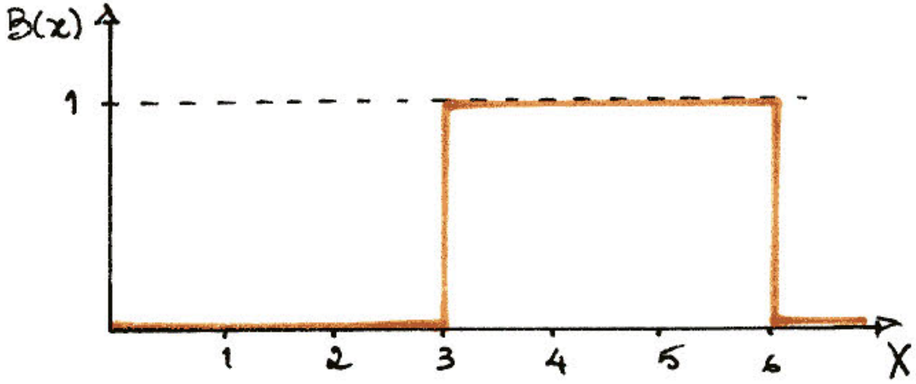
* DETERMINE A UNIÃO, A INTERSECÇÃO E O COMPLEMENTO DOS CONJUNTOS A E B EM TERMOS DE SUAS FUNÇÕES CARACTERÍSTICAS.



✱ DETERMINE AS FUNÇÕES CARACTERÍSTICAS DE A E B.







$A : X \to \{0,1\}$

$$A(x) = \begin{cases} 1, & \text{SE } x \in A \\ 0, & \text{SE } x \notin A \end{cases}$$

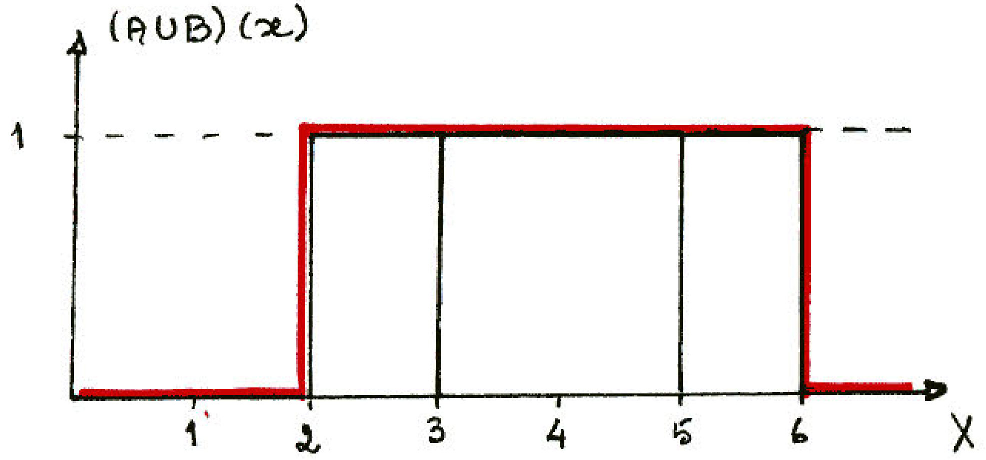
$A = \{ x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 5 \}$

$B : X \to \{0,1\}$

$$B(x) = \begin{cases} 1, & \text{SE } x \in B \\ 0, & \text{SE } x \notin B \end{cases}$$

$B = \{ x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 6 \}$

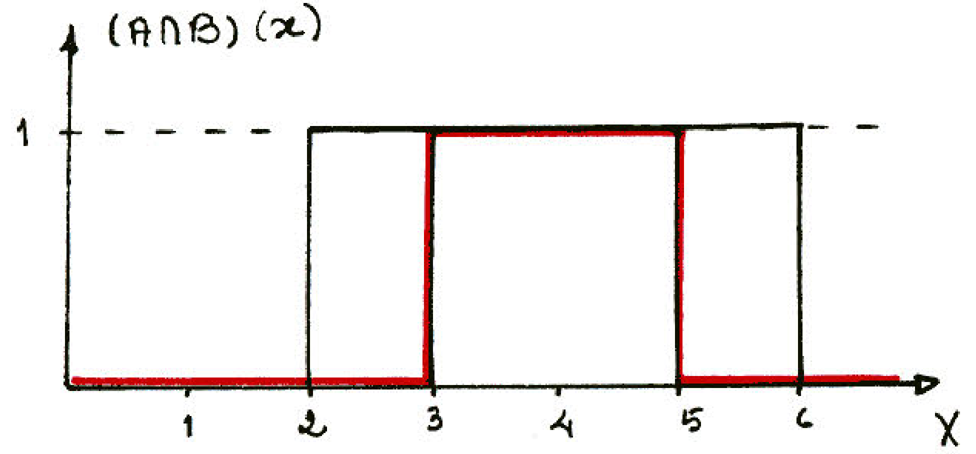
* DETERMINE A UNIÃO E A INTERSECÇÃO DOS CONJUNTOS A E B EM TERMOS DE SUAS FUNÇÕES CARACTERÍSTICAS.



$A \cup B : X \rightarrow \{0,1\}$

$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 6\}$

$$(A \cup B)(x) = \begin{cases} 1, & \text{SE } x \in (A \cup B) \\ 0, & \text{CASO CONTRÁRIO} \end{cases}$$

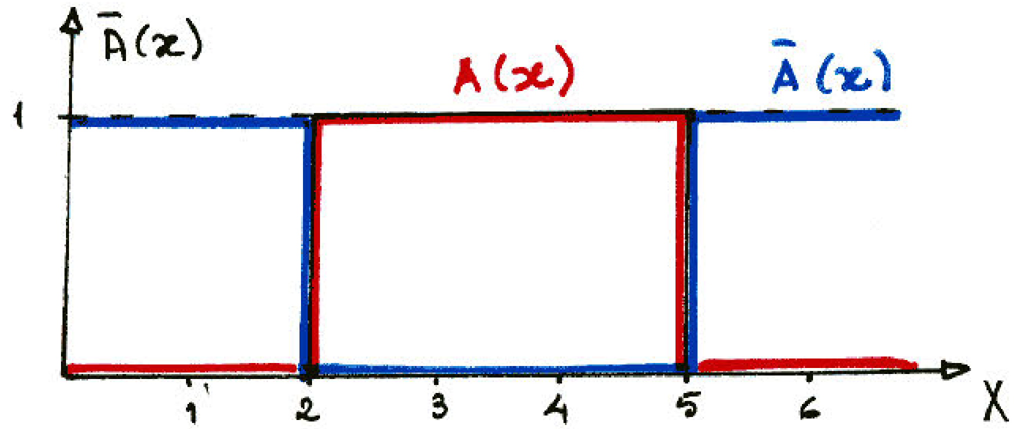


$A \cap B : X \rightarrow \{0,1\}$

$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 5\}$

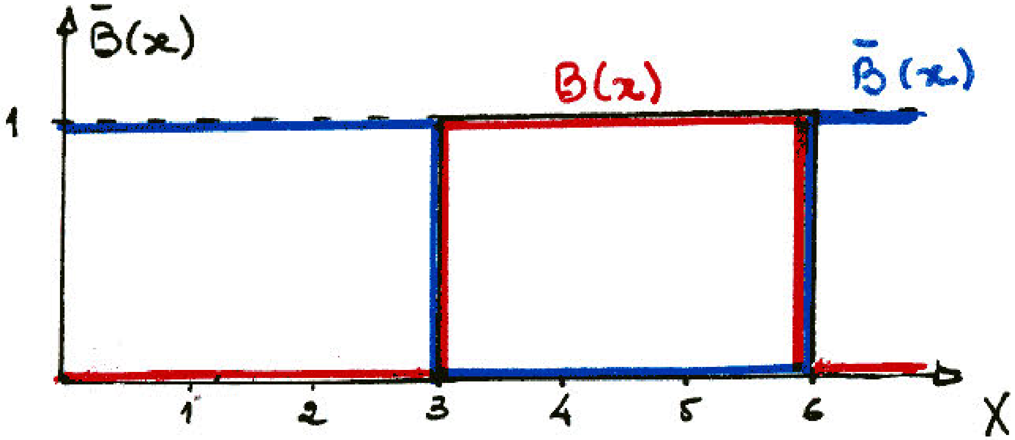
$$(A \cap B)(x) = \begin{cases} 1, & \text{SE } x \in (A \cap B) \\ 0, & \text{CASO CONTRÁRIO} \end{cases}$$

* DETERMINE O COMPLEMENTO DOS CONJUNTOS A E B EM TERMOS DE SUAS FUNÇÕES CARACTERÍSTICAS.



$$\bar{A}(x) = 1 - A(x), \forall x \in X$$

$$A, \bar{A} : X \to \{0,1\}$$



$$\bar{B}(x) = 1 - B(x), \forall x \in X$$

$$B, \bar{B} : X \to \{0,1\}$$

EXEMPLO 2 :

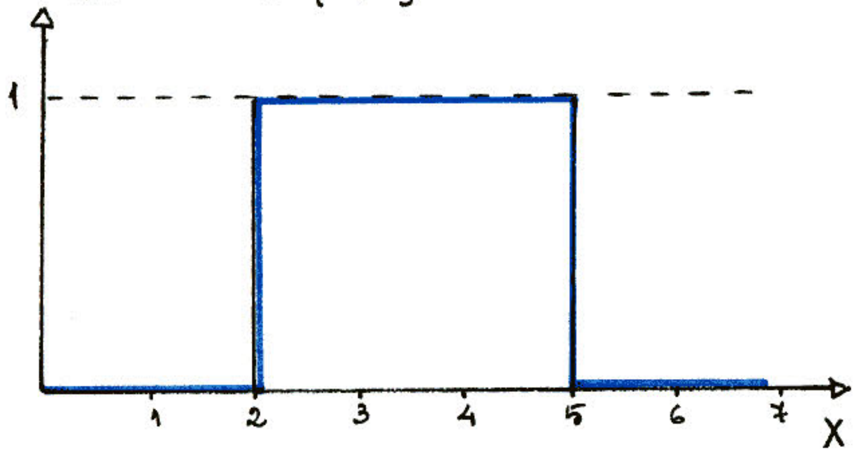
PARA OS CONJUNTOS A E B DO EXEMPLO 1, COM FUNÇÕES DE PERTINÊNCIA DEFINIDAS POR :

$$A(x) = \begin{cases} 1, & \text{SE } x \in A \\ 0, & \text{CASO CONTRÁRIO} \end{cases} \quad \text{E} \quad B(x) = \begin{cases} 0.5, & \text{SE } x \in B \\ 0, & \text{CASO CONTRÁRIO} \end{cases},$$

* DETERMINE A UNIÃO E A INTERSECÇÃO DOS DOIS CONJUNTOS EM TERMOS DE SUAS FUNÇÕES DE PERTINÊNCIA.

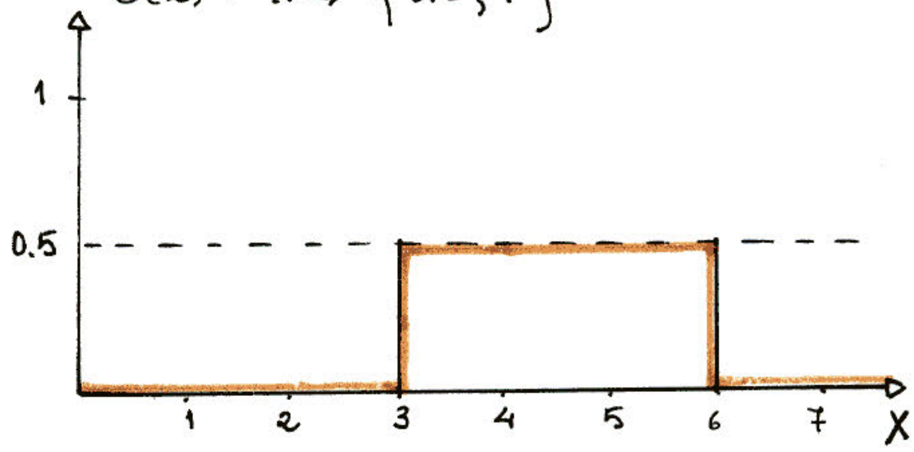
$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 5\}$

$A(x) : X \to \{0,1\}$



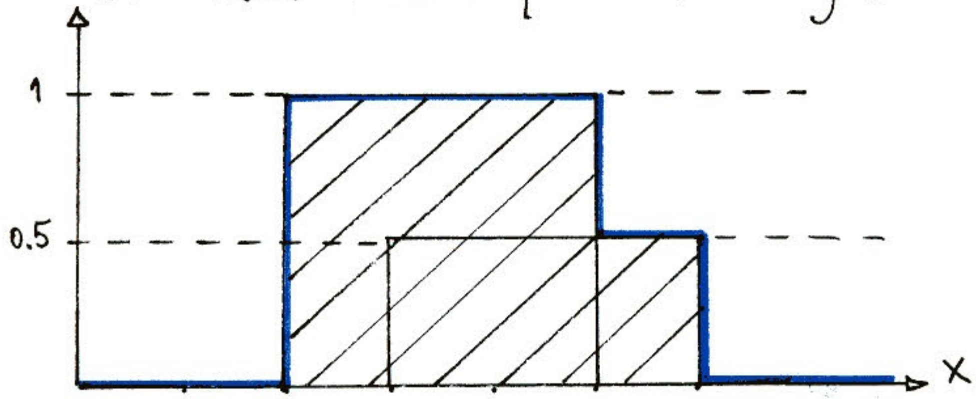
$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 6\}$

$B(x) : X \to \{0.5, 1\}$



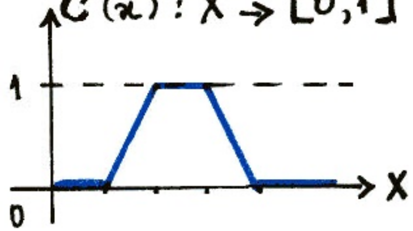
* DETERMINE A UNIÃO E A INTERSECÇÃO DOS DOIS CONJUNTOS EM TERMOS DE SUAS FUNÇÕES DE PERTINÊNCIA.

$$(A \cup B)(x) = \text{máx}\{A(x), B(x)\}, \forall x \in X$$

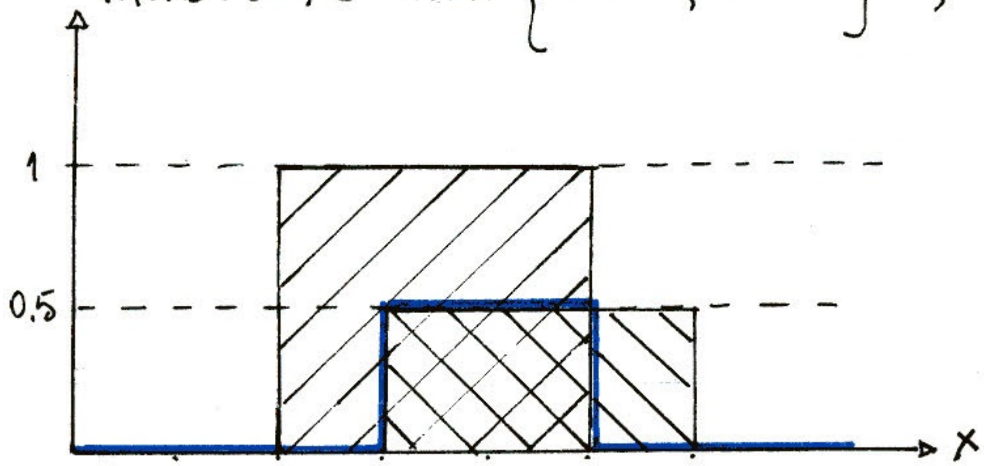


$$(A \cup B)(x) : X \to \{0, 0.5, 1\}$$

OBS:



$$(A \cap B)(x) = \text{mín}\{A(x), B(x)\}, \forall x \in X$$

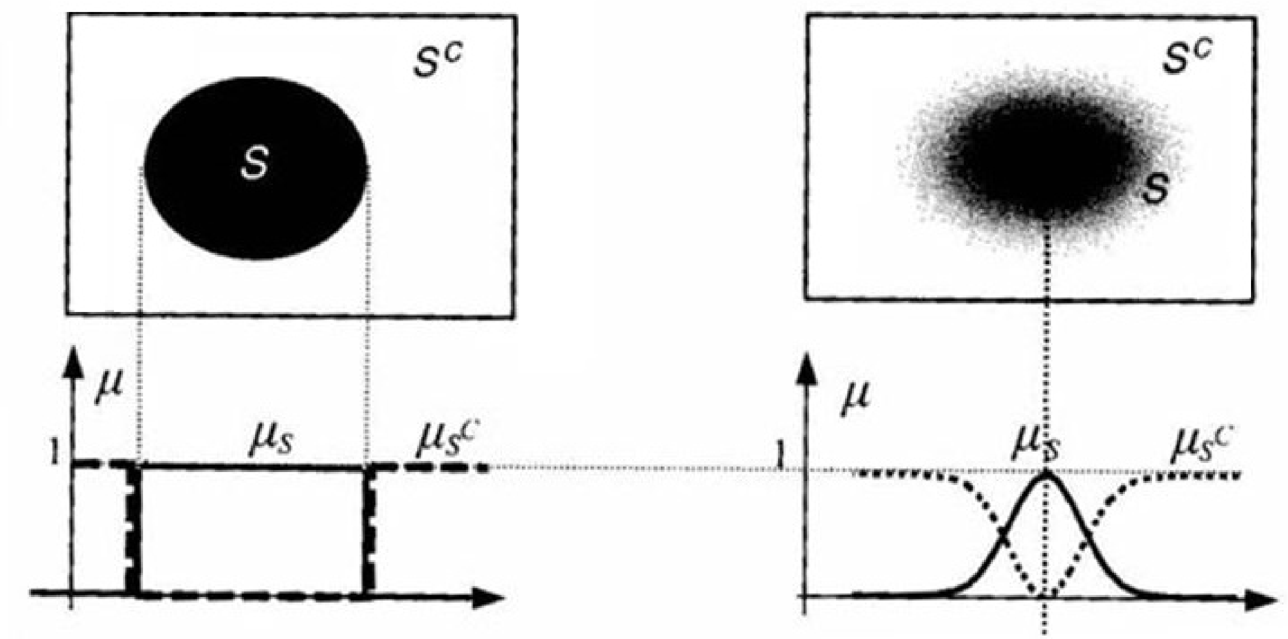


$$(A \cap B)(x) : X \to \{0, 0.5, 1\}$$

Função de pertinência p/ conjuntos *fuzzy* (=*fuzzy sets*):

Noções como alta temperatura, média pressão, vizinhança próxima, baixa velocidade, etc., representam categorias usadas para descrever "objetos do mundo real" que não possuem limites bem definidos (as expressões em vermelho identificam as fontes de nebulosidade).

- Se um objeto pertence ou não a tal categoria é uma questão de grau (de pertinência), expresso, por exemplo, por um número real pertencente ao intervalo [0,1].
- Quanto mais próximo de 1, maior o grau de pertinência do objeto à particular categoria.



<u>Nota:</u> Um *fuzzy set* é um conjunto cujos elementos possuem diferentes graus de pertinência, e não apenas a pertinência {0,1} dos conjuntos clássicos. A função de pertinência é a representação do *fuzzy set*. Neste contexto, as denominações "função de pertinência" e "*fuzzy set*" são usadas de maneira equivalente.

Função de pertinência p/ *fuzzy sets*:

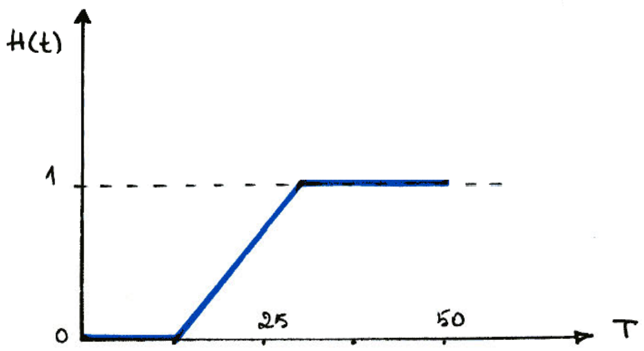
Definição: Coleção de objetos com valores de pertinência que variam entre a exclusão completa (0) e a inclusão completa (1).

Os valores de pertinência expressam os graus de compatibilidade do objeto com as propriedades ou características que distinguem a coleção (ou seja, o quanto o objeto tem a ver com o conceito).

Um *fuzzy set* é caracterizado por uma função de pertinência que mapeia os elementos de um domínio, espaço ou **universo de discurso X** ao intervalo unitário [0,1], ou seja: $\mathrm{A} : \mathrm{X} \to [0,1]$. (Zadeh, 1965)

Um *fuzzy set* é uma generalização do conceito de um conjunto clássico cujas funções de pertinência assumem um de dois possíveis valores, $\{0,1\}$.

O valor de $\mathrm{A}(x)$ descreve um grau de pertinência de x em A.

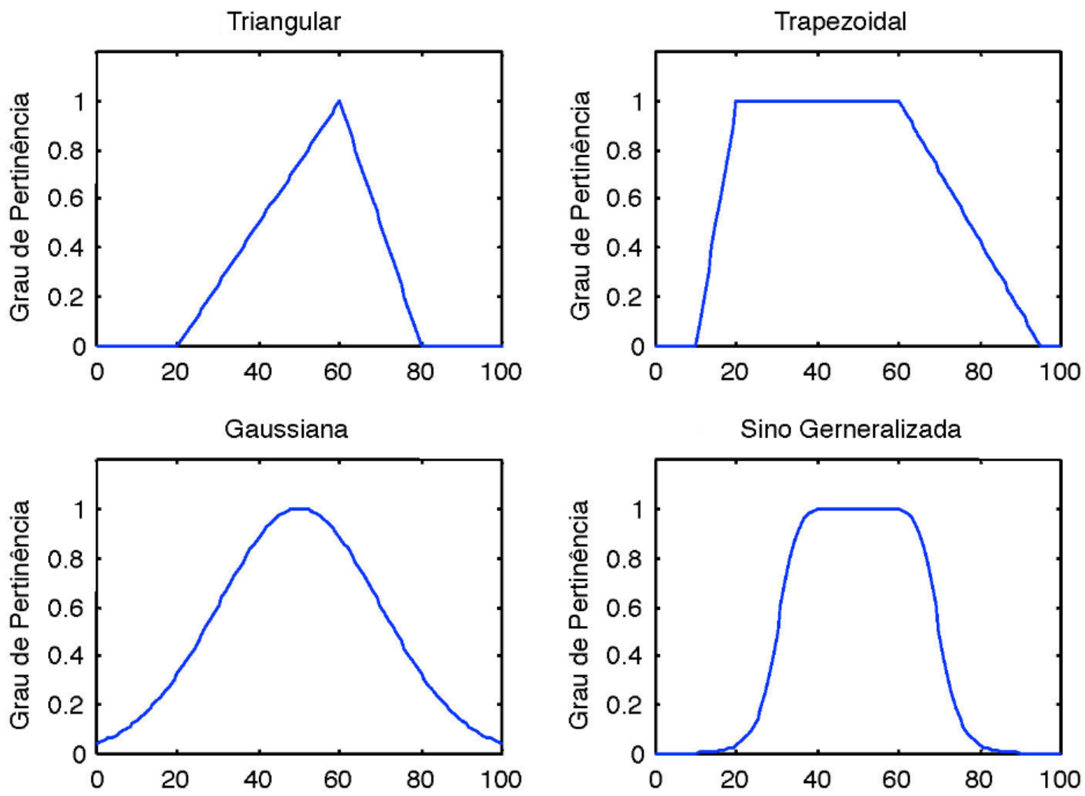


Função de pertinência H: T→[0,1], caracterizando o *fuzzy set* H(t) de altas temperaturas, no universo T = [0, 50]

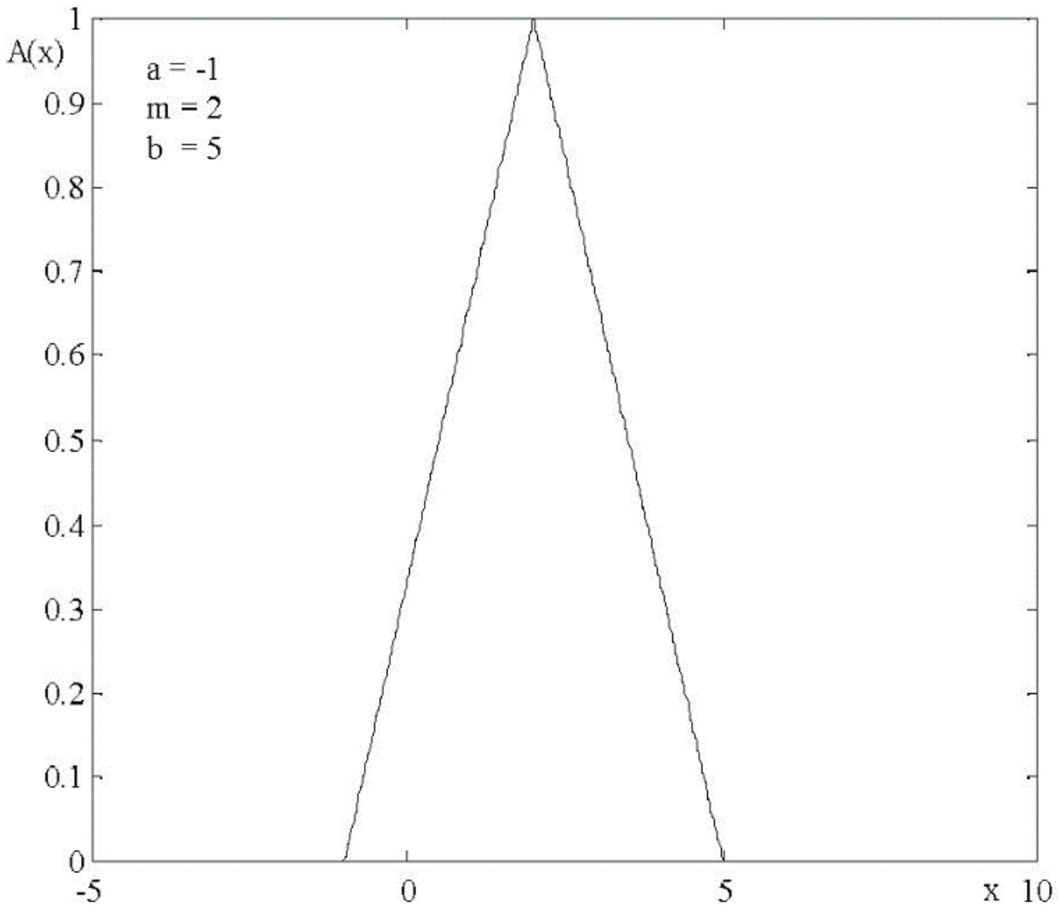
Temperatura → Grau de compatibilidade com o conceito
0º → Não é alta temperatura → 0 (nulo)
≥ 30º → São altas temperaturas → 1 (máximo)

Tipos de função de pertinência p/ *fuzzy sets*:

- Qualquer função da forma A : X →[0,1] descreve uma função de pertinência associada com um *fuzzy set* A, que depende não apenas do conceito a ser representado, mas também do contexto no qual é usado.
- Em geral, funções simples são convenientes em consequência do baixo custo computacional.
- Em muitas aplicações práticas, *fuzzy sets* podem ser representados por funções parametrizadas, conforme figura ao lado.

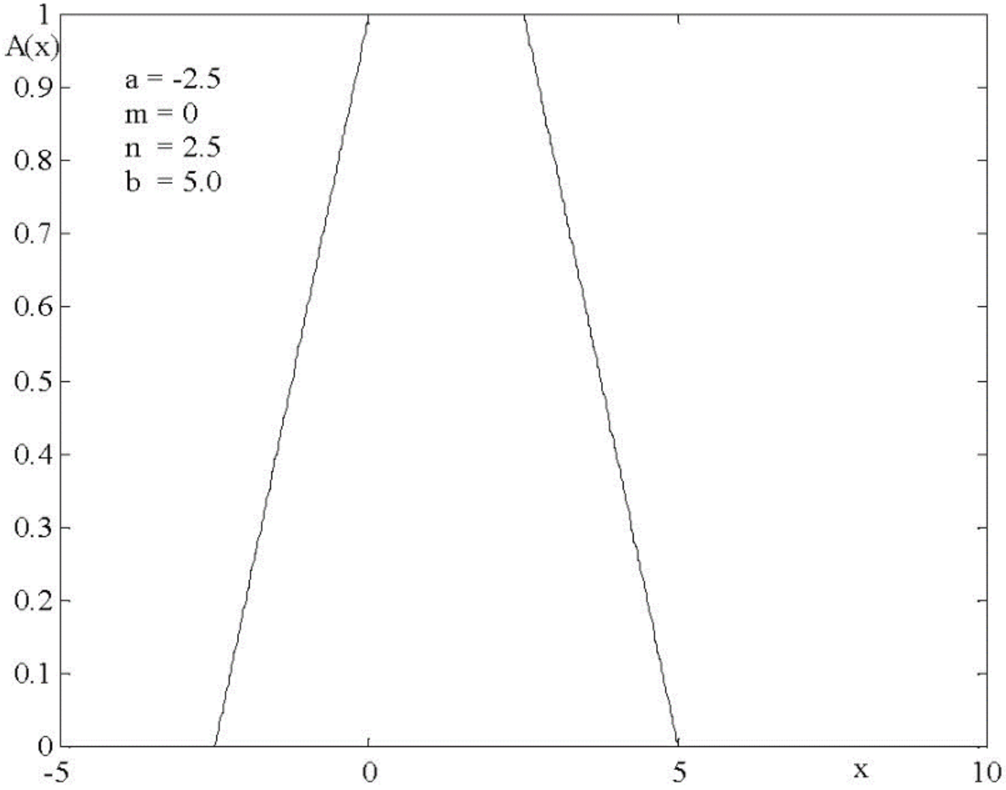


Função de pertinência triangular:



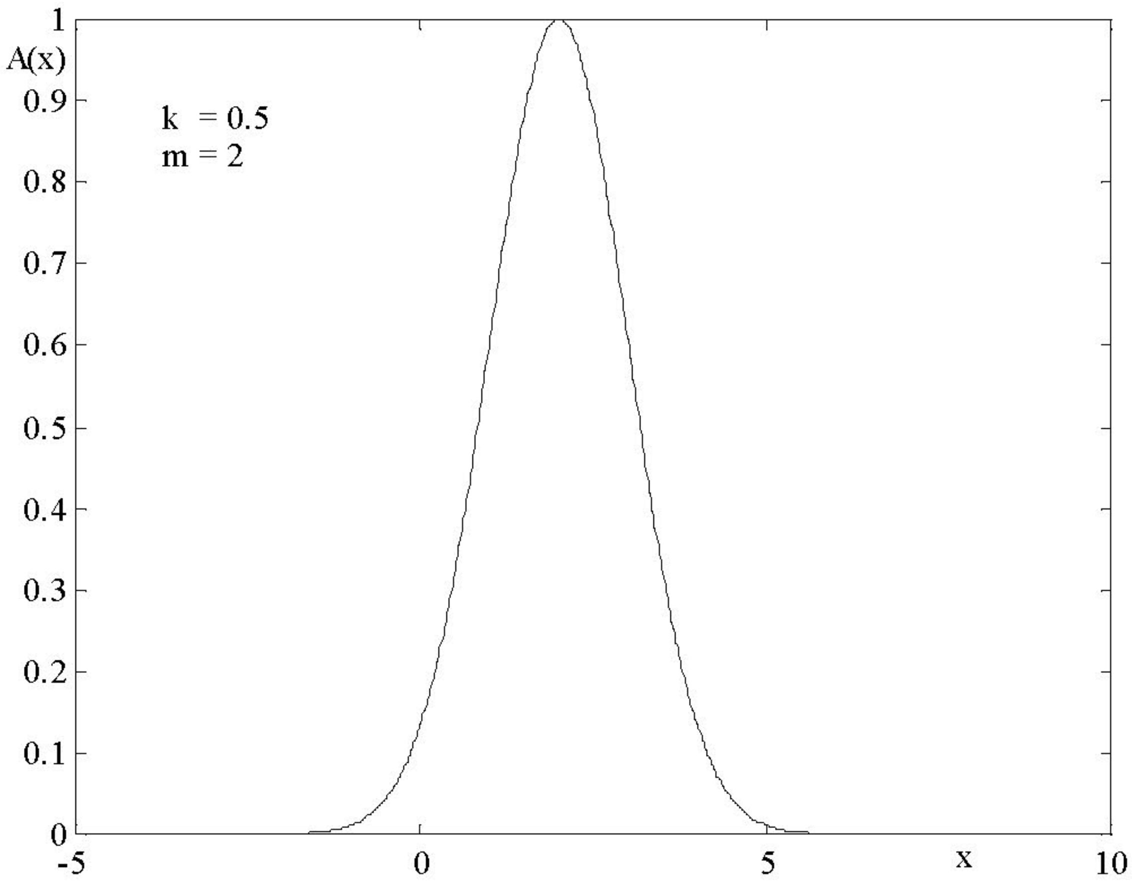
$$A(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \le a \\ \dfrac{x-a}{m-a} & \text{if } x \in [a,m] \\ \dfrac{b-x}{b-m} & \text{if } x \in [m,b] \\ 0 & \text{if } x \ge b \end{cases}$$

Função de pertinência trapezoidal:



$$A(x)=\begin{cases} 0 & \text{if } x<a \\ \dfrac{x-a}{m-a} & \text{if } x\in[a,m) \\ 1 & \text{if } x\in[m,n) \\ \dfrac{b-x}{b-n} & \text{if } x\in[n,b] \\ 0 & \text{if } x>b \end{cases}$$

Função de pertinência gaussiana:

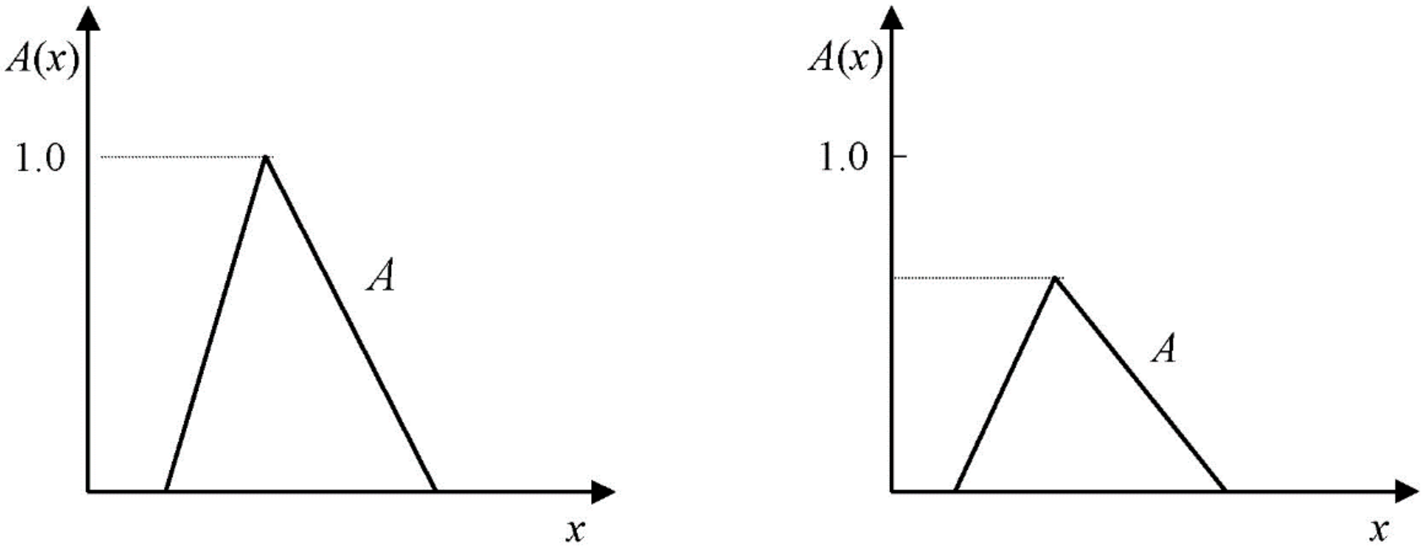


$$A(x) = \exp(-\frac{(x-m)^2}{\sigma^2})$$

Caracterização de *fuzzy sets*:

A caracterização de *fuzzy sets* é baseada nas particularidades das funções de pertinência que os representam.

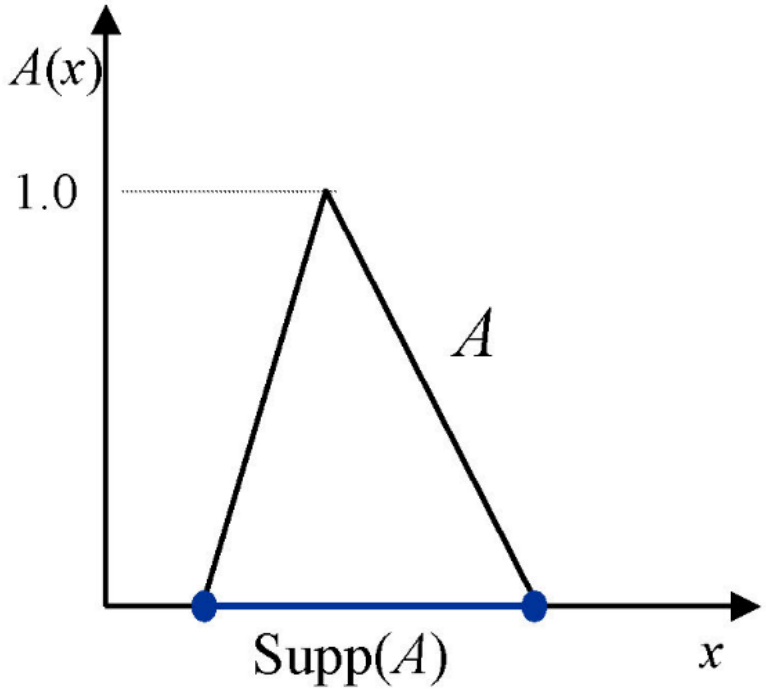
1. Um *fuzzy set* é NORMAL quando sua função de pertinência atinge 1, ou seja, $\mathrm{Sup}\, A(x) = 1$ (supremo de *A* = 1) ou altura hgt(*A*) de *A* é igual a 1:



Normal   Subnormal

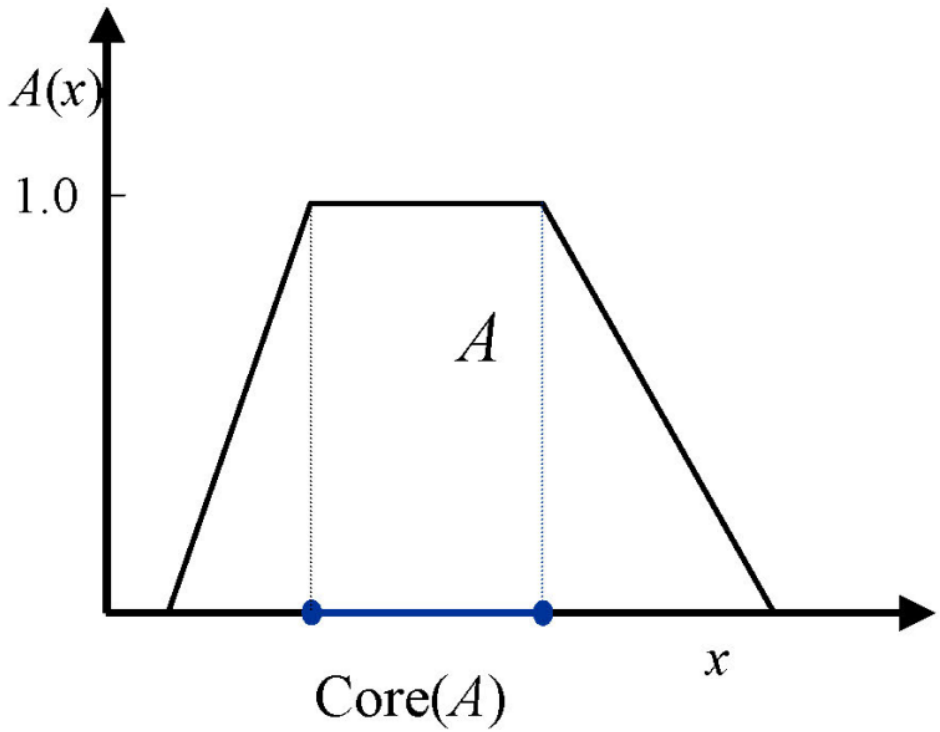
$$\mathrm{hgt}(A) = 1 \qquad \mathrm{hgt}(A) = \sup_{x \in \mathbf{X}} A(x) \qquad \mathrm{hgt}(A) < 1$$

2. SUPORTE de um *fuzzy set A*, denotado por Supp(*A*), são todos os elementos do universo de discurso (domínio) X que pertencem ao fuzzy set *A* com um grau de pertinência não nulo:



$$\mathrm{Supp}(A) = \{x \in X \mid A(x) > 0\}$$

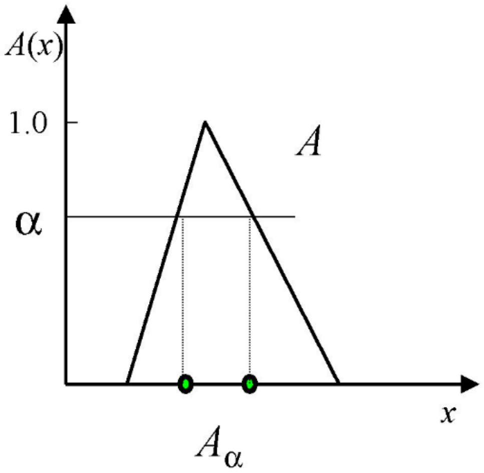
3. NÚCLEO (CORE) de um *fuzzy set A* é o conjunto de todos os elementos do universo de discurso X que possuem pertinência 1 em *A*:



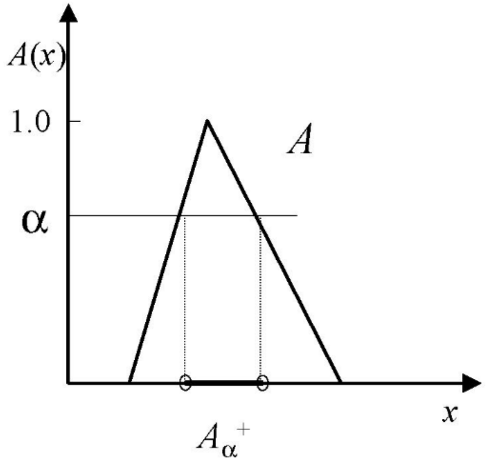
$$\text{Core}(A) = \{x \in X \mid A(x) = 1\}$$

α – corte da função de pertinência *A(x)*:

O α – corte de *A*, denotado por A_α, é um conjunto que consiste daqueles elementos do universo X cujos valores de pertinência excedem o limiar α, ou seja: $A_\alpha = \{x \in X \mid A(x) \geq \alpha\}$



$$A_\alpha = \{x \in X \mid A(x) \geq \alpha\}$$



$$A_\alpha^+ = \{x \in X \mid A(x) > \alpha\}$$

O maior limiar, α=1, determina o conjunto de elementos de X que pertencem "totalmente" ao *fuzzy set* A.

Quanto menor o nível de α, maior o número de elementos de X que pertencem ao correspondente α – corte, ou seja:

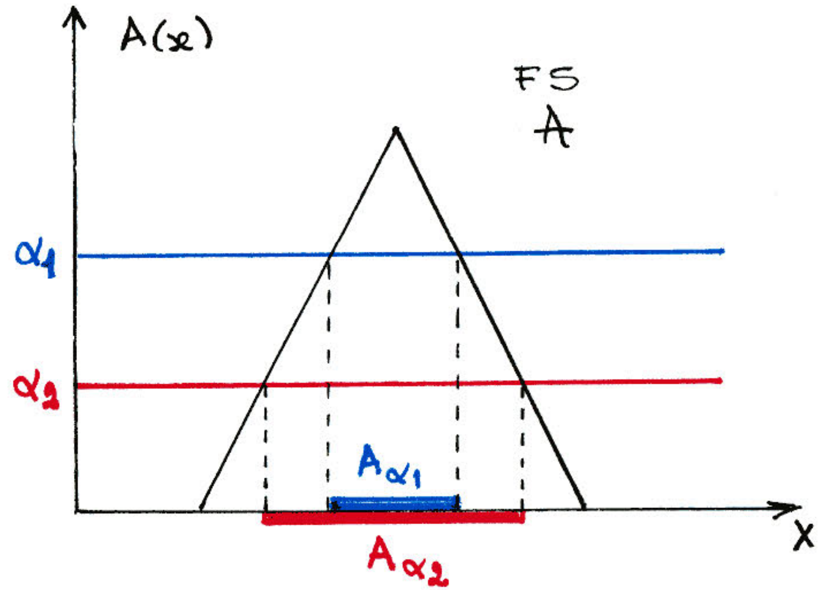
Se $\alpha_1 > \alpha_2 \rightarrow A_{\alpha 1} \subset A_{\alpha 2}$.

Teorema da Representação

"Qualquer *fuzzy set* pode ser considerado como uma família de *fuzzy sets*."

Qualquer *fuzzy set* A pode ser decomposto em uma série de α – cortes, de tal forma que $A = \cup \{A_\alpha\}$, $\alpha \in [0,1)$, ou, de forma equivalente, através da função de pertinência $A(x) = \sup (A_\alpha(x))$, $\alpha \in [0,1)$.

Quanto maior o número de níveis de quantização dos valores de pertinência (ou seja, quanto maior o número de α – cortes), mais detalhada a reconstrução.



Propriedades lógico-relacionais entre *fuzzy sets*:

1. INTERSECÇÃO	$(A \cap B)(x) = \min(A(x), B(x)) = A(x) \wedge B(x)$	6. IDEMPOTÊNCIA	$A(x) \cup A(x) = A(x)$ $A(x) \cap A(x) = A(x)$
2. UNIÃO	$(A \cup B)(x) = \max(A(x), B(x)) = A(x) \vee B(x)$	7. DISTRIBUTIVIDADE	$A(x) \cap (B(x) \cup C(x)) = (A(x) \cap B(x)) \cup (A(x) \cap C(x))$ $A(x) \cup (B(x) \cap C(x)) = (A(x) \cup B(x)) \cap (A(x) \cup C(x))$
3. COMPLEMENTO	$\bar{A}(x) = 1 - A(x)$ OBS: $\forall x \in X$	8. CONDIÇÕES DE CONTORNO	$A(x) \cup \phi(x) = A(x)$, $A(x) \cup X(x) = X(x)$ $A(x) \cap \phi(x) = \phi(x)$, $A(x) \cap X(x) = A(x)$
4. COMUTATIVIDADE	$A(x) \cup B(x) = B(x) \cup A(x)$ $A(x) \cap B(x) = B(x) \cap A(x)$	9. INVOLUÇÃO	$\bar{\bar{A}}(x) = A(x)$, OU SEJA: $\bar{\bar{A}}(x) = \overline{(\bar{A}(x))} = \overline{(1 - A(x))} = A(x)$
5. ASSOCIATIVIDADE	$A(x) \cup (B(x) \cup C(x)) = (A(x) \cup B(x)) \cup C(x) =$ $= A(x) \cup B(x) \cup C(x)$ $A(x) \cap (B(x) \cap C(x)) = (A(x) \cap B(x)) \cap C(x) =$ $= A(x) \cap B(x) \cap C(x)$	10. TRANSITIVIDADE	$A(x) \subset B(x)$ E $B(x) \subset C(x) \Rightarrow A(x) \subset C(x)$

O CONJUNTO UNIVERSO X TEM FUNÇÃO CARACTERÍSTICA UNITÁRIA,
$X(x) = 1, \quad \forall x \in X;$

Operações com *fuzzy sets* – normas triangulares

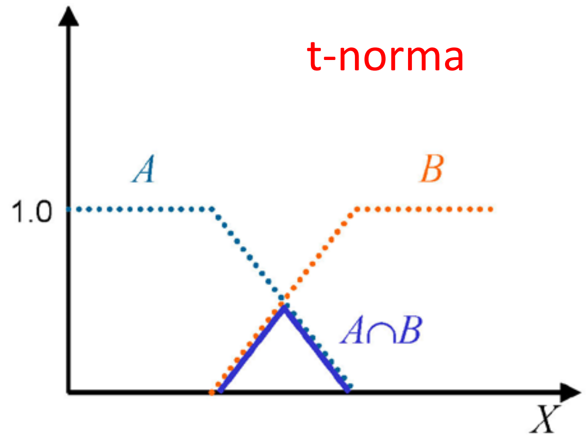
(operam 2 *fuzzy sets* resultando em um 3° *fuzzy set*):

Uma norma triangular **t-norma** é uma operação binária (no sentido de mapear 2 *fuzzy sets* em um 3° *fuzzy set*)

$t : [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$, ou seja $t: \underbrace{[0,1] \times [0,1]}_{\text{domínio}} \rightarrow \underbrace{[0,1]}_{\text{imagem}}$,

que satisfaça os seguintes requerimentos:

$xty = ytx$	Comutativa
$xt(ytz) = (xty)tz$	Associativa
Se $x \leq y$ e $w \leq z$, então $xtw \leq ytz$	Monotônica
$xt1 = x$ e $0tx = 0$	Contorno



$$(A \cap B)(x) = \min[A(x), B(x)] = A(x) \wedge B(x) \qquad \forall x \in X$$

t-norma mín modela intersecção

$A(x): X \rightarrow [0,1]$

operado com

$B(x): X \rightarrow [0,1]$

Mapeia $\rightarrow$ $(A \cap B)(x): X \rightarrow [0,1]$

Domínio $[0,1]^2$ $\rightarrow$ t-norma $\rightarrow$ Imagem $[0,1]$

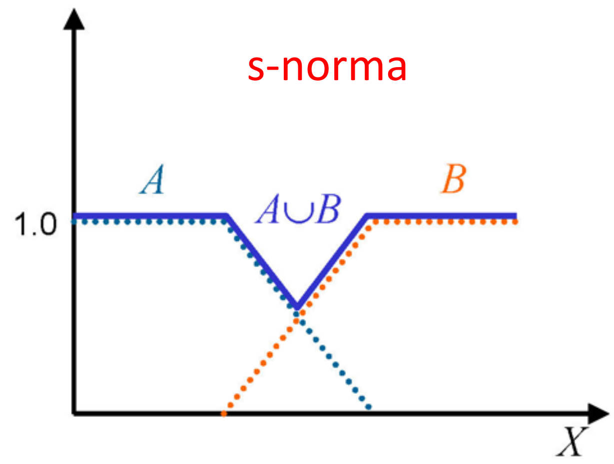
Operações com *fuzzy sets* – normas triangulares:

Uma norma triangular **s-norma** é uma operação binária

$s : [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$, ou seja $s: \underbrace{[0,1] \times [0,1]}_{\text{domínio}} \rightarrow \underbrace{[0,1]}_{\text{imagem}},$

que satisfaça os seguintes requerimentos:

$x s y = y s x$	Comutativa
$x s (y s z) = (x s y) s z$	Associativa
Se $x \leq y$ e $w \leq z$, então $x s w \leq y s z$	Monotônica
$x s 1 = 1$ *e* $0 s x = x$	Contorno



$$(A \cup B)(x) = \max[A(x), B(x)] = A(x) \vee B(x) \quad \forall x \in X$$

s-norma máx modela união

$A(x): X \rightarrow [0,1]$

operado com

$B(x): X \rightarrow [0,1]$

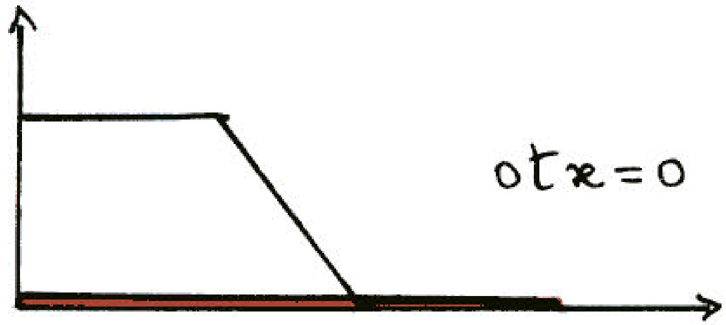
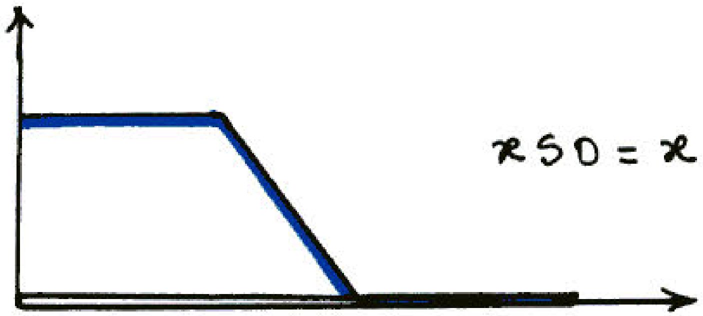
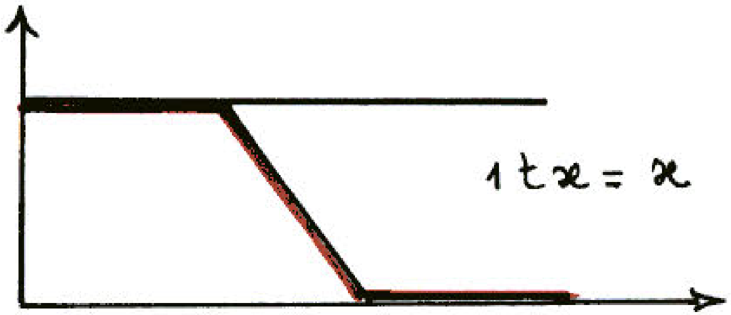
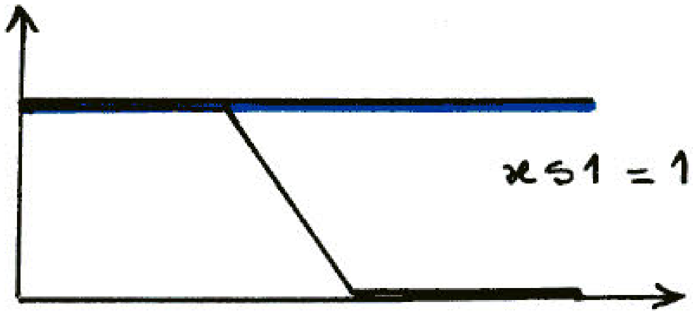
Mapeia → $(A \cup B)(x): X \rightarrow [0,1]$

Domínio $[0,1]^2$ → s-norma → Imagem $[0,1]$

Operações com *fuzzy sets* – normas triangulares:

As propriedades comutatividade, associatividade e monotonicidade são idênticas para t-normas e s-normas.

Propriedade condições de contorno para t-normas e s-normas:

<table>
<tr><th>t-norma (∧)→ operador min</th><th>s-norma (∨)→ operador max</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Exemplos de t-normas:

- $x\ t_1\ y = \dfrac{1}{1 + \sqrt[p]{((1-x)/x)^p + ((1-y)/y)^p}}, \quad p > 0$
- $x\ t_2\ y = \max(0, (1+p)(x+y-1) - pxy), \quad p \geq -1$
- $x\ t_3\ y = 1 - \min(1, \sqrt[p]{(1-x)^p + (1-y)^p}), \quad p > 0$
- $x\ t_4\ y = xy$
- $x\ t_5\ y = \dfrac{xy}{p + (1-p)(x+y-xy)}, \quad p \geq 0$
- $x\ t_6\ y = \dfrac{1}{\sqrt[p]{1/x^p + 1/y^p - 1}}$
- $x\ t_7\ y = \sqrt[p]{\max(0, x^p + y^p - 1)}, \quad p > 0$
- $x\ t_8\ y = \dfrac{xy}{\max(x, y, p)}, \quad p \in [0, 1]$
- $x\ t_9\ y = \log_p \left[1 + \dfrac{(p^x - 1)(p^y - 1)}{p - 1}\right], \quad p > 0, p \neq 1$
- $x\ t_{10}\ y = \dfrac{1}{1 + \sqrt[p]{((1-x)/x)^p + ((1-y)/y)^p}}, \quad p > 0$
- $x\ t_{11}\ y = \begin{cases} x, & \text{if } y = 1 \\ y, & \text{if } x = 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

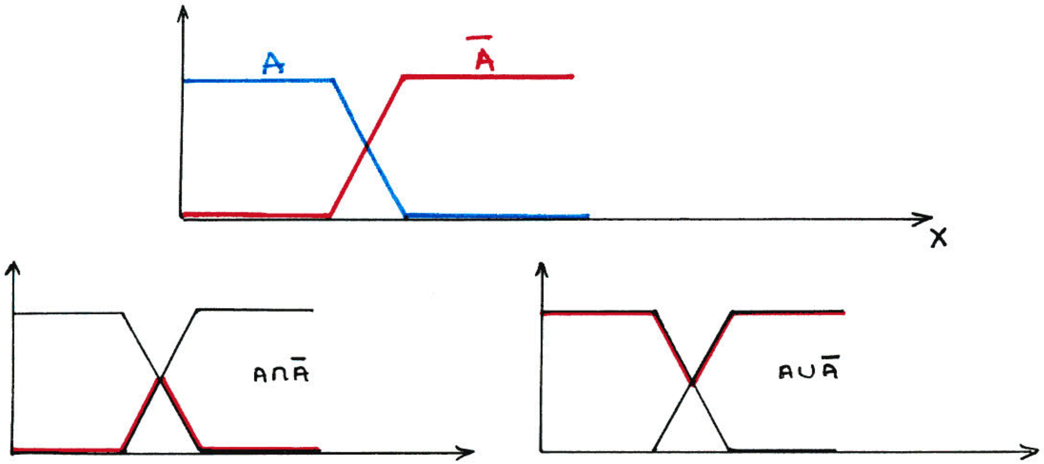
Exemplos de s-normas:

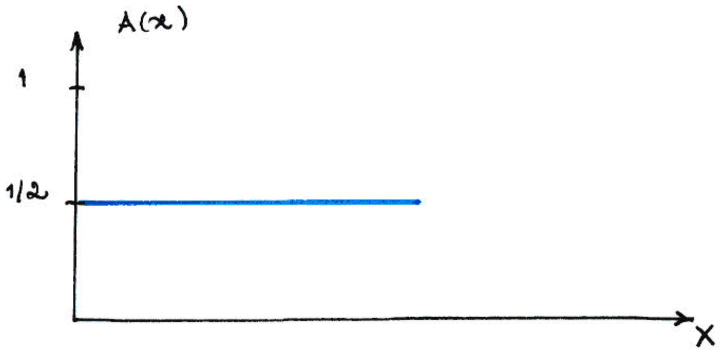
- $x \, s_1 \, y = \dfrac{1}{1 + \sqrt[p]{(x/1-x)^p + (y/1-y)^p}}, \quad p > 0$
- $x \, s_2 \, y = \min(1, x + y + pxy), \quad p \geq 0$
- $x \, s_2 \, y = \min(1, \sqrt[p]{x^p + y^p}), \quad p > 0$
- $x \, s_4 \, y = x + y - xy$
- $x \, s_5 \, y = \dfrac{x + y - xy - (1-p)xy}{1 - (1-p)xy}, \quad p \geq 0$
- $x \, s_6 \, y = 1 - \dfrac{1}{\sqrt[p]{1/(1-x)^p + 1/(1-x)^p - 1}}$
- $x \, s_7 \, y = 1 - \max(0, \sqrt[p]{((1-x)^p + (1-y)^p - 1)}), \quad p > 0$
- $x \, s_8 \, y = 1 - \dfrac{(1-x)(1-y)}{\max((1-x),(1-y),p)}, \quad p \in [0,1]$
- $x \, s_9 \, y = \log_p \left[1 + \dfrac{(p^{1-x} - 1)(p^{1-y} - 1)}{p - 1} \right], \quad p > 0, p \neq 1$
- $x \, s_{10} \, y = \dfrac{1}{1 - \sqrt[p]{(x/1-x)^p + (y/1-y)^p}}, \quad p > 0$
- $x \, s_{11} \, y = \begin{cases} x, & \text{if } y = 0 \\ y, & \text{if } x = 0 \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases}$

Leis da contradição:

Em geral, normas triangulares
não satisfazem as
leis da contradição, ou seja:

$A(x) \cap \overline{A}(x) \neq 0$ e $A(x) \cup \overline{A}(x) \neq X$





O $A(x)$ ao lado é o conjunto mais nebuloso dentre todos os *fuzzy sets* que podem ser definidos no universo de discurso X, pois tanto o operador min quanto o operador max retornam o mesmo valor para intersecção e união de A e $\overline{A}$:

$$\min [A(x), 1 - A(x)] = \min (½, ½) = ½$$
$$\max [A(x), 1 - A(x)] = \max (½, ½) = ½, \forall x \text{ em X.}$$

O grau de falha de um conjunto em satisfazer as leis da contradição indica o grau de nebulosidade do conjunto.

Variáveis Linguísticas:

Uma variável linguística é uma variável cujos valores são palavras ou sentenças, ao invés de números.

Temperatura = {muito baixa, baixa, média, alta, não baixa e não muito alta, muito alta, ...}

↑ Variável linguística

↑ Valores linguísticos

Velocidade =

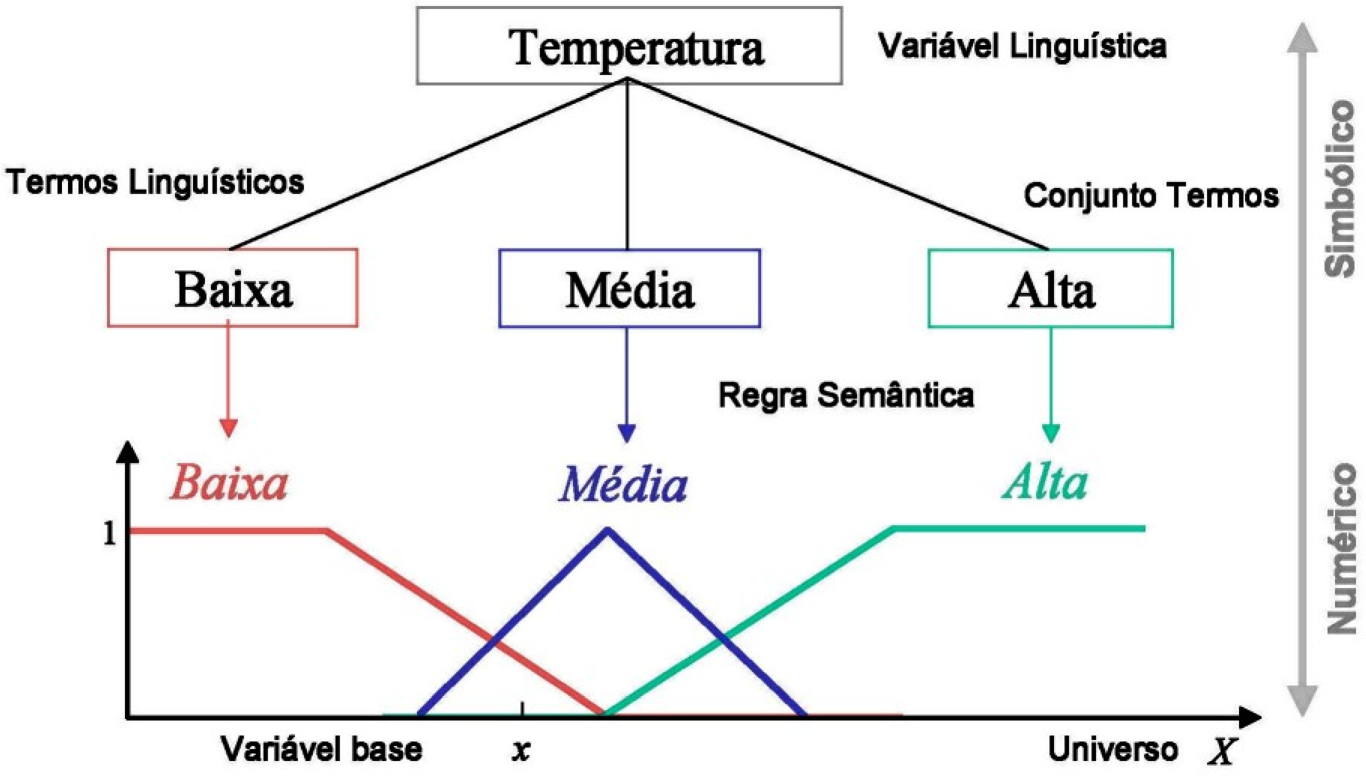
↑ Variável linguística

↑ Valores Linguísticos

Variável linguística representada por uma família de *fuzzy sets*:

Variável Linguística: Temperatura

Termos Linguísticos ou ***Labels*** (restrições impostas sobre a variável): Baixa, Média, Alta

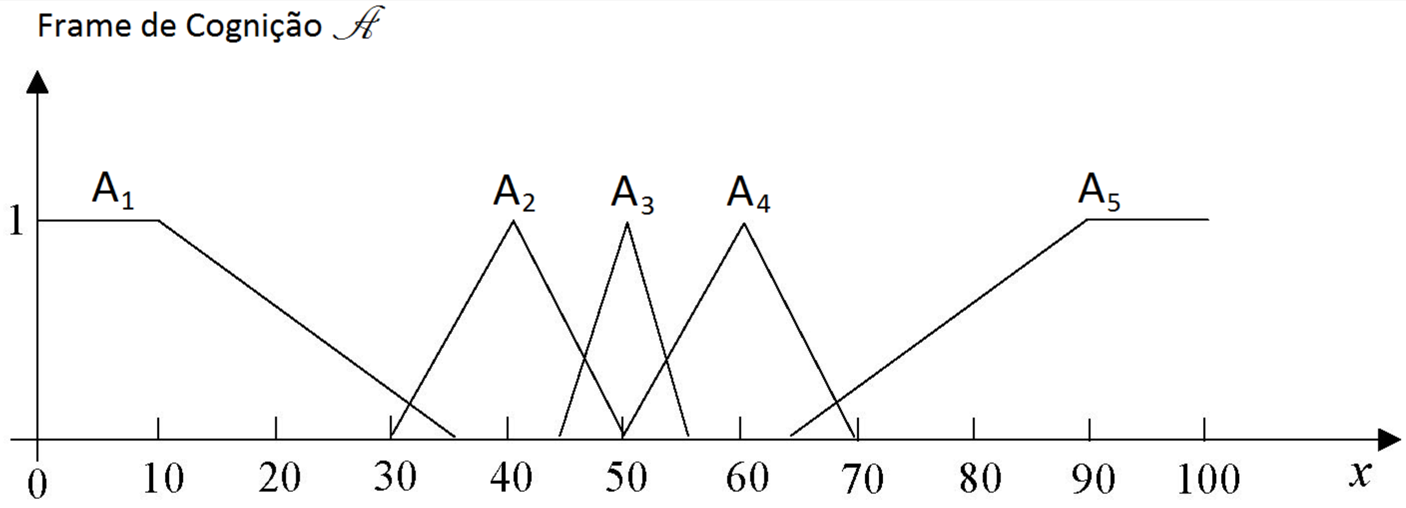


Modificadores dos Termos Linguísticos: conectivos (AND, OR); negação (NOT); hedges (muito, mais ou menos, pouco, ...)

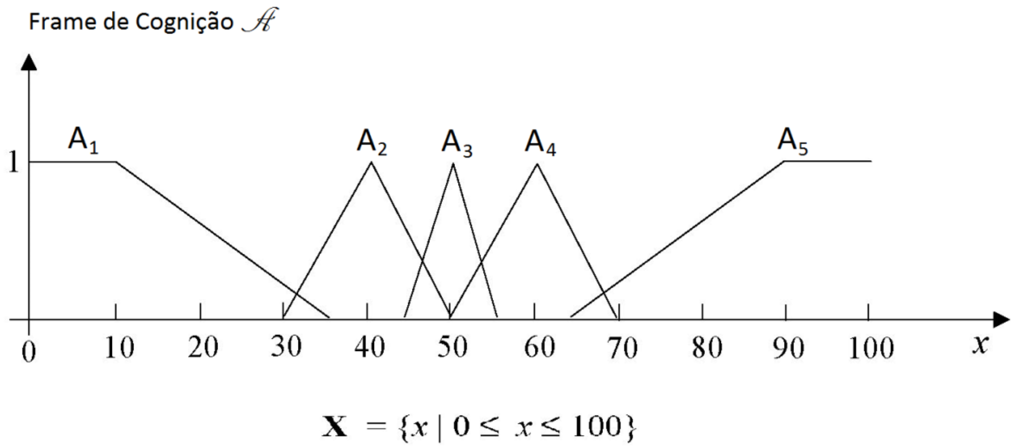
Frames de Cognição:

- Uma família de *fuzzy sets* (=família de funções de pertinência) geram o conceito de Frame de Cognição.
- Um Frame de Cognição granulariza a informação (**granularização = quantização nebulosa**)
- Um Frame de Cognição caracteriza uma variável linguística (pressão, temperatura, voltagem, etc...) representada pela família de *fuzzy sets*.

Um Frame de Cognição (ou moldura cognitiva) consiste de vários *fuzzy sets* normais (ver slide 20) usados como pontos de referência para o processamento de informação nebulosa.



$$\mathbf{X} = \{x \mid 0 \leq x \leq 100\}$$



Definição: Um Frame de Cognição $\mathcal{A}$ = {A_1, A_2, ..., A_n} é uma coleção de todos os *fuzzy sets* definidos no mesmo universo de discurso X que satisfazem as seguintes condições:

1. Cobertura:

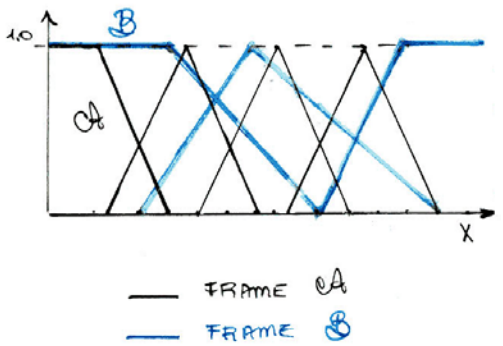
   $\forall x \in X \; \exists \; A_i(x) > \varepsilon \in [0,1]$, i= 1, ..., n

   ε: nível de cobertura; $\varepsilon \in [0,1]$.

   Cada elemento de x pertence a, no mínimo, um *fuzzy set*, com um grau maior do que ε.

2. Relevância Semântica:

   Interpretabilidade linguística dos elementos de $\mathcal{A}$.



- Os A_i são unimodais (um único valor para o máximo da função A_i);
- Os A_i são normais (o máximo é unitário);
- Os A_i são suficientemente disjuntos para que os *fuzzy sets* sejam linguisticamente significativos;
- Usualmente a cardinalidade #A é pequena ($5 \leq \#A \leq 9$) – *rule of thumb*: número de A_i's empiricamente adequado = 7

Codificação e Decodificação Nebulosa

Codificação ≡ Fuzzyficação

Representação de qualquer dado (numérico ou não) em termos de um "codebook" A".

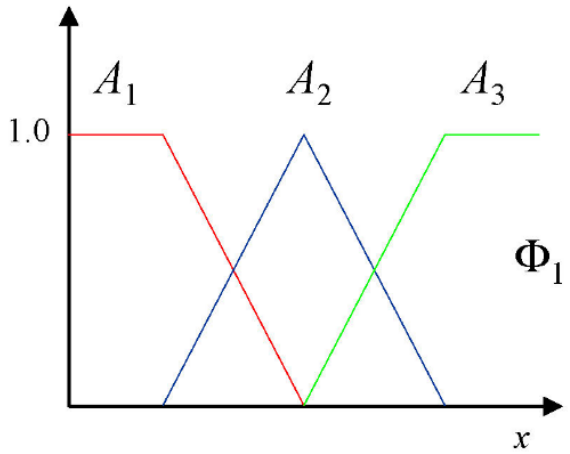
Decodificação ≡ Defuzzyficação

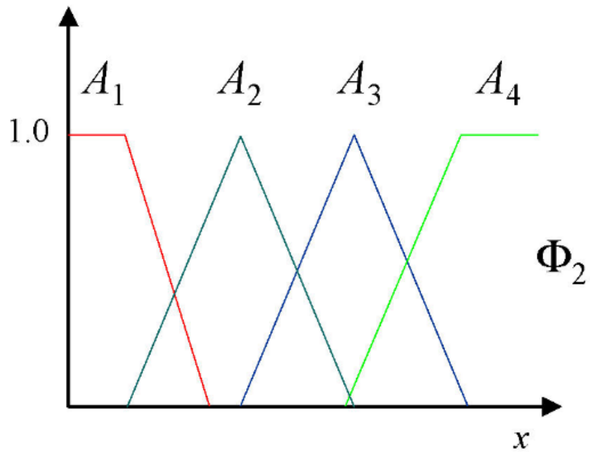
Transformar o "codebook" A de volta a seu formato original.

Os mecanismos de codificação (F) e decodificação (F^{-1}) devem ser univocamente reversíveis (i.e., $F^{-1}(F(X)) = X$, onde X é o universo de discurso).

Codificação: A qualidade da codificação depende da granularidade imposta ao frame de cognição, a qual depende da natureza do problema tratado.

A figura abaixo apresenta duas codificações distintas Φ_1 e Φ_2 , resultando em dois frames de cognição de diferentes granularidades, sendo a granularidade da codificação Φ_2 maior do que a granularidade da codificação Φ_1:





Decodificação: Há duas categorias de algoritmos para decodificação (ou defuzzyficação):

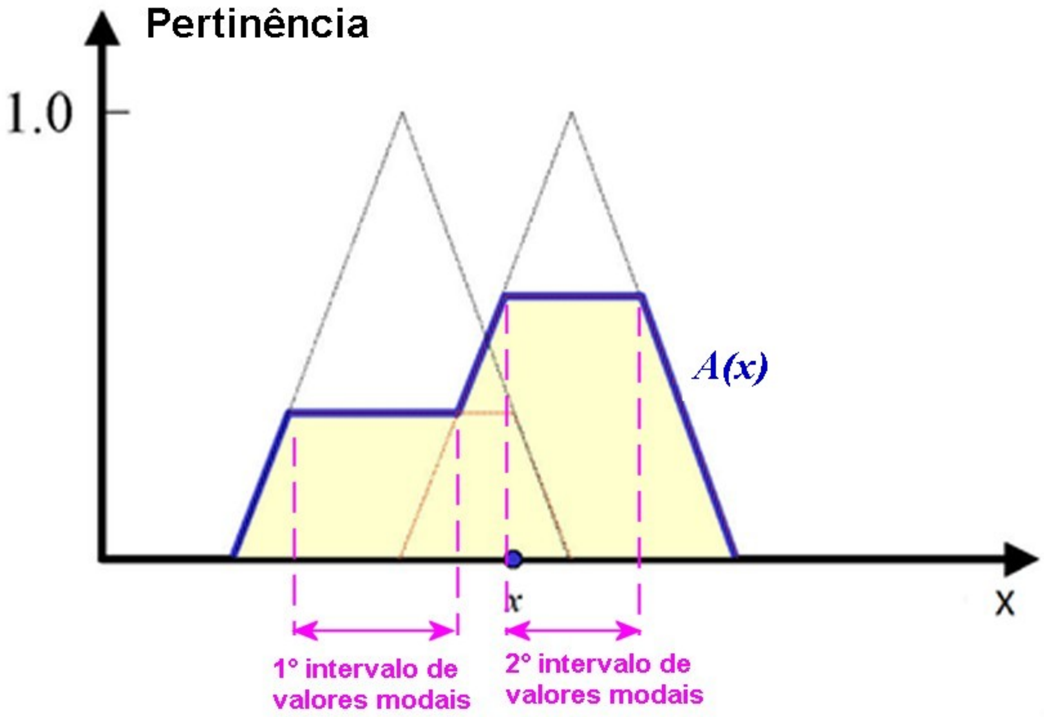
1. Decodificação baseada em **valores modais** do "*codebook*" (**valores modais** – valores em um intervalo do universo de discurso X para os quais os valores de pertinência são uma constante não nula que expressa o máximo da pertinência no intervalo).

Decodificação por **Centro de Gravidade** (com base nos valores modais):

$$F^{-1}(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} A(a_i)a_i}{\sum_{i=1}^{n} A(a_i)}$$

onde a_i denota o i-ésimo valor modal dentre os n valores valores modais de $A(x)$ no intervalo.

Esta abordagem produz um valor aproximado de x, cuja precisão é função do número n de valores modais considerados na expressão acima.

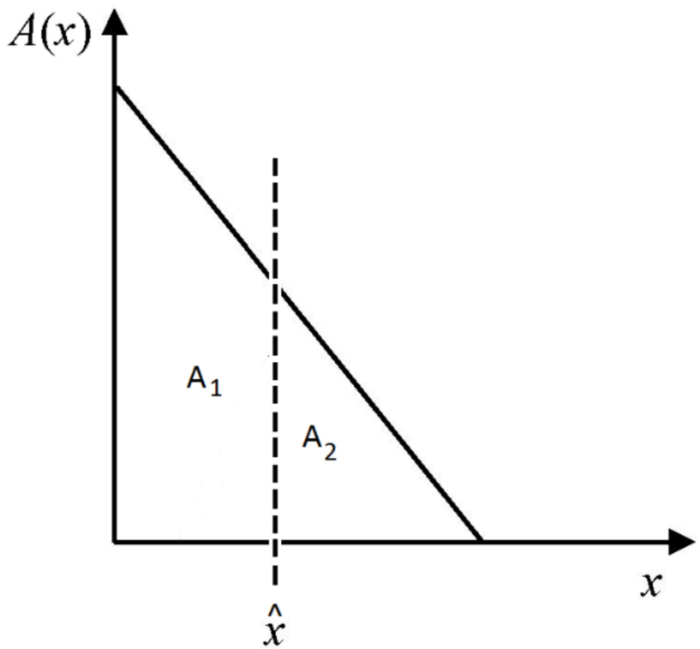


2. Decodificação baseada nas funções de pertinência do "*codebook*".

Decodificação pelo método do **Centro de Área** (CoA)

O valor decodificado $\hat{x}$ é tal que resulta na igualdade entre as áreas A_1 e A_2 na figura ao, ou seja:

$$\int_{-\infty}^{\hat{x}} A(x)dx = \int_{\hat{x}}^{\infty} A(x)dx$$



Operando com variáveis linguísticas:

Por meio de Variáveis Linguísticas e Regras de inferência *fuzzy*, afirmações do tipo
"Se (IF) a temperatura é alta e (AND) a umidade é baixa, então (THEN) o conforto térmico é médio."
podem ser computadas.

As operações lógicas entre os conceitos linguísticos expressos por dois *fuzzy sets* A e B são definidas pelas relações lógicas AND, OR e NOT :

AND define a Intersecção $\mathbf{A \cap B}$
OR define a União $\mathbf{A \cup B}$
NOT define o Complemento $\overline{\mathbf{A}}$

Lembrando dos slides 26 e 27 que:

t-norma (∧)→ operador min	s-norma (∨)→ operador max
$\mathbf{A \cap B = AtB = A \wedge B}$	$\mathbf{A \cup B = AsB = A \vee B}$

Portanto, o significado semântico de um termo composto pode ser computado de forma direta:

Temperatura (variável linguística) = Não Baixa e Não Muito Alta (valor linguístico)
Não Baixa e Não Muito Alta = $\overline{\text{Baixa}} \cap \overline{\text{Muito Alta}}$

Temperatura (variável linguística) = Muito Alta ou Alta (valor linguístico)
Muito Alta ou Alta = $\text{Muito Alta} \cup \text{Alta}$

Operando com variáveis linguísticas – Regras de inferência *fuzzy*:

Dado um conjunto de dados de entrada (proposições), regras *fuzzy* proveem mecanismo para computar ações resultantes (afirmações, inferências) através de regras **IF-THEN** (se-então).

Uma regra *fuzzy* relaciona n variáveis linguísticas antecedentes X_1, X_2, ..., X_n, a m variáveis linguísticas consequentes Y_1, Y_2, ..., Y_m, e tem a forma:

$$\textbf{IF } \overbrace{X_1 \text{ é } A_1 \textbf{ AND } X_2 \text{ é } A_2 \textbf{ AND } \dots\ X_n \text{ é } A_n}^{\text{proposições}} \textbf{ THEN}$$

$$\underbrace{Y_1 \text{ é } B_1 \textbf{ AND } Y_2 \text{ é } B_2 \textbf{ AND } \dots\ Y_m \text{ é } B_m}_{\text{ações resultantes}}$$

onde **X_i** e **Y_j** são as <u>variáveis linguísticas</u> e **A_i** e B_j são seus respectivos <u>valores linguísticos</u>, sendo $\mathrm{i} = 1,2, \cdots \mathrm{n}$ e $\mathbf{j = 1, 2, \cdots m}$.

<u>Exemplo:</u>

IF TemperaturaDoGas é MuitoAlta AND PressaoDoGas é Media THEN AberturaDaValvula é QuaseTotal AND PotenciaCompressorRefrigeracao é Alta

Computando com variáveis linguísticas e regras de inferência *fuzzy*:

Seja uma coleção de N regras fuzzy da forma:

IF X é A_i AND Y é B_i, THEN Z é C_i,

onde A_i, B_i, C_i, $i = 1, ..., N$ são *fuzzy sets* e X, Y, Z são os respectivos universos de discurso.

O valor de C inferido a partir da proposição "X é A AND Y é B" é obtido por uma Regra de Agregação (usualmente implementada pelo operador max) aplicado sobre uma Regra Composicional de Inferência , que usualmente é a t-norma min (Método de Mamdani) ou o produto algébrico (Método de Larsen), conforme:

$m_i = A_i(a) \wedge B_i(b)$, sendo a e b as variáveis de entrada, $a \in X$ e $b \in Y$.

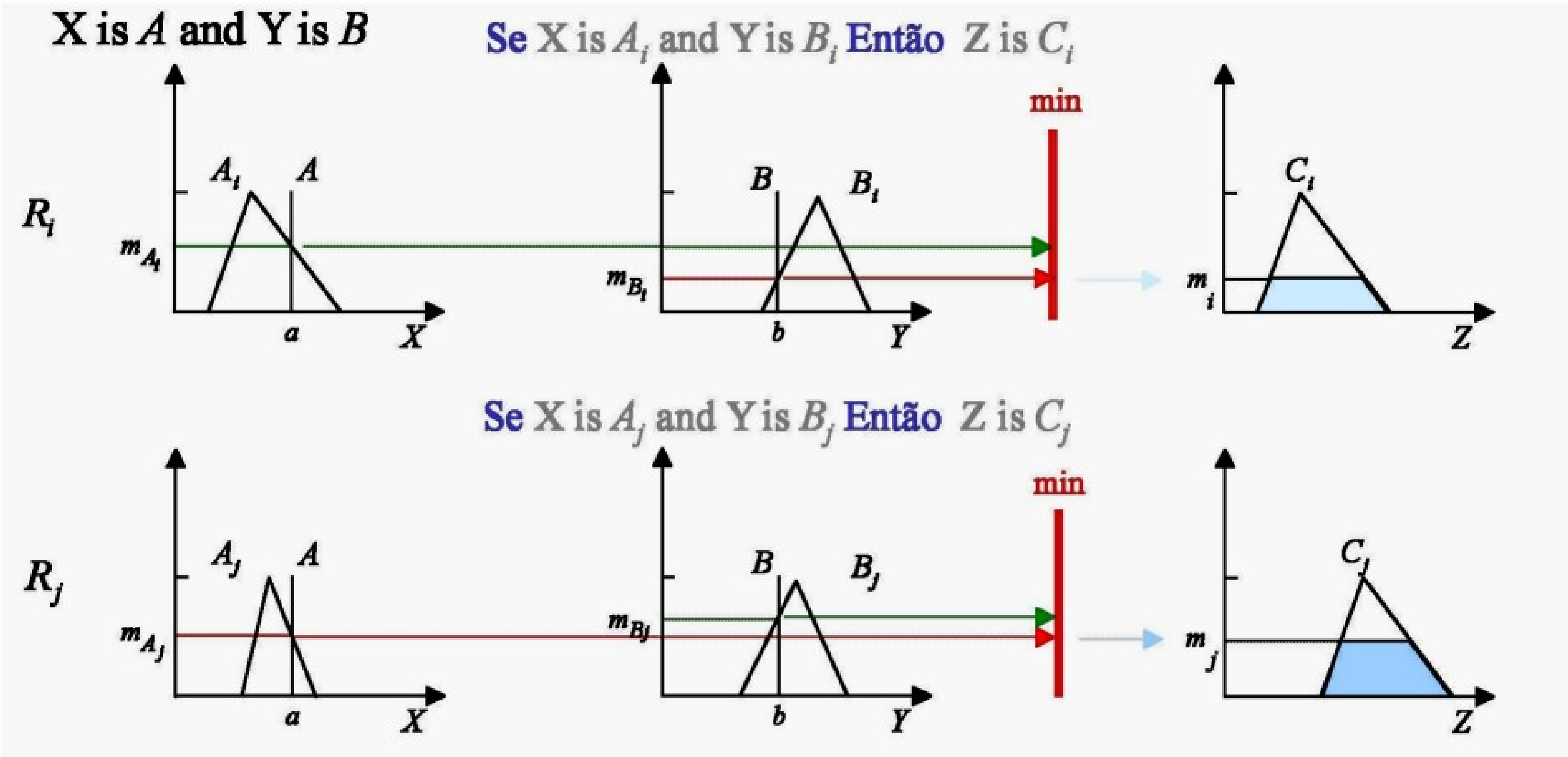
Mamdani (sup-min): $C(z) = \max [m_i \wedge C_i(z) \text{ , } i = 1, ..., N], \forall z \in Z$

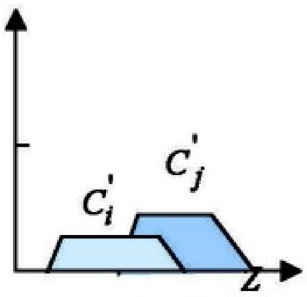
Larsen: $C(z) = \max [m_i \,.\, C_i(z) \text{ , } i = 1, ..., N], \forall z \in Z$

Método de Mamdani

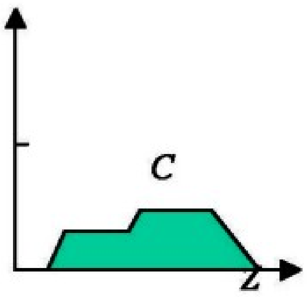
O valor de entrada “a” determina dois *fuzzy sets* adjacentes A_i e A_j no frame de cognição A, aos quais “a” tem pertinência não nula.

O valor de entrada “b” determina dois *fuzzy sets* adjacentes B_i e B_j no frame de cognição B, aos quais “b” tem pertinência não nula.





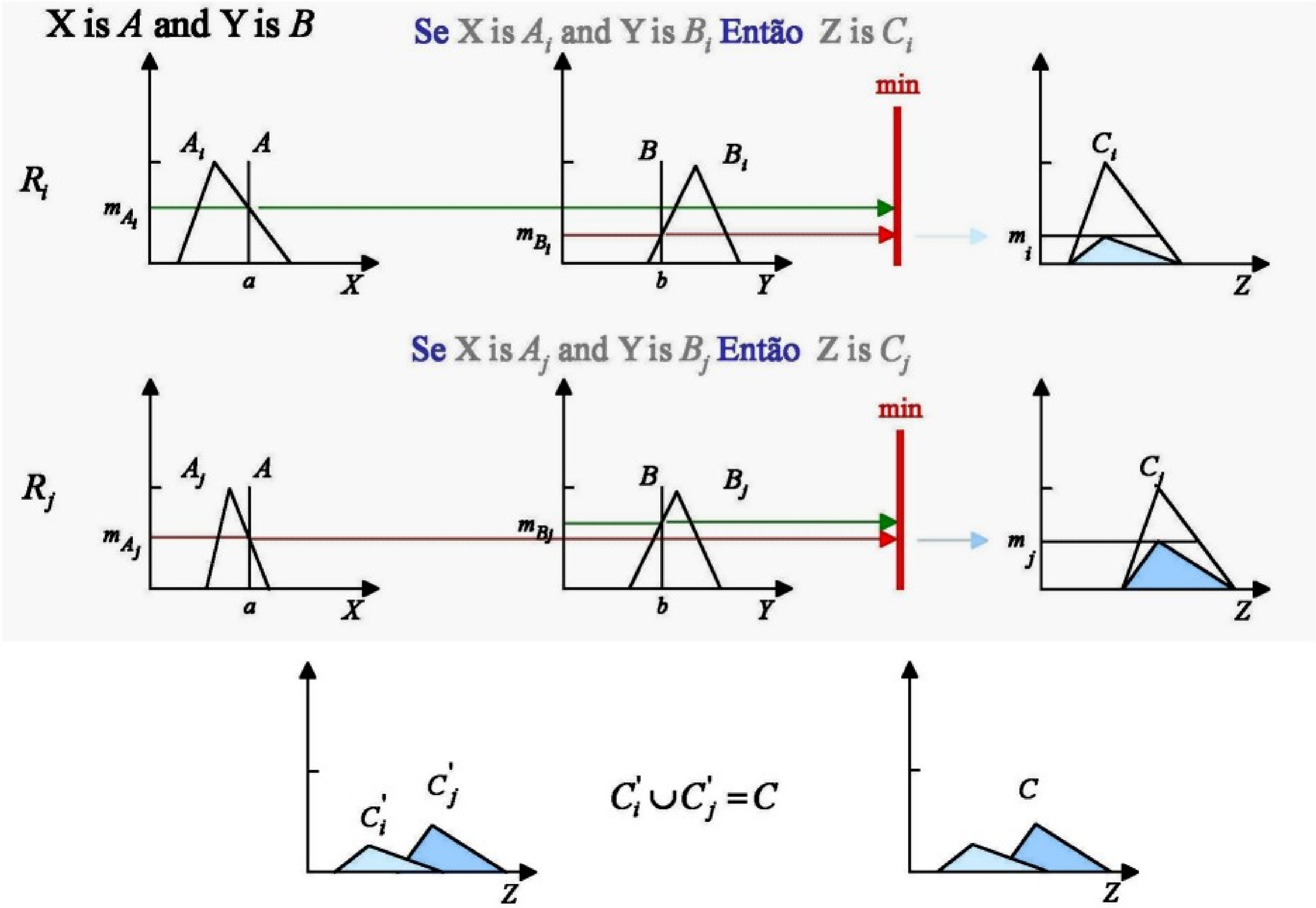
$$C'_i \cup C'_j = C$$



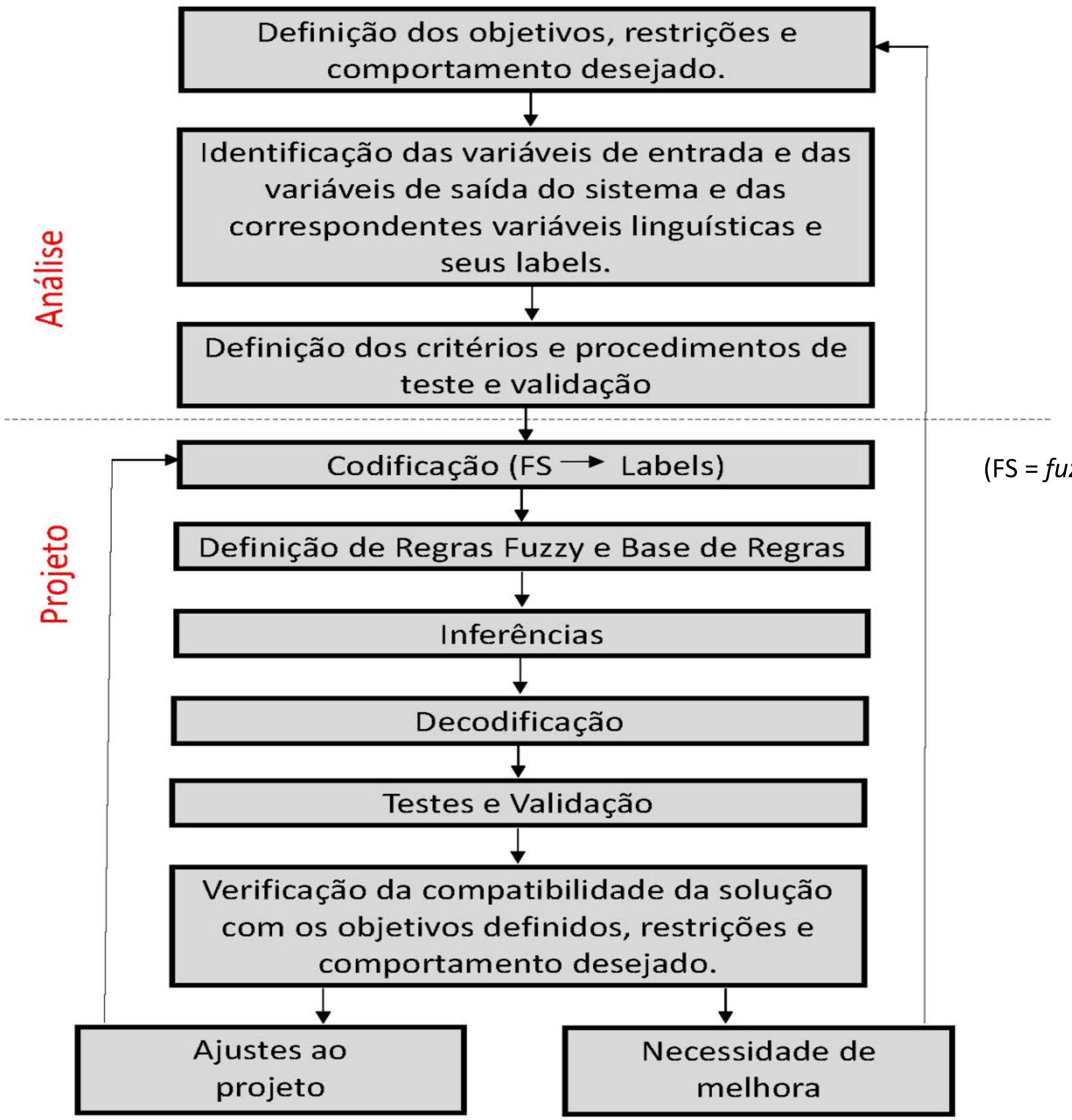
Método de Larsen

O valor de entrada “a” determina dois *fuzzy sets* adjacentes A_i e A_j no frame de cognição A, aos quais “a” tem pertinência não nula.

O valor de entrada “b” determina dois *fuzzy sets* adjacentes B_i e B_j no frame de cognição B, aos quais “b” tem pertinência não nula.



Metodologia p/ projeto e análise de controladores *fuzzy*:



(FS = *fuzzy set*)

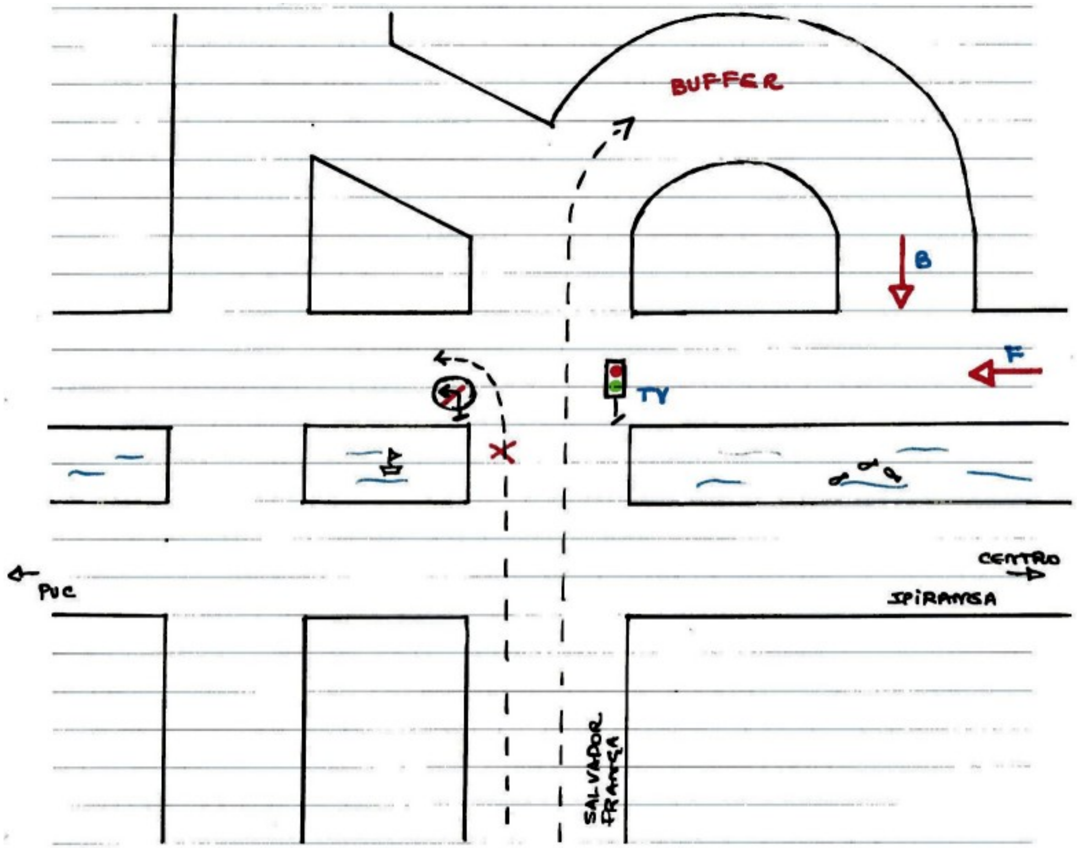
Estudo de Caso - Controlador *fuzzy* p/ semáforo:

Controlador *fuzzy* p/ semáforo:

Deseja-se utilizar um Controlador Fuzzy para definir o tempo de permanência do sinal verde na sinaleira presente na esquina das Avenidas Ipiranga e Salvador França.

Objetivo:

Minimizar o congestionamento do tráfego de veículos, ajustando os intervalos de abertura e fechamento do cruzamento, de acordo com a presença de veículos nos acessos críticos do cruzamento das avenidas.



Labels das variáveis de entrada e de saída:

Variáveis de entrada:

Ocupação do Buffer (Alça = Acesso Crítico 1) → B
Tamanho da Fila na Av. Ipiranga (Acesso Crítico 2) →F

Variáveis de saída:

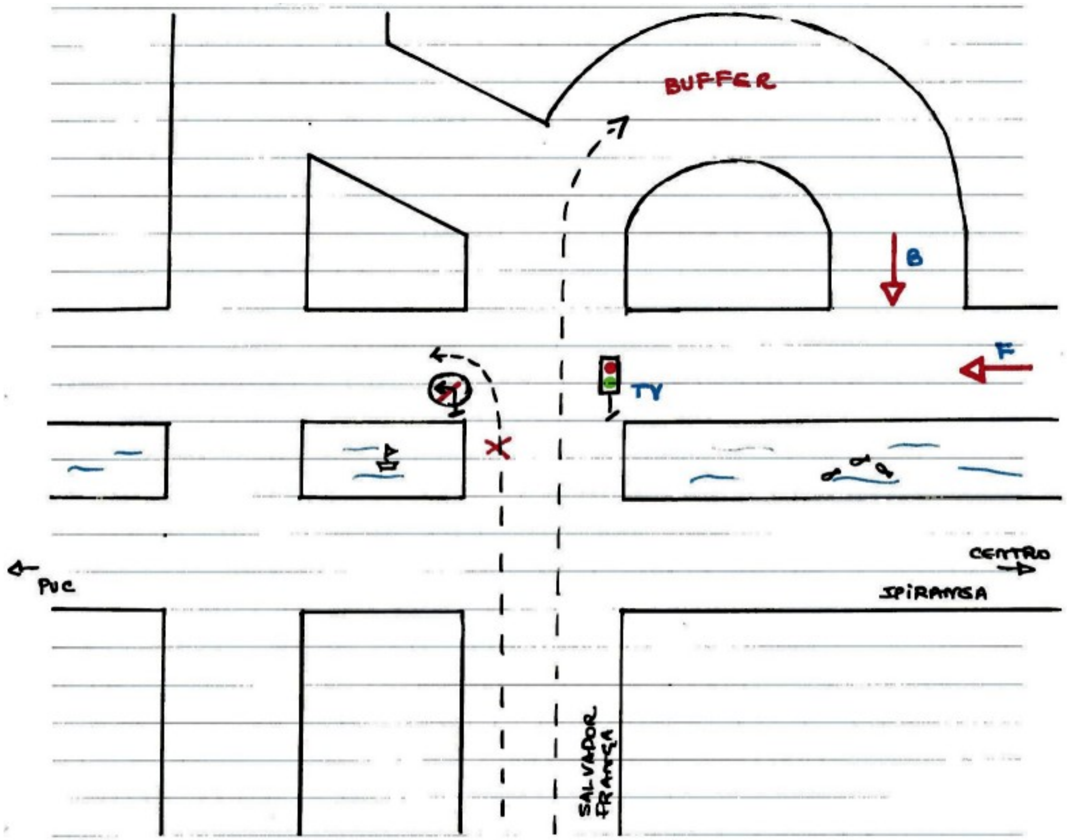
Tempo de Permanência no Verde → TV

Labels das variáveis linguísticas:

B = {Cheio, Parcialmente Cheio, Médio, Parcialmente Vazio, Vazio} = {C, PC, MB, PV, V}
F = {Absurdamente Grande, Grande, Média, Pequena, Inacreditavelmente Pequena} = {A, G, MF, P, I}
TV = {Máximo, Médio Grande (>Médio), Médio, Médio Pequeno (<Médio), Mínimo} = {Max, MG, MTV, MP, Min}

Critérios de Teste e Validação:

- Verificação no local das condições de tráfego, com e sem o uso do Controlador Fuzzy;
- Medida do tempo médio de espera/veículo/horário/...

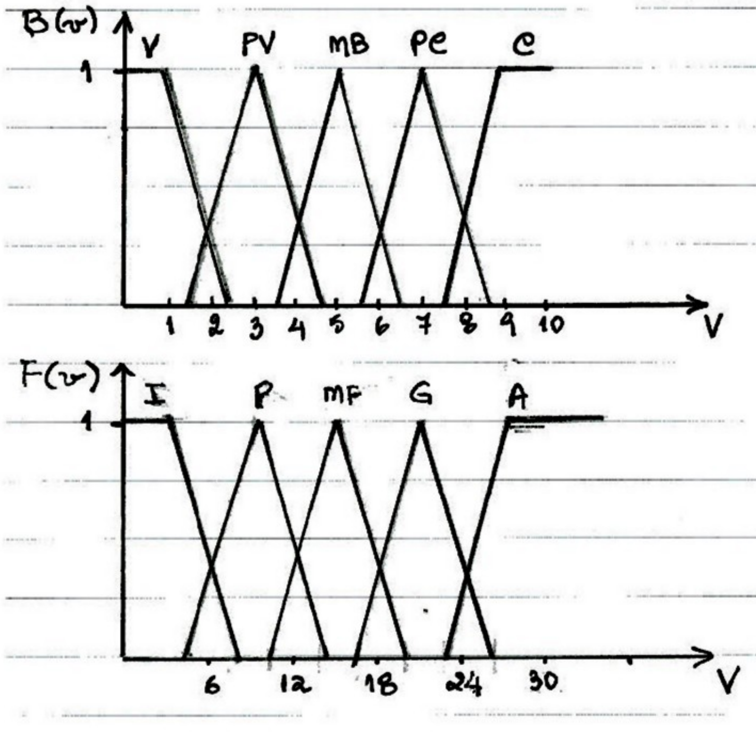


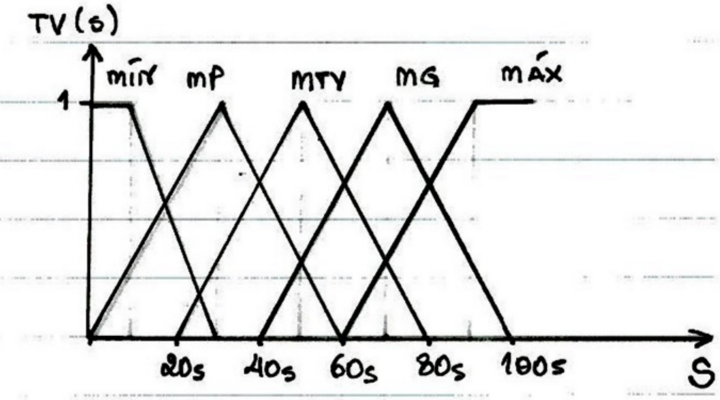
Codificação (resultante da observação dos valores numéricos do problema):

B = {Cheio, Parcialmente Cheio, Médio, Parcialmente Vazio, Vazio} = {C, PC, MB, PV, V}

F = {Absurdamente Grande, Grande, Média, Pequena, Inacreditavelmente Pequena} = {A, G, MF, P, I}

TV = {Máximo, Médio Grande (>Médio), Médio, Médio Pequeno (<Médio), Mínimo} = {Max, MG, MTV, MP, Min}





OBS: OS UNIVERSOS DE DISCURSO DE B E F PODEM CONTER NºS NÃO INTEIROS (P.EXPLO, O ESPAÇO DE VISUALIZAÇÃO DE UM CONTADOR PODE CONTER 1,7 VEÍCULOS)

Definição das regras e Base de regras *fuzzy*:

Regra 1	→	"Se o Buffer é Cheio e a Fila é Absurdamente Grande, então o Tempo de Permanência no Verde é Máximo" "Se B é C e F é A, então TV é Max"
Regra 2	→	"Se o Buffer é Médio e a Fila é Média, então o Tempo de Permanência no Verde é Médio" "Se B é MB e F é MF, então TV é MTV"
Regra 3	→	"Se o Buffer é Parcialmente Cheio e a Fila é Pequena, então o Tempo de Permanência no Verde é Médio Pequeno" "Se B é PC e F é P, então TV é MP"

...

Regra n	→	...

Base de regras *fuzzy* resultante:

B \ F	A	G	MF	P	I
C	Max	Max	MG	MTV	MTV
PC	Max	Max	MG	MP	MP
MB	MG	MG	MTV	MP	MP
PV	MG	MG	MP	Min	Min
V	MTV	MTV	MP	Min	Min

TV

Inferência do valor da variável de saída TV (Tempo de Permanência no Verde) sendo dado os valores para variáveis de entrada B (Ocupação do Buffer) e F (Tamanho da Fila na Av. Ipiranga):

Por exemplo, se B=4.3 e F=16.5 qual valor resulta para TV?

Regra Fuzzy:

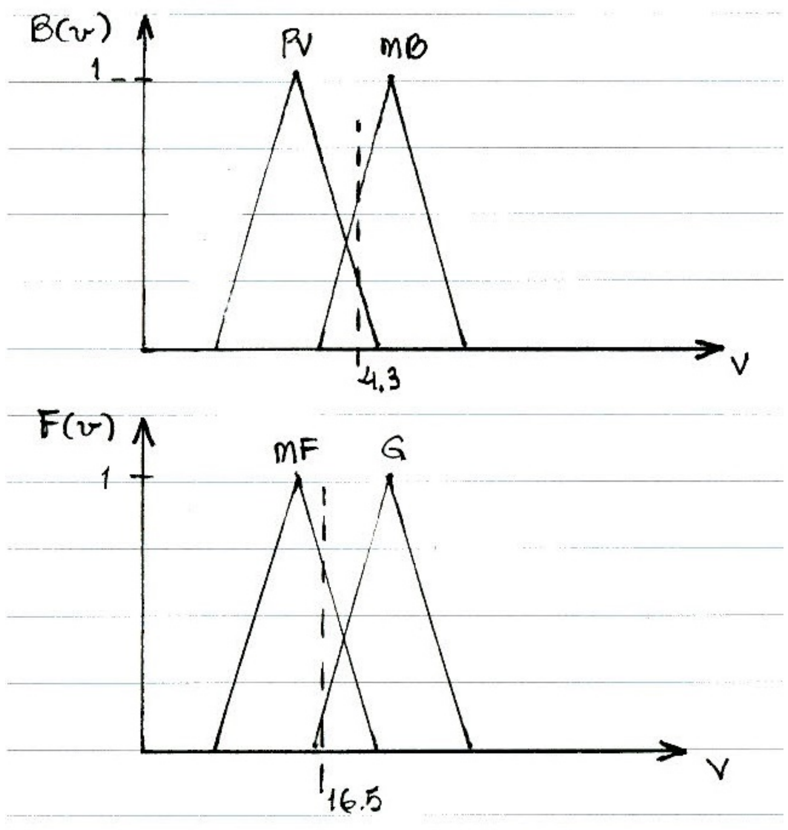
Se <u>B é 4.3</u> e <u>F é 16.5</u>, então <u>TV é ?</u>

Procedimento a ser adotado:

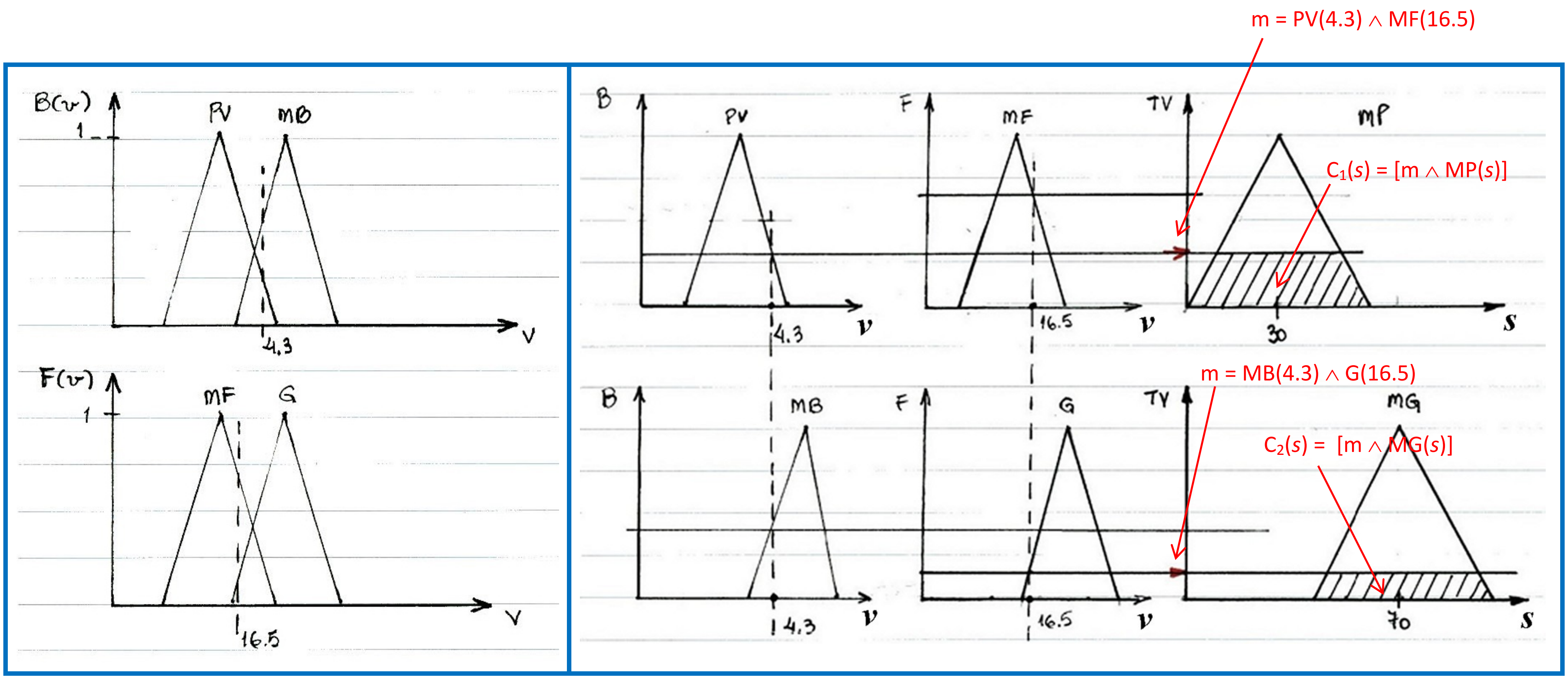
Conjunção: Mamdani

Agregação: Operador Max

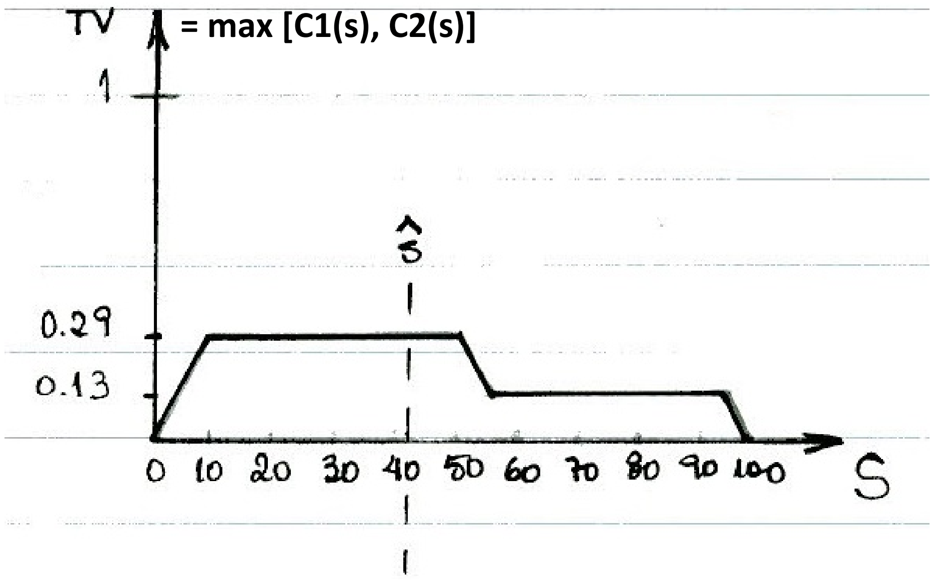
Defuzzyficação: Centro de Gravidade



Conjunção (Mamdani):



Agregação max [C1(s), C2(s)] e Decodificação por Centro de Gravidade:



$$\hat{s} = F^{-1}(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} A(a_i)a_i}{\sum_{i=1}^{n} A(a_i)}$$

(ver slide 37)

$\hat{s}$=[0.29 (10+20+30+40+50) + 0.13 (60+70+80+90)] / [5 (0.29)+4 (0.13)]

$\hat{s} = 41.88 \approx 42$

Se B é 4.3 e F é 16.5, então TV é 42.