

Capítulo II

O Irradiador Eletromagnético Elementar

1 Introdução

No presente capítulo estudaremos formalmente o irradiador eletromagnético mais elementar possível, que é aquele constituído por um único elemento de corrente de tamanho infinitesimal, ou pelo menos de tamanho muito menor do que o comprimento de onda de operação λ .

O interesse no estudo do irradiador elementar resulta do fato de a estrutura geométrica irradiante de qualquer antena transmissora sempre poder ser decomposta em uma infinidade de elementos de corrente (de condução e/ou deslocamento) com tamanho infinitesimal $d\ell$.

A denominação dada a este irradiador eletromagnético elementar é **Dipolo Curto**. Assim, a estrutura geométrica irradiante de qualquer antena transmissora sempre pode ser decomposta em uma infinidade de dipolos curtos. Neste contexto, o objetivo deste capítulo é determinar as expressões analíticas da distribuição no espaço \mathcal{R}^3 dos campos \underline{E} e \underline{H} de um dipolo curto.

Os campos \underline{E} e \underline{H} de qualquer antena real podem ser obtidos como uma composição vetorial dos campos \underline{E} e \underline{H} gerados pela infinidade de dipolos curtos que a compõe. Daí a importância do estudo do irradiador eletromagnético elementar.

Na prática, uma antena é considerada como um dipolo curto quando seu comprimento total L é tal que $L \leq 0.1\lambda$. Embora um tamanho de 0.1λ não represente um tamanho infinitesimal, veremos que as expressões aqui desenvolvidas são válidas para $L \leq 0.1\lambda$ desde que tomemos o cuidado de **não** assumir a distribuição espacial de corrente no dipolo como uniforme (= constante no espaço). A distribuição de corrente uniforme efetivamente ocorre quando o dipolo é de tamanho infinitesimal, mas não é válida quando o dipolo possui dimensões finitas, como é o caso de um dipolo de tamanho 0.1λ .

O Capítulo II inicia com a apresentação das Equações de Maxwell envolvidas no processo de irradiação eletromagnética. É apresentado o conceito de **Potencial Retardado**, que, conforme veremos, é o ponto de partida para a obtenção das expressões analíticas da distribuição no espaço \mathcal{R}^3 dos campos \underline{E} e \underline{H} de uma antena. A seguir, são deduzidas as equações de irradiação para as regiões denominadas **Campo Próximo** e **Campo Distante** do dipolo curto. Estas são regiões do espaço \mathcal{R}^3 ao redor de uma antena nas quais os campos \underline{E} e \underline{H} possuem comportamentos específicos, diferenciados por região. Finalmente, é apresentado o conceito de **Fluxo de Potência** de um irradiador e é determinada a **Resistência de Radiação** de um dipolo curto.

2 Equações de Maxwell

Três são as Equações de Maxwell diretamente envolvidas no processo de irradiação eletromagnética como um todo. Para fins de sistematização, consideraremos cada uma delas como descritoras de um sub-processo de irradiação, sub-processo que ocorre em um irradiador eletromagnético.

2.1 Geração de Campo Elétrico \underline{E} a partir de Carga Elétrica

Este sub-processo que ocorre em um irradiador eletromagnético é regido pela assim chamada Primeira Equação de Maxwell em Divergente:

Forma Integral	Forma Diferencial ($\underline{V} \rightarrow 0 \Rightarrow S \rightarrow 0$)	(1)
$\iint_S \underline{E} \cdot d\underline{S} = \frac{1}{\epsilon} \iiint_V \rho dV$	$\underline{\nabla} \cdot \underline{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$	

e é resultante da Lei de Gauss, já discutida no Capítulo I. Na Equação (1) ϵ é a permissividade elétrica do meio onde encontra-se o irradiador, ρ é a densidade volumétrica de cargas elétricas no interior da estrutura geométrica condutora do irradiador, medida em $\left[\frac{C}{m^3} \right]$, S é uma superfície imaginária fechada que envolve a superfície externa da estrutura geométrica condutora do irradiador e V é o volume delimitado por S . A operação $\underline{\nabla} \cdot \underline{E}$ é denominada de **Divergente de \underline{E}** ¹.

Observe que (1) é válida para qualquer superfície fechada S , de modo que podemos definir S como uma superfície arbitrária fechada que envolve a superfície externa da estrutura condutora, sendo as duas superfícies separadas por uma distância também arbitrária.

A análise de (1) é como segue:

- (I) Um campo elétrico $\underline{E}(x, y, z)$ é gerado em cada ponto da superfície S como consequência da soma de todas as cargas elétricas distribuídas com densidade volumétrica $\rho(x, y, z)$ no volume V delimitado por S .

¹Assim como $\underline{\nabla} \times \underline{U}(x, y, z)$ é interpretada como uma medida da vorticidade nas linhas de um campo vetorial \underline{U} em um ponto $p(x, y, z)$ do espaço \mathfrak{R}^3 (ver Seção 3 do Capítulo I), a operação $\underline{\nabla} \cdot \underline{U}(x, y, z)$ é interpretada como uma medida da “intensidade de criação” das linhas de \underline{U} em $p(x, y, z)$. O termo “intensidade de criação” pode soar de modo desagradável, no entanto “criar linhas” de um campo \underline{U} em um ponto $p(x, y, z)$ é exatamente o processo que ocorre quando existe uma fonte ou sumidouro do campo \underline{U} em $p(x, y, z)$. Portanto, $\underline{\nabla} \cdot \underline{U}(x, y, z) > 0$ mede a intensidade com que uma fonte do campo \underline{U} localizada em $p(x, y, z)$ “jorra” linhas de \underline{U} para dentro do espaço \mathfrak{R}^3 assim como $\underline{\nabla} \cdot \underline{U}(x, y, z) < 0$ mede a intensidade com que um sumidouro do campo \underline{U} localizado em $p(x, y, z)$ “aspira” linhas de \underline{U} para fora do espaço \mathfrak{R}^3 . Por exemplo, para o caso do campo magnético \underline{H} , o divergente $\underline{\nabla} \cdot \underline{H}(x, y, z)$ é nulo para todo ponto $p(x, y, z)$ do espaço \mathfrak{R}^3 porque, conforme discutido na Seção 2.2.3 do Capítulo I, não existe outra maneira de ser gerado um campo magnético \underline{H} exceto por movimento rotacional (vorticidade) no fluído Éter. Assim, as linhas de \underline{H} não tem início nem fim, sendo fechadas sobre si mesmas.

- (II) Se ρ varia com o tempo, a consequência imediata é que campo elétrico \underline{E} também varia com o tempo, isto é, $\underline{E} = \underline{E}(x, y, z, t)$.
- (III) Se ρ varia com o tempo, implicitamente significa que correntes elétricas com densidade volumétrica $J_v(x, y, z, t) = \frac{\partial \rho(x, y, z, t)}{\partial t} \left[\frac{C}{s \cdot m^3} \right] (= \left[\frac{A}{m^3} \right])$ percorrem o volume V , originando $\rho = \rho(x, y, z, t)$.

A Equação (1) é a responsável pelas componentes E_x e E_z do campo elétrico \underline{E} mostrado na Figura 34 do Capítulo I.

2.2 Geração de Campo Elétrico \underline{E} a partir de Campo Magnético \underline{H} variante no tempo

Este sub-processo que ocorre em um irradiador eletromagnético é regido pela assim chamada Primeira Equação de Maxwell em Rotacional:

Forma Integral	Forma Diferencial ($S \rightarrow 0 \Rightarrow C \rightarrow 0$)	
$\oint_C \underline{E} \cdot d\underline{l} = -\mu \iint_S \frac{\partial \underline{H}}{\partial t} \cdot d\underline{S}$	$\nabla \times \underline{E} = -\mu \frac{\partial \underline{H}}{\partial t}$	(2)

e é resultante da Lei de Faraday, já discutida no Capítulo I. Na Equação (2) μ é a permeabilidade magnética do meio onde encontra-se o irradiador, S é uma superfície imaginária não-fechada que é atravessada por linhas de campo magnético \underline{H} geradas no irradiador e C é o contorno fechado que delimita as bordas extremas de S . Note que a forma geométrica e as coordenadas que posicionam S no espaço \mathfrak{R}^3 são totalmente arbitrárias para efeito da validade de (2).

A análise de (2) é como segue:

- (I) Um campo elétrico $\underline{E}(x, y, z)$ é gerado em cada ponto do contorno fechado C como consequência da soma da **variação temporal** das linhas do campo magnético \underline{H} que atravessam a superfície S delimitada pelo contorno C .
- (II) Uma vez que $\underline{H}(x, y, z)$ varia no tempo, implicitamente o campo elétrico $\underline{E}(x, y, z)$ gerado por \underline{H} também varia no tempo, isto é, $\underline{E} = \underline{E}(x, y, z, t)$.
- (III) Se \underline{H} cresce com o tempo, então é gerado um campo \underline{E} negativo com valor absoluto proporcional à razão de crescimento de \underline{H} . Se \underline{H} decresce com o tempo, então é gerado um campo \underline{E} positivo com valor absoluto proporcional à razão de decréscimo de \underline{H} .
- (IV) $\underline{E}(x, y, z)$ e $\underline{H}(x, y, z)$ são perpendiculares entre si em todos os pontos $p(x, y, z)$ do espaço \mathfrak{R}^3 (devido ao produto vetorial na forma diferencial de (2)).

2.3 Geração de Campo Magnético \underline{H} a partir de Correntes Elétricas

Este sub-processo que ocorre em um irradiador eletromagnético é regido pela assim chamada Segunda Equação de Maxwell em Rotacional:

Forma Integral	Forma Diferencial ($S \rightarrow 0 \Rightarrow C \rightarrow 0$)	(3)
$\oint_C \underline{H} \cdot d\underline{l} = \iint_S (\underline{J} + \underline{J}_D) \cdot d\underline{S}$	$\nabla \times \underline{H} = \underline{J} + \underline{J}_D$	

e é resultante da Lei de Ampère, já discutida no Capítulo I. Na Equação (3) S é uma superfície imaginária não-fechada que é atravessada por correntes elétricas de condução e/ou deslocamento de densidade superficial \underline{J} [A/m^2] e/ou \underline{J}_D [A/m^2], as quais fluem pela estrutura geométrica irradiante do irradiador por ação da excitação aplicada (gerador de tensão externo) e C é o contorno fechado que delimita as bordas extremas de S . Note que a forma geométrica e as coordenadas que posicionam S no espaço \mathfrak{R}^3 são totalmente arbitrárias para efeito da validade de (3).

A análise de (3) é como segue:

- (I) Um campo magnético $\underline{H}(x, y, z)$ é gerado em cada ponto do contorno fechado C como consequência da soma das linhas de corrente de condução e/ou deslocamento que atravessam a superfície S delimitada pelo contorno C .
- (II) Se \underline{J} e/ou \underline{J}_D variam no tempo, implicitamente significa que o campo magnético $\underline{H}(x, y, z)$ gerado por \underline{J} e/ou \underline{J}_D também varia no tempo, isto é, $\underline{H} = \underline{H}(x, y, z, t)$.
- (III) $\underline{H}(x, y, z)$ e $\underline{J}(x, y, z)$ são perpendiculares entre si em todos os pontos $p(x, y, z)$ do espaço \mathfrak{R}^3 (devido ao produto vetorial na forma diferencial de (3)), assim como também são $\underline{H}(x, y, z)$ e \underline{J}_D .

2.4 O processo de irradiação eletromagnética

Na grande maioria das situações práticas um irradiador eletromagnético é composto por uma estrutura geométrica irradiante χ eletricamente condutora, excitada por um gerador de tensão senoidal $V(t) = V_0 \cos(2\pi ft)$. Para um irradiador deste tipo, o processo de irradiação pode ser descrito em 7 etapas:

Em consequência da excitação $V(t)$, correntes caracterizadas no domínio tempo por $I(t) = I_0 \cos(2\pi ft + \varphi)$ fluem pela estrutura χ com densidade superficial $\underline{J}(x, y, z, t)$ [A/m^2]. O fluir de corrente elétrica com densidade superficial $\underline{J}(x, y, z, t)$ implica na ocorrência de cargas elétricas em movimento no interior da estrutura χ com densidade volumétrica $\rho(x, y, z, t)$ $\left[\frac{C}{m^3} \right]$.

De (1), um campo elétrico $\underline{E}_\rho(x, y, z, t)$ é gerado como consequência da densidade volumétrica de carga $\rho(x, y, z, t)$. Simultaneamente, de (3), um campo magnético $\underline{H}_J(x, y, z, t)$ é gerado como consequência da densidade superficial de corrente $\underline{J}(x, y, z, t)$.

De (2), um campo elétrico $\underline{E}_H(x, y, z, t)$ é originado como consequência da variação temporal de $\underline{H}_J(x, y, z, t)$.

O campo elétrico $\underline{E}_H(x, y, z, t)$ soma-se ao campo elétrico $\underline{E}_\rho(x, y, z, t)$ originando $\underline{E}(x, y, z, t) = \underline{E}_H(x, y, z, t) + \underline{E}_\rho(x, y, z, t)$, que, por sua vez, dá origem à densidade superficial de corrente de deslocamento $\underline{J}_D(x, y, z, t) = \epsilon \frac{\partial \underline{E}(x, y, z, t)}{\partial t}$.

De (3), um campo magnético $\underline{H}_D(x, y, z, t)$ é originado como consequência de $\underline{J}_D(x, y, z, t)$.

De (2), um campo elétrico $\underline{E}_H(x, y, z, t)$ é originado como consequência da variação temporal de $\underline{H}_D(x, y, z, t)$.

As etapas (IV) a (VII) repetem-se recursivamente *ad infinitum*. Para cada recursão existe uma correspondência unívoca entre o instante de tempo t e as coordenadas espaciais (x, y, z) .

Observe que o campo $\underline{E}_H(x, y, z, t)$ é **continuamente regenerado** por $\underline{H}_D(x, y, z, t)$, o que não acontece com $\underline{E}_\rho(x, y, z, t)$. De fato, o campo elétrico $\underline{E}_\rho(x, y, z, t)$ apresenta valores significativos somente nas proximidades de um irradiador (região de **Campo Próximo**).

3 Potenciais Retardados

Vimos na Seção 2.4 uma descrição do encadeamento de sub-processos que definem a irradiação eletromagnética em uma estrutura geométrica eletricamente condutora, quando esta é excitada por um gerador de tensão senoidal. Vimos também que o encadeamento de sub-processos obedece às equações (1), (2) e (3), encadeamento que, em última análise, tem como ponto de partida uma distribuição espacial de cargas elétricas em movimento acelerado.

Na análise e projeto de antenas, no entanto, estaremos muito pouco interessados no encadeamento de sub-processos que dão origem ao processo de irradiação eletromagnética como um todo. Dentre as diversas metodologias existentes, reconhecidamente a metodologia de projeto de antenas mais eficiente é aquela baseada em análise (simulação) através de computador digital. Nesta metodologia, o projetista basicamente altera os parâmetros geométricos da antena e observa a distribuição resultante dos campos $\underline{E} = \underline{E}(x, y, z, t)$ e $\underline{H} = \underline{H}(x, y, z, t)$ no espaço \mathfrak{R}^3 . Quando a intensidade e a distribuição espacial dos campos atingem as especificações de projeto exigidas, o projetista encerra o modelamento geométrico da antena e passa a ocupar-se com especificações de impedância de entrada, banda-passante, área efetiva, eficiência, etc... Muitas vezes é necessário alterar novamente a forma geométrica do irradiador para que estas especificações adicionais sejam atingidas. Estudaremos estes parâmetros e especificações adicionais em capítulo posterior.

Na análise e no projeto de uma antena, portanto, é fundamental determinar a intensidade e a distribuição espacial dos campos $\underline{E} = \underline{E}(x, y, z, t)$ e $\underline{H} = \underline{H}(x, y, z, t)$ por ela gerados.

Existem vários procedimentos matemáticos que, a partir de (1), (2) e (3), definem expressões analíticas para os campos $\underline{E} = \underline{E}(x, y, z, t)$ e $\underline{H} = \underline{H}(x, y, z, t)$. Embora isolar \underline{E} e \underline{H} por substituição direta entre (1), (2) e (3) possa parecer o procedimento mais imediato, a solução da equação íntegro-diferencial resultante seria de considerável complexidade computacional. Para contornar esta situação, o procedimento quase que universalmente adotado é o procedimento **indireto** que utiliza **funções auxiliares intermediárias** denominadas **Potenciais Retardados**. Devido a este fato, o próprio procedimento indireto acabou sendo conhecido como **Determinação de \underline{E} e \underline{H} por Potenciais Retardados**, ou simplesmente, **Potenciais Retardados**.

No contexto do procedimento **Potenciais Retardados**, funções que caracterizam potenciais são obtidas a partir da densidade volumétrica $\rho(x', y', z', t) [C/m^3]$ de cargas elétricas e/ou da densidade superficial de correntes (de condução ou deslocamento) $\underline{J}(x', y', z', t) [A/m^2]$ que fluem em cada

ponto $p(x', y', z')$ da estrutura geométrica irradiante da antena por ação da excitação aplicada. A seguir, os campos $\underline{E}(x, y, z, t)$ e $\underline{H}(x, y, z, t)$ são determinados para qualquer ponto desejado $p(x, y, z)$ do espaço \mathcal{R}^3 através de operações vetoriais e/ou escalares realizadas sobre as funções potencial retardado obtidas.

Existem diversas funções que podem ser utilizadas para este fim, funções que podem ser tanto escalares como vetoriais. Citamos, por exemplo, as Funções Potenciais de Hertz².

Em nosso estudo do irradiador eletromagnético elementar (dipolo curto) adotaremos como funções de potencial o **Potencial Vetorial Magnético Retardado** $\underline{A}(x, y, z, t)$, e o **Potencial Escalar Elétrico Retardado** $\Phi(x, y, z, t)$.

Pode-se demonstrar³ que para um dipolo curto imerso no vácuo, excitado por um gerador senoidal $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$ com $\omega = 2\pi f$, os potenciais retardados $\underline{A}(x, y, z, t)$ e $\Phi(x, y, z, t)$ são dados por:

$$\underline{A}(x, y, z, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\underline{J}_0 e^{j(\omega t - \beta r)}}{r} dV \quad [\text{Wb/m}] \quad (4)$$

$$\Phi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho_0 e^{j(\omega t - \beta r)}}{r} dV \quad [\text{V}] \quad (5)$$

onde $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m, $\epsilon_0 = 8.854187817 \times 10^{-12}$ F/m e:

- (I) $\beta = 2\pi/\lambda$ é a **Constante de Propagação** de uma onda eletromagnética senoidal, medida em $\left[\frac{\text{rad}}{\text{m}}\right]$. O termo βr pode ser fisicamente interpretado como a variação de fase, em $[\text{rad}]$, que seria percebida em uma onda por um observador estático quando esta, ao passar bem à sua frente, percorre uma distância linear r no espaço \mathcal{R}^3 . Se a distância percorrida for $r = \lambda$ obviamente o observador perceberá uma variação de fase de 2π $[\text{rad}]$ ou 360° .
- (II) \underline{J}_0 é o valor instantâneo máximo (valor de pico) da densidade superficial de corrente de condução $\underline{J}(x', y', z', t) = \underline{J}_0 \cos(\omega t + \varphi)$ que atravessa a seção transversal S do dipolo curto como consequência da ação do gerador $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$. Para um dado instante t a densidade de corrente $\underline{J}(x', y', z')$ possui valor uniforme sobre a seção transversal S e em cada ponto $p(x', y', z')$ ao longo do comprimento ℓ do elemento de corrente de volume

² Vide Balanis, *Antenna Theory*, 2nd ed., John Wiley & Sons, 1997.

³ A demonstração matemática que estabelece formalmente o vínculo entre as densidades ρ e/ou \underline{J} e os campos \underline{E} e \underline{H} através das funções Potencial Retardado \underline{A} e Φ é algo enfadonha, envolvendo uma não pequena seqüência de operações vetoriais. Esta demonstração nada acrescentaria no sentido da compreensão do mecanismo de irradiação eletromagnética, já que ela é uma dedução puramente baseada em teoremas e operadores do Cálculo Vetorial. Assim, não a apresentaremos aqui. No entanto, ela pode ser encontrada em qualquer literatura em Teoria Eletromagnética. Uma obra clássica neste contexto é J.D.Kraus and K.R. Carver, *Electromagnetics*, 2nd ed., McGrawHill, 1973.

$V = S\ell$ que define o dipolo curto⁴, conforme mostrado na Figura 1. A suposição de constância espacial de $\underline{J}(x', y', z')$ é válida como consequência do diminuto tamanho relativo do dipolo em relação ao comprimento de onda λ .

(III) ρ_0 é o valor instantâneo máximo (valor de pico) da densidade volumétrica de carga elétrica $\rho(x', y', z', t) = \rho_0 \cos(\omega t + \theta)$ que ocorre em cada ponto $p(x', y', z')$ do volume $V = S\ell$ como consequência da ação do gerador $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$. Para um dado instante t a densidade $\rho(x', y', z')$ pode ser considerada constante em todo o volume $V = S\ell$ devido ao diminuto tamanho relativo do dipolo em relação a λ . No entanto, para que possa surgir o conceito de **Dipolo Elétrico** no contexto do desenvolvimento analítico a ser apresentado na Seção 4, utiliza-se o seguinte **artifício conceitual**: Uma vez que as cargas elétricas movimentam-se aceleradamente devido à forma de variação temporal da tensão do gerador $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$, estas cargas são submetidas a uma “compressão” variável ao longo do comprimento ℓ . Portanto, inevitavelmente ocorrerá uma maior concentração de cargas elétricas em uma extremidade do elemento de corrente do que em outra, formando portanto um **Dipolo Elétrico**. Isto é indicado na Figura 1 através de $\rho_a > \rho_b$.

(IV) $\underline{A}(x, y, z, t)$ é o **Potencial Vetorial Magnético Retardado** gerado no ponto $p(x, y, z)$ do espaço \mathfrak{R}^3 em consequência de $\underline{J}(x', y', z', t) = \underline{J}_0 \cos(\omega t + \varphi)$ no dipolo curto. O ponto $p(x, y, z)$ dista r de cada ponto $p(x', y', z')$ do volume $V = S\ell$ do dipolo conforme mostra a Figura 1.

(V) $\Phi(x, y, z, t)$ é o **Potencial Escalar Elétrico Retardado** gerado no ponto $p(x, y, z)$ do espaço \mathfrak{R}^3 em consequência de $\rho(x', y', z', t) = \rho_0 \cos(\omega t + \theta)$ no dipolo curto. O ponto $p(x, y, z)$ dista r de cada ponto $p(x', y', z')$ do volume $V = S\ell$ do dipolo conforme mostra a Figura 1.

(VI) O fator $e^{j(\omega t - \beta r)}$ é originado de $e^{j\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r\right)} = e^{j\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)} = e^{j(\omega(t - \Delta t))}$, sendo $\Delta t = \frac{r}{c}$ [s] e $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3 \times 10^8$ $\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$. O termo Δt neste fator indica o **retardo de tempo** (daí o qualificador **retardado** em Potencial Retardado) que uma **perturbação** gerada no Éter demora para percorrer a distância r até atingir o ponto $p(x, y, z)$ do espaço \mathfrak{R}^3 , perturbação que é consequência da existência de carga elétricas movendo-se aceleradamente em cada ponto $p(x', y', z')$ do dipolo curto.

⁴ A suposição de constância espacial de $\underline{J}(x', y', z')$ é válida na situação em que o dipolo curto é considerado como um elemento muito pequeno integrante da estrutura geométrica irradiante de uma antena transmissora, visto que esta sempre é decomponível em uma infinidade de elementos de corrente (dipolos curtos) com tamanho infinitesimal $d\ell$. Quando a estrutura geométrica irradiante da antena transmissora é o próprio dipolo curto, $\underline{J}(x', y', z')$ não pode ser considerada constante no espaço. Esta situação será analisada em seção subsequente.

- (VII) O fator $e^{j(\omega t - \beta r)}$ é um artifício adotado com base em Técnica de Fasores⁵ para simplificar as operações íntegro-diferenciais do procedimento e para simultaneamente garantir a representação de todas as grandezas envolvidas através de uma expressão analítica que caracterize variação temporal senoidal (porque a excitação do gerador é senoidal). Portanto, o fator $e^{j(\omega t - \beta r)}$ implicitamente implica em variação temporal da forma $\cos(\omega t + \psi) = \text{Re}\{e^{j(\omega t + \psi)}\}$ sendo ψ um ângulo de fase relativo que depende da distância r .
- (VIII) A existência de carga elétricas em movimento acelerado no dipolo curto fica implícita pela forma analítica do termo $\underline{J}_0 e^{j(\omega t - \beta r)} = \underline{J}_0 \cos(\omega t - \beta r) + j\underline{J}_0 \text{sen}(\omega t - \beta r)$ em (4) e pela forma analítica do termo $\underline{\rho}_0 e^{j(\omega t - \beta r)} = \underline{\rho}_0 \cos(\omega t - \beta r) + j\underline{\rho}_0 \text{sen}(\omega t - \beta r)$ em (5).
O movimento acelerado das cargas é expresso pelo fato de $\frac{\partial^n}{\partial t^n} \{\underline{J}_0 e^{j(\omega t - \beta r)}\} \neq \underline{0}$ e $\frac{\partial^n}{\partial t^n} \{\underline{\rho}_0 e^{j(\omega t - \beta r)}\} \neq 0$ para qualquer inteiro positivo n . Isto ocorre porque $\frac{\partial^n}{\partial t^n} \cos(\omega t - \beta r) \neq 0$ e $\frac{\partial^n}{\partial t^n} \text{sen}(\omega t - \beta r) \neq 0$ para todo n , exceto para valores particulares de t e r , assegurando que para cada instante t ocorra um deslocamento r sob movimento acelerado de ordem $\frac{\partial^n}{\partial t^n}$. Embora a distância r refira-se à distância percorrida pela perturbação eletromagnética até o ponto $p(x, y, z)$ do espaço \mathfrak{R}^3 , para $r \rightarrow 0$ ela tende a representar a distância percorrida pelas cargas elétricas sob movimento acelerado.
- (IX) A **perturbação** no Éter, cuja **dupla origem** é analiticamente representada pelos termos $\underline{J}_0 e^{j\omega t}$ e $\underline{\rho}_0 e^{j\omega t}$ respectivamente implícitos em (4) e (5), “viaja” a distância r através do espaço \mathfrak{R}^3 durante $\Delta t = \frac{r}{c}$ [s] e, ao atingir $p(x, y, z)$, determina a **amplitude** e **fase** tanto de \underline{A} (Equação (4)) como de $\underline{\Phi}$ (Equação (5)).

⁵ Vide W.H. Hayt Jr. e J. E. Kemmerly, *Análise de Circuitos em Engenharia*, Mc Graw Hill, 1975.

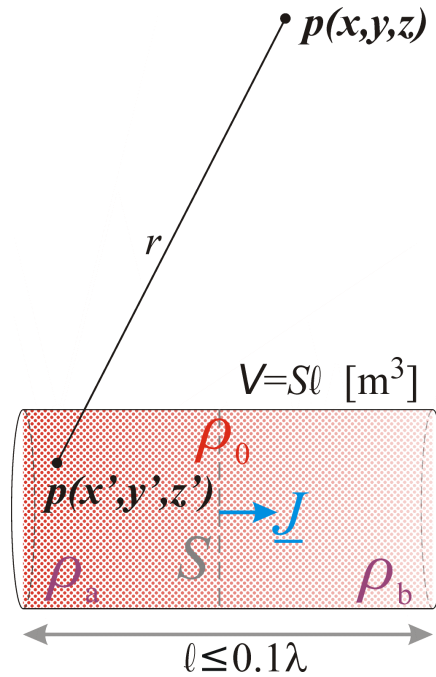


Figura 1: Irradiador eletromagnético elementar (dipolo curto) integrante da estrutura irradiante de uma antena maior excitada por um gerador senoidal $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$, com $\omega = 2\pi f$. Para um dado instante t a densidade de corrente \underline{J} é constante sobre a seção transversal S e constante ao longo do comprimento ℓ do elemento de corrente de volume $V = S\ell$ em consequência do diminuto tamanho do dipolo com relação ao comprimento de onda λ . Devido ao movimento acelerado das cargas elétricas estas são submetidas a uma “compressão” variável ao longo do comprimento ℓ . Isto faz surgir uma maior concentração de cargas elétrica em uma extremidade do elemento de corrente do que em outra ($\rho_a > \rho_b$), formando portanto um **Dipolo Elétrico** com densidade volumétrica de cargas média dada por $\rho_0 = \frac{\rho_a + \rho_b}{2}$. No entanto, uma vez que $\ell \ll \lambda$, o Dipolo Elétrico pode também ser considerado como um **Monopolo Elétrico** com densidade ρ_0 constante ao longo de ℓ .

Uma vez obtidas as expressões analíticas para o Potencial Vetorial Magnético Retardado $\underline{A}(x, y, z, t)$, e o Potencial Escalar Elétrico Retardado $\Phi(x, y, z, t)$, o campo elétrico \underline{E} e o campo magnético \underline{H} no ponto $p(x, y, z)$ do espaço \mathfrak{R}^3 são determinados através de:

$$\underline{E}(x, y, z, t) = -\nabla\Phi(x, y, z, t) - \frac{\partial}{\partial t}\underline{A}(x, y, z, t) \quad [\text{V/m}] \quad (6)$$

$$\underline{H}(x, y, z, t) = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \underline{A}(x, y, z, t) \quad [\text{A/m}] \quad (7)$$

4 O Dipolo Curto

Qualquer antena pode ser decomposta em um grande número de elementos infinitesimais de corrente, denominados **Dipolos Curtos**.

Daí, portanto, a importância crucial na determinação das características e propriedades do dipolo curto para que possamos analisar as características e propriedades de qualquer antena utilizada na prática através da soma dos efeitos resultantes de todos os dipolos elementares que a constituem.

Dado o tipo de simetria geométrica de um dipolo, é conveniente analisar o dipolo curto referenciado a um sistema de Coordenadas Esféricas (r, θ, ϕ) , conforme mostra a Figura 2.

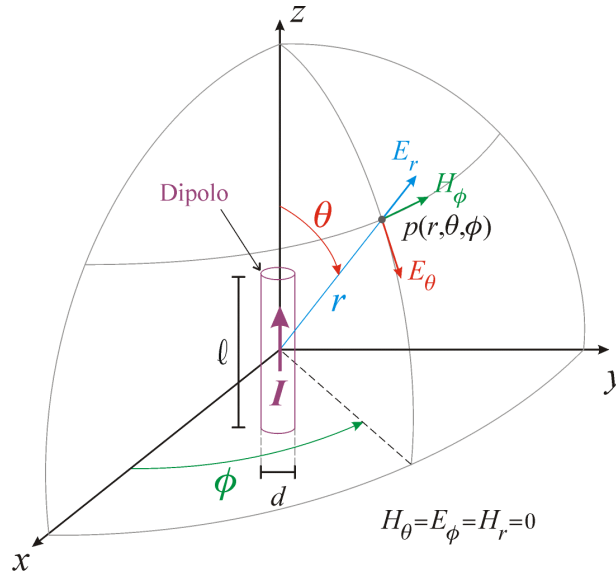


Figura 2: Dipolo curto referenciado a um sistema de Coordenadas Esféricas (r, θ, ϕ) . O valor nulo das componentes H_θ , E_ϕ e H_r será justificado ao longo do desenvolvimento analítico apresentado ao longo desta seção. No entanto, no contexto do modelo alegórico discutido no Capítulo I, é possível inferir de antemão que para a geometria do dipolo curto mostrado H_θ e H_r são nulos porque o movimento circular do Éter está contido unicamente nos planos geométricos cuja interseção é o eixo z do dipolo, sendo \underline{H} sempre perpendicular ao plano de giro. Da mesma forma, E_ϕ é nulo porque o movimento linear radial de Éter está contido unicamente nestes mesmos planos.

Assumiremos que o dipolo curto é parte de uma antena linear arbitrariamente maior⁶ alimentada por uma linha de transmissão excitada por um gerador de tensão $V(t) = V_0 \cos(2\pi ft)$. Portanto a variação no tempo da corrente na antena linear maior é da forma $I = I(t) = I_0 \cos(2\pi ft + \varphi)$, onde I_0 é o valor instantâneo máximo da corrente.

Sob o ponto de vista da geração do campo magnético \underline{H} a partir de uma corrente elétrica (ver Seção 2.3), o comprimento $\ell \ll \lambda$ do dipolo curto permite que a distribuição espacial de corrente seja considerada aproximadamente constante e de valor I ao longo do comprimento ℓ , mas variando no tempo de acordo com $I = I(t) = I_0 \cos(2\pi ft + \varphi)$.

Sob o ponto de vista da geração do campo elétrico \underline{E} a partir de uma densidade volumétrica de cargas elétricas (ver Seção 2.1), a variação senoidal no tempo da corrente impõe uma **aceleração às cargas livres no condutor** de forma a gerar uma **densidade volumétrica de carga $\rho(x', y', z', t)$ não nula que varia ao longo de ℓ** . Podemos considerar esta densidade de carga volumétrica como estando concentrada em uma carga líquida equivalente q , localizada nas extremidades do dipolo curto, conforme mostra a Figura 3:

⁶ Eventualmente do tamanho do próprio dipolo curto, quando, então, a antena maior é o próprio dipolo curto.

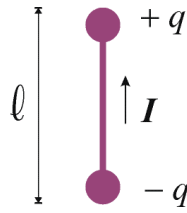


Figura 3: Carga concentrada líquida equivalente em um dipolo curto referenciada ao centro geométrico. A aceleração imposta às cargas livres no condutor é uma consequência da razão de variação temporal dI/dt na corrente $I = I(t) = I_0 \cos(2\pi ft + \phi)$. A razão de variação dI/dt gera uma densidade volumétrica de carga $\rho(x', y', z', t)$ que varia ao longo do comprimento ℓ do dipolo curto devido à maior concentração volumétrica (“compressão”) de cargas nos pontos de maior aceleração (maior dI/dt). A cada instante t ocorre uma concentração de cargas $\rho_a \neq \rho_b$ nas extremidades do dipolo (ver Figura 1). Portanto, podemos imaginar que existem duas cargas líquidas concentradas equivalentes de valor $+q$ e $-q$ nas extremidades do dipolo, **tendo como referência o seu centro geométrico**. Observe que a relação temporal entre carga q e corrente I é $I = dq/dt$.

Suponhamos, por exemplo, que o dipolo da Figura 3 possua um comprimento $\ell \ll \lambda$ tal que $\ell = 1 \text{ m}$ e uma seção transversal $S = 0.1 \text{ m}^2$. Em um determinado instante t a concentração instantânea de cargas nas extremidades é $\rho_a = 200 \text{ [C/m}^3\text{]}$ e $\rho_b = 20 \text{ [C/m}^3\text{]}$ (ver Figura 1). O valor das cargas elétricas concentradas em **cada metade** do dipolo é:

$$q_a = \rho_a S \frac{\ell}{2} = 200 \text{ [C/m}^3\text{]} 0.1 \text{ [m}^2\text{]} \frac{1}{2} \text{ [m]} = 10 \text{ C}$$

$$q_b = \rho_b S \frac{\ell}{2} = 20 \text{ [C/m}^3\text{]} 0.1 \text{ [m}^2\text{]} \frac{1}{2} \text{ [m]} = 1 \text{ C}$$

Daí, podemos aproximar esta situação como se existissem duas cargas líquidas concentradas equivalentes de valor $+q$ e $-q$ nas extremidades do dipolo, **tendo como referência o seu centro geométrico**,

$$\text{sendo o valor } q \text{ dado por } q = \frac{q_a - q_b}{2} = \frac{10 \text{ C} - 1 \text{ C}}{2} = 4.5 \text{ C}.$$

Uma vez que $\ell \ll \lambda$ e $d \ll \ell$, cada metade do volume total $V = S\ell$ é muito pequeno sob o ponto de vista do comprimento de onda λ , de modo que as cargas q_a e q_b concentradas em cada metade de V podem ser consideradas com boa aproximação como cargas puntiformes q_a e q_b localizadas nas extremidades do dipolo. Em consequência, as cargas líquidas $+q$ e $-q$ referenciadas ao centro geométrico do dipolo também podem ser consideradas com boa aproximação como cargas puntiformes nas extremidades, o que valida a distribuição de carga concentrada equivalente mostrada na Figura 3.

4.1 A distribuição espacial dos campos \underline{E} e \underline{H} gerados por um Dipolo Curto

Na presente seção buscamos determinar os campos \underline{E} e \underline{H} em qualquer ponto $p(x, y, z)$ do espaço \mathfrak{R}^3 , distante r do centro geométrico de um dipolo curto. Em função do tipo de simetria geométrica do dipolo, a sua análise é bastante simplificada se adotarmos o sistema de Coordenadas Esféricas (r, θ, ϕ) .

Assim, esta seção especificamente objetiva determinar os campos $\underline{E}(r, \theta, \phi)$ e $\underline{H}(r, \theta, \phi)$ em qualquer ponto $p(r, \theta, \phi)$ do espaço \mathfrak{R}^3 , distante r do centro geométrico de um dipolo curto.

Assumiremos que o dipolo curto é parte de uma antena linear arbitrariamente maior alimentada por uma linha de transmissão excitada por um gerador de tensão senoidal de modo que a variação temporal da

corrente na antena linear maior e no dipolo curto é da forma $I = I(t) = I_0 \cos(2\pi ft + \varphi)$, onde I_0 é o valor instantâneo máximo da corrente. A corrente I no dipolo implica em uma densidade superficial de corrente $\underline{J}(x', y', z', t) = \underline{J}_0 \cos(2\pi ft + \varphi) = J_0 \cos(2\pi ft + \varphi) \hat{z}$ na seção transversal S do dipolo, conforme mostra a Figura 4, sendo $J_z = J_0 \cos(2\pi ft + \varphi)$ constante sobre a seção transversal S e constante ao longo do comprimento ℓ naquela figura.

Adotaremos o seguinte procedimento:

- (I) Determina-se o **Potencial Vetorial Magnético Retardado** $\underline{A}(r, \theta, \phi, t)$ no ponto desejado $p(r, \theta, \phi)$ do espaço \mathfrak{R}^3 utilizando a Equação (4) em Coordenadas Esféricas, tendo como referência as Figuras 4 e 5.
- (II) Determina-se o **Potencial Escalar Elétrico Retardado** $\Phi(r, \theta, \phi, t)$ no ponto desejado $p(r, \theta, \phi)$ do espaço \mathfrak{R}^3 utilizando a Equação (5) em Coordenadas Esféricas, tendo como referência as Figuras 4 e 6.
- (III) Com os valores obtidos para $\underline{A}(r, \theta, \phi, t)$ e $\Phi(r, \theta, \phi, t)$ determina-se o **Campo Elétrico** $\underline{E}(r, \theta, \phi, t)$ no ponto desejado $p(r, \theta, \phi)$ do espaço \mathfrak{R}^3 utilizando a Equação (6) em Coordenadas Esféricas, tendo como referência a Figura 7.
- (IV) Com o valor obtido para $\underline{A}(r, \theta, \phi, t)$ determina-se o **Campo Magnético** $\underline{H}(r, \theta, \phi, t)$ no ponto desejado $p(r, \theta, \phi)$ do espaço \mathfrak{R}^3 utilizando a Equação (7) em Coordenadas Esféricas, tendo como referência a Figura 7.

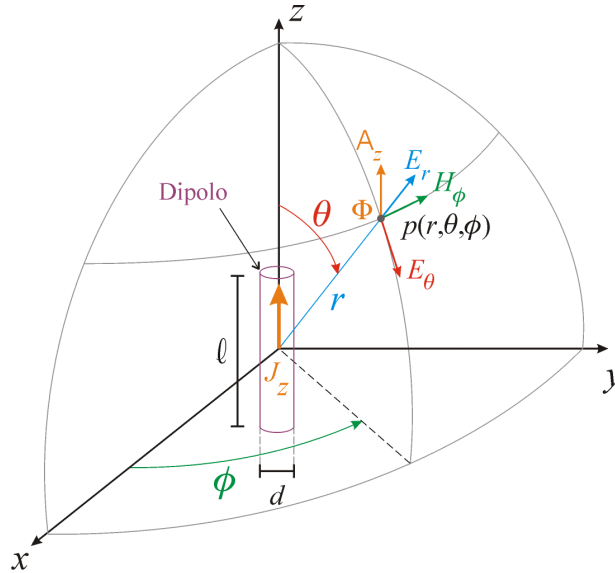


Figura 4: Potencial Vetorial Magnético $\underline{A}(r, \theta, \phi, t)$ e Potencial Escalar Elétrico $\Phi(r, \theta, \phi, t)$ no ponto $p(r, \theta, \phi)$ do espaço \mathfrak{R}^3 respectivamente obtidos de (4) e (5) p/ um dipolo curto alinhado com o eixo z , referenciado ao sistema de Coordenadas Esféricas (r, θ, ϕ) .

Observe na Figura 4 que $\underline{A}(r, \theta, \phi, t) = \underline{A}_0(r, \theta, \phi) \cos(2\pi ft + \alpha) = A_0(r, \theta, \phi) \cos(2\pi ft + \alpha) \hat{z}$, onde $A_0(r, \theta, \phi)$ é o valor instantâneo máximo de $\underline{A}(r, \theta, \phi, t)$ no ponto $p(r, \theta, \phi)$ do espaço \mathfrak{R}^3 , sendo A_z dado por $A_z = A_0(r, \theta, \phi) \cos(2\pi ft + \alpha)$ naquela figura. O ângulo α é um ângulo de fase relativo que depende da distância r .

$\underline{A}(r, \theta, \phi, t)$ possui uma única componente A_z alinhada com o eixo z porque $\underline{J}(x', y', z', t) = \underline{J}_0 e^{j(\omega t - \beta r)} = J_z \hat{z}$ no dipolo. Uma vez que $\underline{J}(x', y', z') = J_z \hat{z}$ é uniforme no volume $V = S\ell$ do dipolo, a integração sobre o volume V efetuada por (4) não altera a direção e sentido de $\underline{J}(x', y', z') = J_z \hat{z}$ resultando em $\underline{A}(r, \theta, \phi) = A_z \hat{z}$.

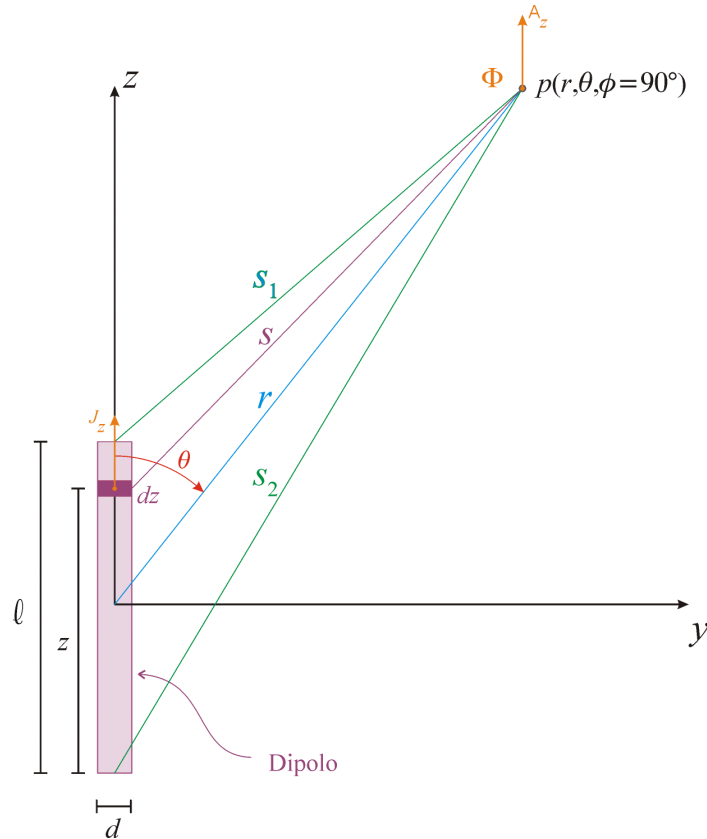


Figura 5: Dipolo da Figura 4 analisado em duas dimensões para $\phi = 90^\circ$. Esta simplificação é válida devido à simetria radial do dipolo, não implicando em nenhuma restrição aos resultados a serem obtidos na análise a ser feita nesta seção. Na maioria das situações práticas $d \ll \ell$, de modo que a forma geométrica do volume V do dipolo tende à de um cilindro de diâmetro infinitesimal.

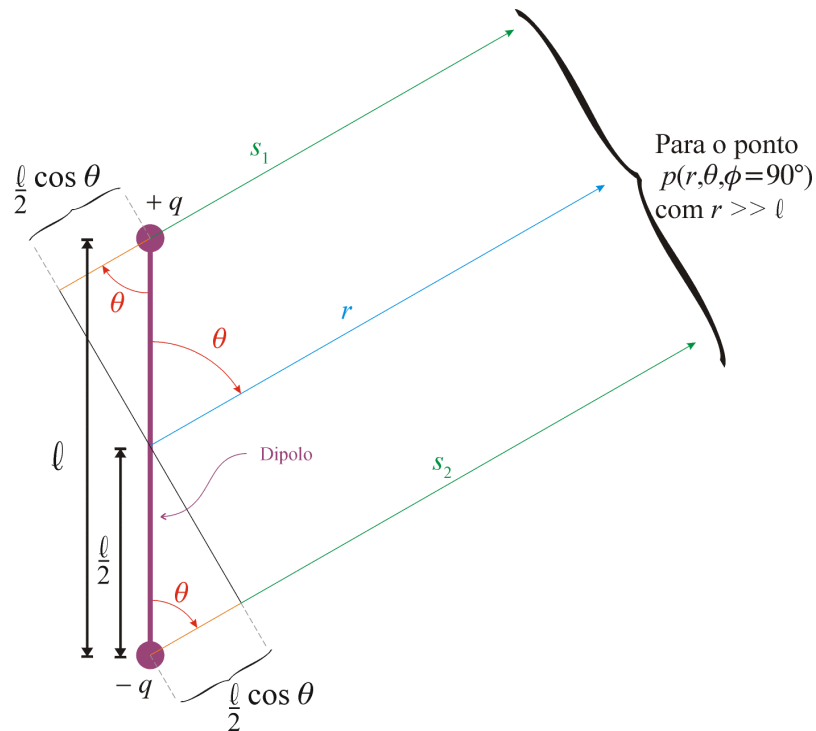


Figura 6: Simplificação geométrica válida para $r \gg \ell$, condição encontrada na grande maioria das situações práticas, quando s torna-se paralelo e igual a r . O dipolo é considerado como se existissem duas cargas líquidas concentradas equivalentes de valor $+q$ e $-q$ em suas extremidades, tendo como referência o seu centro geométrico.

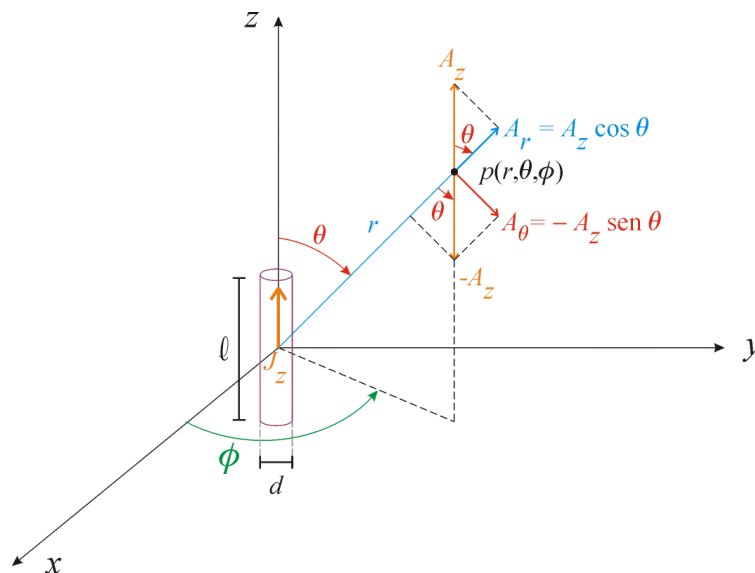


Figura 7: Decomposição de $\underline{A}(r, \theta, \phi) = A_z \underline{\hat{z}}$ em $\underline{A}(r, \theta, \phi) = A_r \underline{\hat{r}} + A_\theta \underline{\hat{\theta}}$.

4.1.1 Determinação do Potencial Vetorial Magnético \underline{A}

Uma vez que \underline{J} é uniforme na seção transversal S e constante ao longo do comprimento ℓ devido a $\ell \ll \lambda$ e uma vez que o volume V tende a um cilindro de diâmetro infinitesimal devido a $d \ll \ell$ então (4) simplifica-se para a forma

$$\underline{A}(x, y, z, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{J_0 e^{j(\omega t - \beta r)}}{r} dV = \left(\frac{\mu_0}{4\pi} I_0 \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{e^{j(\omega t - \beta s)}}{s} dz \right) \hat{z} = A_z \hat{z} \quad [\text{Wb/m}] \quad (8)$$

onde s é a distância do ponto $p(r, \theta, \phi = 90^\circ)$ ao segmento infinitesimal dz distante z do centro geométrico do dipolo, conforme mostra a Figura 5.

Na grande maioria das situações práticas a distância r do ponto $p(r, \theta, \phi = 90^\circ)$ ao dipolo é muito grande com relação ao seu tamanho ℓ , isto é, $r \gg \ell$. Então não só é razoável admitir que s torna-se paralelo a r como também é razoável admitir que $s \approx r$. Visto que r torna-se independente da posição z ao longo do dipolo nesta situação, temos de (8):

$$\begin{aligned} A_z &= \frac{\mu_0}{4\pi} I_0 \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{e^{j(\omega t - \beta s)}}{s} dz = \frac{\mu_0}{4\pi} I_0 \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{e^{j(\omega t - \beta r)}}{r} dz = \\ &= \frac{\mu_0 I_0 e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} dz = \frac{\mu_0 I_0 \ell e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \quad [\text{Wb/m}] \end{aligned} \quad (9)$$

A Equação (9) determina o valor de $\underline{A}(r, \theta, \phi, t) = A_z \hat{z}$ [Wb/m] gerado em um ponto $p(r, \theta, \phi)$ a uma distância r de um dipolo curto tendo como **únicas restrições**: excitação senoidal de frequência $\omega = 2\pi f$, $r \gg \ell$, $\lambda \gg \ell$ e $d \ll \ell$.

4.1.2 Determinação do Potencial Escalar Elétrico Φ

Na situação mostrada na Figura 6, e uma vez que o volume V tende a um cilindro de diâmetro infinitesimal devido a $d \ll \ell$ então (5) simplifica-se para a forma

$$\Phi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho_0 e^{j(\omega t - \beta r)}}{r} dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{+q e^{j(\omega t - \beta s_1)}}{s_1} + \frac{-q e^{j(\omega t - \beta s_2)}}{s_2} \right] \quad [\text{V}] \quad (10)$$

onde s_1 e s_2 são respectivamente as distâncias das carga concentradas $+q$ e $-q$ ao ponto $p(r, \theta, \phi = 90^\circ)$.

Da Teoria de Circuitos temos que

$$\frac{dq(t)}{dt} = I(t) \rightarrow q(t) = \int I(t) dt \quad (11)$$

Conforme já discutido em parágrafos anteriores, a variação temporal da corrente no dipolo curto é expressa da forma $I = I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi) = \text{Re}\{I_0 e^{j(\omega t + \varphi)}\}$, onde I_0 é o valor instantâneo máximo da corrente. Substituindo em (11) a expressão complexa $\vec{I}(t)$ da corrente $I(t)$ dada por $\vec{I}(t) = I_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$ temos:

$$\begin{aligned} \vec{q}(t) &= \int \vec{I}(t) dt = \int I_0 e^{j(\omega t + \varphi)} dt = \int I_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t} dt = I_0 e^{j\varphi} \int e^{j\omega t} dt = \\ &= I_0 e^{j\varphi} \frac{e^{j\omega t}}{j\omega} = \frac{1}{j\omega} I_0 e^{j(\omega t + \varphi)} = \frac{\vec{I}(t)}{j\omega} \end{aligned} \quad (12)$$

Mas $\vec{q}(t) = \text{Re}\{\vec{q}(t)\} + \text{Im}\{\vec{q}(t)\}$ e $\vec{I}(t) = \text{Re}\{\vec{I}(t)\} + \text{Im}\{\vec{I}(t)\}$. Visto que (11) é um operador linear, não ocorrendo interação entre as partes reais e imaginárias da operação⁷, temos:

$$\text{Re}\{\vec{q}(t)\} = q(t) = \frac{\text{Re}\{\vec{I}(t)\}}{j\omega} = \frac{I(t)}{j\omega} \quad (13)$$

Se q_0 é o valor instantâneo máximo da carga $q(t)$ concentrada nas extremidades do dipolo então de (13) temos:

$$q_0 = \frac{I_0}{j\omega} \quad (14)$$

Substituindo o valor de q em (10) pelo valor de q_0 dado por (14) obtemos o valor do potencial elétrico escalar Φ gerado em um ponto $p(r, \theta, \phi = 90^\circ)$ a uma distância r de um dipolo curto:

$$\Phi(r, \theta, \phi, t) = \frac{I_0}{4\pi\epsilon_0 j\omega} \left[\frac{e^{j(\omega t - \beta s_1)}}{s_1} - \frac{e^{j(\omega t - \beta s_2)}}{s_2} \right] [\text{V}] \quad (15)$$

Uma vez que $r \gg \ell$, as retas r, s_1 e s_2 na Figura 6 podem ser consideradas paralelas. Daí, da Figura 6, temos

$$s_1 = r - \frac{\ell}{2} \cos \theta \quad (16)$$

$$s_2 = r + \frac{\ell}{2} \cos \theta \quad (17)$$

⁷ Vide o conceito de **Fasor** em W.H. Hayt Jr. e J. E. Kemmerly, *Análise de Circuitos em Engenharia*, McGraw Hill, 1975.

Substituindo (16) e (17) em (15):

$$\begin{aligned}
 \Phi(r, \theta, \phi, t) &= \frac{I_0}{4\pi\epsilon_0 j\omega} \left[\frac{e^{j(\omega t - \beta s_1)}}{s_1} - \frac{e^{j(\omega t - \beta s_2)}}{s_2} \right] = \\
 &= \frac{I_0}{4\pi\epsilon_0 j\omega} \left[\frac{e^{j\left(\omega t - \beta\left(r - \frac{\ell}{2}\cos\theta\right)\right)}}{r - \frac{\ell}{2}\cos\theta} - \frac{e^{j\left(\omega t - \beta\left(r + \frac{\ell}{2}\cos\theta\right)\right)}}{r + \frac{\ell}{2}\cos\theta} \right] = \\
 &= \frac{I_0 e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi\epsilon_0 j\omega} \left[\frac{e^{j\left(\frac{\beta\ell}{2}\cos\theta\right)}}{r - \frac{\ell}{2}\cos\theta} - \frac{e^{-j\left(\frac{\beta\ell}{2}\cos\theta\right)}}{r + \frac{\ell}{2}\cos\theta} \right] = \\
 &= \frac{\frac{I_0 e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi\epsilon_0 j\omega}}{\left(r - \frac{\ell}{2}\cos\theta\right)\left(r + \frac{\ell}{2}\cos\theta\right)} \left[e^{j\left(\frac{\beta\ell}{2}\cos\theta\right)}\left(r + \frac{\ell}{2}\cos\theta\right) + \right. \\
 &\quad \left. - e^{-j\left(\frac{\beta\ell}{2}\cos\theta\right)}\left(r - \frac{\ell}{2}\cos\theta\right) \right] = \\
 &= \frac{\frac{I_0 e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi\epsilon_0 j\omega}}{\left(r^2 - \frac{\ell^2}{4}\cos^2\theta\right)} \left[e^{j\left(\frac{\beta\ell}{2}\cos\theta\right)}\left(r + \frac{\ell}{2}\cos\theta\right) + \right. \\
 &\quad \left. - e^{-j\left(\frac{\beta\ell}{2}\cos\theta\right)}\left(r - \frac{\ell}{2}\cos\theta\right) \right]
 \end{aligned} \tag{18}$$

Visto que $r \gg \ell$, então $\left(r^2 - \frac{\ell^2}{4}\cos^2\theta\right) \approx r^2$. Daí (18) simplifica-se para a forma:

$$\Phi(r, \theta, \phi, t) = \frac{I_0 e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi\epsilon_0 j\omega r^2} \left[\begin{array}{l} e^{j\left(\frac{\beta\ell}{2}\cos\theta\right)}\left(r + \frac{\ell}{2}\cos\theta\right) + \\ - e^{-j\left(\frac{\beta\ell}{2}\cos\theta\right)}\left(r - \frac{\ell}{2}\cos\theta\right) \end{array} \right] \tag{19}$$

Mas $e^{ju} = \cos u + j \sen u$. Daí, (19) pode ser escrita como

$$\Phi(r, \theta, \phi, t) = \frac{I_0 e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi\epsilon_0 j\omega r^2} \left[\begin{array}{l} \left(\cos\left(\frac{\beta\ell}{2}\cos\theta\right) + \right) \left(r + \frac{\ell}{2}\cos\theta \right) + \\ j \sen\left(\frac{\beta\ell}{2}\cos\theta\right) \left(r + \frac{\ell}{2}\cos\theta \right) + \\ - \left(\cos\left(\frac{\beta\ell}{2}\cos\theta\right) + \right) \left(r - \frac{\ell}{2}\cos\theta \right) \\ - j \sen\left(\frac{\beta\ell}{2}\cos\theta\right) \left(r - \frac{\ell}{2}\cos\theta \right) \end{array} \right] \tag{20}$$

ou, como $\beta = 2\pi/\lambda$,

$$\Phi(r, \theta, \phi, t) = \frac{I_0 e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi\epsilon_0 j\omega r^2} \left[\begin{array}{l} \left(\cos\left(\frac{\pi\ell}{\lambda} \cos\theta\right) + \right) \left(r + \frac{\ell}{2} \cos\theta \right) + \\ j \operatorname{sen}\left(\frac{\pi\ell}{\lambda} \cos\theta\right) \\ - \left(\cos\left(\frac{\pi\ell}{\lambda} \cos\theta\right) + \right) \left(r - \frac{\ell}{2} \cos\theta \right) \\ - j \operatorname{sen}\left(\frac{\pi\ell}{\lambda} \cos\theta\right) \end{array} \right] \quad (21)$$

Visto que $\ell \ll \lambda$, então $\cos\left(\frac{\pi\ell}{\lambda} \cos\theta\right) \approx 1$ e $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi\ell}{\lambda} \cos\theta\right) \approx \frac{\pi\ell}{\lambda} \cos\theta$. Nesta situação, (21) simplifica-se para a forma:

$$\begin{aligned} \Phi(r, \theta, \phi, t) &= \frac{I_0 e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi\epsilon_0 j\omega r^2} \left[\begin{array}{l} \left(1 + j \frac{\pi\ell}{\lambda} \cos\theta \right) \left(r + \frac{\ell}{2} \cos\theta \right) + \\ - \left(1 - j \frac{\pi\ell}{\lambda} \cos\theta \right) \left(r - \frac{\ell}{2} \cos\theta \right) \end{array} \right] = \\ &= \frac{I_0 e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi\epsilon_0 j\omega r^2} \left[\ell \cos\theta \frac{(\lambda + j2\pi r)}{\lambda} \right] \end{aligned} \quad (22)$$

Mas $\lambda = c/f = 2\pi c/\omega$, $c = 3 \times 10^8$ m/s, de modo que (22) torna-se:

$$\begin{aligned} \Phi(r, \theta, \phi, t) &= \frac{I_0 e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi\epsilon_0 j\omega r^2} \left[\ell \cos\theta \frac{(\lambda + j2\pi r)}{\lambda} \right] = \\ &= \frac{I_0 e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi\epsilon_0 j\omega r^2} \left[\ell \cos\theta \frac{(c + j\omega r)}{c} \right] = \\ &= \frac{I_0 \ell \cos\theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi\epsilon_0 c} \left[\frac{(c + j\omega r)}{j\omega r^2} \right] = \\ &= \frac{I_0 \ell \cos\theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi\epsilon_0 c} \left[\frac{c}{j\omega r^2} + \frac{1}{r} \right] = \\ &= \frac{I_0 \ell \cos\theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi\epsilon_0 c} \left[\frac{1}{r} + \frac{c}{j\omega r^2} \right] \end{aligned} \quad (23)$$

ou, em termos apenas do resultado final de (23),

$$\Phi(r, \theta, \phi, t) = \frac{I_0 \ell \cos\theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi\epsilon_0 c} \left[\frac{1}{r} + \frac{c}{j\omega r^2} \right] \quad [\text{V}] \quad (24)$$

A Equação (24) determina o valor de $\Phi(r, \theta, \phi, t)$ [V] gerado em um ponto $p(r, \theta, \phi)$ a uma distância r de um dipolo curto tendo como **únicas restrições**: excitação senoidal de frequência $\omega = 2\pi f$, $r \gg \ell$, $\lambda \gg \ell$ e $d \ll \ell$.

4.1.3 Determinação do campo elétrico \underline{E}

Na Seção 4.1.1 obtivemos $\underline{A}(r, \theta, \phi, t) = A_z \underline{\hat{z}}$ com A_z dado por (9), e na Seção 4.1.2 obtivemos $\Phi(r, \theta, \phi, t)$ dado por (24). Podemos, então, determinar o campo elétrico $\underline{E}(r, \theta, \phi, t)$ no ponto desejado $p(r, \theta, \phi)$ do espaço \mathfrak{R}^3 utilizando a Equação (6) em Coordenadas Esféricas.

Expressando em Coordenadas Esféricas as componentes das grandezas vetoriais de (6):

$$\underline{E} = \underline{\hat{r}}E_r + \underline{\hat{\theta}}E_\theta + \underline{\hat{\phi}}E_\phi \quad \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right] \quad (25)$$

$$\underline{A} = \underline{\hat{r}}A_r + \underline{\hat{\theta}}A_\theta + \underline{\hat{\phi}}A_\phi \quad \left[\frac{\text{Wb}}{\text{m}} \right] \quad (26)$$

onde $\underline{\hat{r}}$, $\underline{\hat{\theta}}$ e $\underline{\hat{\phi}}$ são os vetores unitários da base orthonormal que define o espaço \mathfrak{R}^3 no Sistema de Coordenadas Esféricas (r, θ, ϕ) .

O gradiente $\nabla\Phi$ do potencial elétrico escalar Φ em Coordenadas Esféricas é dado por (vide Apêndice A deste capítulo):

$$\nabla\Phi = \underline{\hat{r}}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \underline{\hat{\theta}}\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} + \underline{\hat{\phi}}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi} \quad \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right] \quad (27)$$

Com base na Figura 7, (26) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \underline{A} &= \underline{\hat{r}}A_r + \underline{\hat{\theta}}A_\theta + \underline{\hat{\phi}}A_\phi = \underline{\hat{r}}A_z \cos\theta + \underline{\hat{\theta}}(-A_z \sin\theta) + \underline{\hat{\phi}}0 = \\ &= \underline{\hat{r}}A_z \cos\theta - \underline{\hat{\theta}}(A_z \sin\theta) \quad [\text{Wb/m}] \end{aligned} \quad (28)$$

Substituindo (27) e (28) em (6) temos

$$\begin{aligned} \underline{E}(r, \theta, \phi, t) &= -\nabla\Phi(r, \theta, \phi, t) - \frac{\partial}{\partial t}\underline{A}(r, \theta, \phi, t) = \\ &= -\left(\underline{\hat{r}}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \underline{\hat{\theta}}\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} + \underline{\hat{\phi}}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi} \right) - \frac{\partial}{\partial t}(\underline{\hat{r}}A_z \cos\theta - \underline{\hat{\theta}}(A_z \sin\theta)) \quad \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right] \end{aligned} \quad (29)$$

sendo A_z dado por (9). Separando as componentes de $\underline{E}(r, \theta, \phi, t) = \underline{\hat{r}}E_r + \underline{\hat{\theta}}E_\theta + \underline{\hat{\phi}}E_\phi$ em (29) nas direções $\underline{\hat{r}}$, $\underline{\hat{\theta}}$ e $\underline{\hat{\phi}}$:

$$E_r = -\frac{\partial\Phi}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial t}A_z \cos\theta \quad \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right] \quad (30)$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} + \frac{\partial}{\partial t}(A_z \sin\theta) \quad \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right] \quad (31)$$

$$E_\phi = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi} \quad \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right] \quad (32)$$

Obtendo $\frac{\partial\Phi}{\partial r}$ para efeito do cômputo de (30), com Φ dado por (24), temos

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Phi}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{I_0 \ell \cos \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi \epsilon_0 c} \left[\frac{1}{r} + \frac{c}{j\omega r^2} \right] \right\} = \\
 &= \frac{I_0 \ell \cos \theta e^{j\omega t}}{4\pi \epsilon_0 c} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ e^{-j\beta r} \left[\frac{1}{r} + \frac{c}{j\omega r^2} \right] \right\} = \\
 &= \frac{I_0 \ell \cos \theta e^{j\omega t}}{4\pi \epsilon_0 c} \left\{ -j\beta e^{-j\beta r} \left[\frac{1}{r} - j \frac{c}{\omega r^2} \right] + \right. \\
 &\quad \left. + e^{-j\beta r} \left[\frac{-1}{r^2} + 2j \frac{c}{\omega r^3} \right] \right\} = \\
 &= \frac{I_0 \ell \cos \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi \epsilon_0 c} \left\{ -j\beta \left[\frac{1}{r} - j \frac{c}{\omega r^2} \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \left[\frac{-1}{r^2} + 2j \frac{c}{\omega r^3} \right] \right\} \tag{33}
 \end{aligned}$$

Mas $\beta = 2\pi/\lambda$ e $\lambda = c/f = 2\pi c/\omega$. Daí $\beta = 2\pi/\lambda = \frac{2\pi}{2\pi c/\omega} = \omega/c$, $c = 3 \times 10^8$ m/s, de modo que (33) torna-se:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Phi}{\partial r} &= \frac{I_0 \ell \cos \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi \epsilon_0 c} \left\{ -j\beta \left[\frac{1}{r} - j \frac{c}{\omega r^2} \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \left[\frac{-1}{r^2} + 2j \frac{c}{\omega r^3} \right] \right\} = \\
 &= \frac{I_0 \ell \cos \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi \epsilon_0 c} \left\{ -j \frac{\omega}{c} \left[\frac{1}{r} - j \frac{c}{\omega r^2} \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \left[\frac{-1}{r^2} + 2j \frac{c}{\omega r^3} \right] \right\} = \\
 &= \frac{I_0 \ell \cos \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi \epsilon_0 c} \left\{ -j \frac{\omega}{cr} - \frac{2}{r^2} + 2j \frac{c}{\omega r^3} \right\} \tag{34}
 \end{aligned}$$

Obtendo $\frac{\partial}{\partial t} A_z$ para efeito do cômputo de (30) e (31), com A_z dado por (9), temos

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} A_z &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\mu_0 I_0 \ell e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \right\} = \frac{\mu_0 I_0 \ell e^{-j\beta r}}{4\pi r} \frac{\partial}{\partial t} \{ e^{j\omega t} \} = \\
 &= \frac{\mu_0 I_0 \ell e^{-j\beta r}}{4\pi r} \{ j\omega e^{j\omega t} \} = j\omega \left\{ \frac{\mu_0 I_0 \ell e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \right\} \tag{35}
 \end{aligned}$$

Obtendo $\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}$ para efeito do cômputo de (31), com Φ dado por (24), temos

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{I_0 \ell \cos \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi \epsilon_0 c} \left[\frac{1}{r} + \frac{c}{j\omega r^2} \right] \right\} = \\
 &= \frac{I_0 \ell e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi \epsilon_0 c} \left[\frac{1}{r} + \frac{c}{j\omega r^2} \right] \frac{\partial}{\partial \theta} \{ \cos \theta \} = \\
 &= -\frac{I_0 \ell \operatorname{sen} \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi \epsilon_0 c} \left[\frac{1}{r} + \frac{c}{j\omega r^2} \right]
 \end{aligned} \tag{36}$$

Obtendo $\frac{\partial \Phi}{\partial \phi}$ para efeito do cômputo de (32), com Φ dado por (24), temos

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi} \left\{ \frac{I_0 \ell \cos \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi \epsilon_0 c} \left[\frac{1}{r} + \frac{c}{j\omega r^2} \right] \right\} = 0 \tag{37}$$

Substituindo (34) e (35) em (30):

$$\begin{aligned}
 E_r &= -\frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial t} A_z \cos \theta = \\
 &= -\frac{I_0 \ell \cos \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi \epsilon_0 c} \left\{ -j\frac{\omega}{cr} - \frac{2}{r^2} + 2j\frac{c}{\omega r^3} \right\} - j\omega \left\{ \frac{\mu_0 I_0 \ell e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \right\} \cos \theta = \\
 &= -\frac{I_0 \ell \cos \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi \epsilon_0} \left[\frac{(-j\omega^2 + j\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 c^2)r^2 - 2cr\omega + 2jc^2}{c^2 r^3 \omega} \right] \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right]
 \end{aligned} \tag{38}$$

Mas $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \rightarrow c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$, e daí (38) simplifica-se para a forma

$$\begin{aligned}
 E_r &= -\frac{I_0 \ell \cos \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi \epsilon_0} \left[\frac{(-j\omega^2 + j\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 c^2)r^2 - 2cr\omega + 2jc^2}{c^2 r^3 \omega} \right] = \\
 &= -\frac{I_0 \ell \cos \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi \epsilon_0} \left[\frac{(-j\omega^2 + j\omega^2)r^2 - 2cr\omega + 2jc^2}{c^2 r^3 \omega} \right] = \\
 &= -\frac{I_0 \ell \cos \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi \epsilon_0} \left[\frac{-2cr\omega + 2jc^2}{c^2 r^3 \omega} \right] = \\
 &= -\frac{I_0 \ell \cos \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi \epsilon_0} \left[\frac{-2cr\omega}{c^2 r^3 \omega} + \frac{2jc^2}{c^2 r^3 \omega} \right] = \\
 &= -\frac{I_0 \ell \cos \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi \epsilon_0} \left[\frac{-2}{cr^2} + \frac{2j}{r^3 \omega} \right] = \\
 &= \frac{I_0 \ell \cos \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{2\pi \epsilon_0} \left[\frac{1}{cr^2} + \frac{1}{j\omega r^3} \right] \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right]
 \end{aligned} \tag{39}$$

Substituindo (36) e (35) em (31):

$$\begin{aligned}
E_{\theta} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial t} A_z \sin \theta = \\
&= \frac{1}{r} \frac{I_0 \ell \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi \epsilon_0 c} \left[\frac{1}{r} + \frac{c}{j\omega} \frac{1}{r^2} \right] + j\omega \left\{ \frac{\mu_0 I_0 \ell e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \right\} \sin \theta = \\
&= \frac{I_0 \ell \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{\omega r - jc + j\omega^2 r^2 \mu_0 \epsilon_0 c}{\omega c r^3} \right) = \\
&= \frac{I_0 \ell \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{\omega r c - jc^2 + j\omega^2 r^2 \mu_0 \epsilon_0 c^2}{\omega c^2 r^3} \right) = \\
&= \frac{I_0 \ell \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{\omega r c - jc^2 + j\omega^2 r^2}{\omega c^2 r^3} \right) = \\
&= \frac{I_0 \ell \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{\omega r c}{\omega c^2 r^3} - \frac{jc^2}{\omega c^2 r^3} + \frac{j\omega^2 r^2}{\omega c^2 r^3} \right) = \\
&= \frac{I_0 \ell \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{c r^2} - \frac{j}{\omega r^3} + \frac{j\omega}{c^2 r} \right) = \\
&= \frac{I_0 \ell \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{j\omega}{c^2 r} + \frac{1}{c r^2} + \frac{1}{j\omega r^3} \right) \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right] \tag{40}
\end{aligned}$$

Substituindo (37) em (32):

$$E_{\phi} = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} = -\frac{1}{r \sin \theta} 0 = 0 \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right] \tag{41}$$

Sumariando os resultados obtidos até agora:

$$E_r = \frac{I_0 \ell \cos \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{2\pi \epsilon_0} \left[\frac{1}{c r^2} + \frac{1}{j\omega r^3} \right] \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right] \tag{39}$$

$$E_{\theta} = \frac{I_0 \ell \sin \theta e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{j\omega}{c^2 r} + \frac{1}{c r^2} + \frac{1}{j\omega r^3} \right) \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right] \tag{40}$$

$$E_{\phi} = 0 \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right] \tag{41}$$

$$\underline{E}(r, \theta, \phi, t) = \hat{r}E_r + \hat{\theta}E_{\theta} + \hat{\phi}E_{\phi} \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right] \tag{42}$$

As Equações (39) a (42) determinam o valor de $\underline{E}(r, \theta, \phi, t)$ [V/m] gerado em um ponto $p(r, \theta, \phi)$ a uma distância r de um dipolo curto tendo como **únicas restrições**: excitação senoidal de frequência $\omega = 2\pi f$, $r \gg \ell$, $\lambda \gg \ell$ e $d \ll \ell$.

4.1.4 Determinação do campo magnético \underline{H}

Para determinar o campo magnético $\underline{H}(r, \theta, \phi, t)$ no ponto desejado $p(r, \theta, \phi)$ do espaço \mathfrak{R}^3 utiliza-se Equação (7) em Coordenadas Esféricas.

O rotacional $\underline{\nabla} \times \underline{A}$ do potencial magnético \underline{A} em Coordenadas Esféricas é dado por (vide Apêndice A deste capítulo):

$$\begin{aligned} \underline{\nabla} \times \underline{A} = & \hat{r} \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] + \\ & + \hat{\theta} \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} r A_\phi \right) + \\ & + \hat{\phi} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} r A_\theta - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (43)$$

Da Figura 7 observamos que $A_\phi = 0$ e que $A_r = A_z \cos \theta$ e $A_\theta = -A_z \sin \theta$ não variam com ϕ . Daí (43) simplifica-se para a forma

$$\underline{\nabla} \times \underline{A} = \hat{\phi} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} r A_\theta - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \quad (44)$$

Substituindo (44) em (7) temos:

$$\begin{aligned} \underline{H}(r, \theta, \phi, t) = & \frac{1}{\mu_0} \underline{\nabla} \times \underline{A} = \hat{\phi} \frac{1}{\mu_0 r} \left(\frac{\partial}{\partial r} r A_\theta - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) = \\ = & \hat{\phi} \frac{1}{\mu_0 r} \left(\frac{\partial}{\partial r} r (-A_z \sin \theta) - \frac{\partial (A_z \cos \theta)}{\partial \theta} \right) \left[\frac{\underline{A}}{\text{m}} \right] \end{aligned} \quad (45)$$

Substituindo (9) em (45) temos:

$$\underline{H}(r, \theta, \phi, t) = \hat{\phi} \frac{1}{\mu_0 r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \left(- \left(\frac{\mu_0 I_0 \ell e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \right) \sin \theta \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \left(\frac{\mu_0 I_0 \ell e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \right) \cos \theta \right\} \right) \left[\frac{\underline{A}}{\text{m}} \right] \quad (46)$$

Separando os termos que não dependem de r e θ em (46):

$$\underline{H}(r, \theta, \phi, t) = \hat{\phi} \frac{1}{\mu_0 r} \left(- \sin \theta \frac{\mu_0 I_0 \ell e^{j\omega t}}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} \{ e^{-j\beta r} \} + \frac{\mu_0 I_0 \ell e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \frac{\partial}{\partial \theta} \{ \cos \theta \} \right) \left[\frac{\underline{A}}{\text{m}} \right] \quad (47)$$

Efetuada as derivadas em (47) e simplificando:

$$\begin{aligned}
 \underline{H}(r, \theta, \phi, t) &= \hat{\phi} \frac{1}{\mu_0 r} \left(\begin{array}{l} -\text{sen } \theta \frac{\mu_0 I_0 \ell e^{j\omega t}}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} \{e^{-j\beta r}\} + \\ -\frac{\mu_0 I_0 \ell e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \frac{\partial}{\partial \theta} \{\cos \theta\} \end{array} \right) = \\
 &= \hat{\phi} \frac{1}{\mu_0 r} \left(\begin{array}{l} -\text{sen } \theta \frac{\mu_0 I_0 \ell e^{j\omega t}}{4\pi} \{-j\beta e^{-j\beta r}\} + \\ -\frac{\mu_0 I_0 \ell e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi r} \{-\text{sen } \theta\} \end{array} \right) = \\
 &= \hat{\phi} \frac{I_0 \ell e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi} \text{sen } \theta \left(j\beta \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} \right) = \\
 &= \hat{\phi} \frac{I_0 \ell e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi} \text{sen } \theta \left(\frac{j\omega}{cr} + \frac{1}{r^2} \right) \left[\frac{\text{A}}{\text{m}} \right] \quad (48)
 \end{aligned}$$

Ou seja

$$\underline{H}(r, \theta, \phi, t) = \hat{\phi} H_\phi \left[\frac{\text{A}}{\text{m}} \right] \quad (49)$$

onde

$$H_\phi = \frac{I_0 \ell e^{j(\omega t - \beta r)}}{4\pi} \text{sen } \theta \left(\frac{j\omega}{cr} + \frac{1}{r^2} \right) \left[\frac{\text{A}}{\text{m}} \right] \quad (50)$$

é a única componente não nula do campo magnético $\underline{H}(r, \theta, \phi, t) = \hat{r}H_r + \hat{\theta}H_\theta + \hat{\phi}H_\phi$.

As Equações (49) e (50) determinam o valor de $\underline{H}(r, \theta, \phi, t)$ [A/m] gerado em um ponto $p(r, \theta, \phi)$ a uma distância r de um dipolo curto tendo como **únicas restrições**: excitação senoidal de frequência $\omega = 2\pi f$, $r \gg \ell$, $\lambda \gg \ell$ e $d \ll \ell$.

4.2 As regiões de Campo Próximo e Campo Distante

As características e o relacionamento entre os campos $\underline{E}(r, \theta, \phi, t)$ e $\underline{H}(r, \theta, \phi, t)$ apresentam comportamento diferenciado que é função da distância r do ponto $p(r, \theta, \phi)$ ao dipolo curto. Este comportamento diferenciado depende especificamente da relação entre r e o comprimento de onda λ , definindo duas regiões básicas do processo de irradiação denominadas de **Campo Próximo** ($r \ll \lambda$) e **Campo Distante** ($r \gg \lambda$).

A Tabela 1 mostra o sumário de todas as relações analíticas obtidas para os campos gerados, sem nenhuma restrição quanto a distância r do ponto $p(r, \theta, \phi)$ ao dipolo curto.

Tabela 1: Relações Analíticas Gerais p/ os campos $\underline{E}(r, \theta, \phi, t)$ e $\underline{H}(r, \theta, \phi, t)$ gerados em um ponto $p(r, \theta, \phi)$ do espaço \mathfrak{R}^3 pelo dipolo curto mostrado na Figura 8.

Condições de validade: excitação senoidal de frequência $\omega = 2\pi f$, $r \gg \ell$, $\lambda \gg \ell$ e $d \ll \ell$.

$$E_r = \frac{I_0 \ell e^{j(\omega t - \beta r)} \cos \theta}{2\pi \epsilon_0} \left[\frac{1}{cr^2} + \frac{1}{j\omega r^3} \right] \quad \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right] \quad \text{(I)}$$

$$E_\theta = \frac{I_0 \ell e^{j(\omega t - \beta r)} \text{sen} \theta}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{j\omega}{c^2 r} + \frac{1}{cr^2} + \frac{1}{j\omega r^3} \right) \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right] \quad \text{(II)}$$

$$H_\phi = \frac{I_0 \ell e^{j(\omega t - \beta r)} \text{sen} \theta}{4\pi} \left(\frac{j\omega}{cr} + \frac{1}{r^2} \right) \quad \left[\frac{\text{A}}{\text{m}} \right] \quad \text{(III)}$$

$$E_\phi = H_r = H_\theta = 0 \quad \text{(IV)}$$

- Note na Tabela 1 que os campos \underline{E} e \underline{H} independem de ϕ .

4.2.1 Região de Campo Distante – Região de Fraunhofer

A região de Campo Distante é a região do espaço \mathfrak{R}^3 na qual a distância r entre um irradiador e qualquer ponto $p(r, \theta, \phi)$ pertencente à região é tal que $r \gg \lambda$. Na prática, isto é quantificado

através da relação $r > \frac{2D^2}{\lambda}$, onde D é a maior dimensão física do irradiador. Esta relação é precisa

apenas quando $D > \lambda$, situação que ocorre para antenas de abertura, como Refletores Parabólicos e *Horns*. Para o caso específico do dipolo curto adota-se a relação $r > \lambda/2\pi$ e para antenas lineares em geral vale a relação $r > 10\lambda$. A Tabela 2 mostra as relações analíticas para a região de Campo Distante, relações que são obtidas da Tabela 1 fazendo-se $r \rightarrow \infty$.

Tabela 2: Relações analíticas obtidas a partir da Tabela 1 p/ os **Campos Distantes** $\underline{E}(r, \theta, \phi, t)$ e $\underline{H}(r, \theta, \phi, t)$ gerados em um ponto $p(r, \theta, \phi)$ do espaço \mathfrak{R}^3 pelo dipolo curto mostrado na Figura 8.

Condições de validade: $r \gg \lambda$ + todas as da Tabela 1.

$E_r = 0$	(I)
$E_\theta = \frac{I_0 \ell e^{j(\omega t - \beta r)} \sin \theta}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{j\omega}{c^2 r} \right) = \frac{I_0 \ell e^{j\left(\omega t - \beta r + \frac{\pi}{2}\right)} \sin \theta}{2\epsilon_0 c \lambda r} \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right]$	(II)
$H_\phi = \frac{I_0 \ell e^{j(\omega t - \beta r)} \sin \theta}{4\pi} \left(\frac{j\omega}{cr} \right) = \frac{I_0 \ell e^{j\left(\omega t - \beta r + \frac{\pi}{2}\right)} \sin \theta}{2\lambda r} \left[\frac{\text{A}}{\text{m}} \right]$	(III)
$E_\phi = H_r = H_\theta = 0$	(IV)

Observações relativas à região de Campo Distante (ver Tabela 2):

- Na direção de propagação da onda , o campo elétrico é nulo ($E_r = 0$).
- A razão E_θ / E_ϕ [Ω] resulta em:

$$\begin{aligned} \frac{E_\theta}{H_\phi} &= \frac{\frac{I_0 \ell e^{j\left(\omega t - \beta r + \frac{\pi}{2}\right)} \sin \theta}{2\epsilon_0 c \lambda r}}{\frac{I_0 \ell e^{j\left(\omega t - \beta r + \frac{\pi}{2}\right)} \sin \theta}{2\lambda r}} = \frac{2\lambda r}{2\epsilon_0 c \lambda r} = \frac{1}{\epsilon_0 c} = \frac{1}{\epsilon_0 \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}} = \\ &= \frac{1}{\frac{\epsilon_0}{\sqrt{\epsilon_0}} \frac{1}{\sqrt{\mu_0}}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = Z_0 = 120\pi \quad [\Omega] \end{aligned} \quad (51)$$

sendo $Z_0 = 120\pi$ [Ω] a **Impedância Intrínseca do Espaço livre** (válida quando o meio de propagação é o vácuo ou ar seco).

- E_θ e H_ϕ estão em fase no tempo um em relação ao outro. Em outras palavras, na região de Campo Distante a onda eletromagnética irradiada possui seus campos \underline{E} e \underline{H} relacionados de mesma forma que os campos \underline{E} e \underline{H} de uma onda plana. Portanto, a energia eletromagnética (setas azuis na Figura 8) é efetivamente irradiada através do espaço \mathfrak{R}^3 na região de Campo Distante em consequência do alinhamento de fase entre E_θ e H_ϕ .
- As amplitudes de E_θ e H_ϕ são ambas proporcionais a $\sin \theta$ e variam de acordo com $1/r$.

- Uma forma alternativa para o **Campo Distante** E_θ pode ser obtida da Equação (II) da Tabela 2

fazendo-se $\frac{1}{\epsilon_0 c} = Z_0 = 120\pi \text{ } [\Omega]$:

$$E_\theta = \frac{I_0 \ell e^{j(\omega t - \beta r + \frac{\pi}{2})} \text{sen } \theta}{2\epsilon_0 c \lambda r} = 60\pi I_0 \left(\frac{\ell}{r\lambda} \right) e^{j(\omega t - \beta r + \frac{\pi}{2})} \text{sen } \theta \quad (52)$$

4.2.2 Região de Campo Próximo

A região de Campo Próximo é a região do espaço \mathfrak{R}^3 na qual a distância r entre um irradiador e qualquer ponto $p(r, \theta, \phi)$ pertencente à região é tal que $r \ll \lambda$. Esta relação é quantificada na prática

através de $r < 0.62 \sqrt{\frac{D^3}{\lambda}}$, onde D é a maior dimensão física do irradiador. Para o caso do dipolo

curto e para antenas lineares em geral adota-se a relação $r < \lambda/2\pi$. A Tabela 3 mostra as relações analíticas para a região de Campo Próximo, relações que são obtidas da Tabela 1 fazendo-se $r \rightarrow 0$.

Tabela 3: Relações analíticas obtidas a partir da Tabela 1 p/ os **Campos Próximos** $\underline{E}(r, \theta, \phi, t)$ e $\underline{H}(r, \theta, \phi, t)$ gerados em um ponto $p(r, \theta, \phi)$ do espaço \mathfrak{R}^3 pelo dipolo curto mostrado na Figura 8.

Condições de validade: $r \ll \lambda$ + todas as da Tabela 1.

$$E_r = \frac{I_0 \ell e^{j(\omega t - \beta r)} \cos \theta}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{j\omega r^3} \right] = \frac{I_0 \ell e^{j(\omega t - \beta r - \frac{\pi}{2})} \cos \theta}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\omega r^3} \right) \quad \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right] \quad (\text{I})$$

$$E_\theta = \frac{I_0 \ell e^{j(\omega t - \beta r)} \text{sen } \theta}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{j\omega r^3} \right) = \frac{I_0 \ell e^{j(\omega t - \beta r - \frac{\pi}{2})} \text{sen } \theta}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\omega r^3} \right) \quad \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right] \quad (\text{II})$$

$$H_\phi = \frac{I_0 \ell e^{j(\omega t - \beta r)} \text{sen } \theta}{4\pi} \left(\frac{1}{r^2} \right) \quad \left[\frac{\text{A}}{\text{m}} \right] \quad (\text{III})$$

$$E_\phi = H_r = H_\theta = 0 \quad (\text{IV})$$

Observações relativas à região de Campo Próximo (ver Tabela 3):

- O campo elétrico na direção de propagação da onda **não** é nulo ($E_r \neq 0$).
- E_r e E_θ estão em fase no tempo um em relação ao outro.
- E_r e E_θ encontram-se ambos simultaneamente defasados de $\pi/2 = 90^\circ$ no tempo em relação a H_ϕ . Em outras palavras, E_r e E_θ estão em **quadratura de fase** no tempo em relação a H_ϕ .

- ⇒ Portanto para na região de **Campo Próximo** o campo magnético $\underline{H} = \hat{\phi}H_{\phi}$ encontra-se defasado 90° no tempo do campo elétrico $\underline{E} = \hat{r}E_r + \hat{\theta}E_{\theta}$, o que faz fluxo de potência nas proximidades do dipolo ser **altamente reativo**.
- ⇒ O fluxo de potência reativo na região de **Campo Próximo** implicitamente significa a existência de **ondas estacionárias**⁸ no interior nesta região que fazem com que a energia eletromagnética flua para frente e para trás duas vezes por período $T = 1/f$ do gerador (setas vermelhas bidirecionais na Figura 8), conforme mostra a Figura 9.
- ⇒ Ou seja, a região de **Campo Próximo** tende a manter confinada dentro de si a potência fornecida pelo dipolo sem irradiá-la adiante (como em uma cavidade ressonante). Apenas no limite externo da região de **Campo Próximo**, início da denominada Região Intermediária de Fresnel $(0.62\sqrt{\frac{D^3}{\lambda}} < r < \frac{2D^2}{\lambda})$, é que começa a haver irradiação efetivamente, conforme sugere a Figura 8.

⁸ Uma **onda estacionária** resulta da superposição, na mesma região do espaço \mathfrak{R}^3 , de uma **onda direta** e de uma **onda refletida**.

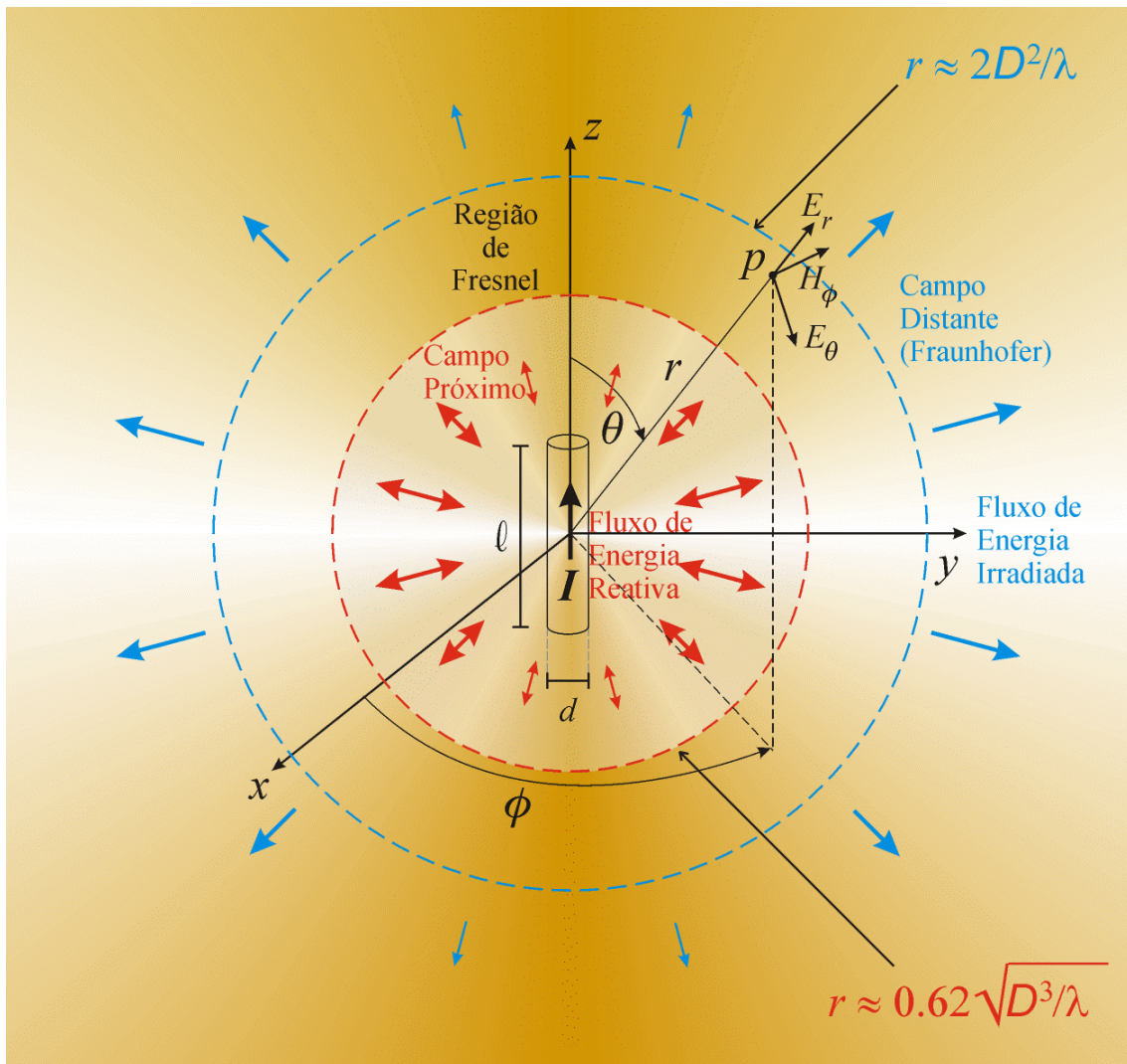


Figura 8: Densidade superficial do fluxo de potência $\vec{S} = \frac{1}{2}(\underline{E} \times \underline{H}^*)$ que atravessa a superfície das esferas concêntricas⁹ delimitadoras das regiões de **Campo Próximo** e **Campo Distante** para um irradiador do tipo dipolo curto alinhado com o eixo z . Observe que na região de **Campo Distante** o fluxo de potência é real, ocorrendo, em consequência, irradiação eletromagnética. Observe também que no **Campo Distante** a irradiação de energia é máxima no equador da esfera ($\theta = 90^\circ$).

⁹ Na Seção 4.5 estudaremos o fluxo de potência $\vec{S} = \frac{1}{2}(\underline{E} \times \underline{H}^*)$ que atravessa a superfície de uma esfera de raio infinito em cujo centro encontra-se o irradiador. Isto nos levará ao conceito de Resistência de Radiação.

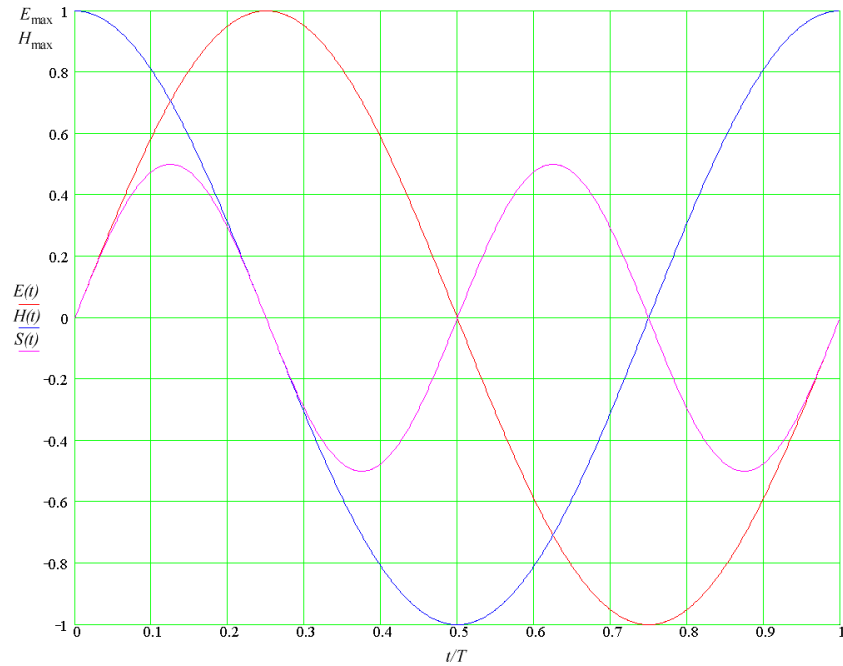


Figura 9: Valor instantâneo $S(t) = E(t)H(t)$ do fluxo de potência $\vec{S} = \frac{1}{2}(\underline{E} \times \underline{H}^*)$ para

$$E(t) = E_{\max} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - 90^\circ\right) \text{ e } H(t) = H_{\max} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right).$$

- Em distâncias intermediárias (Região de Fresnel na Figura 8), E_r e E_θ podem ficar defasados de $\pi/2 = 90^\circ$ no tempo devido ao quociente entre os termos $\left[\frac{1}{cr^2} + \frac{1}{j\omega r^3}\right]$ e

$$\left(\frac{j\omega}{c^2 r} + \frac{1}{cr^2} + \frac{1}{j\omega r^3}\right)$$

respectivamente nas Equações (I) e (II) da Tabela 1 resultar em um número complexo com fase 90° para valores específicos de r . Nesta situação de quadratura, o vetor campo elétrico $\underline{E} = \hat{r}E_r + \hat{\theta}E_\theta$ gira em função da distância r , e sua ponta descreve uma elipse com centro em p no plano β que contém os vetores E_r e E_θ . Esta situação é denominada de **campo cruzado**, e caracteriza-se por nulos anômalos na intensidade de sinal captado por uma antena dipolo receptora, paralela à transmissora, para determinados valores de distância r entre ambas. Estes nulos transformam-se em máximo de sinal bastando girar 90° o dipolo receptor no plano β que contém os dipolos transmissor e receptor. Este comportamento é consequência da **Polarização** entre antenas transmissora e receptora, parâmetro a ser estudado em capítulo posterior.

4.3 Regime de Operação Quase-Estacionário

Esta situação de operação de uma antena ocorre quando ela é submetida à uma excitação senoidal de frequência f muito baixa ($f \rightarrow 0$).

Para esta situação, $\lambda = c/f \rightarrow \infty$, $\omega = 2\pi f \rightarrow 0$ e $\beta = 2\pi/\lambda \rightarrow 0$.

Como $f \rightarrow 0$, não há quase movimento de cargas pois a corrente na antena é muito pequena.

A operação em regime quase-estacionário de um dipolo curto pode ser caracterizada fazendo $\omega = \beta = 0$ no termo $e^{j(\omega t - \beta r)}$ das equações (I), (II) e (III) da Tabela 1, e fazendo $\omega \rightarrow 0$ em todos os demais termos. Ainda, como não há quase movimento de cargas pois a corrente na antena é muito pequena, é razoável, de (14), adicionalmente fazer $I_0 = j\omega q_0$ nas equações (I) e (II) da Tabela 1:

Tabela 4: Relações analíticas obtidas a partir da Tabela 1 p/ os **Campos Quase-Estacionários** $\underline{E}(r, \theta, \phi, t)$ e $\underline{H}(r, \theta, \phi, t)$ gerados em um ponto $p(r, \theta, \phi)$ do espaço \mathfrak{R}^3 pelo dipolo curto da Figura 2.

Condições de validade: $\omega \rightarrow 0 +$ todas as da Tabela 1.

$E_r = \frac{q_0 \ell \cos \theta}{2\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{r^3} \right) \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right]$	(I)
$E_\theta = \frac{q_0 \ell \sin \theta}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{r^3} \right) \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right]$	(II)
$H_\phi = \frac{I_0 \ell \sin \theta}{4\pi} \left(\frac{1}{r^2} \right) \left[\frac{\text{A}}{\text{m}} \right]$	(III)
$E_\phi = H_r = H_\theta = 0$	(IV)

Como os campos quase-estacionários variam com $1/r^2$ e $1/r^3$, eles ficam confinados em vizinhanças muito próximas do dipolo curto, e, portanto, a irradiação é desprezível.

4.4 Fluxo de Potência – Vetor de Poynting Complexo

Conforme já discutido em parágrafos anteriores, na grande maioria das situações práticas de utilização de antenas a variação no tempo da corrente na antena é da forma $I(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi)$, $\omega = 2\pi f$, sendo I_0 o valor instantâneo máximo da corrente e f é a frequência do gerador que alimenta a antena.

Para estas situações, considerando que

$$M e^{j(\omega t + \psi)} = M \cos(\omega t + \psi) + jM \sin(\omega t + \psi) \quad (53)$$

e que o meio de propagação de uma onda eletromagnética é na grande maioria dos casos um meio linear, de forma que a parte real de uma grandeza complexa neste meio é afetada pelas propriedades do meio de forma independente da parte imaginária da mesma grandeza¹⁰ então o comportamento no tempo das grandezas vetoriais \underline{E} e \underline{H} em um ponto p do espaço \mathfrak{R}^3 pode ser convenientemente expresso por :

$$\underline{E} = \hat{a}_E E_0 e^{j\omega t} \quad (54)$$

¹⁰ Isto significa que podemos assumir todas as grandezas no meio de propagação como sendo representadas pela forma analítica complexa $M e^{j(\omega t + \psi)}$, para efeito de simplificação da solução de equações íntegro-diferenciais. Uma vez que o meio de propagação é linear, podemos desprezar $jM \sin(\omega t + \psi)$ e considerar que este afeta o módulo M e a fase ψ da grandeza representada por $M e^{j(\omega t + \psi)}$ de maneira idêntica à que afeta M e ψ de $M \cos(\omega t + \psi)$.

$$\underline{H} = \hat{a}_H H_0 e^{j(\omega t - \xi)} \quad (55)$$

onde \hat{a}_E e \hat{a}_H são os vetores unitários ortogonais entre si que definem as direções de referência para \underline{E} e \underline{H} no sistema de coordenadas adotado, E_0 e H_0 são os valores instantâneos máximos de \underline{E} e \underline{H} no tempo, e ξ é o ângulo de defasagem no tempo entre \underline{E} e \underline{H} .

Por exemplo, de (51), na situação de **Campo Distante** do dipolo curto temos $\frac{E_\theta}{H_\phi} = Z_0 = 120\pi \text{ } [\Omega]$,

de modo que de (54) e (55) temos $\frac{|\underline{E}|}{|\underline{H}|} = \frac{E_\theta}{H_\phi} = \frac{E_0 e^{j\omega t}}{H_0 e^{j(\omega t - \xi)}} = \frac{E_0}{H_0} e^{j\xi} = 120\pi e^{j0} \text{ } [\Omega]$, ficando implícito que $\xi = 0$ para **Campo Distante**.

⇒ **Portanto ξ está associado com o ângulo da impedância do meio local onde a onda se propaga.**

⇒ Observe de (54) e (55) que se efetuarmos a operação $\frac{1}{2}(\underline{E} \times \underline{H}^*)$ obtemos uma grandeza cuja dimensão é $[\text{VA}/\text{m}^2]$, representando uma **Densidade Superficial de Potência Aparente**:

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \frac{1}{2}(\underline{E} \times \underline{H}^*) = \hat{a}_E E_0 e^{j\omega t} \times [\hat{a}_H H_0 e^{j(\omega t - \xi)}]^* = \\ &= \frac{1}{2}(E_0 e^{j\omega t} H_0 [e^{j(\omega t - \xi)}]^*) (\hat{a}_E \times \hat{a}_H) = \\ &= \frac{1}{2}(E_0 e^{j\omega t} H_0 [e^{j(\omega t - \xi)}]^*) \hat{a}_\perp = \\ &= \left(\frac{E_0}{\sqrt{2}} \frac{H_0}{\sqrt{2}} e^{j\omega t} e^{-j(\omega t - \xi)} \right) \hat{a}_\perp = \left(\frac{E_0}{\sqrt{2}} \frac{H_0}{\sqrt{2}} e^{j\xi} \right) \hat{a}_\perp = \\ &= \left(\frac{E_0}{\sqrt{2}} \frac{H_0}{\sqrt{2}} \cos \xi + j \frac{E_0}{\sqrt{2}} \frac{H_0}{\sqrt{2}} \text{sen } \xi \right) \hat{a}_\perp = \\ &= \left(\frac{E_0}{\sqrt{2}} \frac{H_0}{\sqrt{2}} \cos \xi \right) \hat{a}_\perp \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right] + j \left(\frac{E_0}{\sqrt{2}} \frac{H_0}{\sqrt{2}} \text{sen } \xi \right) \hat{a}_\perp \left[\frac{\text{Var}}{\text{m}^2} \right] \end{aligned} \quad (56)$$

onde \hat{a}_\perp é o vetor unitário na direção perpendicular ao plano que contém os vetores \hat{a}_E e \hat{a}_H

⇒ Note que $\cos \xi$ representa um "**fator de densidade de potência**", análogo ao conceito de fator de potência em Teoria de Circuitos Elétricos.

⇒ A equação (56) é a definição do denominado **Vetor de Poynting Complexo** \vec{S} , o qual expressa a densidade superficial do fluxo de potência eletromagnética real e reativa que atravessa uma superfície fechada (uma esfera, por exemplo) em cujo centro encontra-se o irradiador.

⇒ Observe que $\underline{S} = \text{Re}\{\underline{\vec{S}}\} \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right]$ é o **Vetor de Povnting Médio** porque expressa a densidade superficial de potência média¹¹ $\underline{S} = \frac{1}{T} \int_0^T \underline{E}(t) \times \underline{H}(t) dt$ da onda eletromagnética **irradiada** pela antena, medida em $[\text{W}/\text{m}^2]$, análoga ao conceito de **Potência Útil** no contexto de Teoria de Circuitos Elétricos.

⇒ Observe ainda que $\text{Im}\{\underline{\vec{S}}\} \left[\frac{\text{VAr}}{\text{m}^2} \right]$ expressa a densidade superficial de potência média associada à **ondas estacionárias** originadas por **reflexões** da potência incidente no meio de propagação, medida em $[\text{VAr}/\text{m}^2]$, análoga ao conceito de **Potência Reativa** no contexto de Teoria de Circuitos Elétricos.

Efetuada a integral de superfície de $\underline{\vec{S}} = \frac{1}{2} (\underline{E} \times \underline{H}^*)$ sobre qualquer superfície fechada Σ arbitrária que englobe uma antena, obtemos o fluxo de potência Ψ que atravessa a superfície Σ :

$$\Psi = \oiint_{\Sigma} \underline{\vec{S}} \cdot d\underline{\Sigma} = \frac{1}{2} \oiint_{\Sigma} \underline{E} \times \underline{H}^* \cdot d\underline{\Sigma} \quad (57)$$

sendo $d\underline{\Sigma}$ o vetor normal à Σ em cada ponto p a ela pertencente, apontando para seu exterior, e cujo módulo $d\Sigma$ representa a área infinitesimal nas vizinhanças de p .

⇒ $\text{Re}\{\Psi\}$ expressa o fluxo de potência média $[\text{W}]$ (média no período $T = 1/f$ do gerador) da onda que atravessa Σ de dentro para fora, e, portanto, é **irradiada**.

⇒ $\text{Im}\{\Psi\}$ expressa o fluxo de potência reativa $[\text{VAr}]$ da onda que periodicamente atravessa Σ de dentro para fora e de fora para dentro, e, portanto é **confinada** à esta região do espaço delimitada por Σ (**reflexão ↔ ondas estacionárias**).

⇒ A relação $\text{Im}\{\Psi\} = X_r \left(I_0 / \sqrt{2} \right)^2$ determina a **reatância de radiação**¹² X_r de uma antena se Σ for uma superfície que aproximadamente coincide com as dimensões e geometria da estrutura irradiante da antena. **Nota:** Determinadas geometrias de Σ conduzem à singularidades em (57), inviabilizando este método para determinação de X_r .

¹¹ Média temporal no período $T = 1/f$ do gerador.

¹² A **reatância de radiação** mede o grau de reflexão de ondas na região de Campo Próximo de uma antena.

4.5 Resistência de Radiação de um Dipolo Curto

Efetuada a integral de superfície do Vetor de Poynting Médio $\underline{S} = \text{Re}\{\underline{\tilde{S}}\} \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right]$ sobre qualquer superfície fechada Σ que englobe uma antena, obtemos a potência total que **flui para fora** da superfície Σ , isto é, **a potência P [W] total irradiada pela antena:**

$$P = \oiint_{\Sigma} \underline{S} \cdot d\underline{\Sigma} = \frac{1}{2} \oiint_{\Sigma} \text{Re}\{\underline{E} \times \underline{H}^*\} \cdot d\underline{\Sigma} \quad [\text{W}] \quad (58)$$

- Obviamente, a superfície fechada Σ mais simples e conveniente que podemos utilizar para o cômputo de (58) é uma esfera em cujo centro encontra-se o irradiador.
- A potência total irradiada P por um dipolo curto é dada por (assumindo não haver perdas ôhmicas ou dielétricas no dipolo):

$$P = R_r (I_0 / \sqrt{2})^2 \quad [\text{W}] \quad (59)$$

onde R_r é a **resistência de radiação** "vista" nos terminais do dipolo curto e I_0 é o valor instantâneo máximo da corrente.

⇒ Pelo Teorema da Conservação da Energia, a potência total que atravessa uma superfície fechada Σ na região de Campo Distante de um irradiador obrigatoriamente deve igualar a potência total irradiada, de modo que (58) é identicamente igual a (59), pelo que obtemos

$$R_r = \frac{\oiint_{\Sigma} \text{Re}\{\underline{E} \times \underline{H}^*\} \cdot d\underline{\Sigma}}{I_0^2} \quad [\Omega] \quad (60)$$

- Como estamos interessados em determinar a resistência de radiação R_r com base na potência total irradiada, o procedimento é simplificado se utilizarmos como superfície fechada de integração Σ uma esfera de raio r com o dipolo no centro, tal que $r \gg \lambda$ de modo a poder utilizar os resultados obtidos na Tabela 2 para Campo Distante:

$$R_r = \frac{\oiint_{\Sigma} \text{Re}\{\underline{E} \times \underline{H}^*\} \cdot d\underline{\Sigma}}{I_0^2} = \frac{\oiint_{\text{Esfera}} \text{Re}\{\underline{E} \times \underline{H}^*\} \cdot d\underline{S}}{I_0^2} \quad [\Omega] \quad (61)$$

onde $d\underline{S}$ é o elemento de área de uma esfera conforme a Figura 10:

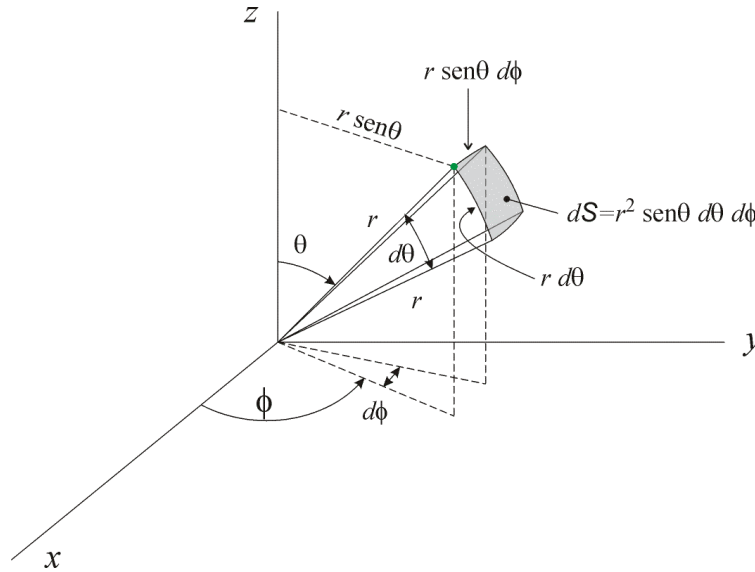


Figura 10: Elemento de área dS de uma superfície esférica.

⇒ Portanto, da Figura 10 e da Tabela 2 a Equação (61) torna-se

$$\begin{aligned}
 R_r &= \frac{\iint_{\text{Esfera}} \text{Re}\{\underline{E} \times \underline{H}^*\} \cdot d\underline{S}}{I_0^2} = \frac{\iint_{\text{Esfera}} \text{Re}\{\hat{\theta} E_\theta \times \hat{\phi} H_\phi^*\} \cdot \hat{r} dS}{I_0^2} = \\
 &= \frac{(\hat{\theta} \times \hat{\phi}) \cdot \hat{r} \iint_{\text{Esfera}} \text{Re}\{E_\theta H_\phi^*\} dS}{I_0^2} = \frac{\hat{r} \cdot \hat{r} \iint_{\text{Esfera}} \text{Re}\{E_\theta H_\phi^*\} dS}{I_0^2} = \\
 &= \frac{\iint_{\text{Esfera}} \text{Re}\{E_\theta H_\phi^*\} dS}{I_0^2} = \frac{\int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \text{Re}\{E_\theta H_\phi^*\} r^2 \text{sen} \theta d\theta d\phi}{I_0^2} = \\
 &= \frac{\int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \text{Re}\left\{ \left(\frac{I_0 e^{j(\omega t - \beta r + \frac{\pi}{2})} \text{sen} \theta}{2 \epsilon_0 c \lambda r} \right) \left(\frac{I_0 e^{j(\omega t - \beta r + \frac{\pi}{2})} \text{sen} \theta}{2 \lambda r} \right)^* \right\} r^2 \text{sen} \theta d\theta d\phi}{I_0^2} = \\
 &= \frac{1}{\epsilon_0 c} \left(\frac{I_0 \ell}{2 \lambda} \right)^2 \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \text{Re}\left\{ e^{j(\omega t - \beta r + \frac{\pi}{2})} e^{-j(\omega t - \beta r + \frac{\pi}{2})} \text{sen}^2 \theta \right\} \text{sen} \theta d\theta d\phi}{I_0^2} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\frac{1}{\epsilon_0 c} \left(\frac{I_0 \ell}{2\lambda} \right)^2 \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \operatorname{Re}\{\sin^2 \theta\} \sin \theta \, d\theta \, d\phi}{I_0^2} = \frac{\frac{1}{\epsilon_0 c} \left(\frac{I_0 \ell}{2\lambda} \right)^2 \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sin^3 \theta \, d\theta \, d\phi}{I_0^2} = \\
 &= \frac{\frac{1}{\epsilon_0 c} \left(\frac{I_0 \ell}{2\lambda} \right)^2 \frac{4}{3} \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} d\phi}{I_0^2} = \frac{120\pi \left(\frac{I_0 \ell}{2\lambda} \right)^2 \frac{8\pi}{3}}{I_0^2} = 80\pi^2 \left(\frac{\ell}{\lambda} \right)^2 [\Omega]
 \end{aligned} \tag{62}$$

4.5.1 O Dipolo Curto como a própria antena - Resistência de Radiação

Todo o equacionamento desenvolvido neste capítulo foi feito considerando o dipolo curto na situação da Figura 11(b) abaixo. Quando o dipolo curto é a própria antena, conforme mostrado na Figura 11(c), situação que ocorre por exemplo em antenas para radiodifusão AM na faixa de 550KHz a 1600Khz, todas as equações obtidas até este ponto de nosso estudo continuam válidas desde que se substitua o comprimento ℓ pelo **comprimento equivalente** ℓ_e .

⇒ comprimento ℓ_e do dipolo curto da Figura 11(c) a ser utilizado em (62) é definido como segue:

ℓ_e é o comprimento de um dipolo curto equivalente com valor de corrente I_0 constante ao longo de z , como na Figura 11(b), cuja área sob a curva I_0 de corrente equívale à área $\ell I_0/2$ sob a curva de corrente $I(z)$ do dipolo da Figura 11(c). Isto é, $\ell_e I_0 = \ell I_0/2$ de modo que $\ell_e = \ell/2$.

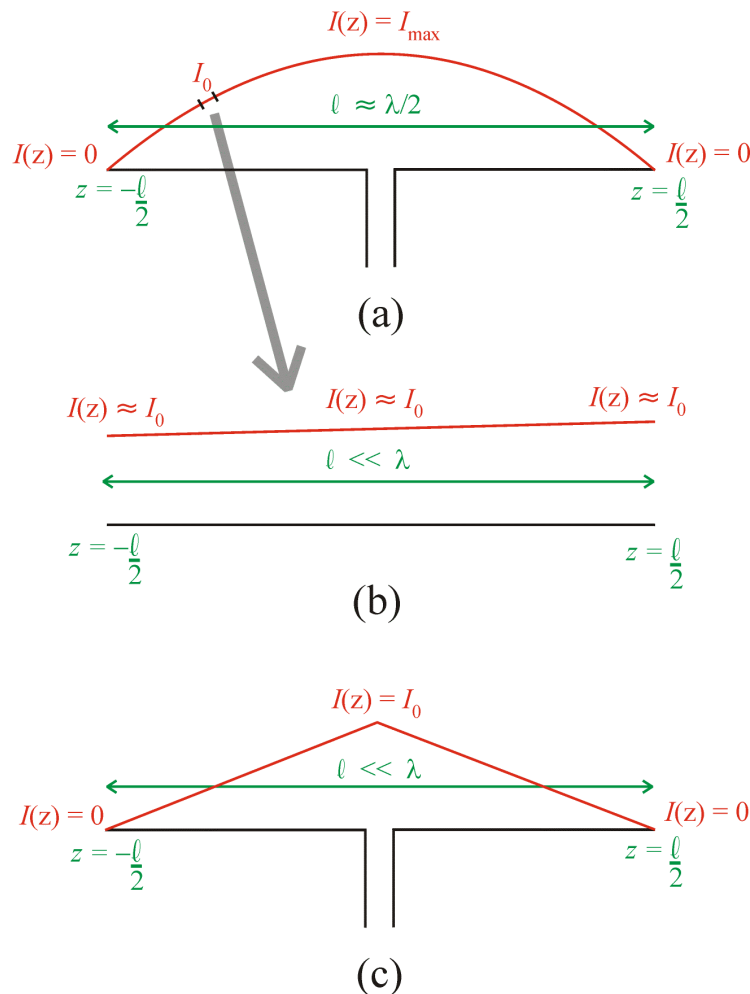


Figura 11: (a) Distribuição senoidal de corrente $I(z)$ para um dipolo de meia-onda¹³ ($\ell = \lambda/2$). (b) Distribuição de corrente $I(z)$ para um dipolo-curto quando este é um elemento infinitesimal de uma antena linear maior. (c) Distribuição de corrente $I(z)$ para um dipolo-curto quando este é a própria antena¹⁴.

4.5.2 O Dipolo resultante da imagem de um Monopolo

Sempre que um irradiador é colocado a uma distância Δ de um plano perfeitamente condutor e de dimensões infinitas, conforme mostra a Figura 12, a consequência é o surgimento de uma "imagem" do irradiador no outro lado da superfície plana como a imagem em um espelho.

¹³ O dipolo de meia onda será estudado em capítulo posterior, quando, então, justificaremos a razão de uma distribuição espacial $I(z)$ senoidal para este irradiador.

¹⁴ Se aceitarmos a distribuição senoidal $I(z)$ para o dipolo de meia onda na Figura 11(a) podemos fazer seguinte inferência: Considerando z' a distância de um ponto no fio condutor a uma das extremidades do dipolo e considerando que a corrente deve ser obrigatoriamente nula nas extremidades do fio, **então** a distribuição de corrente deve variar ao longo de cada metade do dipolo de meia onda de acordo com $\sin z'$. Mas o dipolo curto da Figura 11(c) nada mais é do que um dipolo de meia onda "cortado" nas extremidades, de modo que $z' \rightarrow 0$ e vale a relação $\sin z' \approx z'$. Daí, portanto, a variação linear da corrente mostrada na Figura 11(c).

Isto ocorre porque o campo elétrico tangencial a um condutor perfeito sempre é nulo sob o ponto de vista macroscópico. Para que isto possa acontecer na situação da Figura 12 é necessário que exista o Monopolo imagem mostrado na figura de modo que a componente tangencial do vetor campo elétrico \underline{E} resultante se anule por superposição das componentes tangenciais dos campos elétricos gerados pelos dois monopolos.

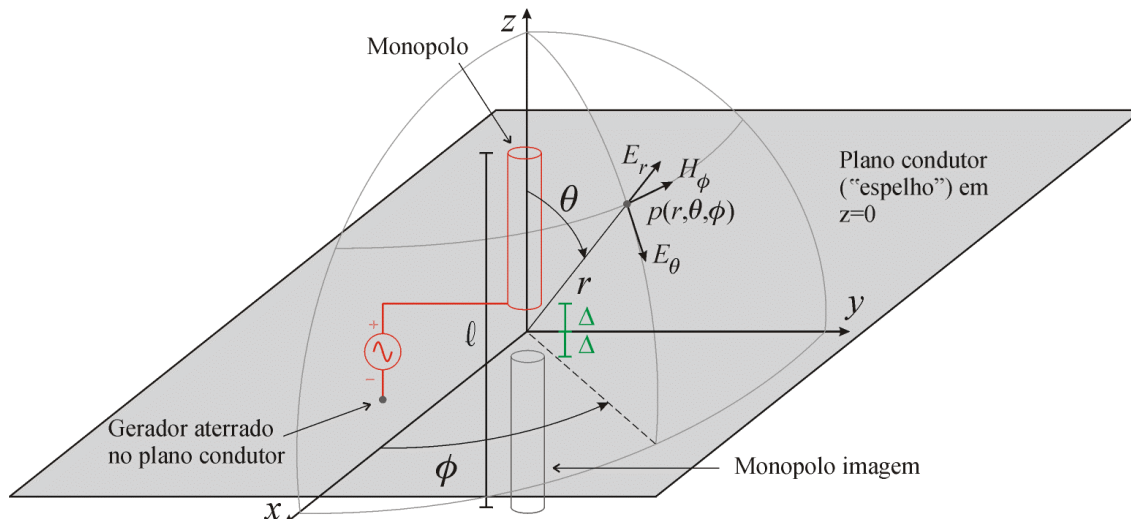


Figura 12: Irradiador do tipo dipolo formado a partir de dois monopolos - o monopolo real e sua imagem espelhada. Este tipo de antena é muito comum na forma de torres para radiodifusão AM na faixa de 550KHz a 1600Khz, principalmente em regiões onde o solo possui alta condutividade elétrica, garantindo o efeito de espelhamento. Por este motivo esta antena é conhecida como **Monopolo Vertical**.

Se o comprimento $l/2$ do monopolo vertical aterrado é tal que o dipolo formado pode ser considerado um dipolo curto então a Resistência de Radiação do monopolo vertical resulta na metade do valor obtido para o dipolo curto através de (62). Isto ocorre porque o monopolo vertical aterrado irradia apenas em um hemisfério de modo que $0 \leq \theta \leq \pi/2$, e, portanto, $\int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \sin^3 \theta d\theta = \frac{2}{3}$ em (62).

5 Apêndice A - Operadores vetoriais em Coordenadas Esféricas

5.1 O Gradiente em Coordenadas Esféricas

Seja F uma função escalar definida sobre o espaço tridimensional \mathfrak{R}^3 referenciado a um sistema de coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) , isto é, $F = F(p)$, $p = p(r, \theta, \phi) \in \mathfrak{R}^3$.

O gradiente de F calculado para um ponto $p(r, \theta, \phi)$ do espaço \mathfrak{R}^3 expressa a razão entre o quanto F varia em p para uma variação infinitesimal $d\ell$ ao longo de cada uma das direções $\underline{\hat{r}}$, $\underline{\hat{\theta}}$ e $\underline{\hat{\phi}}$:

$$\nabla F(p) = \underline{\hat{r}} \frac{dF(p)}{d\ell} + \underline{\hat{\theta}} \frac{dF(p)}{d\ell} + \underline{\hat{\phi}} \frac{dF(p)}{d\ell} \quad (A1)$$

Os três termos da Equação (A1) são determinados a partir das Figuras A1, A2 e A3:

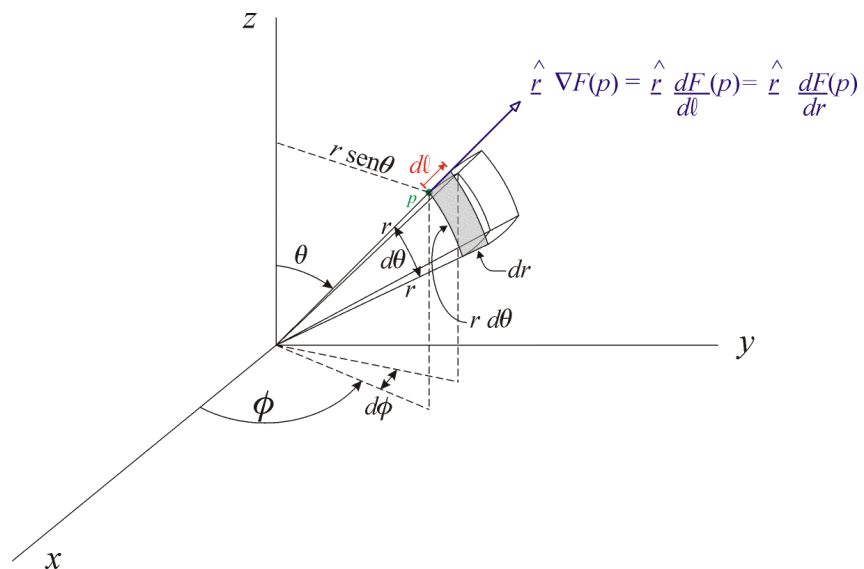


Figura A1: $\hat{r}\nabla F(p)$

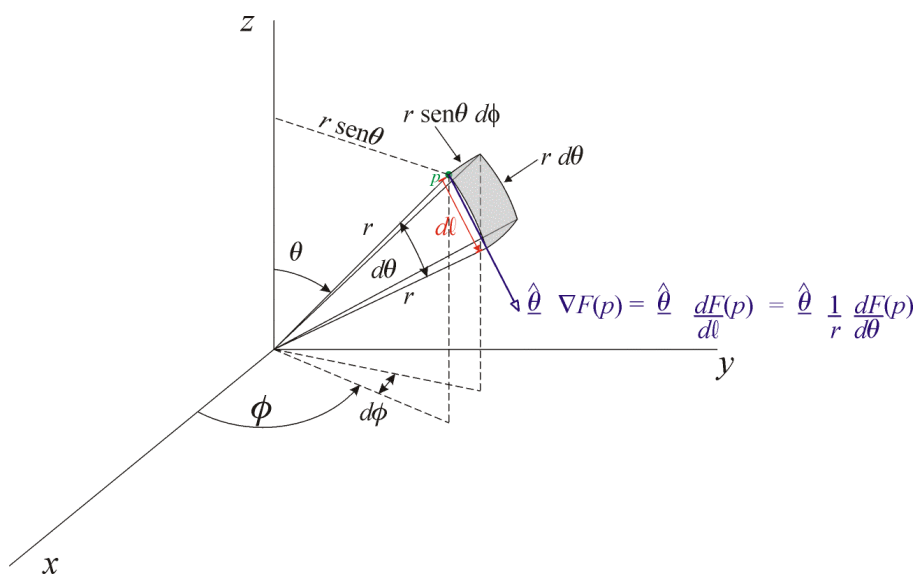


Figura A2: $\hat{\theta}\nabla F(p)$

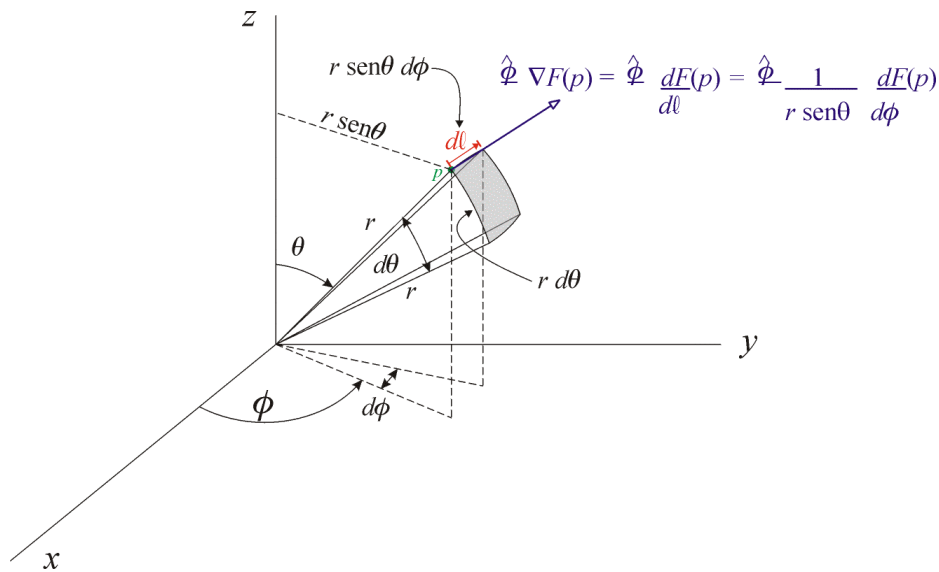


Figura A3: $\hat{\phi} \nabla F(p)$

Portanto:

$$\nabla F = \hat{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F}{\partial \phi} \quad (A2)$$

5.2 O Rotacional em Coordenadas Esféricas

Seja \underline{v} uma função vetorial definida sobre o espaço tridimensional \mathcal{R}^3 referenciado a um sistema de coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) , isto é, $\underline{v} = \underline{v}(p)$, $p = p(r, \theta, \phi) \in \mathcal{R}^3$ tal que $\underline{v}(r, \theta, \phi) = \hat{r} v_r(r, \theta, \phi) + \hat{\theta} v_\theta(r, \theta, \phi) + \hat{\phi} v_\phi(r, \theta, \phi)$.

O rotacional de \underline{v} , denotado por $\nabla \times \underline{v}$, calculado para um ponto $p(r, \theta, \phi)$ do espaço \mathcal{R}^3 expressa a velocidade de rotação em p do campo vetorial definido por \underline{v} , rotação esta contida em 3 planos de giro ortogonais cujos vetores normais estão respectivamente alinhados com as direções \hat{r} , $\hat{\theta}$ e $\hat{\phi}$:

Para facilitar a compreensão do conceito, vamos supor que \underline{v} expresse o campo de velocidade de um fluido.

Uma maneira de medir a **tendência** de o fluido **girar em um plano nas vizinhanças de um ponto p** do espaço é determinar a circulação Φ da função vetorial \underline{v} através da operação:

$$\Phi = \oint_C \underline{v} \cdot d\underline{l} \quad (A3)$$

conforme já discutido na Seção 3 do Capítulo I. Especificamente, a partir das Figuras A4, A5 e A6:

- (I) Calcula-se 3 circulações Φ_r , Φ_θ e Φ_ϕ em p cujos planos de giro têm seus vetores normais respectivamente alinhados com as direções \hat{r} , $\hat{\theta}$ e $\hat{\phi}$.
- (II) Normaliza-se Φ_r , Φ_θ e Φ_ϕ pela área delimitada pelo caminho fechado C , quando o comprimento de C tende para zero.

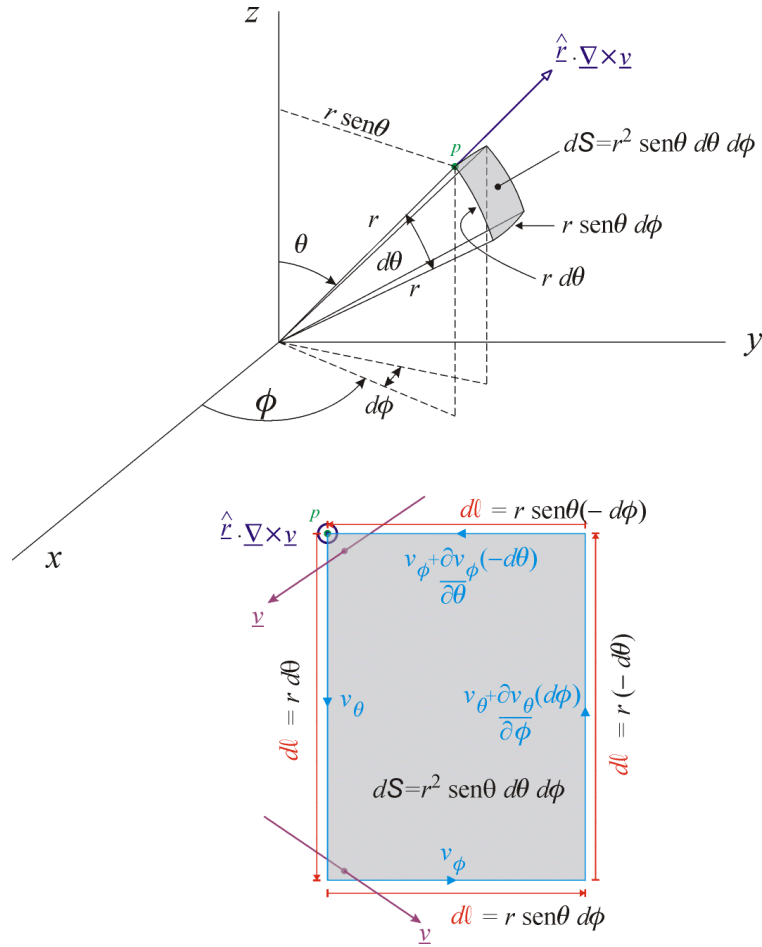


Figura A4: Componente $\hat{r} \cdot (\nabla \times \underline{v})$ do vetor $\nabla \times \underline{v}$

Da Figura A4, temos:

$$\begin{aligned}
 \Phi_r &= \oint_c \underline{v} \cdot d\underline{l} = v_\theta r d\theta + v_\phi r \sin \theta d\phi + \\
 &+ \left[v_\theta + \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} (d\phi) \right] r (-d\theta) + \left[v_\phi + \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} (-d\theta) \right] r \sin \theta (-d\phi) = \\
 &= v_\theta r d\theta + v_\phi r \sin \theta d\phi - v_\theta r d\theta - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} r d\theta d\phi - v_\phi r \sin \theta d\phi + \\
 &+ \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} r \sin \theta d\theta d\phi = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (v_\phi \sin \theta) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] r^2 \sin \theta d\theta d\phi = \\
 &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (v_\phi \sin \theta) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] dS
 \end{aligned} \tag{A4}$$

$$\hat{r} \cdot (\nabla \times \underline{v}) = \lim_{dS \rightarrow 0} \frac{\Phi_r}{dS} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (v_\phi \sin \theta) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] \tag{A5}$$

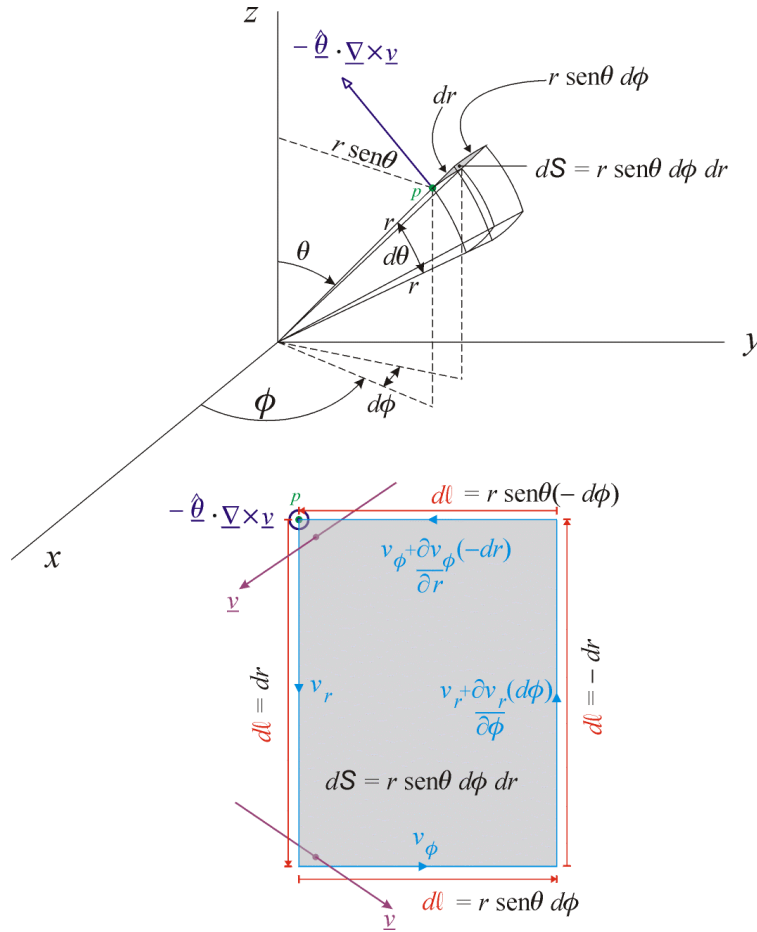


Figura A5: Componente $\hat{\theta} \cdot (\nabla \times \underline{v})$ do vetor $\nabla \times \underline{v}$

Da Figura A5, temos:

$$\begin{aligned}
 \Phi_{\theta} &= \oint_C \underline{v} \cdot d\underline{l} = v_r dr + v_{\phi} r \sin \theta d\phi + \\
 &+ \left[v_r + \frac{\partial v_r}{\partial \phi} (d\phi) \right] (-dr) + \left[v_{\phi} + \frac{\partial v_{\phi}}{\partial r} (-dr) \right] r \sin \theta (-d\phi) = \\
 &= v_r dr + v_{\phi} r \sin \theta d\phi - v_r dr - \frac{\partial v_r}{\partial \phi} dr d\phi - v_{\phi} r \sin \theta d\phi + \\
 &+ \frac{\partial v_{\phi}}{\partial r} r \sin \theta dr d\phi = \frac{1}{r} \left[\frac{-1}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{\partial}{\partial r} (r v_{\phi}) \right] r \sin \theta d\phi dr = \\
 &= \frac{1}{r} \left[\frac{-1}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{\partial}{\partial r} (r v_{\phi}) \right] dS \tag{A6}
 \end{aligned}$$

$$\hat{\theta} \cdot (\nabla \times \underline{v}) = \lim_{dS \rightarrow 0} \frac{-\Phi_{\theta}}{dS} = \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r v_{\phi}) \right] \tag{A7}$$

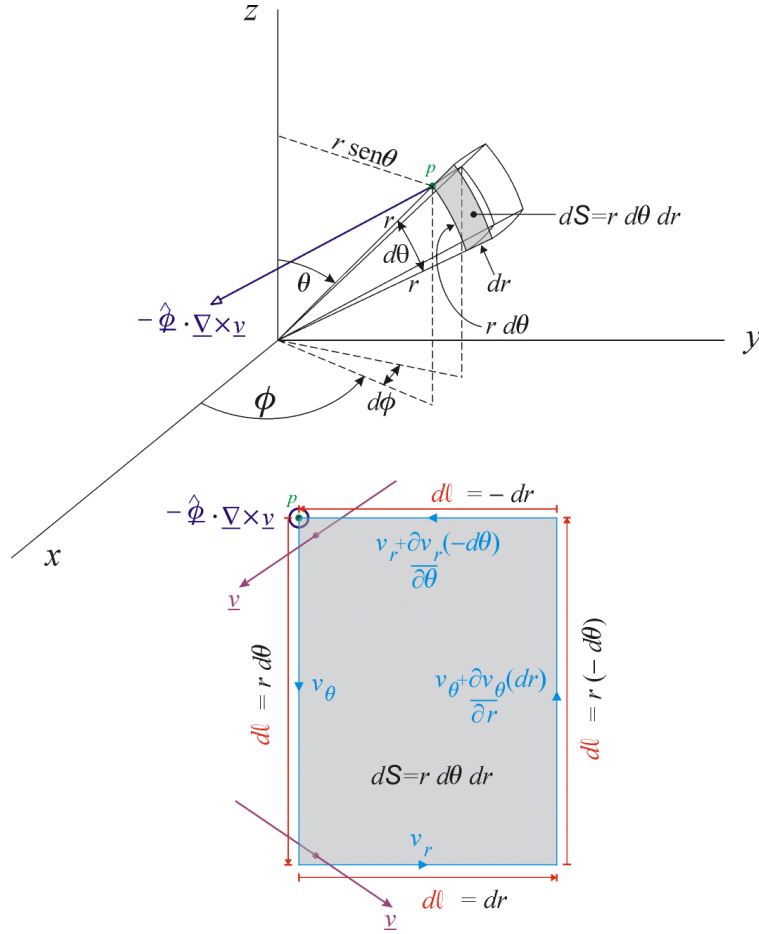


Figura A6: Componente $\hat{\phi} \cdot (\nabla \times \underline{v})$ do vetor $\nabla \times \underline{v}$

Da Figura A6, temos:

$$\begin{aligned}
 \Phi_{\phi} &= \oint_C \underline{v} \cdot d\underline{l} = v_{\theta} r d\theta + v_r dr + \\
 &+ \left[v_{\theta} + \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} (dr) \right] r (-d\theta) + \left[v_r + \frac{\partial v_r}{\partial \theta} (-d\theta) \right] (-dr) = \\
 &= v_{\theta} r d\theta + v_r dr - v_{\theta} r d\theta - \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} r d\theta dr - v_r dr + \frac{\partial v_r}{\partial \theta} d\theta dr = \\
 &= \frac{1}{r} \left[-\frac{\partial}{\partial r} (r v_{\theta}) + \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] r d\theta dr = \\
 &= \frac{1}{r} \left[-\frac{\partial}{\partial r} (r v_{\theta}) + \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] dS \tag{A8}
 \end{aligned}$$

$$\hat{\phi} \cdot (\nabla \times \underline{v}) = \lim_{dS \rightarrow 0} \frac{-\Phi_{\phi}}{dS} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r v_{\theta}) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \tag{A9}$$

Portanto, de (A5), (A7) e (A9):

$$\begin{aligned} \underline{\nabla} \times \underline{v} = & \hat{r} \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (v_\phi \sin \theta) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] + \\ & + \hat{\theta} \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} r v_\phi \right) + \\ & + \hat{\phi} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} r v_\theta - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (\text{A10})$$