Capítulo III

Parâmetros e Propriedades Fundamentais de uma Antena

1 Introdução

Para descrever quantitativamente a performance de uma antena, é necessário definir os parâmetros e propriedades fundamentais da mesma. Alguns dos parâmetros e propriedades são interrelacionados, de modo que nem todos necessitam ser especificados para a caracterizar completamente a performance operacional da antena.

2 Polarização

Em termos simples, a polarização de uma antena define a direção do vetor $\underline{E}$ do campo eletromagnético por ela irradiado com relação a um plano de referência. Na grande maioria das situações o plano de referência é a superfície terrestre. A forma mais geral de polarização é a denominada **Polarização Elíptica**, quando o vetor $\underline{E}$ gira em um plano perpendicular à direção de propagação da onda eletromagnética, conforme mostra a Figura 1.

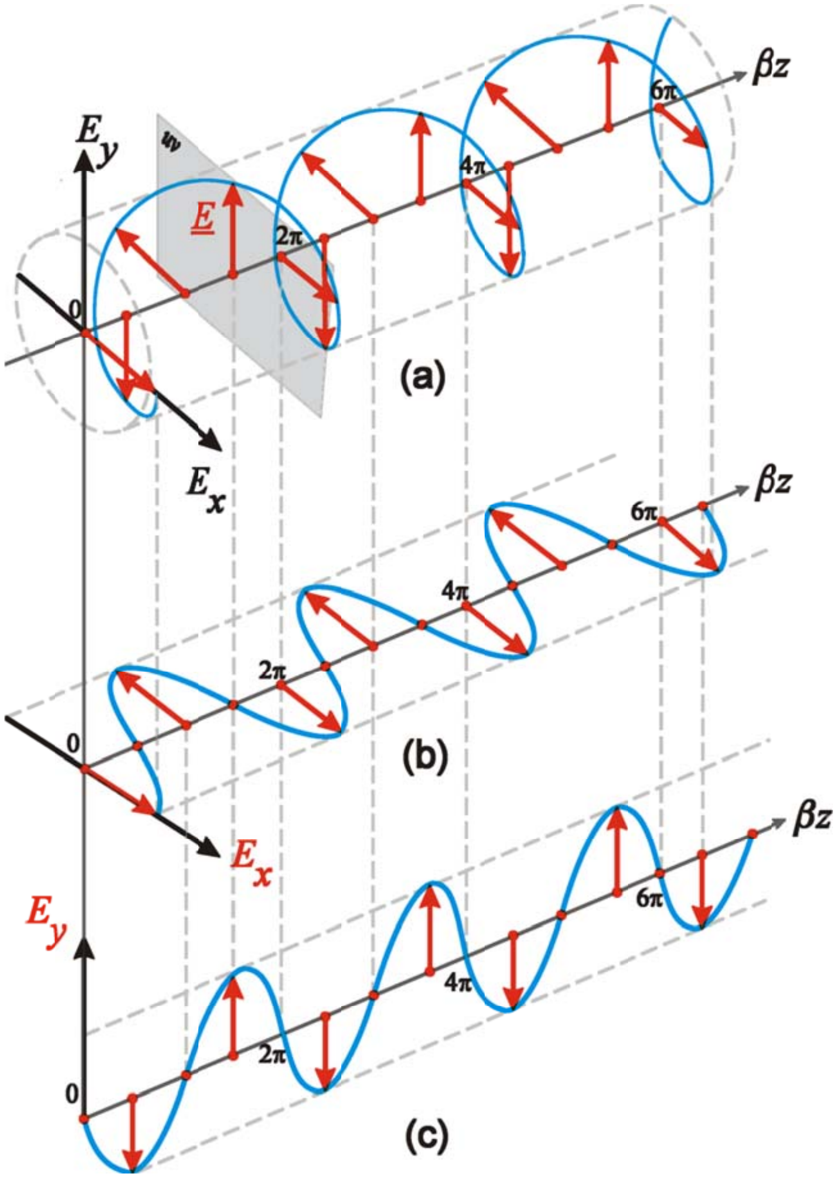


Figura 1: **(a)** Onda eletromagnética com polarização elíptica. A onda propaga-se na direção z e o vetor $\underline{E}$ (vermelho) descreve uma hélice de seção transversal elíptica (azul). No plano uv, localizado em uma determinada posição do eixo z e perpendicular ao mesmo, o vetor $\underline{E}$ descreve uma elipse (ver Figura 2) à medida que uv é deslocado ao longo de z. Quando a seção transversal da hélice descrita por $\underline{E}$ é um círculo a polarização é denominada **Polarização Circular**. **(b)** **Polarização Linear Horizontal**, que é um caso particular de (a). **(c)** **Polarização Linear Vertical**, que é um outro caso particular de (a).

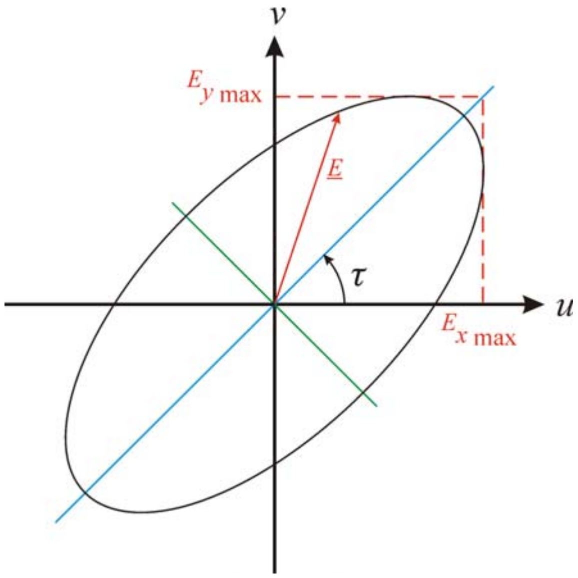


Figura 2: Plano uv mostrado na Figura 1.

A onda mostrada na Figura 1(a) possui polarização elíptica, sendo adicionalmente caracterizada como **Polarização Direita**. Isto porque a **regra da mão direita** (ver Capítulo I) é aplicável para descrever o sentido de giro de $\underline{E}$ ao alinharmos o polegar com o sentido de propagação da onda. Quando o mesmo procedimento é aplicável mas com a mão esquerda, então a polarização é denominada de **Polarização Esquerda**.

Todas as demais formas de polarização possíveis para uma antena são casos particulares da polarização elíptica, como mostrado, por exemplo, nas Figuras 1(b) e 1(c).

Para um irradiador genérico referenciado a um sistema de coordenadas esféricas (r,θ,ϕ), o plano uv de giro do vetor $\underline{E}$ é tangente à superfície esférica de raio r sobre a qual encontra-se o ponto onde deseja-se determinar $\underline{E}$:

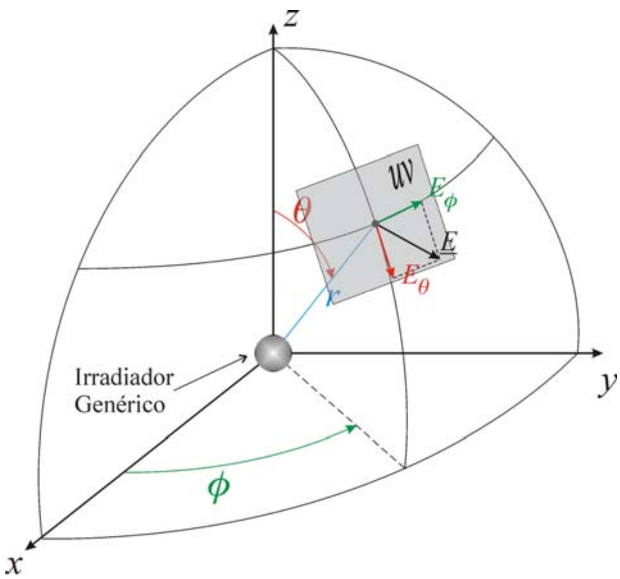


Figura 3: Plano uv para um irradiador genérico referenciado a um sistema de coordenadas esféricas (r,θ,ϕ).

O vetor $\underline{E}$ nas Figuras 3 e 4 pode ser expresso por:

$$\underline{E} = \hat{\underline{\theta}} E_{\theta \max} \cos(\omega t) + \hat{\underline{\phi}} E_{\phi \max} \cos(\omega t + \alpha) \tag{1}$$

onde α é a diferença de fase **no tempo** entre E_θ e E_ϕ, $-\pi < \alpha \leq \pi$. Sejam u e v coordenadas definidas ao longo dos eixos cartesianos gerados pelos vetores unitários $\hat{\underline{\theta}}$ e $\hat{\underline{\phi}}$ tal que:

$$u = E_{\theta \max} \cos(\omega t) \tag{2}$$

$$v = E_{\phi \max} \cos(\omega t + \alpha) = E_{\phi \max} [\cos(\omega t)\cos(\alpha) - \mathrm{sen}(\omega t)\mathrm{sen}(\alpha)] \tag{3}$$

De (2) temos

$$\left(\frac{u}{E_{\theta \max}} \right)^2 = \cos^2(\omega t) = 1 - \mathrm{sen}^2(\omega t) \rightarrow \mathrm{sen}(\omega t) = \sqrt{1 - \left(\frac{u}{E_{\theta \max}} \right)^2} \tag{4}$$

$$u = E_{\theta \max} \cos(\omega t) \rightarrow \cos(\omega t) = \frac{u}{E_{\theta \max}} \tag{5}$$

Substituindo (4) e (5) em (3) eliminamos a dependência da variável t, resultando em:

$$\frac{u^2}{E_{\theta \max}{}^2} - \frac{2uv\cos(\alpha)}{E_{\theta \max} E_{\phi \max}} + \frac{v^2}{E_{\phi \max}{}^2} - \mathrm{sen}^2(\alpha) = 0 \tag{6}$$

Mas, a equação geral de uma elipse é dada por:

$$\begin{aligned} &Au^2 + Buv + Cv^2 + Du + Ev + F = 0 \\ &B^2 - 4AC < 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Comparando (7) com (6) temos:

$$\begin{aligned} &A = \frac{1}{E_{\theta \max}{}^2} \\ &B = \frac{-2\cos(\alpha)}{E_{\theta \max} E_{\phi \max}} \\ &C = \frac{1}{E_{\phi \max}{}^2} \\ &D = E = 0 \\ &F = -\mathrm{sen}^2(\alpha) \\ &B^2 - 4AC = \frac{4}{E_{\theta \max}{}^2 E_{\phi \max}{}^2} \left(\cos^2(\alpha) - 1 \right) < 0 \ \text{ p/ } \ \alpha \neq 0 \text{ e } \alpha \neq \pi \end{aligned} \tag{8}$$

Portanto (6) representa uma elipse no plano uv dos vetores $\hat{\underline{\theta}}$ e $\hat{\underline{\phi}}$. O centro da elipse está no centro do plano uv e o eixo maior inclinado em relação ao eixo u de um ângulo τ (ver Figura 4) dado por:

$$\tau = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2E_{\theta\max}E_{\phi\max}\cos(\alpha)}{E_{\theta\max}{}^{2} - E_{\phi\max}{}^{2}}\right) \tag{9}$$

Note de (9) que se $E_{\theta\max} = E_{\phi\max}$ então $\tau = \frac{1}{2}\arctan(\infty) = 45^{\circ}$.

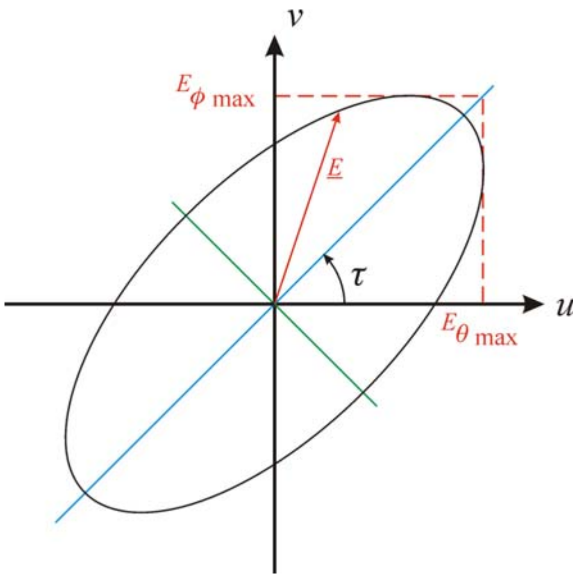


Figura 4: Plano uv mostrado na Figura 3.

(I) Quando as componentes E_{θ} e E_{ϕ} do campo elétrico $\underline{E}$ estão **oscilando em fase no tempo** ($\alpha = 0$) temos de (6) que:

$$\frac{u^2}{E_{\theta\max}{}^{2}} - \frac{2uv}{E_{\theta\max}E_{\phi\max}} + \frac{v^2}{E_{\phi\max}{}^{2}} = \left(\frac{u}{E_{\theta\max}} - \frac{v}{E_{\phi\max}}\right)^2 = 0$$

$$\frac{u}{E_{\theta\max}} - \frac{v}{E_{\phi\max}} = 0 \tag{10}$$

(II) Quando as componentes E_{θ} e E_{ϕ} do campo elétrico $\underline{E}$ estão **oscilando em oposição de fase no tempo** ($\alpha = \pi$) temos de (6) que:

$$\frac{u^2}{E_{\theta\max}{}^{2}} + \frac{2uv}{E_{\theta\max}E_{\phi\max}} + \frac{v^2}{E_{\phi\max}{}^{2}} = \left(\frac{u}{E_{\theta\max}} + \frac{v}{E_{\phi\max}}\right)^2 = 0$$

$$\frac{u}{E_{\theta\max}} + \frac{v}{E_{\phi\max}} = 0 \tag{11}$$

As equações (10) e (11) representam retas no plano uv definidas por

$$v = \left(\pm\frac{E_{\phi\max}}{E_{\theta\max}}\right)u \tag{12}$$

significando que para $\alpha = 0$ e para $\alpha = \pi$ a onda eletromagnética possui **Polarização Linear**.

(III) Quando as componentes E_θ e E_ϕ do campo elétrico $\underline{E}$ estão **oscilando em quadratura de fase no tempo** ($\alpha = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$) temos de (6) que:

$$\frac{u^2}{E_{\theta\max}{}^2} + \frac{v^2}{E_{\phi\max}{}^2} = 1 \tag{13}$$

que é a equação de um círculo centrado na origem. Portanto este caso representa a situação de P**olarização Circular** .

(IV) A situação intermediária entre **Polarização Linear** e **Polarização Circular** é representada para os demais valores do ângulo de fase α, situação que resultará em **Polarização Elíptica**.

● O sinal de α define o sentido das polarizações **Elíptica** e **Circular**. Para $\alpha < 0$ a onda apresenta **Polarização Direita** e para $\alpha > 0$ a onda apresenta **Polarização Esquerda**.

● Para o caso da **Polarização Linear**, é comum associar-se a orientação da antena em relação ao solo. Assim, por exemplo, um monopolo aterrado para radiodifusão apresenta **Polarização Vertical** porque o campo elétrico $\underline{E}$ varia na direção vertical.

● É imperativo que a polarização da antena transmissora (TX) seja compatível com a polarização da antena receptora (RX), caso contrário, a antena RX captará pouco ou nenhum sinal da antena TX, mesmo quando relativamente próximas uma da outra. Esta seletividade resultante da polarização entre antena transmissora e receptora é freqüentemente utilizada para evitar interferências entre sistemas TX-RX próximos que operem na mesma freqüência.

● Na faixa de UHF e na faixa de microondas é comum utilizar polarização Circular Esquerda (Direita) entre antenas TX e RX, de modo que, ao ocorrer efeitos de *multipath* (reflexão em um plano condutor elétrico), o sinal refletido no plano inverte o sentido de polarização (devido ao efeito da "imagem espelhada" elétrica – Capítulo II – cancelamento da componente tangencial de $\underline{E}$ na superfície plana condutora) e, assim, alcança a antena RX com polarização Direita (Esquerda). Uma vez que o raio refletido tem polarização não compatível com a polarização da antena RX, não ocorre interação entre raio refletido e raio direto, e , assim, não ocorre interferência intersimbólica para sistemas digitais nem cancelamento de sinal por oposição de fase para sistemas analógicos.

3 Padrão de Irradiação

O **Padrão de Irradiação** $F(\theta,\phi)$ de uma antena é a expressão analítica que define a intensidade normalizada do campo elétrico $E_\theta(\theta,\phi)$ resultante em cada ponto de uma superfície esférica Σ de raio $r = r_\Sigma$ em cujo centro encontra-se a antena:

$$F(\theta,\phi) = \frac{E_\theta(\theta,\phi)}{E_{\theta\max}} \tag{14}$$

onde $E_{\theta\max}$ é o valor máximo de $E_\theta(\theta,\phi)$ que ocorre para a particular direção $(\theta,\phi) = (\theta_{\max F}, \phi_{\max F})$ do espaço $\Re^3$, sendo $\theta_{\max F}$ e $\phi_{\max F}$ os valores de θ e ϕ que maximizam $E_\theta(\theta,\phi)$.

Note que o valor absoluto máximo de $F(\theta,\phi)$ é 1.0. O gráfico de $F(\theta,\phi)$ é denominado de **Diagrama de Irradiação**.

Exemplo 1: Determine o padrão de irradiação $F(\theta,\phi)$ de um Dipolo Curto para uma distância $r = r_\Sigma$ situada na Região de Campo Distante.

Solução: Vimos que para o Campo Distante de um Dipolo Curto vale a relação (Equação (52) do Capítulo II) vale a relação

$$E_\theta(\theta,\phi) = 60\pi I_0\left(\frac{\ell}{r\lambda}\right)e^{j\left(\omega t-\beta r+\frac{\pi}{2}\right)}\operatorname{sen}\theta \tag{15}$$

Note que, para o Dipolo Curto, $E_\theta(\theta,\phi)$ não depende de ϕ.

De (15), observamos que para $\theta = \theta_{\max F} = 90°$ ocorre o valor máximo de $E_\theta(\theta,\phi)$ que é

$$E_{\theta\max} = 60\pi I_0\left(\frac{\ell}{r\lambda}\right)e^{j\left(\omega t-\beta r+\frac{\pi}{2}\right)}\operatorname{sen}90° = 60\pi I_0\left(\frac{\ell}{r\lambda}\right)e^{j\left(\omega t-\beta r+\frac{\pi}{2}\right)} \tag{16}$$

Substituindo (15) e (16) em (14) temos:

$$F(\theta,\phi) = \frac{E_\theta(\theta,\phi)}{E_{\theta\max}} = \frac{60\pi I_0\left(\frac{\ell}{r\lambda}\right)e^{j\left(\omega t-\beta r+\frac{\pi}{2}\right)}\operatorname{sen}\theta}{60\pi I_0\left(\frac{\ell}{r\lambda}\right)e^{j\left(\omega t-\beta r+\frac{\pi}{2}\right)}} = \operatorname{sen}\theta \tag{17}$$

O padrão de irradiação $F(\theta,\phi)$ é dado em Decibéis por

$$F(\theta,\phi)_{\mathrm{dB}} = 20\log\left|F(\theta,\phi)\right| \tag{18}$$

O **Padrão de Potência** de uma antena é definido como

$$P(\theta,\phi) = \left|F(\theta,\phi)\right|^2 \tag{19}$$

e é dado em Decibéis por

$$P(\theta,\phi)_{\mathrm{dB}} = 10\log\left|F(\theta,\phi)\right|^2 = 20\log\left|F(\theta,\phi)\right| \tag{20}$$

Note de (18) e (20) que

$$P(\theta,\phi)_{\mathrm{dB}} = F(\theta,\phi)_{\mathrm{dB}} \tag{21}$$

4 Largura do Feixe

A Figura 5 mostra o diagrama de irradiação $F(\theta,\phi)_{\text{dB}}$ típico de uma **Antena Parabólica** (a ser estudada em capítulo posterior).

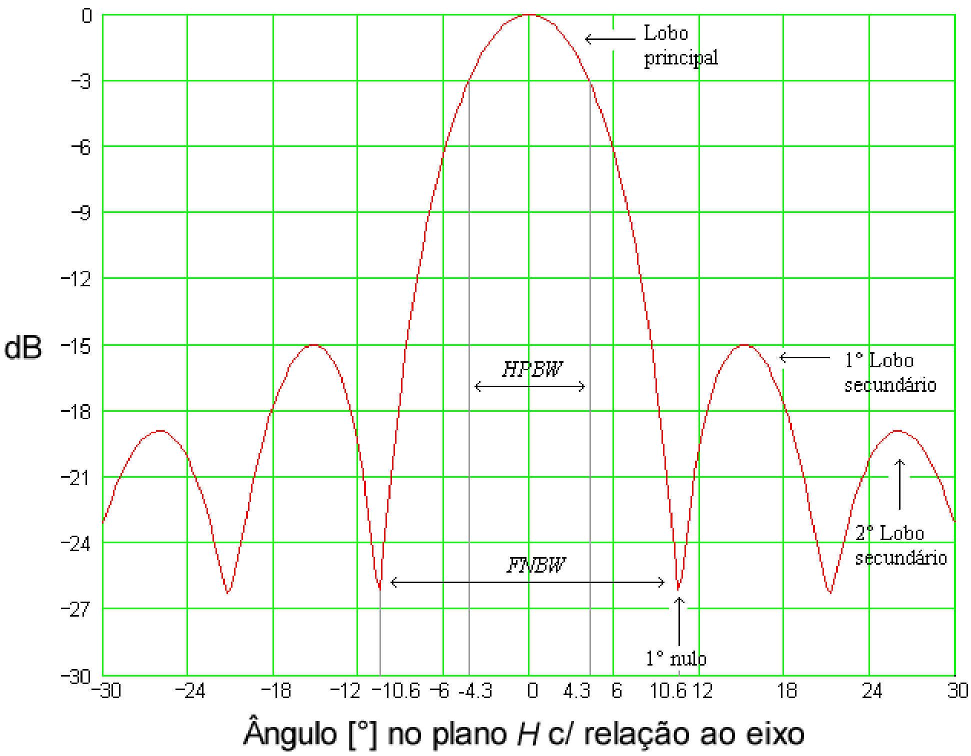


Figura 5: Diagrama de Irradiação $F(\theta,\phi)_{\text{dB}}$ de uma Antena Parabólica operando em 1GHz. O ângulo na abscissa do gráfico é o ângulo plano contido no plano H e é medido em relação ao eixo do refletor parabólico. O plano H é o plano no qual varia, em conseqüência da excitação senoidal na freqüência de 1GHz, o vetor campo magnético $\underline{H}$ do campo irradiado pela antena parabólica. O **Lobo Principal** contém a direção de máxima irradiação. Qualquer outro lobo que não seja o principal é denominado de **Lobo Secundário**.

Na Figura 5, $HPBW = 2\times 4.3° = 8.6°$ é o *Half Power Beam Width*, isto é, a **Largura do Feixe** (*beam width*) com centro no máximo de $F(\theta,\phi)_{\text{dB}}$, largura para a qual a **potência irradiada cai à metade** (*half power*). Na literatura nacional o $HPBW$ é conhecido como AMP (Ângulo de Meia Potência).

$FNBW = 2\times 10.6° = 21.2°$ é o *First Null Beam Width*, isto é, a **Largura do Feixe** (*beam width*) com centro no máximo de $F(\theta,\phi)_{\text{dB}}$, largura para a qual a potência irradiada cai ao seu primeiro valor mínimo (eventualmente nulo - *null*). Note na Figura 5 que outros nulos ocorrem além do 1° nulo.

Exemplo 2: Determine o $HPBW$ de um Dipolo Curto para uma distância $r = r_\Sigma$ situada na Região de Campo Distante.

Solução:

Para a potência cair a metade é necessário que o campo elétrico $\underline{E}$ caia para $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ do seu valor máximo.

De (17), $F(\theta,\phi)=\mathrm{sen}\,\theta$ para o dipolo curto. Logo $\theta_{-3\mathrm{dB}}=\mathrm{arcsen}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=45°$ é o ângulo plano contido no plano *E*, medido[1] acima e abaixo[2] da direção $(\theta,\phi)=(\theta_{\max F},\phi_{\max F})=(90°,\forall\phi)$, ângulo para o qual a potência cai à metade. Assim, $HPBW=2\theta_{-3\mathrm{dB}}=90°$.

A Figura 6 mostra o gráfico tridimensional do Padrão de Potência $P(\theta,\phi)=\left|F(\theta,\phi)\right|^2$ para o dipolo curto:

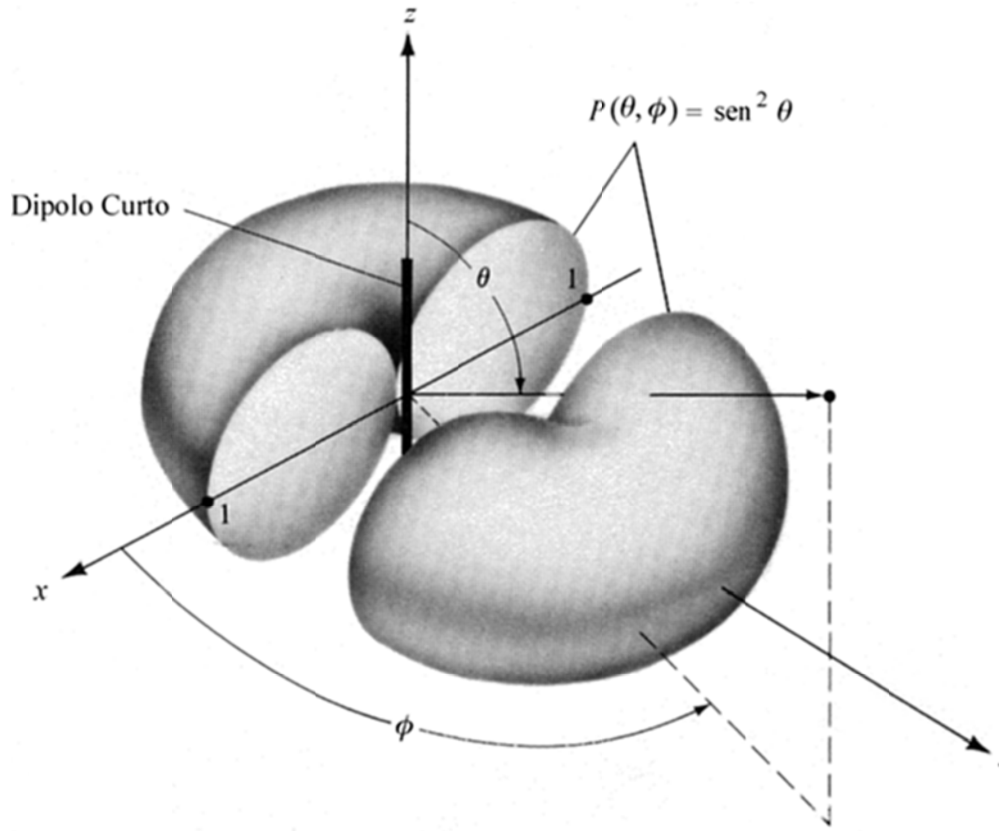


Figura 6: Gráfico de $P(\theta,\phi)=\left|F(\theta,\phi)\right|^2$ para o dipolo curto.

Note que se o dipolo curto for gerado por efeito da imagem elétrica de um monopolo aterrado, como o mostrado na Figura 7, então $P(\theta,\phi)=\left|F(\theta,\phi)\right|^2$ é válido para $0<\theta\leq 90°$. Isto significa que apenas a metade da superfície $P(\theta,\phi)=\mathrm{sen}^2\,\theta$ acima do plano xy na Figura 6 deve ser considerada como representativa do Padrão de Potência $P(\theta,\phi)$ do monopolo aterrado.

[1] O plano *E* é o plano no qual varia, em conseqüência da excitação senoidal, o vetor campo elétrico $\underline{E}$ do campo irradiado por uma antena. O plano *H* é o plano no qual varia, em conseqüência da excitação senoidal, o vetor campo magnético $\underline{H}$ do campo irradiado por uma antena.

[2] Ou à esquerda e à direita se a polarização for horizontal, isto é, se o dipolo estiver paralelo ao solo.

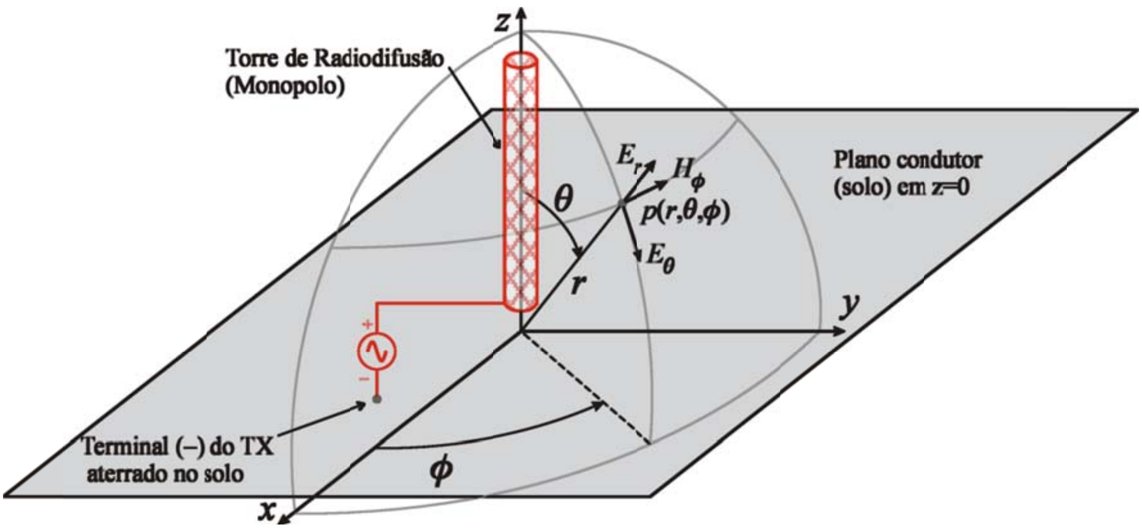


Figura 7: Monopolo aterrado utilizado em radiodifusão.

5 Intensidade de Radiação, Ângulo Sólido do Feixe, Diretividade e Ganho

Estes parâmetros de uma antena definem a capacidade de uma antena em concentrar a energia irradiada (ou recebida) em uma região do espaço $\Re^3$. Diretividade, Ganho e Abertura Efetiva baseiam-se no conceito de **Ângulo Sólido**. O conceito de ângulo sólido pode ser melhor compreendido a partir do conceito de **Ângulo Plano**:

O comprimento ds [m] de um **arco** subentendido pelo **ângulo plano** $d\theta$ [rad] é $ds = r\ d\theta$ [m], conforme mostra a Figura 8:

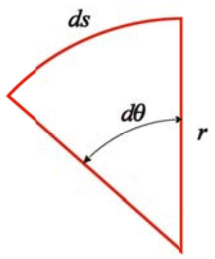


Figura 8: Comprimento $ds = r\ d\theta$ [m] de um **arco** subentendido pelo **ângulo plano** $d\theta$ [rad].

Portanto, o comprimento C de um círculo de raio r é dado pela soma de todos os arcos ds que formam o círculo:

$$C = \oint_{círculo} ds = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} r d\theta = r\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta = r[\theta]_0^{2\pi} = 2\pi r \ \text{[m]} \tag{22}$$

ou, **uma vez que r é constante**, o comprimento C pode ser também dado pela soma de todos os **ângulos planos** $d\theta$ que formam o círculo:

$$C = \oint_{círculo} ds = r \int_{\theta\in[0,2\pi]} d\theta = 2\pi r \ \text{[m]} \tag{23}$$

De maneira análoga, a área dS [m²] da **superfície** subentendida pelo **ângulo sólido** $d\Omega = \text{sen}\,\theta\, d\theta\, d\phi$ [rad²] é $dS = r^2\,\text{sen}\,\theta\, d\theta\, d\phi$ [m²]:

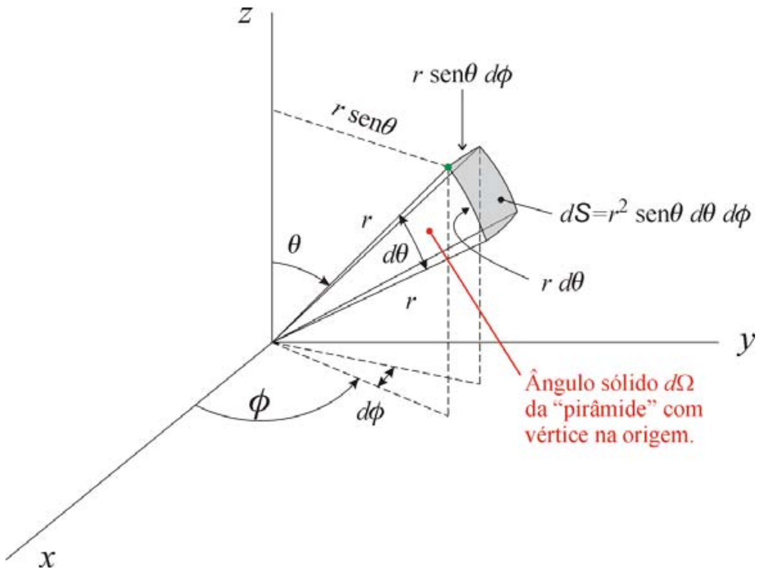


Figura 9: Área $dS = r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi$ [m²] da **superfície** subentendida pelo **ângulo sólido** $d\Omega = \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi$ [rad²].

Portanto, a área A de uma esfera de raio r é dada pela soma de todas as superfícies dS que formam a esfera:

$$A = \oiint\limits_{esfera} dS = \int_{\varphi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi = r^2 \int_{\varphi=0}^{\phi=2\pi} \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} d\phi =$$

$$= r^2 \int_{\varphi=0}^{\phi=2\pi} [1-(-1)] d\phi = 2r^2 \int_{\varphi=0}^{\phi=2\pi} d\phi = 2r^2 [\phi]_0^{2\pi} = 4\pi r^2 \left[\mathrm{m}^2\right] \tag{24}$$

ou, **uma vez que r é constante**, a área A pode ser também dada pela soma de todos os **ângulos sólidos** $d\Omega$ que formam a esfera:

$$A = \oiint\limits_{esfera} dS = r^2 \iint\limits_{\Omega \in [0,4\pi]} d\Omega = 4\pi r^2 \left[\mathrm{m}^2\right] \tag{25}$$

Assim como o **ângulo plano** total que gera um **círculo** é 2π [rad], da mesma forma o **ângulo sólido** total que gera uma **esfera** é 4π [rad²] ou [sr] – *steradian*[3].

A Figura 10 mostra um antena genérica localizada no centro de uma esfera de raio r, sendo P_a a potência fornecida pelo transmissor ao irradiador. Assumindo que não existam perdas no irradiador (eficiência 100%), a potência por ele irradiada também é P_a. O irradiador em questão não é isotrópico[4]

[3] A tradução do inglês para o português da unidade *steradian* é estereoradiano e têm origem na palavra grega *stereos*, que significa "sólido".

[4] Um irradiador é isotrópico quando irradia com a mesma densidade superficial de potência para todas as possíveis direções do espaço $\Re^3$.

porque irradia de maneira não-uniforme, sendo a direção de maior irradiação $(\theta_{\max F},\phi_{\max F}) = (90°,90°)$, conforme mostrado pela região de maior iluminação na Figura 10.

O **Vetor de Poynting Médio** $\underline{S}(\theta,\phi) = \mathrm{Re}\{\vec{\underline{S}}(\theta,\phi)\}\left[\dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}\right]$ mostrado na Figura 10 (equações (56) a (58) do Capítulo II) mede a densidade superficial da potência total que **flui para fora** da superfície da esfera de raio r em um ponto p de coordenadas (θ,ϕ) da mesma. Em outras palavras, $\underline{S}(\theta,\phi)$ mede **a densidade da potência irradiada pela antena** em um ponto p do espaço $\Re^3$ distante r do irradiador. Note que $\underline{S}(\theta,\phi)$ é máximo na região de máxima iluminação na Figura 10, a qual corresponde à direção $(\theta_{\max F},\phi_{\max F}) = (90°,90°)$.

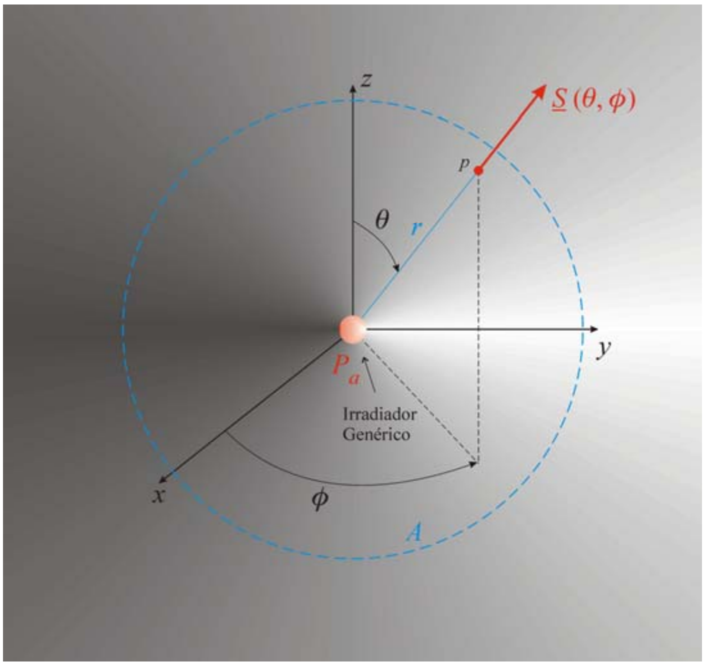


Figura 10: Irradiador não isotrópico sem perdas, alimentado por uma potência $\boldsymbol{P}_a$, e o conseqüente Vetor de Poynting Médio $\underline{S}(\theta,\phi)\left[\dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}\right]$ resultante em um ponto p do espaço $\Re^3$.

Pelo Teorema da Conservação da Energia, na Região de Campo Distante ($r >> \lambda$), a soma de todos os Vetores de Poynting $\underline{S}(\theta,\phi)$ sobre a superfície esférica de área A deve obrigatoriamente ser igual à potência $\boldsymbol{P}_a$ irradiada pela antena, de modo que, com $d\underline{S}$ definido pela Figura 9 temos:

$$\boldsymbol{P}_a = \oiint_{esfera} \underline{S}(\theta,\phi)\cdot d\underline{S} = \oiint_{esfera} \underline{\hat{r}}\, S(\theta,\phi)\cdot \underline{\hat{r}}\, dS = \underline{\hat{r}}\cdot\underline{\hat{r}} \oiint_{esfera} S(\theta,\phi) dS = \oiint_{esfera} S(\theta,\phi) dS$$

$$= \int_{\varphi=0}^{\phi=2\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} S(\theta,\phi) r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi = \int_{\varphi=0}^{\phi=2\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} S(\theta,\phi) r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi \quad [\mathrm{W}] \tag{26}$$

Mas, **considerando que**

(I) $\underline{E}$ e $\underline{H}$ são sempre ortogonais entre si (ver Capítulo I) tal que em cada ponto p do espaço $\Re^3$ temos $\underline{E} = \underline{\hat{a}}_E E = \underline{\hat{a}}_E E_0 e^{j(\omega t + \angle E)}$ e $\underline{H} = \underline{\hat{a}}_H H = \underline{\hat{a}}_H H_0 e^{j(\omega t + \angle H)}$, sendo $\underline{\hat{a}}_E$ e $\underline{\hat{a}}_H$

os vetores unitários que definem as direções de referência para $\underline{E}$ e $\underline{H}$ em $\Re^3$ e E_0 e H_0 são os valores instantâneos máximos de $\underline{E}$ e $\underline{H}$ em p.

(II) $\underline{E}$ e $\underline{H}$ estão contidos em um plano perpendicular à direção $\hat{\underline{r}}$ de irradiação (propagação).

então a potência $\boldsymbol{P}_a$ irradiada pela antena pode ser escrita especificamente como (ver Equação (56) do Capítulo II):

$$\boldsymbol{P}_a = \oint\!\!\oint_{esfera} \operatorname{Re}\left\{\underline{\vec{S}}(\theta,\phi)\right\} \cdot d\underline{S} =$$

$$= \oint\!\!\oint_{esfera} \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2}\underline{E} \times \underline{H}^*\right\} \cdot d\underline{S} = \frac{1}{2} \oint\!\!\oint_{esfera} \operatorname{Re}\left\{\hat{\underline{a}}_E E_0 e^{j(\omega t + \angle E)} \times \left[\hat{\underline{a}}_H H_0 e^{j(\omega t + \angle H)}\right]^*\right\} \cdot d\underline{S} =$$

$$= \frac{1}{2} \oint\!\!\oint_{esfera} \operatorname{Re}\left\{\hat{\underline{a}}_E E_0 e^{j(\omega t + \angle E)} \times \left[\hat{\underline{a}}_H H_0 e^{j(\omega t + \angle H)}\right]^*\right\} \cdot \hat{\underline{r}}\, dS =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\hat{\underline{a}}_E \times \hat{\underline{a}}_H\right) \cdot \hat{\underline{r}} \oint\!\!\oint_{esfera} \operatorname{Re}\left\{E_0 e^{j(\omega t + \angle E)} \left[H_0 e^{j(\omega t + \angle H)}\right]^*\right\} dS =$$

$$= \frac{1}{2} \hat{\underline{r}} \cdot \hat{\underline{r}} \oint\!\!\oint_{esfera} \operatorname{Re}\left\{E_0 e^{j(\omega t + \angle E)} \left[H_0 e^{j(\omega t + \angle H)}\right]^*\right\} dS = \frac{1}{2} \oint\!\!\oint_{esfera} \operatorname{Re}\left\{E_0 e^{j(\omega t + \angle E)} \left[H_0 e^{j(\omega t + \angle H)}\right]^*\right\} dS =$$

$$= \frac{1}{2} \oint\!\!\oint_{esfera} \operatorname{Re}\left\{E_0 e^{j(\omega t + \angle E)} H_0 e^{-j(\omega t + \angle H)}\right\} dS = \frac{1}{2} \oint\!\!\oint_{esfera} \operatorname{Re}\left\{E_0 H_0 e^{j(\angle E - \angle H)}\right\} dS \tag{27}$$

Mas, no Campo Distante de qualquer irradiador temos que $\angle E = \angle H$, daí (27) torna-se

$$\boldsymbol{P}_a = \oint\!\!\oint_{esfera} \underline{S}(\theta,\phi) \cdot d\underline{S} = \frac{1}{2} \oint\!\!\oint_{esfera} \operatorname{Re}\left\{E_0 H_0\right\} dS = \frac{1}{2} \oint\!\!\oint_{esfera} E_0 H_0\, dS = \oint\!\!\oint_{esfera} \frac{E_0}{\sqrt{2}} \frac{H_0}{\sqrt{2}} dS \tag{28}$$

Mas, de (26), temos que

$$\boldsymbol{P}_a = \oint\!\!\oint_{esfera} S(\theta,\phi)\, dS \tag{29}$$

Comparando (29) com (28), para um ponto p do espaço $\Re^3$ distante r do irradiador e situado na Região de Campo Distante nas coordenadas (r,θ,ϕ), temos que

$$S(\theta,\phi) = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \frac{H_0}{\sqrt{2}} \quad \left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}\right] \tag{30}$$

onde E_0 e H_0 são os valores instantâneos máximos de $\underline{E}$ e $\underline{H}$ em p. Uma vez que r é fixo (a superfície é uma esfera de raio r), é conveniente explicitar apenas as coordenadas (θ,ϕ) em (30), e simultaneamente aplicar o conceito de impedância $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = 120\pi$ $[\Omega]$ do espaço livre:

$$S(\theta,\phi)=\frac{E_0(\theta,\phi)}{\sqrt{2}}\frac{H_0(\theta,\phi)}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}E_0(\theta,\phi)H_0(\theta,\phi)=\frac{1}{2}E_0(\theta,\phi)\frac{E_0(\theta,\phi)}{Z_0}=$$
$$=\frac{1}{2}\frac{E_0^{\,2}(\theta,\phi)}{Z_0}\left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}\right] \tag{31}$$

Ou ainda

$$S(\theta,\phi)=\frac{E_0(\theta,\phi)}{\sqrt{2}}\frac{H_0(\theta,\phi)}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}E_0(\theta,\phi)H_0(\theta,\phi)=\frac{1}{2}H_0(\theta,\phi)Z_0E_0(\theta,\phi)=$$
$$=\frac{1}{2}H_0^{\,2}(\theta,\phi)Z_0\left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}\right] \tag{32}$$

A Equação (33) mostra o resultado da análise dimensional de (26). Em (33) as unidades dimensionais encontram-se entre colchetes $[\cdot]$ e as respectivas grandezas entre encontram-se entre chaves $\{\cdot\}$:

$$\boldsymbol{P}_a=\int_{\varphi=0}^{\phi=2\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\left\{S(\theta,\phi)r^2\right\}\left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{rad}^2}\right]\left\{\operatorname{sen}\theta\,d\theta\,d\phi\right\}\left[\mathrm{rad}^2\right]\quad[\mathrm{W}] \tag{33}$$

O termo $\left\{S(\theta,\phi)r^2\right\}\left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{rad}^2}\right]$ é denominado de **Intensidade de Radiação** e mede a **potência irradiada pela antena por unidade de ângulo sólido** ou a **densidade sólido-angular de potência irradiada** .

Assim, a Intensidade de Radiação $U(\theta,\phi)$ de uma antena é dada por:

$$U(\theta,\phi)=S(\theta,\phi)r^2\quad\left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{sr}}\right] \tag{34}$$

Já discutimos no Capítulo II que qualquer irradiador pode ser decomposto em uma infinidade de dipolos curtos, e, que para a Região de Campo Distante, os campos $\underline{E}$ e $\underline{H}$ gerados por um dipolo curto variam com o inverso da distância r, conforme demonstrado pelas equações (II) e (III) da Tabela 2 do Capítulo 2, a seguir repetidas:

$$E_\theta=\frac{I_0\ell e^{j\left(\omega t-\beta r+\frac{\pi}{2}\right)}\operatorname{sen}\theta}{2\varepsilon_0 c\lambda r}\quad\left[\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\right] \tag{35}$$

$$H_\phi=\frac{I_0\ell e^{j\left(\omega t-\beta r+\frac{\pi}{2}\right)}\operatorname{sen}\theta}{2\lambda r}\quad\left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\right] \tag{36}$$

Substituindo (35) em (31), temos:

$$S(\theta,\phi)=\frac{1}{2}\frac{E_0^{\,2}(\theta,\phi)}{Z_0}=\frac{1}{2}\frac{\left(\dfrac{I_0\ell\operatorname{sen}\theta}{2\varepsilon_0 c\lambda r}\right)^2}{Z_0}=\frac{\left(\dfrac{Z_0I_0\ell\operatorname{sen}\theta}{2\lambda r}\right)^2}{2Z_0}=\frac{\left(\dfrac{Z_0^{\,2}I_0^{\,2}\ell^2\operatorname{sen}^2\theta}{4\lambda^2r^2}\right)}{2Z_0}=$$
$$=\frac{Z_0I_0^{\,2}\ell^2\operatorname{sen}^2\theta}{8\lambda^2r^2}=\frac{Z_0I_0^{\,2}\operatorname{sen}^2\theta}{8}\left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2\frac{1}{r^2}\left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}\right] \tag{37}$$

Substituindo (37) em (34):

$$U(\theta,\phi) = S(\theta,\phi)r^2 = \frac{Z_0 I_0^{\,2}\,\mathrm{sen}^2\,\theta}{8}\left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2 \frac{1}{r^2}\,r^2 =$$
$$= \frac{Z_0 I_0^{\,2}\,\mathrm{sen}^2\,\theta}{8}\left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2 \left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{sr}}\right] \tag{38}$$

Portanto, potência irradiada por unidade de ângulo sólido $U(\theta,\phi)$, isto é, a Intensidade de Radiação, **é independente da distância r na Região de Campo Distante de um irradiador**.

Observe que normalizando a Intensidade de Radiação $U(\theta,\phi)$ pelo seu valor máximo $U_{\max}$ obtemos, com base em (31), o Padrão de Potência $P(\theta,\phi)$ do irradiador , isto é,

$$\frac{U(\theta,\phi)}{U_{\max}} = \frac{S(\theta,\phi)r^2}{S_{\max}(\theta_{\max U},\phi_{\max U})r^2} = \frac{\frac{1}{2}\frac{E_0^{\,2}(\theta,\phi)}{Z_0}}{\frac{1}{2}\frac{E_{\max}^{\,2}(\theta_{\max U},\phi_{\max U})}{Z_0}} = \frac{E_0^{\,2}(\theta,\phi)}{E_{\max}^{\,2}(\theta_{\max U},\phi_{\max U})} =$$
$$= \left(\frac{E_0(\theta,\phi)}{E_{\max}(\theta_{\max E},\phi_{\max E})}\right)^2 = \left(\left|F(\theta,\phi)\right|\right)^2 = P(\theta,\phi) \tag{39}$$

Em geral a superfície que representa o Padrão de Potência $P(\theta,\phi)$ de um irradiador em $\Re^3$ nem sempre é uma superfície simples como aquela mostrada na Figura 6. A Figura 11 mostra a superfície $P(\theta,\phi)$ típica para um irradiador com $(\theta_{\max P},\phi_{\max P}) = (0°,\forall\phi)$.

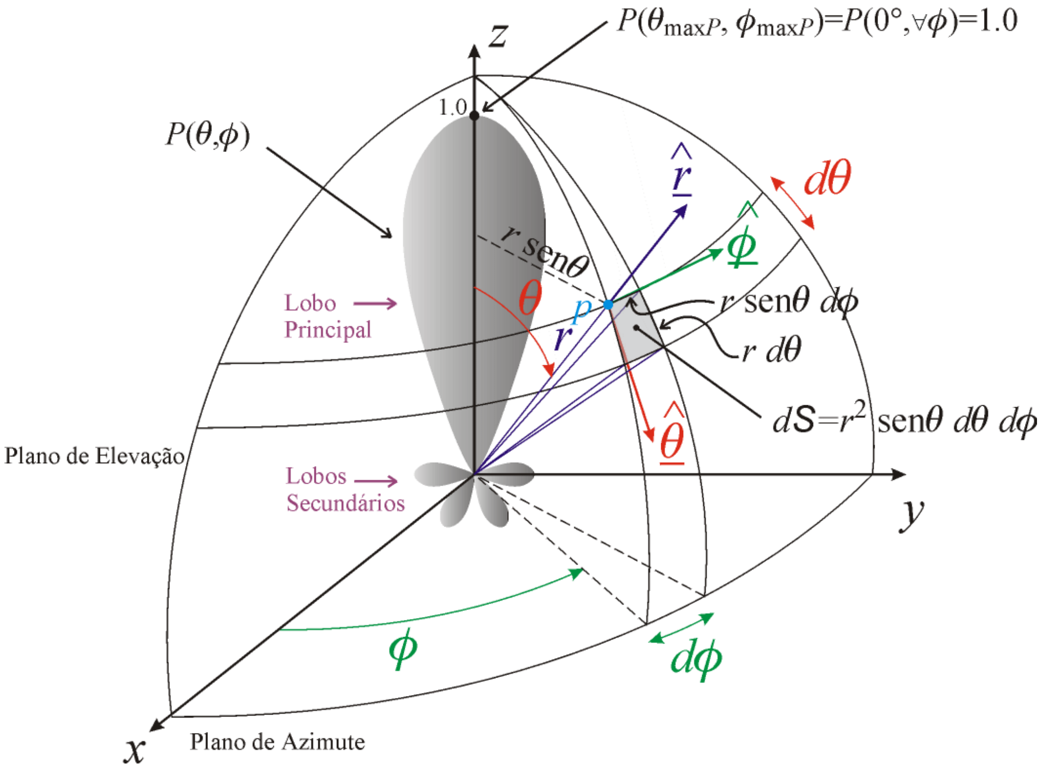


Figura 11: Padrão de Potência $P(\theta,\phi)$ típico de um irradiador de alta Diretividade (conceito a ser definido logo a seguir). Observe a existência de lobos secundários além do lobo principal alinhado com o eixo z .

O **Ângulo Sólido do Feixe** de irradiação Ω_a representa o quanto a potência $\boldsymbol{P}_a$ irradiada por uma antena "cabe angularmente" dentro de um cone de abertura Ω_a com densidade sólido-angular de potência irradiada constante $U_{\max}$, cone cujo vértice está na origem do sistema (r,θ,ϕ) e cujo eixo alinha-se com a direção de $U_{\max}$.

Para entendermos este conceito, vamos partir da Equação (26), aqui repetida por comodidade de visualização:

$$\boldsymbol{P}_a = \oiint_{esfera} \underline{S}(\theta,\phi)\cdot d\underline{S} = \oiint_{esfera} \hat{\underline{r}}\, S(\theta,\phi)\cdot \hat{\underline{r}}\, dS = \hat{\underline{r}}\cdot\hat{\underline{r}} \oiint_{esfera} S(\theta,\phi)dS = \oiint_{esfera} S(\theta,\phi)dS$$

$$= \int_{\varphi=0}^{\phi=2\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} S(\theta,\phi)\,r^2\,\text{sen}\,\theta\,d\theta\,d\phi = \int_{\varphi=0}^{\phi=2\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} S(\theta,\phi)\,r^2\,\text{sen}\,\theta\,d\theta\,d\phi \quad [\text{W}] \tag{26}$$

Substituindo a Intensidade de Radiação $U(\theta,\phi) = S(\theta,\phi)r^2 \left[\dfrac{\text{W}}{\text{sr}}\right]$, obtido de (34), em (26) resulta:

$$\boldsymbol{P}_a = \int_{\varphi=0}^{\phi=2\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} S(\theta,\phi)\,r^2\,\text{sen}\,\theta\,d\theta\,d\phi = \int_{\varphi=0}^{\phi=2\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} U(\theta,\phi)\,\text{sen}\,\theta\,d\theta\,d\phi \;[\text{W}] \tag{40}$$

Mas, de (39), $U(\theta,\phi)=P(\theta,\phi)U_{\max}$. Daí, substituindo em (40), temos:

$$\boldsymbol{P}_a = \int_{\varphi=0}^{\phi=2\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} U(\theta,\phi)\operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi = \int_{\varphi=0}^{\phi=2\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} P(\theta,\phi)U_{\max}\operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi \quad [\mathrm{W}] \tag{41}$$

Mas (41) pode ser re-escrita como

$$\frac{\boldsymbol{P}_a}{U_{\max}} = \int_{\varphi=0}^{\phi=2\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} P(\theta,\phi)\operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi \quad [\mathrm{sr}] \quad (=[\mathrm{rad}^2]) \tag{42}$$

O termo $\dfrac{\boldsymbol{P}_a}{U_{\max}}$ em (42) tem unidade dimensional $[\mathrm{rad}^2]$, e, portanto, representa um ângulo sólido Ω.

Especificamente, $\dfrac{\boldsymbol{P}_a}{U_{\max}}=\Omega_a$ representa o quanto a potência $\boldsymbol{P}_a$ irradiada pela antena "cabe angularmente" dentro de um cone de abertura Ω_a com densidade sólido-angular de potência irradiada constante $U_{\max}$, cone cujo vértice está na origem do sistema (r,θ,ϕ).

Em outras palavras, $\dfrac{\boldsymbol{P}_a}{U_{\max}}$ expressa o ângulo sólido Ω_a de abertura do cone Ψ, de vértice na origem e eixo alinhado com $(\theta,\phi)=(\theta_{\max U},\phi_{\max U})$, ângulo Ω_a necessário para que toda a potência $\boldsymbol{P}_a$ gerada pela antena transmissora seja irradiada no espaço $\Re^3$ confinada dentro do cone Ψ com densidade sólido-angular de potência constante e igual a $U_{\max}$.

Assim, o **Ângulo Sólido do Feixe** de irradiação Ω_a de uma antena é dado por

$$\Omega_a = \int_{\varphi=0}^{\phi=2\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} P(\theta,\phi)\operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi \quad [\mathrm{rad}^2] \tag{43}$$

onde $P(\theta,\phi)=|F(\theta,\phi)|^2$ é definido em (19).

Alternativamente, de modo análogo ao cômputo de (25), efetuando (43) em termos da soma de todos os ângulos sólidos $d\Omega$ que formam uma esfera em torno da antena temos:

$$\Omega_a = \iint_{4\pi} P(\theta,\phi)\,d\Omega \quad [\mathrm{rad}^2] \tag{44}$$

Para antenas de alta diretividade com simetria aproximadamente radial do Padrão de Potência $P(\theta,\phi)=|F(\theta,\phi)|^2$ em torno do eixo que aponta na direção $(\theta_{\max P},\phi_{\max P})$, como é o caso de muitas Antenas Parabólicas, o Ângulo Sólido do Feixe Ω_a pode ser aproximado pelo quadrado do Ângulo de Meia Potência $HPBW$, conforme mostra a Figura 12:

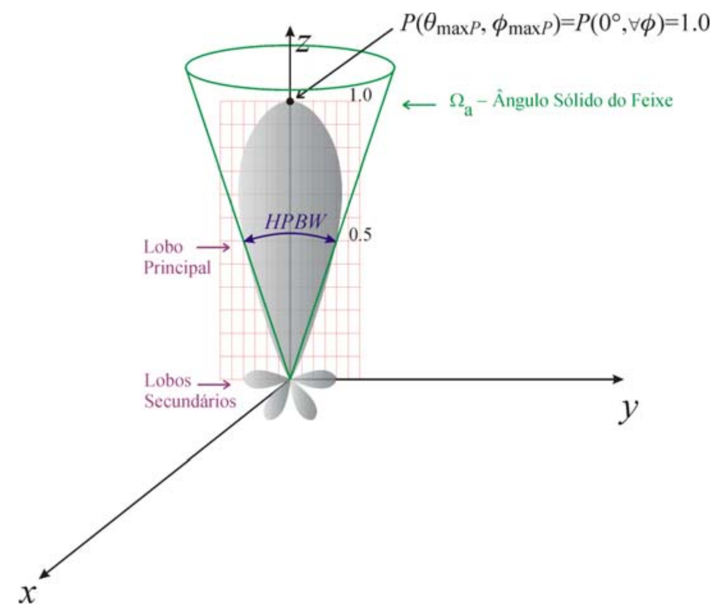


Figura 12: Aproximação do Ângulo Sólido do Feixe Ω_a pelo Ângulo de Meia Potência $HPBW$ através de $\Omega_a \approx HPBW^2$.

Diretividade é um índice numérico que mede a habilidade de uma antena em concentrar a potência irradiada na direção de máxima irradiação $(\theta,\phi)=(\theta_{\max U},\phi_{\max U})$ **(**ou concentrar a absorção de potência incidente na direção $(\theta,\phi)=(\theta_{\max U},\phi_{\max U})$ para o caso de antenas receptoras**).**

Especificamente, a Diretividade D de uma antena mede até que ponto uma antena é capaz de concentrar energia dentro de um ângulo sólido. Quando menor o ângulo sólido do cone dentro do qual a antena é capaz de concentrar a energia irradiada, maior a Diretividade D. Este conceito pode ser matematicamente expresso por:

$$D=\frac{U_{\text{max}}}{U_{\text{med}}} \tag{45}$$

onde :

(I) U_{max} é o valor máximo da densidade angular de potência irradiada $U(\theta,\phi)\left[\frac{\text{W}}{\text{sr}}\right]$ que ocorre em $(\theta,\phi)=(\theta_{\max U},\phi_{\max U})$. Ou seja, U_{max} é o valor máximo da Intensidade de Radiação da antena.

(II) U_{med} é a densidade angular de potência irradiada caso a potência $\boldsymbol{P}_a$ entregue à antena (aqui assumida ter 100% de eficiência) fosse uniformemente irradiada em todas as possíveis direções do espaço $\Re^3$, isto é, caso a potência $\boldsymbol{P}_a$ fosse irradiada com densidade de potência constante através da superfície de uma esfera de área $4\pi r^2$ em cujo centro encontra-se a antena. Ou seja, U_{med} é a Intensidade de Radiação resultante de um **Irradiador Isotrópico** alimentado pela mesma potência $\boldsymbol{P}_a$ entregue à antena em **(I)**, ambas situadas nas mesmas coordenadas no espaço $\Re^3$.

Utilizando (34) , (26) e (39), isto é,

- $U(\theta,\phi)=S(\theta,\phi)r^2 \quad \left[\dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{sr}}\right]$
- $\boldsymbol{P}_a = \displaystyle\int_{\varphi=0}^{\phi=2\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} S(\theta,\phi)\, r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi \quad [\mathrm{W}]$
- $\dfrac{U(\theta,\phi)}{U_{\max}} = P(\theta,\phi)$

a definição (45) pode ser escrita como:

$$D=\frac{U_{\max}}{U_{\mathrm{med}}}=\frac{S_{\max}(\theta_{\max P},\phi_{\max P})r^2}{S_{\mathrm{med}}r^2}=\frac{S_{\max}(\theta_{\max P},\phi_{\max P})}{S_{\mathrm{med}}}=\frac{S_{\max}(\theta_{\max P},\phi_{\max P})}{\dfrac{\boldsymbol{P}_a}{4\pi r^2}}= \tag{46}$$

$$=\frac{S_{\max}(\theta_{\max P},\phi_{\max P})}{\dfrac{\displaystyle\int_{\varphi=0}^{\phi=2\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} S(\theta,\phi)\, r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi}{4\pi r^2}}=\frac{r^2 S_{\max}(\theta_{\max P},\phi_{\max P})}{\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_{\varphi=0}^{\phi=2\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} S(\theta,\phi)\, r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi}=$$

$$=\frac{U_{\max}}{\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_{\varphi=0}^{\phi=2\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} U(\theta,\phi) \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi}=\frac{U_{\max}}{\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_{\varphi=0}^{\phi=2\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} U_{\max} P(\theta,\phi) \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi}=$$

$$\frac{1}{\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_{\varphi=0}^{\phi=2\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} P(\theta,\phi) \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi}$$

Substituindo (43) em (46):

$$D=\frac{1}{\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_{\varphi=0}^{\phi=2\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} P(\theta,\phi) \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi}=\frac{1}{\dfrac{1}{4\pi}\Omega_a}=\frac{4\pi}{\Omega_a} \tag{47}$$

Portanto a **Diretividade** $D=4\pi/\Omega_a$ de uma antena é a razão entre o ângulo sólido total de uma esfera (4π [sr]) pelo **Ângulo Sólido do Feixe** Ω_a da antena.

Observe que para um Irradiador Isotrópico a Diretividade resulta $D=1$.

Note que um monopolo aterrado apresenta o dobro da diretividade de um dipolo de mesmas dimensões. Isto ocorre devido ao limite de integração de θ em (47) ser $\pi/2$ em razão do padrão de irradiação do monopolo (irradia em um só hemisfério).

Nota: Antenas de alta diretividade em geral apresentam **lobo principal estreito** e **lobos secundários reduzidos** , como é o caso da Antena Parabólica. Nesta situação a **Diretividade** $D = 4\pi/\Omega_a$ pode ser determinada aproximando-se o **Ângulo Sólido do Feixe** Ω_a pelo produto dos **Ângulos de Meia Potência** $HPBW_\theta$ e $HPBW_\phi$, relativos a dois planos ortogonais, cuja interseção é a direção de máxima radiação:

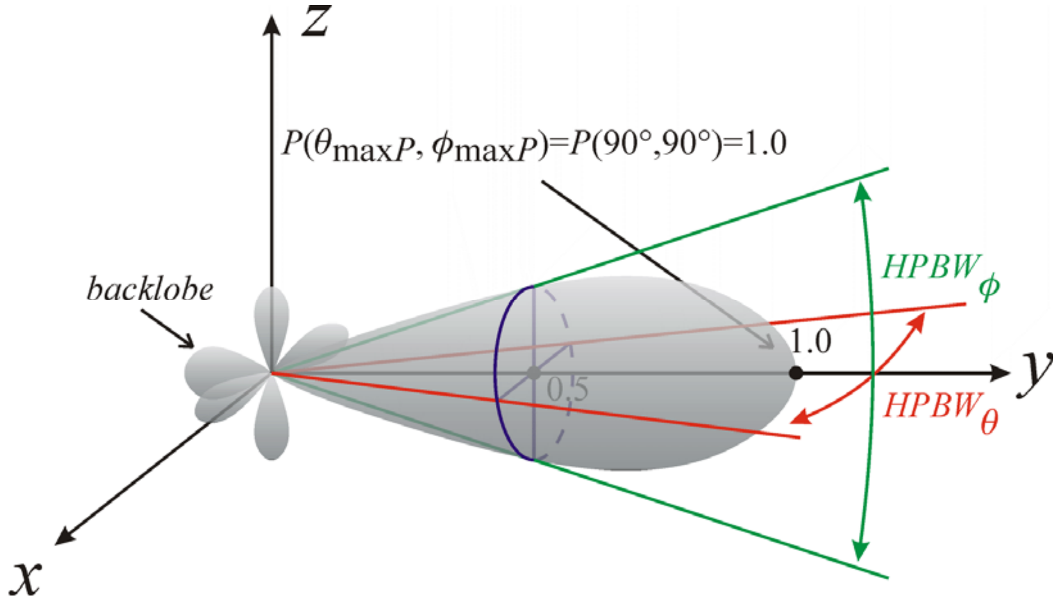


Figura 13: Aproximação da diretividade D pelo produto de $HPBW_\theta$ e $HPBW_\phi$.

Portanto, para uma antena de alta diretividade é válida a seguinte relação, baseada na Figura 13:

$$D = \frac{4\pi}{\Omega_a} = \frac{4\pi}{HPBW_\theta \ HPBW_\phi} \tag{48}$$

Se os ângulos dos Ângulos de Meia Potência $HPBW_\theta$ e $HPBW_\phi$ forem dados em graus $[\circ]$ converte-se o ângulo sólido 4π $[\mathrm{sr}]$ para graus:

$$4\pi \ [\mathrm{sr}] = 4\pi \ [\mathrm{rad}^2] = 4\pi \ [\mathrm{rad}^2] \times \left(\frac{180^\circ}{\pi \ \mathrm{rad}}\right)^2 \left[\frac{\circ}{\mathrm{rad}}\right]^2 = \frac{4 \times 180^2}{\pi} [\circ]^2 = 41253 \ [\circ]^2$$

Portanto, para $HPBW_\theta$ e $HPBW_\phi$ dados em $[\circ]$, (48) é re-escrita como

$$D = \frac{4\pi}{\Omega_a} = \frac{41253 [\circ]^2}{HPBW_\theta \ HPBW_\phi} \tag{49}$$

O **Ganho de Potência** G de uma antena com perdas cuja potência **irradiada** é $\boldsymbol{P}_a$ é definido como a razão entre a máxima densidade superficial de potência irradiada $S_{\max}\left(\theta_{\max P}, \phi_{\max P}\right)$ pela antena e a densidade superficial de potência irradiada $S_{\mathrm{med}} = \dfrac{\boldsymbol{P}_e}{4\pi r^2}$ caso a antena fosse um irradiador isotrópico com 100% de eficiência **alimentado** por uma potência de entrada $\boldsymbol{P}_e$:

$$G = \frac{S_{\max}(\theta_{\max P}, \phi_{\max P})}{\dfrac{\boldsymbol{P}_e}{4\pi r^2}} \quad [\text{adimens.}] \tag{50}$$

Mas $\eta = \boldsymbol{P}_a / \boldsymbol{P}_e$ define a **eficiência** da antena não-isotrópica em questão, e daí temos que

$$G = \frac{S_{\max}(\theta_{\max P}, \phi_{\max P})}{\dfrac{(\boldsymbol{P}_a/\eta)}{4\pi r^2}} = \eta \frac{S_{\max}(\theta_{\max P}, \phi_{\max P})}{\dfrac{\boldsymbol{P}_a}{4\pi r^2}} = \eta D \tag{51}$$

- Portanto, o Ganho de Potência G de uma antena será no máximo igual à sua diretividade D.
- $10\log G$ define o parâmetro dB_i: ganho em dB de uma antena em relação ao irradiador isotrópico.
- Embora seja comum utilizar como referência o irradiador isotrópico, freqüentemente o Ganho de Potência G é calculado em relação ao Dipolo de Meia-Onda (a ser estudado em capítulo posterior) pelo fato de um irradiador isotrópico ser fisicamente irrealizável. Nesta situação o Ganho de Potência G é medido em dB_d.
- A **Relação Frente-Costas** de uma antena é definida como a razão entre o valor máximo da Intensidade Radiação $U_{\max}\left[\dfrac{\text{W}}{\text{sr}}\right]$ no lobo principal e o valor de $U(\theta,\phi)\left[\dfrac{\text{W}}{\text{sr}}\right]$ na direção (θ,ϕ) do maior lobo secundário situado no hemisfério **<u>posterior</u>** da antena (*major backlobe*). A relação frente costas deve ser superior a 25 dB para um bom funcionamento.

<u>Exemplo 3</u>: Calcule a diretividade D de um dipolo curto .

Solução:

$D = 4\pi/\Omega_a$ sendo $\Omega_a = \displaystyle\int_{\varphi=0}^{\phi=2\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} P(\theta,\phi)\,\text{sen}\,\theta\, d\theta\, d\phi \quad [\text{rad}^2]$.

Para o dipolo curto $P(\theta,\phi) = \text{sen}^2\,\theta, \forall\phi$.

Daí,

$$\Omega_a = \int_{\varphi=0}^{\phi=2\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \text{sen}^3(\theta)\, d\theta\, d\phi = \int_{\varphi=0}^{\phi=2\pi}\left[-\frac{1}{3}\text{sen}^2(\theta)\cdot\cos(\theta) - \frac{2}{3}\cos(\theta)\right]_0^{\pi} d\phi = \frac{4}{3}\int_{\varphi=0}^{\phi=2\pi} d\phi = \frac{4}{3}[\phi]_0^{2\pi} = \frac{8\pi}{3}$$

E, portanto,

$$D = \frac{4\pi}{\dfrac{8\pi}{3}} = \frac{3}{2}$$

Ou seja, 1.5 vezes a diretividade de um irradiador isotrópico.

6 Impedância de Entrada

A Impedância de Entrada de uma antena é a impedância Z_{A} que a antena apresenta à linha de transmissão que a alimenta ou à estrutura de acoplamento que a une à linha de transmissão:

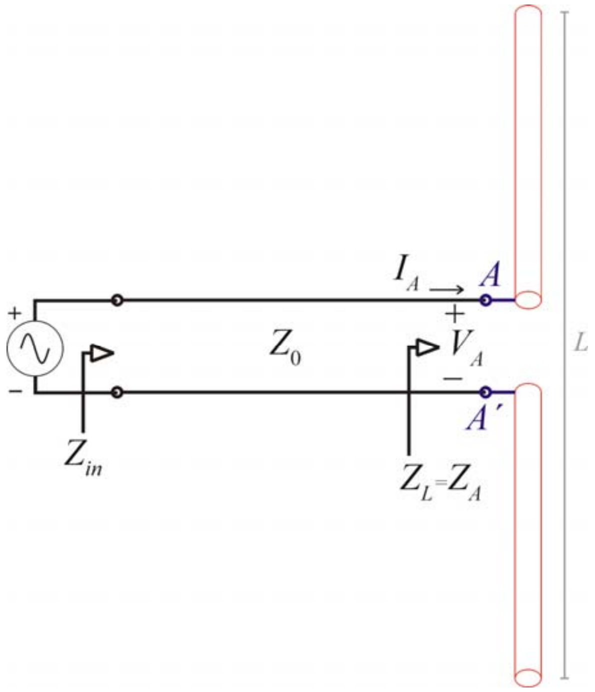


Figura 14: Antena Dipolo alimentada por uma linha de transmissão (cabo coaxial) de impedância característica Z_0. A impedância de carga Z_L da linha de transmissão é a impedância Z_{A} "vista" nos terminais A e A' da antena. **<u>Nota:</u> O Apêndice A ao final deste capítulo resume as equações da teoria de linhas de transmissão pare efeito de determinação das tensões, correntes e potências envolvidas na alimentação de uma antena através de um cabo coaxial.**

Se

(I) A **antena está isolada**, isto é, afastada de qualquer objeto eletricamente condutor e de tamanho físico comparável ao da antena,

(II) A antena é **sem perdas**, isto é, uma antena construída por condutores de alta condutividade (cobre, por exemplo) e isoladores de material dielétrico de baixa tangente de perdas (poliestireno, por exemplo)

então sua impedância de entrada é igual a sua impedância própria referida aos terminais A e A':

$$Z_{\mathrm{A}} = \frac{V_{\mathrm{A}}}{I_{\mathrm{A}}} = R_{\mathrm{A}} + jX_{\mathrm{A}} \tag{52}$$

onde R_{A} é a **Resistência de Radiação** da antena e X_{A} é a **Reatância Própria** da antena, ambas referidas aos terminais A e A'.

● Quando existir qualquer objeto condutor elétrico de tamanho físico comparável ao da antena próximo a ela (uma outra antena, por exemplo), a impedância própria de entrada da antena é alterada pela proximidade do objeto de modo a incluir as contribuições devidas a impedância mútua entre antena e objeto. A impedância mútua resulta das correntes induzidas no objeto pela antena e vice-versa.

● Para uma **antena isolada** e **com perdas**, uma parte da potência P_{A} entregue à antena corresponde à potência irradiada P_{r}. Outra parte de P_{A} corresponde à potência P_{p} dissipada sob a forma de calor devido as perdas ôhmicas e dielétricas existentes na antena:

$$P_{\text{A}} = P_{\text{r}} + P_{\text{p}} = R_{\text{A}} \frac{I_{\text{A(max)}}^2}{2} \tag{53}$$

onde $I_{\text{A(max)}}$ é valor instantâneo máximo de I_{A} encontrado ao longo da antena. De (53) temos que

$$R_{\text{A}} = \frac{P_{\text{r}}}{\dfrac{I_{\text{A(max)}}^2}{2}} + \frac{P_{\text{p}}}{\dfrac{I_{\text{A(max)}}^2}{2}} = R_{\text{r}} + R_{\text{p}} \tag{54}$$

onde R_{r} é a resistência de radiação referida aos terminais A e A' e R_{p} é a resistência de perdas. Mas, a eficiência de uma antena é dada pela razão entre a potência irradiada e a potência total a ela entregue:

$$\eta = \frac{P_{\text{r}}}{P_{\text{A}}} \tag{55}$$

Daí,

$$\eta = \frac{P_{\text{r}}}{P_{\text{A}}} = \frac{P_{\text{r}}}{P_{\text{r}} + P_{\text{p}}} = \frac{R_{\text{r}} \dfrac{I_{\text{A(max)}}^2}{2}}{R_{\text{r}} \dfrac{I_{\text{A(max)}}^2}{2} + R_{\text{p}} \dfrac{I_{\text{A(max)}}^2}{2}} = \frac{R_{\text{r}}}{R_{\text{r}} + R_{\text{p}}} \tag{56}$$

Exemplo 4: Um transmissor de rádio opera na freqüência $f = 3.5\ \text{MHz}$ utilizando como antena um monopolo vertical aterrado de comprimento $L/2 = 4\ \text{m}$ construído com um fio de cobre de bitola 12AWG cuja resistência é $5 \times 10^{-3}\ \Omega/\text{m}$ e diâmetro $2\ \text{mm}$. O fio de cobre é sustentado por um mastro vertical de poliestireno cujas perdas dielétricas podem ser consideradas desprezíveis. A resistência do aterramento é assumida ser de valor similar ao da resistência do fio do monopolo. Determine a eficiência deste monopolo sabendo que o *skin effect*[5] altera a resistência DC de um fio de cobre de seção circular de acordo com

[5]O *skin effect* ou **Efeito Pelicular** é a tendência de as cargas elétricas movendo-se aceleradamente no interior de um condutor elétrico aglomerarem-se na "casca" externa do volume do condutor. O *skin effect* é um fenômeno de descrição matemática complexa que foge ao escopo deste texto. Um estudo quantitativo e formal do *skin effect* pode ser encontrado em S. Ramo, J.R.Whinnery & T. Van Duzer – *Campos e Ondas em Eletrônica das Comunicações* – Guanabara Dois, 1981. Alegoricamente e em palavras simples, o *skin effect* em um fio condutor consiste na repulsão e conseqüente dispersão das cargas elétricas no sentido radial do fio, repulsão radial que é originada pela compressão sofrida pelas cargas no sentido longitudinal por ação de seu movimento acelerado neste sentido. Quanto maior a freqüência f da corrente elétrica que percorre o fio maior será a aceleração longitudinal experimentada pelas cargas. Quanto maior for a aceleração longitudinal maior será a compressão no sentido longitudinal aplicada sobre a nuvem de cargas. Em conseqüência, aumenta a força de repulsão radial entre as cargas na nuvem, e, portanto, ocorre a aglomeração das cargas na "casca" externa do volume do fio.

$$R_{(ac)}/R_{(dc)} \approx 3.8\times10^{-3} D\sqrt{f} + 0.26 \tag{57}$$

onde D é o diâmetro do fio em $[\mathrm{mm}]$ e f é a freqüência da corrente que percorre o fio em $[\mathrm{Hz}]$.

Solução:

Uma vez que o tamanho do dipolo formado pelo monopolo em conjunto com sua imagem elétrica é $L = 2\times 4\mathrm{m} = 8\mathrm{m}$ e uma vez que $\lambda = c/f = 85.7\ \mathrm{m}$, estamos diante de uma antena do tipo Dipolo Curto, porque $L < 0.1\lambda$.

A resistência DC representativa das perdas Joule é

$$R_{\mathrm{p}(dc)} = 2\cdot 4\mathrm{m}\cdot 5\times10^{-3}\ \Omega/\mathrm{m} = 40\times10^{-3}\,\Omega$$

De (57) temos

$$R_{(ac)}/R_{(dc)} \approx 3.8\times10^{-3}\cdot 2\mathrm{mm}\cdot\sqrt{3.5\times10^{6}\,\mathrm{Hz}} + 0.26 = 14.5$$

logo

$$R_{\mathrm{p}(ac)} = 14.5\cdot R_{\mathrm{p}(dc)} = 14.5\cdot 40\times10^{-3}\,\Omega = 0.58\Omega$$

Da Equação (62) do Capítulo II (um monopolo irradia em apenas um hemisfério, portanto sua resistência de radiação é metade da de um dipolo) temos

$$R_{\mathrm{r}} = 40\pi^2\left(\frac{L}{2\lambda}\right)^2 = 40\pi^2\left(\frac{8\,m}{2\cdot 85.7\,m}\right)^2 = 0.86\Omega$$

E de (55)

$$\eta = \frac{P_{\mathrm{r}}}{P_{\mathrm{A}}} = \frac{R_{\mathrm{r}}}{R_{\mathrm{r}} + R_{\mathrm{p}}} = \frac{0.86\Omega}{0.86\Omega + 0.58\Omega} = 59.7\%$$

⇒ Portanto mais de 40% da potência entregue ao dipolo curto **é perdida em aquecimento do fio da antena!** Observe que **quanto menor o dipolo** menor será sua resistência de radiação e, assim, **menor será sua eficiência**.

● Vimos no Capítulo II que para determinar quantitativamente a componente resistiva R_{A} da impedância $Z_{\mathrm{A}} = R_{\mathrm{A}} + jX_{\mathrm{A}}$ de uma antena basta a integração da parte real $\mathrm{Re}\{\underline{\vec{S}}\}$ do Vetor de Poynting Complexo $\underline{\vec{S}}$ sobre uma superfície esférica na Região de Campo distante. O método foi introduzido por H. C. Pocklington [6] e baseia-se no fato de que, do Teorema da Conservação da Energia, a potência irradiada pela antena necessariamente é igual à potência total que atravessa a superfície esférica, e, desta condição, obtemos o valor de R_{A}.

● No entanto, para determinar quantitativamente a componente reativa X_{A} da impedância $Z_{\mathrm{A}} = R_{\mathrm{A}} + jX_{\mathrm{A}}$ de uma antena é necessário a integração da parte imaginária de $\underline{\vec{S}}$, isto é $\mathrm{Im}\{\underline{\vec{S}}\}$, sobre uma superfície Σ fechada que envolva o volume V da estrutura irradiante antena. Para que o

[6] H. C. Pocklington, Electrical Oscillations in Wires, *Cambridge Philosophy Society Proc.*, 9, October 25, 1897, pp. 324-332.

resultado seja preciso, idealmente Σ deve estar separado de uma distância infinitesimal de V. Esta condição é necessária para que a energia reativa, máxima próxima à estrutura irradiante de volume V (região de Campo Próximo), possa ser "captada" pela "varredura superficial" efetuada pela integração de $\vec{\underline{S}}$ sobre Σ.

- Ocorre que para muitas formas geométricas de V, entre elas a geometria cilíndrica, a integração de $\vec{\underline{S}}$ sobre Σ não converge. O problema de ocorrência de singularidades na integração de $\vec{\underline{S}}$ foi contornado pelo Método da FEM Induzida, desenvolvido em 1922 independentemente por D.A. Rozhanski na então União Soviética e por L. Brillouin na França. O método foi introduzido em 1933 por J. Labus[7], e posteriormente desenvolvido por S.A. Schelkunoff[8]. O Método da FEM Induzida indiretamente utiliza o princípio de que a reatância de uma antena origina-se da alta energia reativa (**ondas estacionárias ⇔ reflexão ⇔ re-irradiação**) no Campo Próximo, no entanto, a reatância é calculada a partir da energia re-irradiada por uma antena "virtual" ou "imaginária" nas proximidades da antena real. Daí então o nome do método.

- O Método da FEM Induzida foi um dos primeiros métodos efetivos para a determinação da componente reativa X_{A} da impedância $Z_{\mathrm{A}} = R_{\mathrm{A}} + jX_{\mathrm{A}}$ de uma antena. Estudaremos o Método da FEM Induzida em capítulo posterior.

- Mais tarde, Schelkunoff desenvolveu o Método da Perturbação da Antena Bicônica[9] para a determinação de $Z_{\mathrm{A}} = R_{\mathrm{A}} + jX_{\mathrm{A}}$, interpretando uma antena dipolo formada por dois cones simétricos como uma linha de transmissão. Aplicando um fator de correção (denominado "perturbação") aos resultados obtidos para a geometria cônica, Schelkunoff determinou com considerável precisão o valor de $Z_{\mathrm{A}} = R_{\mathrm{A}} + jX_{\mathrm{A}}$ para antenas de geometria cilíndrica.

- Neste estudo adotaremos o Método da Perturbação da Antena Bicônica para efeito de determinação de $Z_{\mathrm{A}} = R_{\mathrm{A}} + jX_{\mathrm{A}}$. Este método é mais preciso embora mais complexo que o Método da FEM Induzida. Não apresentaremos a sua dedução teórica neste texto, no entanto ele encontra-se implementado no programa Zi_CyDip.exe e *script* Mathcad Zi_CyDip.mcd, disponíveis para *download* em **http://www.feng.pucrs.br/~decastro/download.html** no link ***Antenas* - Impedância de Dipolos Simétricos (código fonte C e *script* MathCad 2000) - Rev. 07/09/2003 - 322Kb (.zip).**

- O Método da Perturbação da Antena Bicônica não é o método mais genérico e preciso para determinação de $Z_{\mathrm{A}} = R_{\mathrm{A}} + jX_{\mathrm{A}}$. O Método da Antena Cilíndrica, formulado por L.V. King[10] e desenvolvido por Erik Hallén[11], é considerado o mais preciso dentre os métodos não-numéricos. O

---

[7] J. Labus, Mathematical Determination of the Impedance of Aerials, *Z. f. Hochfrequentztechnik u. Elektroakustik*, 41, 1933.

[8] S.A. Schelkunoff, Theory of Antennas of Arbitrary Size and Shape, *Proc. I.R.E.*, 29, 1941.

[9] S.A. Schelkunoff, *Advanced Antenna Theory*, John Wiley & Sons, 1952.

[10] L. V. King, On the Radiation Field of a Perfectly Conductive Base Insulated Cylindrical Antenna Over a Perfectly Conducting Plane Earth, and the Calculation of Radiation Resistance and Reactance, *Transactions of Royal Society*, A236, pp. 381-422, London, 1937.

[11] E. Hallén, Transmitting and Receiving Qualities of Antennas, *Nova Acta Upasaliensis*, Séries IV, vol.11, pp. 1-43, 1938.

Método dos Momentos [12] , devido a Duncan e Hinchey , é um método numérico baseado em Elementos Finitos, o qual não é limitado à forma geométrica de um dipolo simétrico. O Método dos Momentos apresenta custo computacional mais elevado que seus demais predecessores, mas, com o advento dos computadores digitais, tornou-se um dos métodos mais populares para a determinação da impedância própria e mútua de irradiadores eletromagnéticos genéricos.

● No presente capítulo apresentaremos apenas uma análise qualitativa aproximada da componente reativa X_A, com base na idéia de Schelkunoff de que uma antena pode ser interpretada como sendo formada a partir de uma linha de transmissão de comprimento ℓ com os terminais de saída abertos, conforme mostra a Figura 15. Observe, no entanto, que a discussão que segue não constitui a apresentação do Método da Perturbação da Antena Bicônica propriamente, mas apenas a idéia inicial que conduziu a ele.

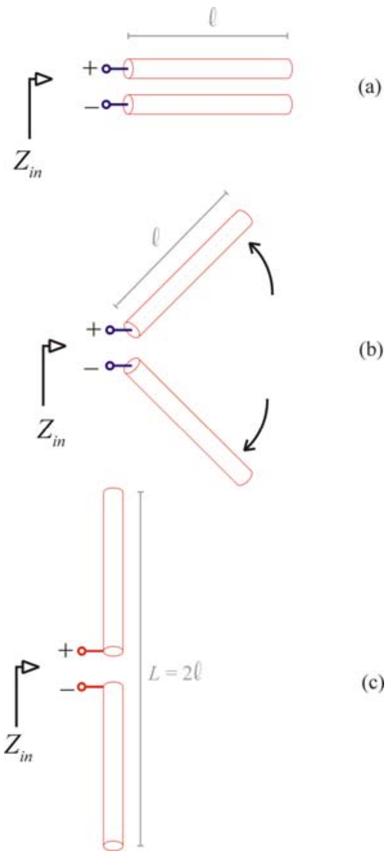


Figura 15: Transformações geométricas aplicadas sucessivamente em uma linha de transmissão de comprimento ℓ com os terminais de saída abertos de modo a formar um dipolo simétrico de comprimento $L = 2\ell$.

[12] R.H. Duncan and F.A. Hinchey, Cylindrical Antenna Theory, *J. Res. NBS*, vol 64D, *September-October* 1960, pp. 569-584.

● Para qualquer linha de transmissão de comprimento ℓ, sem perdas e com impedância característica Z_0, a impedância Z_{in} em seus terminais de entrada relaciona-se com a sua impedância de carga Z_L através de [13] :

$$Z_{in} = Z_0\left(\frac{Z_L + jZ_0\text{tg}(\beta\ell)}{Z_0 + jZ_L\text{tg}(\beta\ell)}\right) \tag{58}$$

onde $\beta = 2\pi/\lambda$.

● Mas, como a antena é interpretada como sendo formada a partir de uma linha de transmissão de comprimento ℓ com os terminais de saída abertos, então $Z_L \to \infty$. Daí (58) torna-se

$$Z_{in} = Z_0\frac{1}{j\tan(\beta\ell)} = -jZ_0\left(\frac{1}{\tan(\beta\ell)}\right) \tag{59}$$

sendo a impedância Z_0 da linha de transmissão assim formada aproximada pela impedância do espaço livre $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = 120\pi$ $[\Omega]$. A Figura 16 mostra o gráfico de $X_A = \text{Im}\{Z_{in}\} = X_{in}$ em função de $L = 2\ell$.

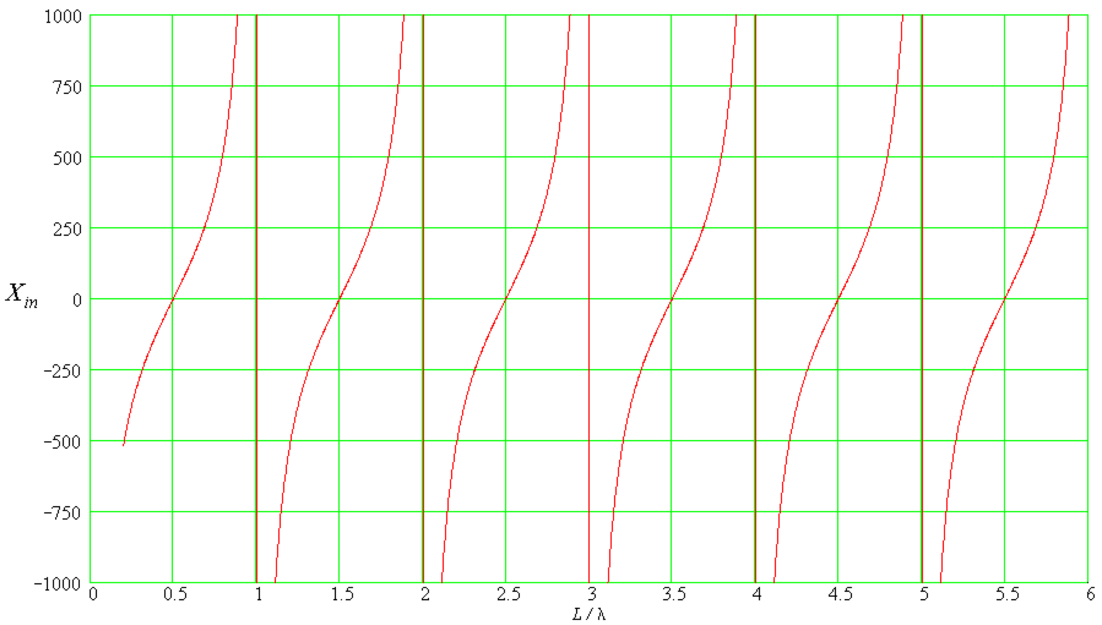


Figura 16: Gráfico de $X_A = \text{Im}\{Z_{in}\} = X_{in}$ em função de $L = 2\ell$.

---

[13] J.D.Kraus and K.R. Carver, *Electromagnetics*, 2nd ed., McGrawHill, 1973.

⇒ Note na Figura 16 que X_A se alterna entre capacitiva e indutiva função do comprimento elétrico $2\ell/\lambda = L/\lambda$.

⇒ Observe também que $Z_A = Z_{in}$ é puramente resistiva para um número ímpar de meios comprimentos de onda.

⇒ Portanto, a menor antena que apresenta $X_A \approx 0$ é o dipolo de meia-onda.

⇒ O comportamento apenas aproximado de $X_A = \text{Im}\{Z_{in}\} = X_{in}$ mostrado na Figura 16 pode ser determinado com precisão através do programa Zi_CyDip.exe e/ou *script* Mathcad Zi_CyDip.mcd, referidos em parágrafos anteriores.

<u>Exemplo 5</u>: Um transmissor de rádio opera na faixa de freqüência compreendida entre $f_{min} = 24\text{ MHz}$ a $f_{max} = 30\text{ MHz}$, utilizando como antena um dipolo simétrico horizontal de comprimento $L = 5.6\text{ m}$. O dipolo encontra-se localizado no topo de um morro cujo solo é de baixa condutividade, de modo que a antena situa-se bem acima[14] do nível do solo de alta condutividade (solo úmido) e pode ser considerada como imersa no espaço livre. O fio de cobre utilizado na construção do dipolo é de bitola 6 AWG cujo raio é $r = 2\text{ mm}$.

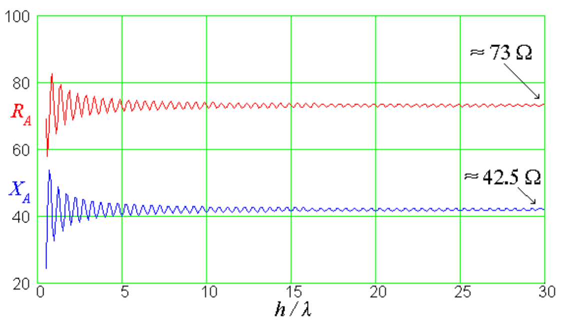
a) Determine $Z_A = R_A + jX_A$ para $f_{min} = 24\text{ MHz}$.

b) Determine $Z_A = R_A + jX_A$ para $f_{max} = 30\text{ MHz}$.

c) Determine a freqüência f_r de operação do transmissor tal que $\text{Im}\{Z_A\} = X_A \approx 0$, isto é, determine a freqüência de operação do transmissor para a qual o dipolo se torne uma **Antena Ressonante**.

---

[14] Uma antena situada a uma altura h maior de que 30λ do solo condutor é denominada **Antena Elevada**, e para todos os efeitos práticos pode ser considerada imersa no espaço livre. A figura abaixo mostra $Z_A = R_A + jX_A$ para um dipolo simétrico horizontal de meia onda e de raio $a << \lambda$ em função de sua altura relativa h/λ do solo de condutividade infinita. Note que para $h > 30\lambda$ $Z_A \approx 73 + j42.5\Omega$, que é a impedância de entrada obtida com o programa Zi_CyDip.exe para um dipolo simétrico de meia onda de espessura infinitesimal imerso no espaço livre:



C:\DJGPP\Out>Zi_CyDip 1E-300 1 0.5

Cylindrical wire radius: 1e-300 [mm]
Dipole full length: 0.5 [m]
Operating wavelength: 1 [m]

Zin= 73.1481+42.5553i [ohm] (referred to the input terminals)

Solução:

a) $f_{\min} = 24\,\text{MHz} \rightarrow \lambda_{\max} = \dfrac{c}{24\,\text{MHz}} = 12.491352\text{ m}$

onde c= 2.99792458×10^{8} m/s

Utilizando o *script* Zi_CyDip.mcd para Mathcad com r = 2mm, λ=12.491352m e L=5.6m:

$$\mathbf{ZA := Zin\_Schelkunoff}\left(\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{mm}}, \frac{\boldsymbol{\lambda}}{\mathbf{m}}, \frac{\mathbf{L}}{\mathbf{m}}\right)$$

ZA= $52.851 - j\,89.676\ \Omega$

b) $f_{\max} = 30\,\text{MHz} \rightarrow \lambda_{\min} = \dfrac{c}{30\,\text{MHz}} = 9.993082\text{m}$

Utilizando o *script* Zi_CyDip.mcd para Mathcad com r = 2mm, λ= 9.993082m e L=5.6m:

$$\mathbf{ZA := Zin\_Schelkunoff}\left(\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{mm}}, \frac{\boldsymbol{\lambda}}{\mathbf{m}}, \frac{\mathbf{L}}{\mathbf{m}}\right)$$

ZA= $113.562 + j\,202.642\ \Omega$

c) Utilizando o *script* Zi_CyDip.mcd com o raio do fio condutor fixo em r = 2mm, tamanho do dipolo fixo em L=5.6m e, por tentativas, variando o comprimento de onda de operação λ até que $\text{Im}\{Z_{\text{A}}\} = X_{\text{A}} \approx 0$ temos:

$$\mathbf{ZA := Zin\_Schelkunoff}\left(\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{mm}}, \frac{\boldsymbol{\lambda}}{\mathbf{m}}, \frac{\mathbf{L}}{\mathbf{m}}\right)$$

ZA= $66.886 + j\,3.358\times10^{-3}\Omega \approx 66.9 + j0\Omega$

valor de Im{ZA}≈0 que foi obtido para $\lambda_{\text{r}} = 11.5932\,\text{m}$.

Daí, a frequência de ressonância da antena é $f_{\text{r}} = \dfrac{c}{\lambda_{\text{r}}} = 25.859\text{ MHz}$

7 Relação de Ondas Estacionárias (ROE)

Para um linha de transmissão de comprimento ℓ, sem perdas, com impedância característica Z_0 e terminada por uma impedância de carga Z_L a razão entre os valores máximo e mínimo da amplitude da onda estacionária (seja de tensão V ou de corrente I) estabelecida ao longo do comprimento ℓ da linha, é definida através de [15] :

$$\text{ROE} = \frac{V_{\max}}{V_{\min}} = \frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} \tag{60}$$

sendo ROE a **Relação de Onda Estacionária** (SWR – *standing wave ratio*) ou Coeficiente de Onda Estacionária (COE) na linha de transmissão e

$$\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \tag{61}$$

sendo Γ o **Coeficiente de Reflexão**.

[15] J.D.Kraus and K.R. Carver, *Electromagnetics*, 2nd ed., McGrawHill, 1973.

⇒ Note que se a linha de transmissão termina em sua impedância característica, isto é, se $Z_L = Z_0$, então $\Gamma = 0$ e $\text{ROE} = V_{\max}/V_{\min} = 1$ ao longo do comprimento ℓ da linha de transmissão, situação denominada de **Linha Plana**. Em outras palavras, **não é estabelecida nenhuma onda estacionária** na linha porque **não existe reflexão na terminação da linha** ($\Gamma = 0$).

⇒ Quando a linha de transmissão é alimentada por um transmissor e a impedância Z_L que termina a linha de transmissão é uma antena, em geral é considerado aceitável uma ROE de até 1.3 para efeito de não danificar o amplificador de saída do transmissor por excesso de corrente ou tensão ($\text{ROE} = V_{\max}/V_{\min} = I_{\max}/I_{\min}$).

Nota: A grande maioria dos transmissores incorporam um sistema de proteção denominado ALC (*Automatic Limiting Control*), que limita a potência de entrada do amplificador de saída quando a ROE ultrapassa um valor considerado inseguro para a operação do amplificador.

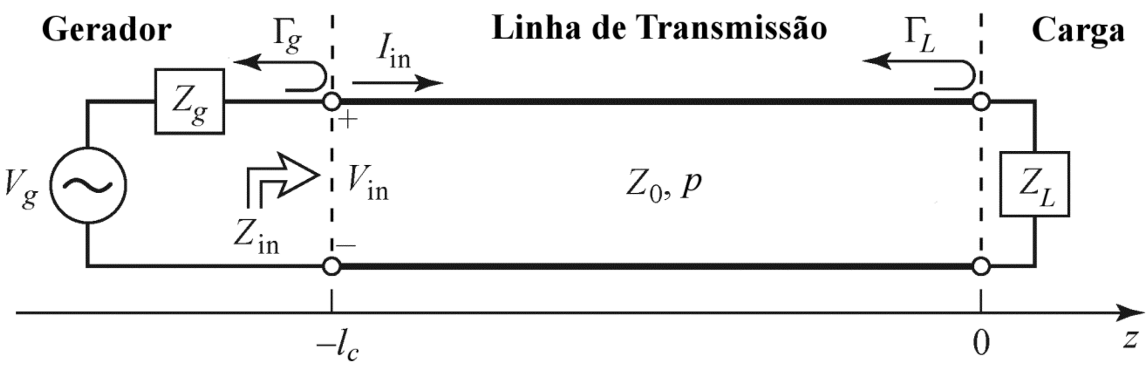
⇒ O Coeficiente de Reflexão Γ relaciona-se com a reflexão de potência na terminação da linha através de $|\Gamma|^2 = P_{\text{Refl}}/P_{\text{Inc}}$ sendo P_{Refl} e P_{Inc} respectivamente as potências refletidas e incidente na terminação. A potência P_{Refl} é refletida de volta para o transmissor.

Nota: Define-se Perda de Retorno como $\alpha = -20\log|\Gamma|$ [dB]

⇒ A potência fornecida pela linha de transmissão à carga (à antena) é $P_{\text{Inc}}\left(1-|\Gamma|^2\right)$.

Nota: Vide Apêndice A ao final deste capítulo para uma revisão dos conceitos sobre linhas de transmissão.

Exemplo 6: O transmissor (TX) do **Exemplo 5** possui uma potência nominal de saída Pg_{nom} = 1KW e uma impedância nominal de saída de $Z_g = 52\,\Omega$, sendo o equivalente de Thévenin do amplificador de saída deste TX representado pelo gerador V_g de impedância interna Z_g mostrado no figura abaixo. O TX é conectado à antena dipolo por um cabo coaxial RG–8/U de $l_c = 5$m de comprimento com impedância característica $Z_0 = 50\,\Omega$, fator de velocidade $p =$ 0.66 e cujas perdas podem ser consideradas desprezíveis. O dipolo é representado pela impedância $Z_L = Z_A$ na figura, sendo Z_A a impedância de entrada do dipolo determinada no **Exemplo 5**.

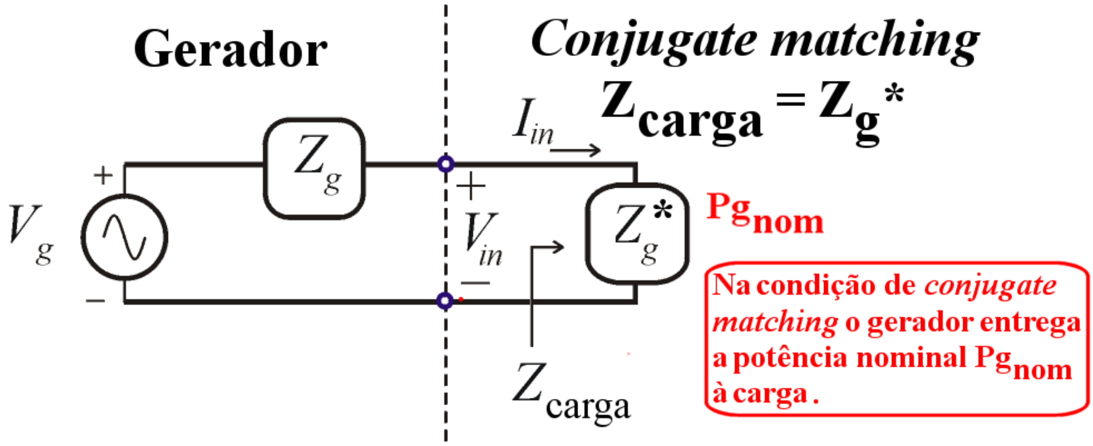


Para as situações de operação caracterizadas nos itens **a)**, **b)** e **c) do Exemplo 5** determine:

(a) A amplitude e fase da onda de tensão incidente que trafega ao longo do cabo.
(b) A amplitude e fase da corrente medida no terminal de entrada do dipolo.
(c) A amplitude e fase da tensão medida nos terminais de entrada do dipolo.
(d) A impedância de entrada do cabo coaxial.
(e) A potência útil que o cabo entrega (= *forward power*) para o dipolo.
(f) A potência útil refletida (= *reflected power*) na impedância de carga do cabo (= impedância de entrada do dipolo).
(g) A ROE no cabo coaxial.
(h) A tensão e a corrente na saída do TX (na entrada do cabo).
(i) Os gráficos da amplitude de pico da tensão $|V(z)|$ e da amplitude de pico da corrente $|I(z)|$ ao longo da coordenada z (ao longo do cabo coaxial).

Solução:

Primeiramente é necessário determinar a tensão V_g do gerador do equivalente de Thévenin do amplificador de saída deste TX. O enunciado afirma que a potência nominal do TX é Pg_{nom} = 1KW. Isto significa que o TX é projetado para entregar a potência Pg_{nom} quando em sua saída é conectada uma carga fictícia Z_{carga} (*dummy load*) sendo $Z_{\text{carga}} = Z_g^* = 52\Omega$, de modo a forçar a operação do TX sob *conjugate matching* (= condição de máxima transferência de potência):



Portanto, operando na condição de *conjugate matching*, a tensão resultante nos terminais da carga fictícia Z_{carga} é dada por $V_{in} = \sqrt{Pg_{\text{nom}} \cdot Z_{\text{carga}}} = \sqrt{1\text{KW} \cdot 52\Omega} = 228.03\ \text{Vrms}$. Como, nesta condição, $Z_{\text{carga}} = Z_g^* = Z_g = 52\Omega$, então do divisor de tensão formado por Z_g e Z_{carga} obtemos a tensão V_g :

$$V_{in} = V_g\left(\frac{Z_{\text{carga}}}{Z_g + Z_{\text{carga}}}\right) \Rightarrow V_g = V_{in}\left(\frac{Z_g + Z_{\text{carga}}}{Z_{\text{carga}}}\right) \Rightarrow V_g = 228.03\ \text{Vrms}\left(\frac{52\Omega + 52\Omega}{52\Omega}\right),$$

resultando $V_g = 456.07\ \text{Vrms}$.

◆ Para o item **a)** do **Exemplo 5** , $Z_{\mathrm{L}} = Z_{\mathrm{A}} \approx 52.851 - j89.676\ \Omega$ e $\lambda = \dfrac{c}{f} = 12.491352$ m .

Das equações (A1), (A2) e (A3) do Apêndice A:

$$\Gamma_{\mathrm{L}} = \frac{V_0^-}{V_0^+} = \frac{Z_{\mathrm{L}} - Z_0}{Z_{\mathrm{L}} + Z_0} = 0.448 - j0.482$$

$$\Gamma_g = \frac{Z_g - Z_0}{Z_g + Z_0} = 0.02$$

$$\lambda_{\mathrm{g}} = p\lambda = 8.244 \text{ m}$$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda_{\mathrm{g}}} = 0.762 \text{ rad/m}$$

(a) Amplitude e fase da onda de tensão incidente que trafega ao longo do cabo – equação (A4):

$$V_0^+ = V_g \frac{Z_0}{Z_0 + Z_g} \frac{e^{-j\beta l_c}}{\left(1 - \Gamma_L \Gamma_g e^{-2j\beta l_c}\right)} = 221.961 \mathrm{e}^{\mathrm{j}141.057°} \text{ Vrms}$$

(b) Amplitude e fase da corrente medida no terminal de entrada do dipolo – equação (A6):

$$I(z) = \frac{V_0^+}{Z_0}\left(e^{-j\beta z} - \Gamma_L e^{j\beta z}\right) \text{ para } z = 0 \Rightarrow I(0) = 3.253 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}177.857°} \text{ Arms}$$

(c) Amplitude e fase da tensão medida no terminal de entrada do dipolo – equação (A5):

$$V(z) = V_0^+\left(e^{-j\beta z} + \Gamma_L e^{j\beta z}\right) \text{ para } z = 0 \Rightarrow V(0) = 338.634\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}122.656°} \text{ Vrms}$$

(d) Impedância de entrada do cabo – equação (A8):

$$Z_{in} = \frac{V(-l_c)}{I(-l_c)} = Z_0\left(\frac{Z_L + jZ_0 \operatorname{tg}(\beta l_c)}{Z_0 + jZ_L \operatorname{tg}(\beta l_c)}\right) = 13.122 - j25.271\Omega$$

(e) Potência útil que o cabo entrega (= *forward power*) para o dipolo – equação (A9):

$$P_L = \left(\frac{\left|V_0^+\right|^2}{Z_0}\right)\left(1 - \left|\Gamma_L\right|^2\right) = 559.349 \text{ W}$$

(f) A potência útil refletida (= *reflected power*) na impedância de carga do cabo – equação (A9):.

$$P_{REFL} = \left(\frac{\left|V_0^+\right|^2}{Z_0}\right)\left|\Gamma_L\right|^2 = 425.984 \text{ W}$$

(g) ROE no cabo coaxial – equação (A7):

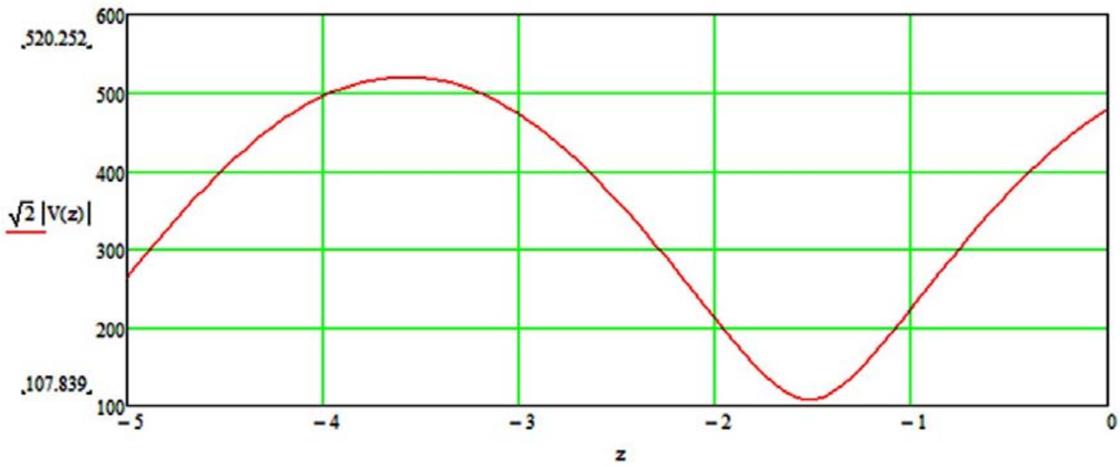
$$ROE = \frac{\max\{|V(z)|\}}{\min\{|V(z)|\}} = \frac{\max\{|I(z)|\}}{\min\{|I(z)|\}} = \frac{1 + |\Gamma_L|}{1 - |\Gamma_L|} = 4.8$$

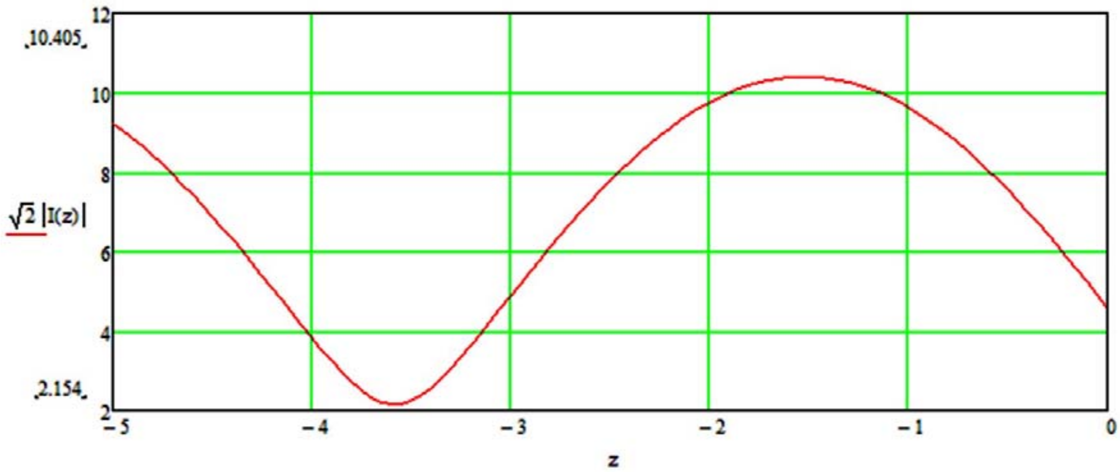
(h) Tensão e corrente na saída do TX – equações (A5) e (A6) com z= $-l_c$:

$V(-l_c) = 185.912e^{-j41.351°}$ Vrms

$I(-l_c) = 6.529e^{j21.209°}$ Arms

(i) Amplitude de pico da tensão (A5) e da corrente (A6) ao longo da linha (ao longo da coordenada z):





◆ Para o item **b)** do **Exemplo 5** , $Z_{\mathrm{L}} = Z_{\mathrm{A}} \approx 113.562 + j202.642\ \Omega$ e $\lambda = \dfrac{c}{f} = 9.993082$ m.

Das equações (A1), (A2) e (A3) do Apêndice A:

$$\Gamma_{\mathrm{L}} = \frac{V_0^-}{V_0^+} = \frac{Z_{\mathrm{L}} - Z_0}{Z_{\mathrm{L}} + Z_0} = 0.759 + j0.299$$

$$\Gamma_g = \frac{Z_g - Z_0}{Z_g + Z_0} = 0.02$$

$$\lambda_{\mathrm{g}} = p\lambda = 6.595\mathrm{m}$$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda_{\mathrm{g}}} = 0.953 \text{ rad/m}$$

(a) Amplitude e fase da onda de tensão incidente que trafega ao longo do cabo – equação (A4):

$$V_0^+ = V_g \frac{Z_0}{Z_0 + Z_g} \frac{e^{-j\beta l_c}}{\left(1 - \Gamma_L \Gamma_g e^{-2j\beta l_c}\right)} = 220.172 \mathrm{e}^{\mathrm{j}86.84^\circ} \text{ Vrms}$$

(b) Amplitude e fase da corrente medida no terminal de entrada do dipolo – equação (A6):

$$I(z) = \frac{V_0^+}{Z_0}\left(e^{-j\beta z} - \Gamma_L e^{j\beta z}\right) \text{ para } z = 0 \Rightarrow I(0) = 1.691 \mathrm{e}^{\mathrm{j}35.749^\circ} \text{ Arms}$$

(c) Amplitude e fase da tensão medida no terminal de entrada do dipolo – equação (A5):

$$V(z) = V_0^+\left(e^{-j\beta z} + \Gamma_L e^{j\beta z}\right) \text{ para } z = 0 \Rightarrow V(0) = 392.791\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}96.482^\circ} \text{ Vrms}$$

(d) Impedância de entrada do cabo – equação (A8):

$$Z_{in} = \frac{V(-l_c)}{I(-l_c)} = Z_0\left(\frac{Z_L + jZ_0 \mathrm{tg}(\beta l_c)}{Z_0 + jZ_L \mathrm{tg}(\beta l_c)}\right) = 5.175 - j6.804\Omega$$

(e) Potência útil que o cabo entrega (= *forward power*) para o dipolo – equação (A9):

$$P_L = \left(\frac{\left|V_0^+\right|^2}{Z_0}\right)\left(1 - \left|\Gamma_L\right|^2\right) = 324.699 \text{ W}$$

(f) A potência útil refletida (= *reflected power*) na impedância de carga do cabo – equação (A9):.

$$P_{REFL} = \left(\frac{\left|V_0^+\right|^2}{Z_0}\right)\left|\Gamma_L\right|^2 = 644.813 \text{ W}$$

(g) ROE no cabo coaxial – equação (A7):

$$ROE = \frac{\max\{|V(z)|\}}{\min\{|V(z)|\}} = \frac{\max\{|I(z)|\}}{\min\{|I(z)|\}} = \frac{1 + |\Gamma_L|}{1 - |\Gamma_L|} = 9.8$$

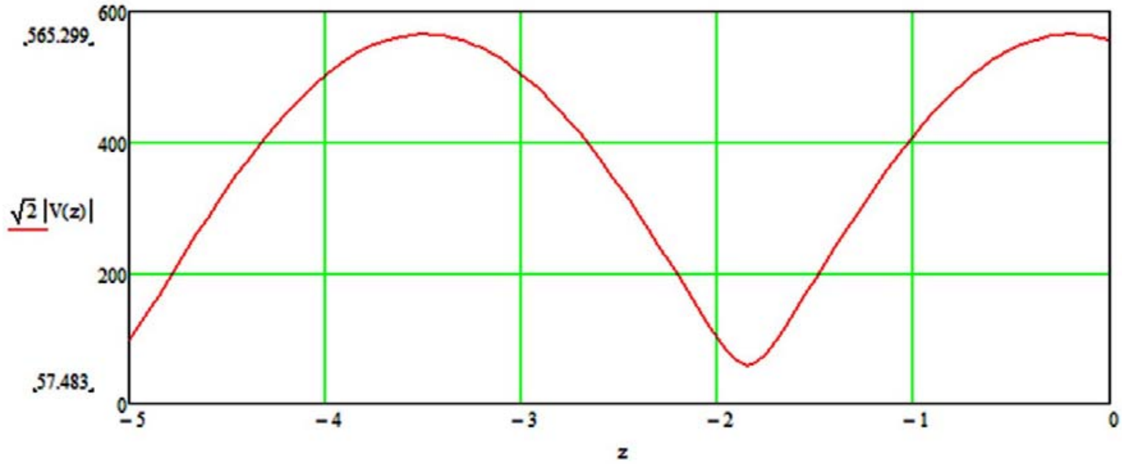
Nota: Com uma ROE de 9.8:1, dependendo do comprimento do cabo, muito provavelmente o amplificador final de qualquer transmissor será destruído por excesso de corrente ou tensão ($\mathrm{ROE}=\dfrac{V_{\max}}{V_{\min}}=\dfrac{I_{\max}}{I_{\min}}$) , caso o ALC não limitar a potência de saída.

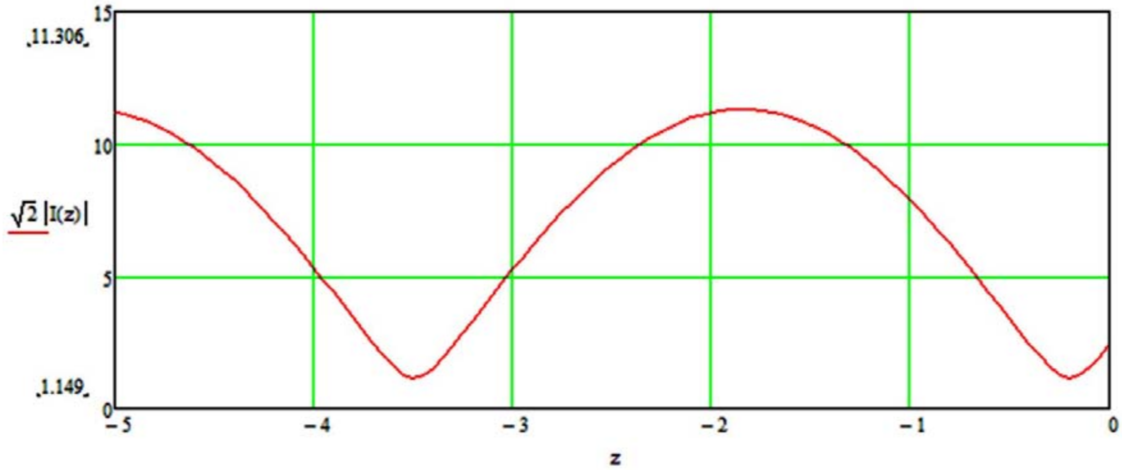
(h) Tensão e corrente na saída do TX – equações (A5) e (A6) com z= $-l_c$:

$$V(-l_c)=67.713\mathrm{e}^{-j45.956^\circ}\ \mathrm{Vrms}$$

$$I(-l_c)=7.921\mathrm{e}^{j6.787^\circ}\ \mathrm{Arms}$$

(i) Amplitude de pico da tensão (A5) e da corrente (A6) ao longo da linha (ao longo da coordenada z):





◆ Para o item **c)** do **Exemplo 5** , $Z_\mathrm{L} = Z_\mathrm{A} \approx 66.886 + j3.358\times10^{-3}\ \Omega$ e $\lambda = \dfrac{c}{f} = 11.5932\ \mathrm{m}$.

Das equações (A1), (A2) e (A3) do Apêndice A:

$$\Gamma_\mathrm{L} = \frac{V_0^-}{V_0^+} = \frac{Z_\mathrm{L} - Z_0}{Z_\mathrm{L} + Z_0} = 0.144 + j2.458\times10^{-5}$$

$$\Gamma_g = \frac{Z_g - Z_0}{Z_g + Z_0} = 0.02$$

$$\lambda_\mathrm{g} = p\lambda = 7.652\ \mathrm{m}$$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda_\mathrm{g}} = 0.821\ \mathrm{rad/m}$$

(a) Amplitude e fase da onda de tensão incidente que trafega ao longo do cabo – equação (A4):

$$V_0^+ = V_g \frac{Z_0}{Z_0 + Z_g} \frac{e^{-j\beta l_c}}{\left(1 - \Gamma_L \Gamma_g e^{-2j\beta l_c}\right)} = 223.342\mathrm{e}^{\mathrm{j}124.6^\circ}\ \mathrm{Vrms}$$

(b) Amplitude e fase da corrente medida no terminal de entrada do dipolo – equação (A6):

$$I(z) = \frac{V_0^+}{Z_0}\left(e^{-j\beta z} - \Gamma_L e^{j\beta z}\right) \text{ para } z = 0 \Rightarrow I(0) = 3.822\mathrm{e}^{\mathrm{j}124.599^\circ}\ \mathrm{Arms}$$

(c) Amplitude e fase da tensão medida no terminal de entrada do dipolo – equação (A5):

$$V(z) = V_0^+\left(e^{-j\beta z} + \Gamma_L e^{j\beta z}\right) \text{ para } z = 0 \Rightarrow V(0) = 255.607\mathrm{e}^{\mathrm{j}124.602^\circ}\ \mathrm{Vrms}$$

(d) Impedância de entrada do cabo – equação (A8):

$$Z_{in} = \frac{V(-l_c)}{I(-l_c)} = Z_0\left(\frac{Z_L + jZ_0 \operatorname{tg}(\beta l_c)}{Z_0 + jZ_L \operatorname{tg}(\beta l_c)}\right) = 43.634 - j12.062\Omega$$

(e) Potência útil que o cabo entrega (= *forward power*) para o dipolo – equação (A9):

$$P_L = \left(\frac{\left|V_0^+\right|^2}{Z_0}\right)\left(1 - \left|\Gamma_L\right|^2\right) = 976.809\ \mathrm{W}$$

(f) A potência útil refletida (= *reflected power*) na impedância de carga do cabo – equação (A9):.

$$P_{REFL} = \left(\frac{\left|V_0^+\right|^2}{Z_0}\right)\left|\Gamma_L\right|^2 = 20.821\ \mathrm{W}$$

(g) ROE no cabo coaxial – equação (A7):

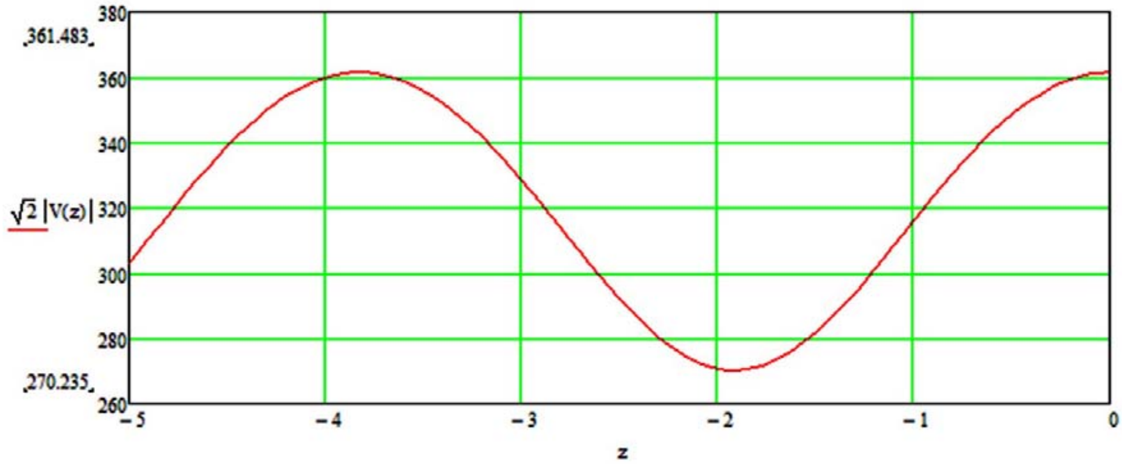
$$ROE = \frac{\max\{|V(z)|\}}{\min\{|V(z)|\}} = \frac{\max\{|I(z)|\}}{\min\{|I(z)|\}} = \frac{1 + |\Gamma_L|}{1 - |\Gamma_L|} = 1.3$$

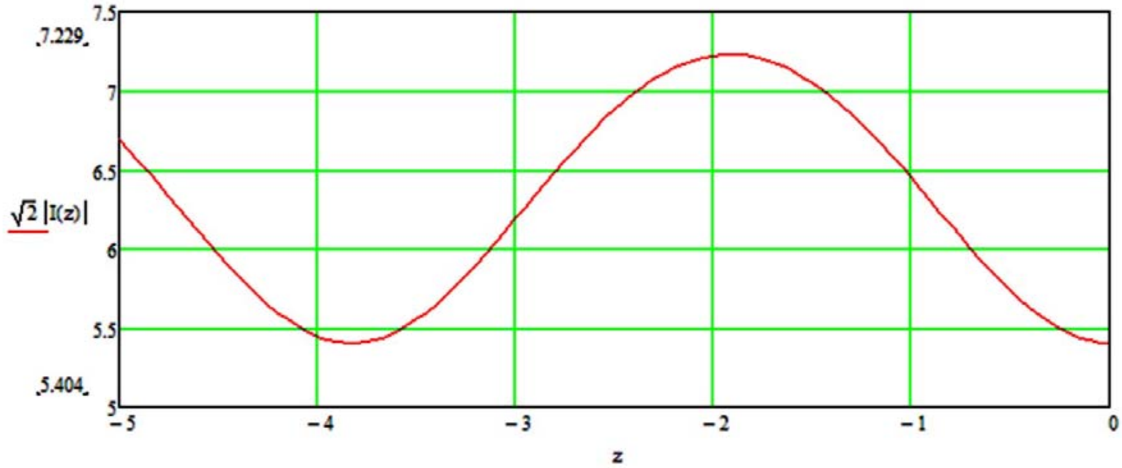
(h) Tensão e corrente na saída do TX – equações (A5) e (A6) com z= $-l_c$:

$V(-l_c) = 214.193e^{-j8.264°}$ Vrms

$I(-l_c) = 4.731e^{j7.188°}$ Arms

(i) Amplitude de pico da tensão (A5) e da corrente (A6) ao longo da linha (ao longo da coordenada z):





⟹ Portanto a maior potência entregue ao dipolo simétrico ocorre para $f = 25.859$ MHz (item **c)** do **Exemplo 5**) quando o dipolo torna-se **ressonante** e a sua resistência de entrada é relativamente próxima da impedância característica $Z_0 = 50\Omega$ do cabo coaxial.

⟹ Em outras palavras, para maximizar a potência irradiada por uma antena a condição de **Máxima Transferência de Potência** $Z_g = Z_L^*$ deve ser obedecida em cada terminação ao longo do trajeto que vai da saída do transmissor até os terminais de entrada da antena.

8 Abertura Efetiva

● Assim como uma antena transmissora irradia energia eletromagnética, de forma dual, uma antena receptora capta energia eletromagnética. A **Área de Recepção Máxima** ou **Abertura Efetiva Máxima** de uma antena receptora define uma **área equivalente** ou **abertura equivalente** através da qual a antena extrai a máxima energia possível de uma onda eletromagnética que sobre ela incida:

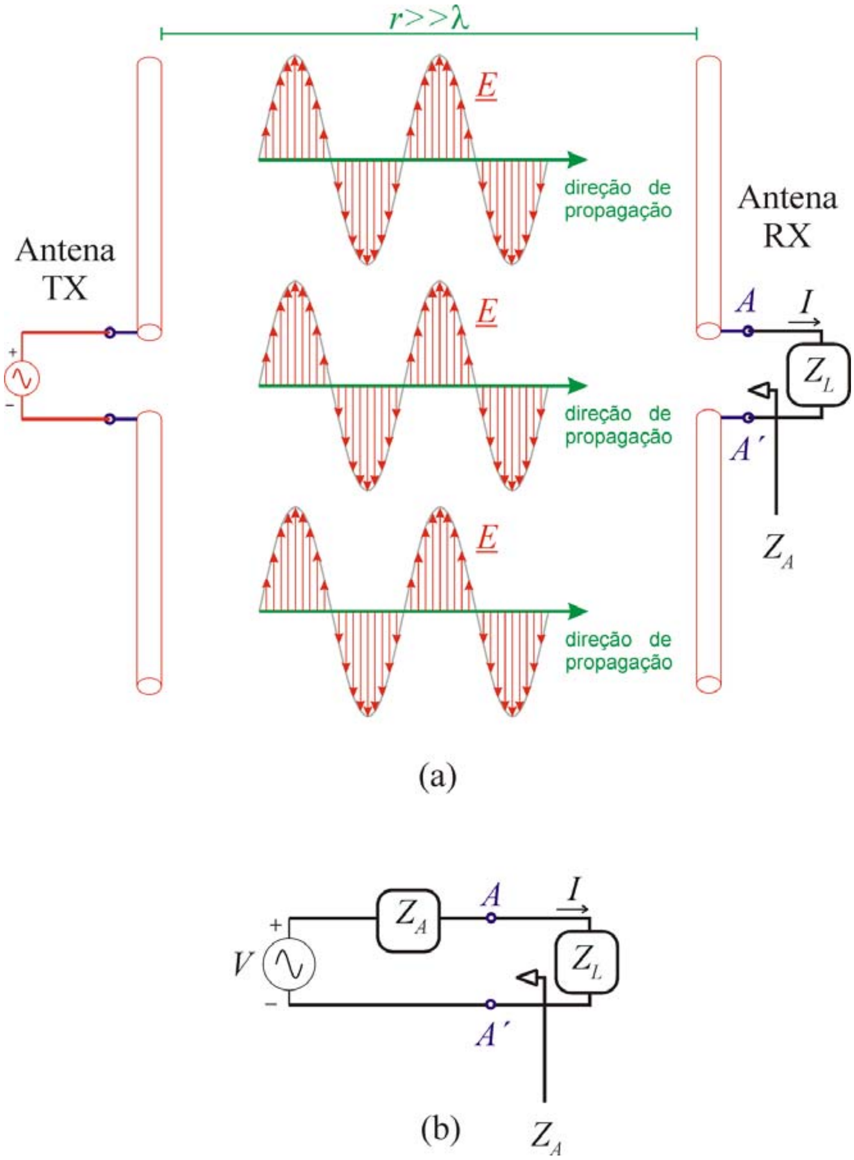


Figura 17: (a) Onda eletromagnética incidindo sobre a antena receptora RX em sua direção de maior ganho ($\theta = 90°$). Note que a polarização da antena RX é compatível com a polarização da onda eletromagnética incidente. **(b)** V é o valor eficaz (rms) da tensão induzida ao longo da antena RX e que aparece em seus terminais $A - A'$ a circuito aberto como conseqüência da onda eletromagnética incidente. $Z_A = R_A + jX_A$ é a impedância “vista” nos terminais da antena RX. $Z_L = R_L + jX_L$ é a impedância “vista” nos terminais de entrada do receptor conectado à antena RX.

Da Figura 17(b) temos:

$$I = \frac{V}{Z_A + Z_L} \tag{62}$$

● Define-se como **Abertura Efetiva** ou **Área de Recepção** A_{RX} a razão entre a potência fornecida à carga (isto é, ao receptor conectado na antena RX) e a densidade de potência média[16] S_i $[\mathrm{W/m^2}]$ na frente de onda que incide sobre a antena RX:

$$A_{\mathrm{RX}} = \frac{R_L\, I^2}{S_i} \; [\mathrm{m^2}] \tag{63}$$

sendo I o valor eficaz da corrente na carga $Z_L = R_L + jX_L$ e S_i é o **Vetor de Poynting Médio** na superfície formada pela **frente de onda** que incide sobre a antena RX, frente de onda que pertence à onda eletromagnética irradiada pela antena TX.

De (62) e (63) temos:

$$A_{\mathrm{RX}} = \frac{R_L\, I^2}{S_i} = \frac{R_L\, V^2}{S_i\left[(R_A + R_L)^2 + (X_A + X_L)^2\right]} \; [\mathrm{m^2}] \tag{64}$$

● A máxima tensão induzida ocorre na situação mostrada na Figura 17(b), quando:

(I) A antena RX está orientada na direção de máxima ganho em relação à onda eletromagnética incidente.

e

(II) A antena RX apresenta mesma polarização da onda incidente.

● Na situação da Figura 17(b), a máxima potência transferida à carga ocorre na condição $Z_A = Z_L^*$, condição que define a **Abertura Efetiva Máxima** ou **Área de Recepção Máxima**:

$$A_{\mathrm{RX(max)}} = \frac{V^2 R_A}{S_i (R_A + R_A)^2} = \frac{V^2}{4 S_i R_A} \; [\mathrm{m^2}] \tag{65}$$

---

[16] Média temporal no período $T = 1/f$ do gerador senoidal constituído pelo transmissor conectado à antena TX. Já foi discutido no Capítulo II que a média temporal é originada do **Vetor de Poynting Médio** $\underline{S} = \mathrm{Re}\{\vec{\underline{S}}\} \left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2}}\right]$ porque expressa a densidade superficial de potência média $\underline{S} = \frac{1}{T}\int_0^T \underline{E}(t) \times \underline{H}(t)\, dt$ da onda eletromagnética **irradiada** pela antena, medida em $[\mathrm{W/m^2}]$, análoga ao conceito de **Potência Útil** no contexto de Teoria de Circuitos Elétricos.

⇒ Mas $R_A = R_r + R_p$, onde R_r é a resistência de radiação da antena e R_p é a resistência de perdas da antena, de modo que (65) torna-se:

$$A_{\text{RX(max)}} = \frac{V^2}{4S_i(R_r + R_p)} \quad [\text{m}^2] \tag{66}$$

Nota: Observe que se a antena possui resistência de perda R_p igual a sua resistência de radiação R_r, a área de recepção se reduz à metade com relação à mesma antena sem perdas.

⇒ Se a antena RX não apresenta nem perdas ôhmicas nem perdas dielétricas, então a sua eficiência é 100% e $R_p \approx 0$. Nesta situação (66) é re-escrita como

$$A_{\text{RX(max)}} = \frac{V^2}{4S_i R_r} \quad [\text{m}^2] \tag{67}$$

Interpretação da equação (67): Lembrando que a diretividade D - equação (47) - expressa o ganho de potência da antena TX resultante da concentração de potência em uma região sólido-angular do espaço, note em $V^2/4R_r = A_{RXmax} \cdot S_i = P_{RX}$ que A_{RXmax} tem uma função similar a do ganho de potência D, pois expressa o quanto da densidade de potência S_i que incide nas vizinhanças da antena RX é transformada em potência P_{RX} absorvida pela mesma através desta área.

⇒ Para a grande maioria das **Antenas de Abertura** a **Área de Recepção Máxima** da antena é da mesma ordem de grandeza da área física da antena. Para refletores parabólicos, por exemplo, ela se situa entre 50 a 65% da área física dos mesmos.

8.1 Altura Efetiva

● A Figura 18 mostra a tensão V eficaz (rms) que aparece nos terminais de um dipolo imerso em um campo elétrico $\underline{E}$ variando senoidalmente no tempo, originado de uma onda eletromagnética incidente:

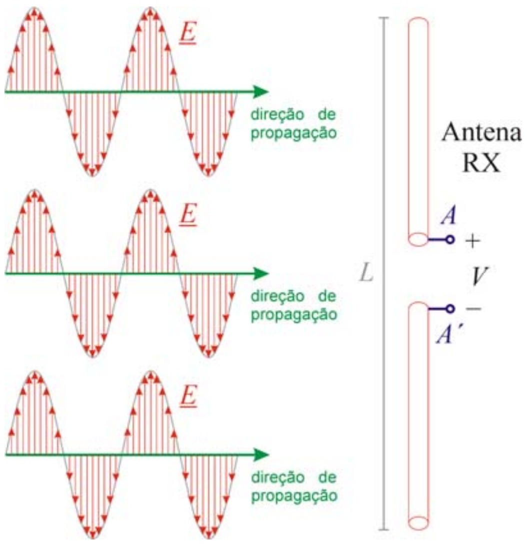


Figura 18: Tensão V que surge nos terminais $A - A'$ a circuito aberto como conseqüência da onda eletromagnética incidente.

- O valor da tensão V pode ser determinado por

$$V = \int_0^L \frac{\underline{E}}{\sqrt{2}} \cdot d\underline{\ell} = E_{\text{rms}}\, L_e \;\; [\text{V}] \tag{68}$$

onde L_e é o **Comprimento Efetivo** ou **Altura Efetiva** do dipolo e E_{rms} é o valor eficaz (rms) do campo elétrico $\underline{E}$ paralelo ao dipolo na onda incidente.

- Mas de (31) temos que o **Vetor de Poynting Médio** na superfície formada pela **frente de onda** que incide sobre a antena RX é

$$S_i = \frac{1}{2}\frac{E_0^{\,2}}{Z_0} = \frac{\left(\dfrac{E_0}{\sqrt{2}}\right)^2}{Z_0} = \frac{E_{\text{rms}}^{\,2}}{Z_0}\left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right] \tag{69}$$

onde E_0 é o valor instantâneo máximo do campo elétrico $\underline{E}$ e $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = 120\pi$ $[\Omega]$ é a impedância do espaço livre.

- Substituindo (69) em (67) temos

$$A_{\text{RX(max)}} = \frac{V^2}{4S_i R_{\text{r}}} = \frac{V^2}{4\dfrac{E_{\text{rms}}^{\,2}}{Z_0}R_{\text{r}}} \;\; [\text{m}^2] \tag{70}$$

- Substituindo (68) em (70) temos

$$A_{\text{RX(max)}} = \frac{V^2}{4\dfrac{E_{\text{rms}}^{\,2}}{Z_0}R_{\text{r}}} = \frac{(E_{\text{rms}}\, L_e)^2}{4\dfrac{E_{\text{rms}}^{\,2}}{Z_0}R_{\text{r}}} = \frac{Z_0 L_e^{\,2}}{4R_{\text{r}}} \;\; [\text{m}^2] \tag{71}$$

ou

$$L_e = 2\sqrt{\frac{A_{\text{RX(max)}} R_{\text{r}}}{Z_0}} \;\; [\text{m}] \tag{72}$$

onde $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = 120\pi$ $[\Omega]$ é a impedância do espaço livre e R_{r} é a resistência de radiação da antena e $A_{\text{RX(max)}}$ é a **Abertura Efetiva Máxima** ou **Área de Recepção Máxima**.

⇒ Portanto, o **Comprimento Efetivo** ou **Altura Efetiva** de um dipolo é a **dimensão linear equivalente** L_e através da qual a antena extrai a máxima energia possível de uma onda eletromagnética que sobre ela incida.

Exemplo 7: O Determine a Abertura Efetiva e a Altura Efetiva para um dipolo curto sem perdas e para um dipolo curto com perdas.

Solução:

Vimos no Capítulo II que a resistência de radiação R_r de um dipolo curto é dada por

$$R_r = 80\pi^2\left(\frac{L_e}{\lambda}\right)^2$$

Substituindo R_r em (67), e com o auxílio de (69), obtemos a Abertura Efetiva de um dipolo curto **sem perdas**:

$$A_{RX(max)} = \frac{V^2}{4S_i R_r} = \frac{(E_{rms}\,L_e)^2}{4\left(\dfrac{E_{rms}{}^2}{120\pi}\right)80\pi^2\left(\dfrac{L_e}{\lambda}\right)^2} = \frac{3}{8\pi}\lambda^2 = 0.119\lambda^2 \;\left[m^2\right] \tag{73}$$

Note que a ARXmax de um monopolo curto é o dobro da de um dipolo curto devido à resistência de entrada ser a metade.

Substituindo R_r em (66), e com o auxílio de (69), obtemos a Abertura Efetiva de um dipolo curto **com perdas**:

$$A_{RX(max)} = \frac{V^2}{4S_i(R_r + R_p)} = \frac{(E_{rms}\,L_e)^2}{4\left(\dfrac{E_{rms}{}^2}{120\pi}\right)\left(80\pi^2\left(\dfrac{L_e}{\lambda}\right)^2 + R_p\right)} = \frac{30\pi\,L_e{}^2}{80\pi^2\left(\dfrac{L_e}{\lambda}\right)^2 + R_p} \;\left[m^2\right] \tag{74}$$

onde R_p é a resistência de perdas da antena.

De (72) e (73) obtemos a Altura Efetiva de um dipolo curto **sem perdas**:

$$L_e = 2\sqrt{\frac{A_{RX(max)}R_r}{Z_0}} = 2\sqrt{\frac{\dfrac{3}{8\pi}\lambda^2 R_r}{Z_0}} = 2\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\lambda\sqrt{\frac{R_r}{120\pi}} = \frac{\sqrt{5}}{20\pi}\lambda\sqrt{R_r} \;[m] \tag{75}$$

De (72) e (74) obtemos a Altura Efetiva de um dipolo curto **com perdas**:

$$L_e = 2\sqrt{\frac{A_{RX(max)}R_r}{Z_0}} = 2\sqrt{\frac{\dfrac{30\pi\,L_e{}^2}{80\pi^2\left(\dfrac{L_e}{\lambda}\right)^2 + R_p}R_r}{120\pi}} \;[m] \tag{76}$$

Isolando o valor de L_e em (76):

$$L_e = \frac{\sqrt{5}}{20\pi}\lambda\sqrt{R_r - R_p} \;[m] \tag{77}$$

8.2 Abertura Efetiva Máxima e Diretividade

- Consideremos a situação da Figura 17(a) na qual a antena transmissora TX irradia uma onda eletromagnética que é captada pela antena receptora RX distante r da antena TX.

- Se a antena TX fosse isotrópica então a densidade de potência média[17] na frente de onda que incide sobre a antena RX seria

$$S_0 = \frac{P_{\text{TX}}}{4\pi r^2} \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right] \tag{78}$$

onde P_{TX} é potência irradiada pela antena TX.

- Discutimos no Capítulo I que o irradiador isotrópico não existe. Portanto a antena TX apresenta uma diretividade $D_{\text{TX}} > 1$ que origina uma densidade de potência média $S_{\text{TX}}\ [\text{W}/\text{m}^2]$ na frente de onda incidente sobre a antena RX, densidade de potência média que é dada por (46) com $\boldsymbol{P}_a = P_{\text{TX}}\ [\text{W}]$ e $S_{\max}(\theta_{\max P}, \phi_{\max P}) = S_{\text{TX}}\ [\text{W}/\text{m}^2]$:

$$D_{\text{TX}} = \frac{U_{\max}}{U_{\text{med}}} = \frac{S_{\max}(\theta_{\max P}, \phi_{\max P}) r^2}{S_{\text{med}} r^2} = \frac{S_{\max}(\theta_{\max P}, \phi_{\max P})}{S_{\text{med}}} = \frac{S_{\max}(\theta_{\max P}, \phi_{\max P})}{\dfrac{\boldsymbol{P}_a}{4\pi r^2}} = \tag{79}$$

$$= \frac{S_{\text{TX}}}{\dfrac{P_{\text{TX}}}{4\pi r^2}} = \frac{S_{\text{TX}}}{S_0}$$

ou seja

$$S_{\text{TX}} = S_0 D_{\text{TX}} = \frac{P_{\text{TX}}}{4\pi r^2} D_{\text{TX}} \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right] \tag{80}$$

onde $S_{\text{TX}}\ [\text{W}/\text{m}^2]$ é a densidade de potência média na frente de onda que incide sobre a antena RX, D_{TX} é a diretividade da antena transmissora e P_{TX} é potência irradiada pela antena transmissora.

- A potência máxima $P_{\text{RX}}\ [\text{W}]$ extraída pela antena RX da frente de onda com que sobre ela incide com densidade $S_{\text{TX}}\ [\text{W}/\text{m}^2]$ é função da **Abertura Efetiva Máxima** $A_{\text{RX(max)}}\ [\text{m}^2]$ da antena RX, dada por (65):

$$P_{\text{RX}} = S_{\text{TX}} A_{\text{RX(max)}} = \frac{P_{\text{TX}} D_{\text{TX}} A_{\text{RX(max)}}}{4\pi r^2}\ [\text{W}] \tag{81}$$

ou

---

[17] Média temporal no período $T = 1/f$ do gerador senoidal constituído pelo transmissor conectado à antena TX.

$$D_{\text{TX}} A_{\text{RX(max)}} = \frac{P_{\text{RX}}}{P_{\text{TX}}} 4\pi r^2 \tag{82}$$

- Se a antena da direita na Figura 17(a) fosse usada como antena transmissora e antena da esquerda fosse usada como antena receptora a Equação (82) ainda seria válida nesta nova situação desde que se tenha o cuidado de trocar os índices da Diretividade e da Abertura Efetiva Máxima[18], isto é:

$$D_{\text{RX}} A_{\text{TX(max)}} = \frac{P_{\text{RX}}}{P_{\text{TX}}} 4\pi r^2 \tag{83}$$

- Igualando (82) e (83) temos

$$\frac{D_{\text{TX}}}{A_{\text{TX(max)}}} = \frac{D_{\text{RX}}}{A_{\text{RX(max)}}} \tag{84}$$

- Se a antena TX transmissora fosse um irradiador isotrópico sua diretividade D_{TX} seria unitária e a sua Abertura Efetiva Máxima seria dada por

$$A_{\text{TX(max)ISO}} = \frac{A_{\text{RX(max)}}}{D_{\text{RX}}} \tag{85}$$

⇒ A Equação (85) estabelece que a Abertura Efetiva Máxima de um irradiador isotrópico utilizado como transmissor é igual à razão entre a Abertura Efetiva Máxima e Diretividade de qualquer outra antena utilizada como receptor.

- Suponhamos que a antena receptora seja um dipolo curto. Vimos no Exemplo 3 que a diretividade de um dipolo curto é $D_{\text{RX}} = \dfrac{3}{2}$. Do Exemplo 7 Equação (73) temos que a Abertura Efetiva Máxima de um dipolo curto é $A_{\text{RX(max)}} = \dfrac{3}{8\pi}\lambda^2 = 0.119\lambda^2 \ [\text{m}^2]$. Substituindo estes valores em (85) temos:

$$A_{\text{TX(max)ISO}} = \frac{A_{\text{RX(max)}}}{D_{\text{RX}}} = \frac{\frac{3}{8\pi}\lambda^2}{\frac{3}{2}} = \frac{\lambda^2}{4\pi} \tag{86}$$

- Substituindo (86) em (85) obtemos a Abertura Efetiva Máxima de uma antena em função de sua Diretividade:

$$A_{\text{RX(max)}} = D_{\text{RX}} \frac{\lambda^2}{4\pi} = D \frac{\lambda^2}{4\pi} \tag{87}$$

[18] P_{TX} e P_{RX} não trocam de índices porque seus índices $\{.\}_{\text{TX}}$ e $\{.\}_{\text{RX}}$ referem-se a potências geradas respectivamente **no local do transmissor** e **no local do receptor**.

9 Largura de banda

Denomina-se **Largura de Banda** de uma antena a faixa de freqüências na qual ela opera satisfazendo determinado parâmetro de performance.

Os parâmetros de performance mais comuns que variam com a freqüência e que são utilizados para definir a **Largura de Banda** são:

- Impedância de entrada (ROE)
- Ganho
- Largura de Feixe
- Posição do Lóbulo Principal
- Polarização

A Largura de Banda (LB) pode ser especificada:

(I) **Sob forma percentual**: Utilizado quando a largura de banda é bem menor que a freqüência central. Por exemplo: Uma antena opera com ROE máxima de 1.3 entre 195 Mhz e 205 Mhz, sendo este o valor de ROE máximo a partir do qual o ALC do transmissor entra em ação. Logo,

$$LB = \frac{205-195}{200} = 0.05 = 5\%$$

(II) **Pelo posicionamento de freqüências (freqüência superior e inferior)**: Utilizado quando a freqüência superior for maior ou igual ao dobro da freqüência inferior. Por exemplo: Uma antena Log-Periódica mantém um ganho de 10 ± 1 dB entre 6 e 30 Mhz , caindo rapidamente fora desta faixa. Logo, $\mathrm{LB} = \frac{30}{6} = 5 \rightarrow \mathrm{LB} = 5:1$.

10 Exercícios de Revisão

1) Calcule a diretividade D de uma antena isotrópica utilizando o conceito de Padrão de Potência.

Solução:

$D = 4\pi / \Omega_a$ sendo

$$\Omega_a = \int_{\varphi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} P(\theta,\phi) \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi \quad \left[\mathrm{rad}^2\right]$$ o ângulo sólido do feixe de irradiação.

Para uma antena isotrópica o Padrão de Potência é $P(\theta,\phi) = 1, \ \forall\theta, \forall\phi$. Daí,

$$\Omega_a = \int_{\varphi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi = \int_{\varphi=0}^{\phi=2\pi} \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} d\phi = \int_{\varphi=0}^{\phi=2\pi} \left[1-(-1)\right] d\phi = 2 \int_{\varphi=0}^{\phi=2\pi} d\phi = 2\left[\phi\right]_0^{2\pi} = 4\pi \left[\mathrm{rad}^2\right]$$

E, portanto,

$$D = 4\pi / \Omega_a = 1$$

2) Um dipolo horizontal de comprimento total $L = 8\,\mathrm{m}$, alimentado no centro por um gerador de tensão $v(t) = V_{pk}\cos\left(2\pi \cdot 3.5\times 10^{6}t\right)$, é construído com um par de fios de cobre de bitola 12AWG. O dipolo encontra-se suficientemente afastado do solo e a condutividade deste é baixa, de modo que é desprezível a influência do solo sobre a antena.

Determine:

a) A resistência de radiação da antena.

b) O ganho desta antena em dBi.

c) A abertura efetiva.

d) O ângulo sólido do feixe de irradiação em estereoradianos.

Solução:

a) Do gerador temos $f = 3.5\,MHz \rightarrow \lambda = c/f = 85.7\,m$. Como $L/\lambda \leq 0.1$, a antena em questão é um dipolo curto.

Logo,

$$R_{\mathrm{r}} = 80\pi^2 \left(\frac{L_e}{\lambda}\right)^2 \;[\Omega],\;\; L_e = L/2 \;.$$

Daí

$$R_{\mathrm{r}} = 80\pi^2 \left(\frac{L}{2\lambda}\right)^2 = 80\pi^2 \left(\frac{8\,m}{2\cdot 85.7\,m}\right)^2 = 1.7\Omega$$

b) $G = \eta D = \left(\dfrac{R_{\mathrm{r}}}{R_{\mathrm{r}} + R_{\mathrm{p}}}\right) D$

Do Exemplo 3 temos $D = 1.5$ e do Exemplo 4 temos $R_{\mathrm{p}(ac)} = 0.58\,\Omega$.

Portanto,

$$G = \eta D = \left(\frac{R_{\mathrm{r}}}{R_{\mathrm{r}} + R_{\mathrm{p}}}\right) D = \left(\frac{1.7\Omega}{1.7\Omega + 0.58\Omega}\right) 1.5 = 1.12$$

$$G_{\mathrm{db_i}} = 10\log G = 10\log(1.12) = 0.49\ \mathrm{dBi}$$

c) De (74) $A_{\mathrm{RX(max)}} = \dfrac{30\pi\, L_e^{\,2}}{80\pi^2\left(\dfrac{L_e}{\lambda}\right)^2 + R_{\mathrm{p}}}\;\left[\mathrm{m}^2\right],\;\; L_e = L/2$. Portanto:

$$A_{\mathrm{RX(max)}} = \frac{30\pi\,(4\,m)^2}{80\pi^2\left(\dfrac{4\,m}{85.7m}\right)^2 + 0.58\Omega} = 655.6\ \ \mathrm{m}^2$$

d) $D = 4\pi/\Omega_a \rightarrow \Omega_a = \dfrac{4\pi}{D} = \dfrac{4\pi}{1.5} = 8.38\,\mathrm{sr}$

3) A densidade de potência medida em um ponto p do espaço tridimensional a 10 km de uma antena transmissora é $6\times10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}$. A propagação se dá no espaço livre com o lobo principal da antena transmissora apontado para p . A freqüência de operação é 100 Mhz.

Determine:

a) O módulo do campo magnético em p .

b) A tensão a circuito aberto que surge nos terminais de uma antena receptora localizada em p sabendo-se que seu ganho é 3 dBi , que sua eficiência é 100% e que sua resistência de radiação é 50Ω .

c) A potência que está sendo irradiada pela antena transmissora sabendo-se que sua diretividade é +20dB com relação ao radiador isotrópico e que sua eficiência é 100%.

Solução:

a) De (32):

$$S=\frac{1}{2}\left|H\right|^2 Z_0 \rightarrow \left|H\right|=\sqrt{\frac{2S}{Z_0}}=\sqrt{\frac{2\times6\times10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}}{120\pi\ \ \Omega}}=0.178\ \frac{\mu\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$$

b)

$$G=10^{\frac{G_{\mathrm{dBi}}}{10}}=10^{\frac{3}{10}}\approx 2$$

$$\lambda=c/f=\frac{300\times10^6\ \ \mathrm{m/s}}{100\times10^6\ \ \mathrm{Hz}}=3\,\mathrm{m}$$

De (51) temos $G=\eta D$ e de (87) temos $A_{\mathrm{RX(max)}}=D\dfrac{\lambda^2}{4\pi}$. Daí

$$A_{\mathrm{RX(max)}}=\frac{\lambda^2}{4\pi}D=\frac{\lambda^2}{4\pi}\frac{G}{\eta}=\frac{(3\,\mathrm{m})^2}{4\pi}\frac{2}{1.0}=1.43\ \ \mathrm{m}^2$$

De (65) temos

$$V=2\sqrt{A_{\mathrm{RX(max)}}S_i R_{\mathrm{r}}}\ \ [\mathrm{Vrms}]$$

$$V=2\sqrt{1.43\ \ \mathrm{m}^2\ \ 6\times10^{-12}\ \ \mathrm{W/m^2}\ \ 50\Omega}=41.4\,\mu\mathrm{Vrms}$$

c) De (46) temos

$$D=\frac{S_{\max}\left(\theta_{\max P},\phi_{\max P}\right)}{S_{\mathrm{med}}}=\frac{S_{\max}\left(\theta_{\max P},\phi_{\max P}\right)}{\dfrac{\boldsymbol{P}_a}{4\pi r^2}}\rightarrow \boldsymbol{P}_a=\frac{4\pi r^2\ S_{\max}\left(\theta_{\max P},\phi_{\max P}\right)}{D}$$

Mas $G=\eta D$, daí

$$\boldsymbol{P}_a=\frac{4\pi r^2\eta\, S_{\max}\left(\theta_{\max P},\phi_{\max P}\right)}{G}$$

$$G = 10^{\frac{G_{\text{dB}}}{10}} = 10^{\frac{20}{10}} = 100$$

$$r = 10\times 10^3 \text{ m}$$

$$\boldsymbol{P}_a = \frac{4\pi r^2 \eta\, S_{\max}(\theta_{\max P}, \phi_{\max P})}{G} = \frac{4\pi r^2 \times 1.0\times 6\times 10^{-12} \text{ W/m}^2}{100} = 0.075\times 10^{-3} \text{ W}$$

4) Determine a expressão da Intensidade de Radiação de um dipolo curto.

Solução:

De (34):

$$U(\theta,\phi) = S(\theta,\phi) r^2 \quad \left[\frac{\text{W}}{\text{sr}}\right]$$

De (31):

$$S(\theta,\phi) = \frac{1}{2}\frac{E_0^{\,2}(\theta,\phi)}{Z_0} \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right]$$

E da Equação (II) da Tabela II do Capítulo II temos para Campo Distante:

$$E_\theta = \frac{I_0 \ell e^{j\left(\omega t - \beta r + \frac{\pi}{2}\right)} \operatorname{sen}\theta}{2\varepsilon_0 c \lambda r} \left[\frac{\text{V}}{\text{m}}\right]$$

Portanto

$$E_0(\theta,\phi) = \frac{I_0 \ell \operatorname{sen}\theta}{2\varepsilon_0 c\lambda r} \left[\frac{\text{V}}{\text{m}}\right]$$

Daí

$$U(\theta,\phi) = S(\theta,\phi) r^2 = \frac{1}{2}\frac{E_0^{\,2}(\theta,\phi)}{Z_0} r^2 \frac{\left(\dfrac{I_0 \ell \operatorname{sen}\theta}{2\varepsilon_0 c\lambda r}\right)^2 r^2}{2\sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}}} =$$

$$= \frac{\dfrac{I_0^{\,2}\ell^2 \operatorname{sen}^2\theta}{4\varepsilon_0^{\,2} c^2\lambda^2}}{2\sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}}} = \frac{I_0^{\,2}\ell^2 \operatorname{sen}^2\theta}{8\left(\sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\right)\varepsilon_0^{\,2} c^2 \lambda^2} =$$

$$= \frac{I_0^{\,2}\ell^2 \operatorname{sen}^2\theta}{8\left(\sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\right)\varepsilon_0^{\,2} c^2 \lambda^2} = \frac{I_0^{\,2}\ell^2 \operatorname{sen}^2\theta}{8\left(\dfrac{1}{\varepsilon_0 c}\right)\varepsilon_0^{\,2} c^2 \lambda^2} = \frac{I_0^{\,2}\ell^2 \operatorname{sen}^2\theta}{8\varepsilon_0 c\lambda^2} =$$

$$= \frac{120\pi\, I_0^{\,2}\ell^2 \operatorname{sen}^2\theta}{8\lambda^2} = 15\pi\, I_0^{\,2} (\ell/\lambda)^2 \operatorname{sen}^2\theta \quad \left[\frac{\text{W}}{\text{sr}}\right]$$

Apêndice A – Alimentando a antena através de uma linha de transmissão (cabo coaxial) – determinação das tensões, correntes e potências.

Qualquer antena prática é alimentada por uma linha de transmissão de impedância Zo, usualmente um cabo coaxial:

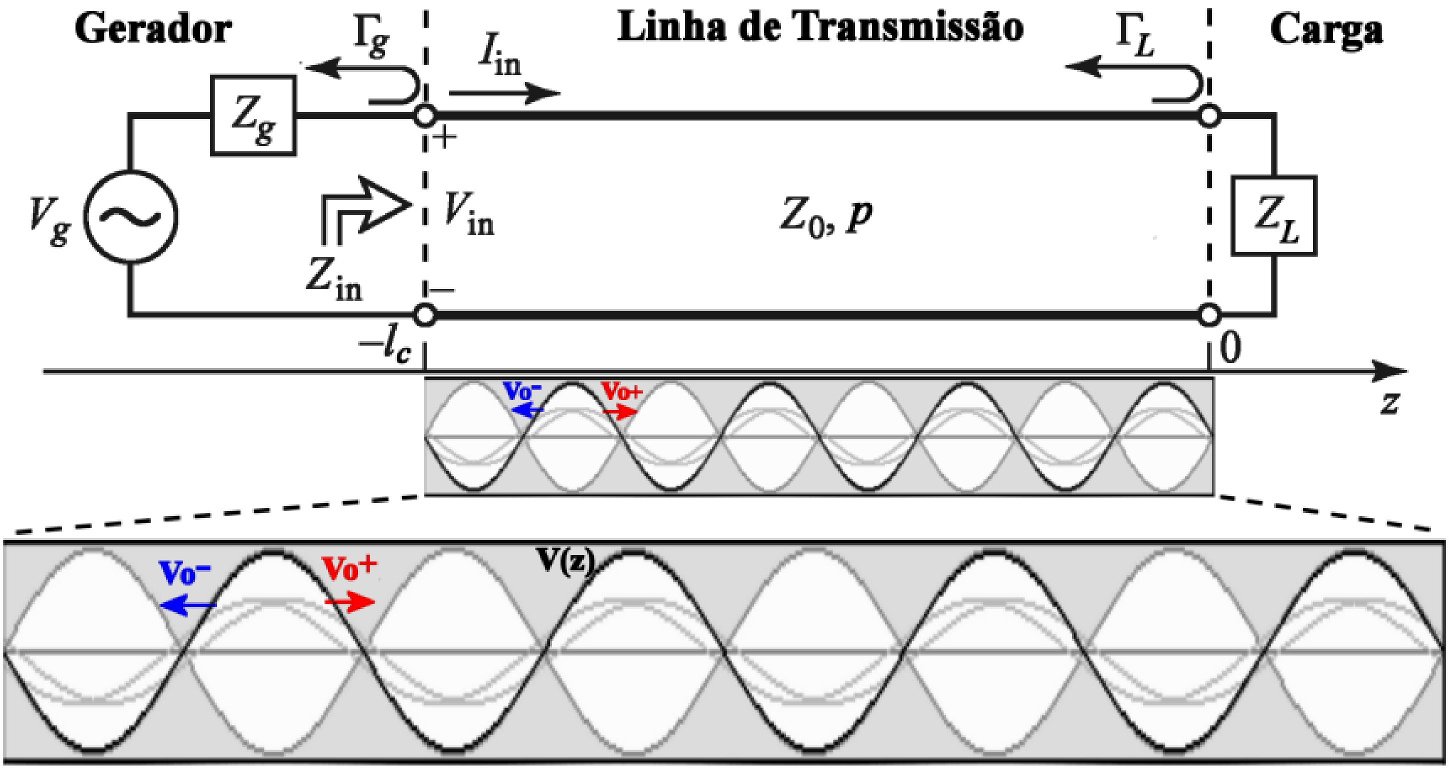


Figura A.1: Antena representada pela impedância $Z_L = Z_A$, sendo Z_A a impedância "vista" nos terminais da antena (= impedância de entrada da antena). A impedância de carga Z_L (a antena) situa-se na coordenada z=0 do eixo z e é alimentada pela linha de transmissão de comprimento l_c, impedância característica Z_0 e fator de velocidade *p*. Assume-se que a linha de transmissão é sem perdas, isto é, a potência útil é conservada ao longo da linha de transmissão.

- Conforme mostrado pelas duas ondas em cinza na figura, a excitação do gerador V_g de impedância interna Z_g estabelece duas ondas de tensão, a onda incidente V_0^+ e a onda refletida V_0^-, ambas se **propagando** ao longo da direção z. A onda incidente se propaga no sentido de z (sentido gerador → carga) e tem sua amplitude $\left|V_0^+\right|$ e fase $\angle V_0^+$ dadas pelo fasor $V_0^+ = \left|V_0^+\right| e^{j\angle V_0^+}$. A onda refletida na carga Z_L se propaga no sentido contrário de z (sentido carga → gerador) e tem sua amplitude $\left|V_0^-\right|$ e fase $\angle V_0^-$ dadas pelo fasor $V_0^- = \left|V_0^-\right| e^{j\angle V_0^-}$. No caso particular mostrado na figura, $\left|V_0^+\right| = \left|V_0^-\right|$.

- As ondas incidente V_0^+ e refletida V_0^- se superpõem em cada ponto do eixo z gerando a onda **estacionária** $V(z)$ mostrada em preto na figura. Os pontos de máxima amplitude de $V(z)$ correspondem a pontos em que ocorre interferência construtiva entre as ondas incidente e refletida. Os pontos de mínima amplitude de $V(z)$ correspondem a pontos em que ocorre interferência destrutiva entre as ondas incidente e refletida. Neste contexto, são aplicáveis as seguintes equações, conceitos e definições para efeito de determinação das tensões, correntes e potências que ocorrem ao longo da linha de transmissão [1][2]:

- **Coeficiente de reflexão na carga :**

$$\Gamma_{\mathrm{L}} = \frac{V_0^-}{V_0^+} = \frac{Z_{\mathrm{L}} - Z_0}{Z_{\mathrm{L}} + Z_0} \tag{A1}$$

- **Coeficiente de reflexão no gerador:**

$$\Gamma_g = \frac{Z_g - Z_0}{Z_g + Z_0} \tag{A2}$$

- **Comprimento da onda guiada na linha de transmissão:**

$$\lambda_{\mathrm{g}} = p\lambda \tag{A3}$$

sendo $\lambda = c/f$ o comprimento de onda no espaço livre.

- **Fasor (amplitude e fase) da onda de tensão incidente:**

$$V_0^+ = V_g \frac{Z_0}{Z_0 + Z_g} \frac{e^{-j\beta l_c}}{\left(1 - \Gamma_L \Gamma_g e^{-2j\beta l_c}\right)} \tag{A4}$$

sendo $\beta = 2\pi/\lambda_g$ a constante de propagação no meio representado pela linha de transmissão.

- **Fasor (amplitude e fase) da tensão medida na coordenada z da linha:**

$$V(z) = V_0^+\left(e^{-j\beta z} + \Gamma_L e^{j\beta z}\right) \tag{A5}$$

notando que $V_0^- = V_0^+\Gamma_L$ é o fasor da onda de tensão refletida. Note ainda que a tensão na carga Z_L é dada por $V(z)$ para z=0 e a tensão V_{in} na entrada da linha é dada por $V(z)$ para z=$-l_c$.

- **Fasor (amplitude e fase) da corrente medida na coordenada z da linha:**

$$I(z) = \frac{V_0^+}{Z_0}\left(e^{-j\beta z} - \Gamma_L e^{j\beta z}\right) \tag{A6}$$

notando que a corrente na carga Z_L é dada por $I(z)$ para z=0 e a corrente I_{in} na entrada da linha é dada por $I(z)$ para z=$-l_c$.

- **Razão de onda estacionária (*standing wave ratio*) na linha:**

$$ROE = SWR = \frac{\max\{|V(z)|\}}{\min\{|V(z)|\}} = \frac{\max\{|I(z)|\}}{\min\{|I(z)|\}} = \frac{1+|\Gamma_L|}{1-|\Gamma_L|} \tag{A7}$$

- **Impedância de entrada da linha:**

$$Z_{in} = \frac{V(-l_c)}{I(-l_c)} = Z_0\left(\frac{Z_L + jZ_0 \mathrm{tg}(\beta l_c)}{Z_0 + jZ_L \mathrm{tg}(\beta l_c)}\right) \tag{A8}$$

- **Potência útil entregue à carga Z_L (= *forward power*):**

$$P_L = \mathrm{Re}\left\{V_0^+\left(I_0^+\right)^*\right\}\left(1-|\Gamma_L|^2\right) = \mathrm{Re}\left\{V_0^+\left(\frac{V_0^+}{Z_0}\right)^*\right\}\left(1-|\Gamma_L|^2\right) = \left(\frac{|V_0^+|^2}{Z_0}\right)\left(1-|\Gamma_L|^2\right) \tag{A9}$$

notando que $\left(\frac{|V_0^+|^2}{Z_0}\right)$ é a **potência útil incidente** que trafega na linha no sentido gerador $\rightarrow$ carga e que $\left(\frac{|V_0^+|^2}{Z_0}\right)|\Gamma_L|^2$ é a **potência útil refletida na carga (=*reflected power*)** que trafega na linha no sentido carga $\rightarrow$ gerador.

- **Potência útil entregue à carga Z_L** (expressão alternativa 1)**:**

$$P_L = \mathrm{Re}\left\{V_{in} I_{in}^*\right\} = \mathrm{Re}\left\{\left(\frac{V_g Z_{in}}{Z_g + Z_{in}}\right)\left(\frac{V_g}{Z_g + Z_{in}}\right)^*\right\} \tag{A10}$$

sendo $\{\bullet\}^*$ o operador que retorna o conjugado do argumento complexo. Note que esta equação determina a potência útil na entrada do cabo e que é igual à potência útil entregue à carga pelo fato do cabo ser sem perdas, e , portanto, a potência útil é conservada ao longo da linha de transmissão.

- **Potência útil entregue à carga Z_L** (expressão alternativa 2)**:**

$$P_L = \mathrm{Re}\left\{V_{in} I_{in}^*\right\} = \mathrm{Re}\left[V(z) I(z)^*\right]_{z=-l_c} \tag{A11}$$

sendo $V(z)$ e $I(z)$ obtidos das equações (A5) e (A6).

- **Potência útil entregue à carga Z_L** (expressão alternativa 3)**:**

$$P_L = \mathrm{Re}\left[V(z) I(z)^*\right]_{z=0} \tag{A12}$$

<u>Referências bibliográficas</u>

[1] Microwave Engineering 4th - Pozar - JohnWiley & Sons – 2011
[2] Microwave and RF Design: A Systems Approach - Steer - SciTech Publishing, Inc. - 2010