

Capítulo IV

Antenas Lineares

1 Introdução

Nesta seção estudaremos o processo de irradiação de um **Dipolo Linear**¹ de comprimento L da ordem de grandeza do comprimento de onda λ de operação, conforme mostra a Figura 1.

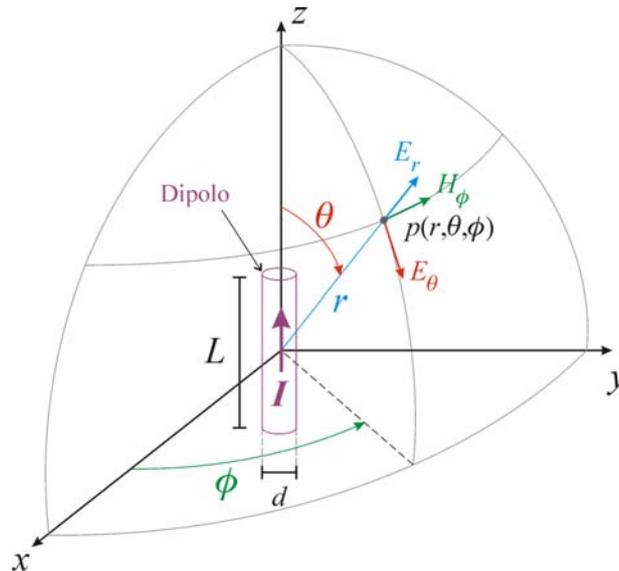


Figura 1: Dipolo Linear de comprimento L da ordem de grandeza de λ .

● Especificamente, focalizaremos nosso estudo no **Dipolo Fino**², cujo diâmetro é infinitesimal com relação a λ . Embora as antenas desta classe sejam apenas uma idealização com relação a uma antena linear prática, esta classe permite ser descrita por um equacionamento teórico simplificado. Ainda assim, dentro de uma ampla faixa, os resultados obtidos estão em muito boa conformidade com os resultados experimentais obtidos em campo.

¹ O termo **linear** deve ser compreendido aqui no sentido de **filamentar**, isto é, a antena possui estrutura irradiante condutora na forma de um fio.

² Um dipolo é considerado um dipolo fino (*thin dipole*) quando seu diâmetro d obedece à condição $d \ll \lambda$ onde λ é o comprimento de onda de operação do dipolo. Na prática, a condição $d \ll \lambda$ é quantificada por $d < \lambda/100$.

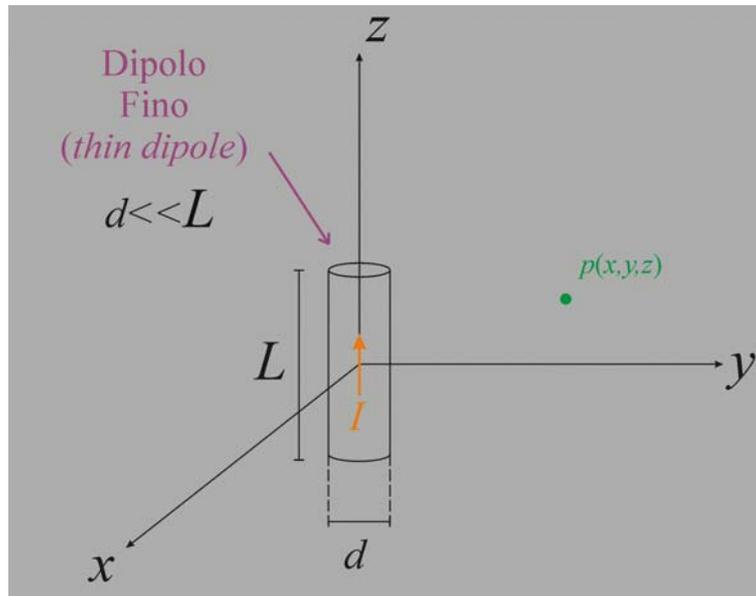


Figura 2: Dipolo Fino de diâmetro $d \ll L$, sendo L da ordem de grandeza de λ .

2 A Distribuição Espacial de Corrente em um Dipolo Fino

- Para determinarmos os campos \underline{E} e \underline{H} de qualquer antena precisamos conhecer qual a distribuição espacial de corrente na estrutura condutora irradiante da mesma.
- Assim, esta seção tece inferências buscando responder a seguinte questão: Qual é a forma funcional da distribuição espacial da corrente $I(x, y, z)$ no volume de um dipolo cilíndrico cujo diâmetro d é infinitesimal, quando o dipolo é excitado por um gerador de tensão senoidal?
- A Segunda Equação de Maxwell em Rotacional, Equação (3) do Capítulo II, postula que:

$$\nabla \times \underline{H} = \underline{J} \left[\frac{\text{A}}{\text{m}^2} \right] \quad (1)$$

onde, da Seção 3 do Capítulo I,

$$\nabla \times \underline{H} = \hat{x} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \hat{y} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \hat{z} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \quad (2)$$

- Mas, conforme vimos no Capítulo II, qualquer antena pode ser decomposta em uma infinidade de Irradiadores Elementares (dipolos de comprimento infinitesimal).

⇒ Portanto vamos supor que o dipolo mostrado na Figura 2 é formado por infinitos irradiadores elementares dispostos em série.

● Vimos no Capítulo I que o Campo Magnético $\underline{H}(x, y, z)$ e o Campo Elétrico $\underline{E}(x, y, z)$ podem ser interpretados respectivamente como representativos da vorticidade (velocidade angular) e do movimento linear (velocidade linear) do fluido Éter³ em um ponto $p(x, y, z)$ do espaço \mathfrak{R}^3 .

⇒ Um dipolo formado por infinitos irradiadores elementares dispostos em série terá, portanto, uma distribuição espacial de campos conforme mostra a Figura 3.

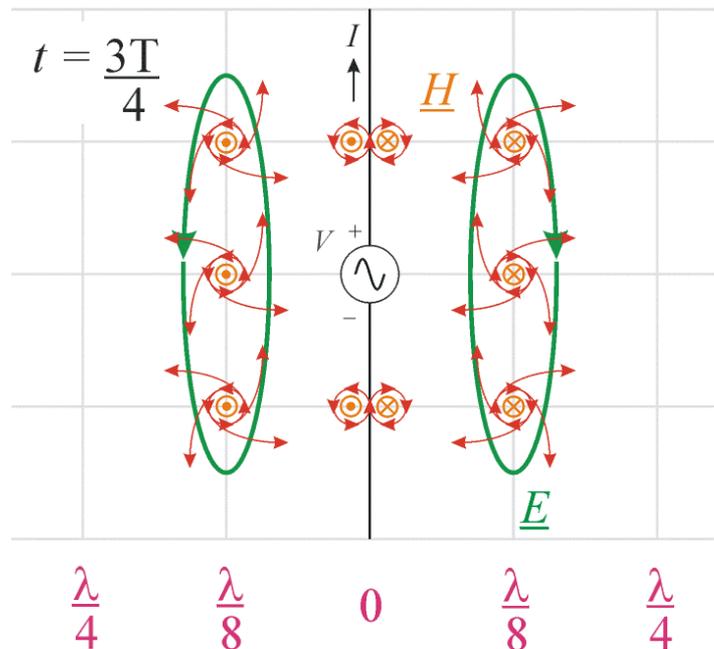


Figura 3: Aproximação do processo de irradiação do dipolo da Figura 2 para o instante de tempo $t = 3T/4$, como consequência da variação temporal da corrente I . As linhas verdes representam a composição vetorial média da velocidade de movimento do Éter (linhas do campo elétrico \underline{E}) resultante do padrão de perturbação (linhas vermelhas) no instante de tempo mostrado. É mostrado o vetor campo magnético \underline{H} (em laranja), cuja direção é sempre perpendicular ao plano de maior velocidade de giro (vorticidade) do fluido Éter. Ver Figura 40 do Capítulo I.

³ A referida interpretação é apenas e unicamente uma alegoria com objetivo didático. Assim como podemos modelar a suspensão mecânica de um automóvel através de um circuito RLC, sem haver especificamente um circuito RLC fisicamente implementado na suspensão do automóvel, da mesma maneira, podemos modelar o processo de irradiação eletromagnética através de movimentos lineares e circulares (vorticidade) em um fluido hipotético chamado Éter.

- Redesenhando a Figura 2 em \mathfrak{R}^3 temos:

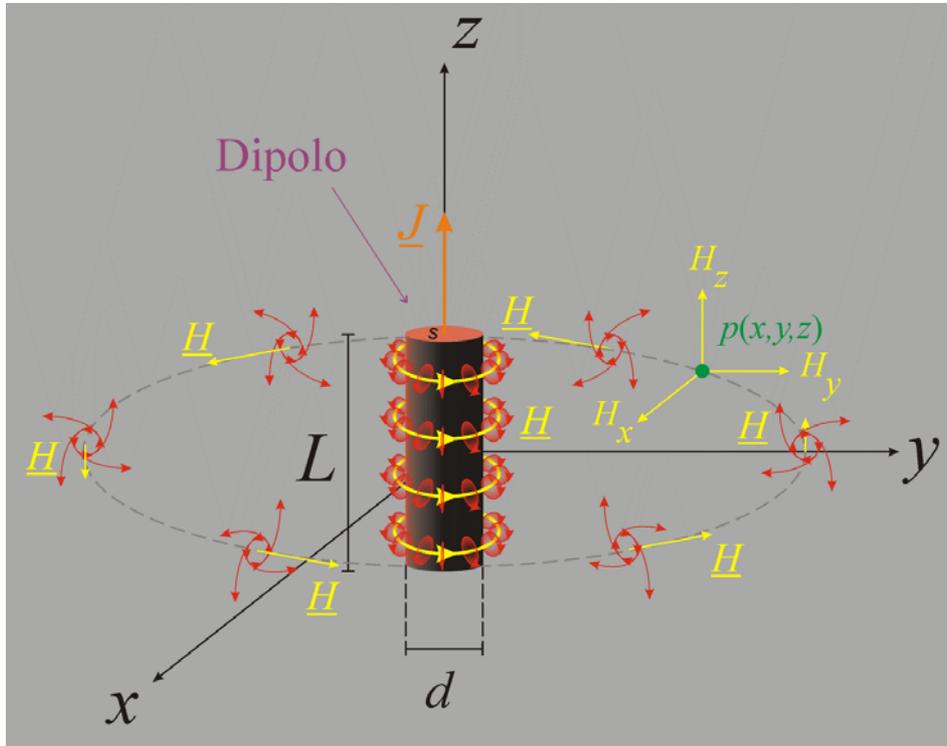


Figura 4: Representação tridimensional da Figura 3.

⇒ Da Figura 4 inferimos que $H_z = 0$, porque não existe vorticidade em nenhum plano de giro perpendicular a z . Daí (2) torna-se:

$$\nabla \times \underline{H} = \hat{x} \left(\frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \hat{y} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} \right) + \hat{z} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \quad (3)$$

⇒ Mas $l \gg d$ e, em conseqüência, \underline{H} não varia com z . Logo $\frac{\partial H_y}{\partial z} = 0$ e $\frac{\partial H_x}{\partial z} = 0$. Daí (3) torna-se:

$$\nabla \times \underline{H} = \hat{z} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \quad (4)$$

⇒ Mas de (1) $\nabla \times \underline{H} = \underline{J}$ e portanto

$$\underline{J} = \hat{z} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) = \hat{z} J_z \left[\frac{\text{A}}{\text{m}^2} \right] \quad (5)$$

⇒ Portanto, a corrente $I = \mathbf{s} J_z$ no dipolo possui valor não nulo somente na direção \hat{z} , não havendo corrente fluindo nas direções \hat{x} e \hat{y} .

⇒ Visto que a tensão aplicada aos terminais do dipolo é uma tensão senoidal $V = V(t) = V_{\max} \cos(2\pi ft)$, então, em consequência, é originada uma corrente no dipolo cuja variação no tempo é dada por $I = I(t) = I_{\max} \cos(2\pi ft + \varphi)$, sendo φ o ângulo de fase no tempo entre V e I .

● Vimos no Capítulo I que a perturbação gerada no fluido Éter por uma corrente variando no tempo de acordo com $I = I(t) = I_{\max} \cos(2\pi ft + \varphi) = I_{\max} \cos(\frac{2\pi}{T}t + \varphi)$ é uma onda de forma senoidal a qual apresenta uma distância $\lambda = cT$ entre seus valores máximos no espaço \mathfrak{R}^3 , sendo $c = 1/\sqrt{\mu\epsilon} = 3 \times 10^8$ m/s.

● Por outro lado, pelos mesmos argumentos já discutidos no Capítulo I, uma perturbação senoidal no Éter induz em um condutor elétrico uma corrente cuja distribuição no espaço \mathfrak{R}^3 acompanha a forma de onda da perturbação.

⇒ Assim, a distribuição de corrente em uma antena é uma onda de forma senoidal a qual também apresenta uma distância $\lambda = cT$ entre seus valores máximos no espaço \mathfrak{R}^3 . Isto significa que a onda senoidal de corrente varia muito pouco ao longo de uma distância que é pequena em relação ao comprimento de onda λ .

⇒ Portanto, visto que o condutor do dipolo é cilíndrico e de diâmetro d infinitesimal em relação a λ , a variação da corrente $I = \mathbf{S} J_z$ no espaço \mathfrak{R}^3 resulta ínfima ao longo dos eixos x e y , ocorrendo apenas ao longo do eixo z .

⇒ Uma vez que as Equações de Maxwell são equações diferenciais lineares, e uma vez que a corrente I no dipolo é uma consequência da tensão V aplicada, então a relação entre $V(t)$, $I(t)$ e $I(z)$ pode ser dada por uma equação diferencial linear da forma

$$\alpha_0 I(t) + \alpha_1 \frac{\partial}{\partial t} I(t) + \alpha_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} I(t) + \dots + \beta_0 I(z) + \beta_1 \frac{\partial}{\partial z} I(z) + \beta_2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} I(z) + \dots = V(t) \quad (6)$$

onde α_i e β_i são coeficientes a determinar.

⇒ Mas, conforme já discutimos, $V(t) = V_{\max} \cos(2\pi ft)$ e $I(t) = I_{\max} \cos(2\pi ft + \varphi)$. Daí, para que a igualdade de (6) seja obedecida, a distribuição espacial da corrente $I(z)$ tem que ser **necessariamente** da forma funcional $I(z) = I_{\max} \cos(\frac{2\pi}{\lambda}z + \theta)$, conforme mostra a Figura 5.

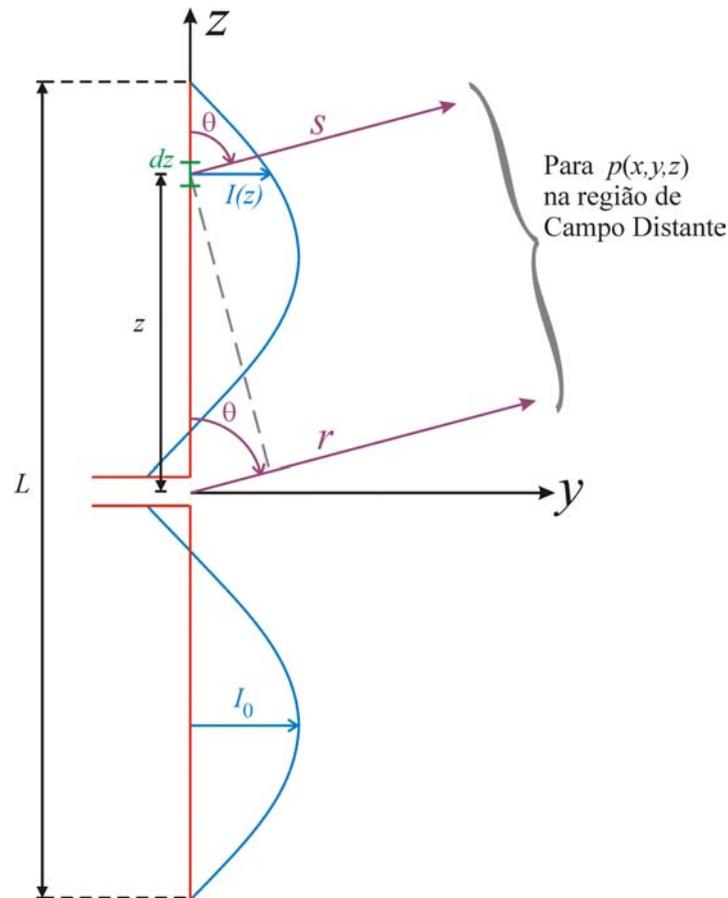


Figura 5: Variação espacial da corrente $I = I(z)$ (em azul) para um dipolo simétrico fino de comprimento L alimentado no centro por uma linha de transmissão bifilar balanceada. I_0 é o valor instantâneo máximo da corrente. Note que a corrente nas extremidades do dipolo tem que ser **necessariamente**⁴ nula, isto é, $I(z = \pm L/2) = 0$.

⇒ Ainda, visto que $I(z)$ é uma onda de forma senoidal que apresenta uma distância $\lambda = cT$ entre seus valores máximos, então a corrente deve ser obrigatoriamente nula também em todas as posições z múltiplas de $\lambda/2$ a partir das extremidades do dipolo.

⇒ Portanto, a Figura 5 sugere a seguinte expressão analítica para $I(z)$

$$I(z) = \begin{cases} I_0 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{L}{2} + z\right)\right) & \text{p/ } z < 0 \\ I_0 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{L}{2} - z\right)\right) & \text{p/ } z \geq 0 \end{cases} \quad [\text{A}] \quad (7)$$

⁴ A corrente é necessariamente nula para $|z| > L/2$ porque não existe condutor elétrico além das extremidades do dipolo que permita a circulação de corrente.

Nota: $I(z) > 0 \rightarrow I(z)$ flui no sentido do eixo z , $I(z) < 0 \rightarrow I(z)$ flui no sentido contrário ao do eixo z . **Sentido do eixo z** \rightarrow Sentido positivo da corrente convencionado para a corrente $I(t)$ que alimenta o dipolo através da linha de transmissão.

3 O Campo Distante de um Dipolo Linear Simétrico

● No Capítulo II vimos que uma das expressões analíticas do **Campo Distante** E_θ de um **dipolo curto de comprimento infinitesimal** é

$$E_\theta = 60\pi I_0 \left(\frac{\ell}{r\lambda} \right) e^{j\left(\omega t - \beta r + \frac{\pi}{2}\right)} \text{sen } \theta \quad \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right] \quad (8)$$

e que sua relação com o **Campo Distante** H_ϕ do mesmo **dipolo curto** é

$$H_\phi = \frac{E_\theta}{Z_0} \quad \left[\frac{\text{A}}{\text{m}} \right] \quad (9)$$

onde $Z_0 = 120\pi \text{ } [\Omega]$ é a impedância intrínseca do vácuo (ou ar seco).

\Rightarrow Da Figura 5, podemos considerar cada segmento dz do dipolo fino de comprimento L como um dipolo curto de comprimento infinitesimal $\ell = dz$ transportando uma corrente $I(z)$, sendo $I(z)$ definida por (7).

\Rightarrow Cada dipolo infinitesimal de tamanho dz encontra-se a uma distância s do ponto $p(x, y, z)$ e gera um campo elétrico $d\mathbf{E}$ em $p(x, y, z)$. Portanto (8) pode ser re-escrita como:

$$dE_\theta = 60\pi I(z) \left(\frac{dz}{s\lambda} \right) e^{j\left(\omega t - \beta s + \frac{\pi}{2}\right)} \text{sen } \theta \quad (10)$$

ou, integrando ambos os lados de (10):

$$E_\theta = \int dE_\theta = \frac{60\pi}{\lambda} \text{sen } \theta e^{j\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{s} I(z) e^{-j\beta s} dz \quad (11)$$

\Rightarrow Para Campo Distante $s \rightarrow r$ (ver Figura 5) e (11) torna-se:

$$E_\theta = \int dE_\theta = \frac{60\pi}{\lambda} \text{sen } \theta e^{j\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{r} I(z) e^{-j\beta s} dz \quad (12)$$

Nota: Observe que, apesar de $s \rightarrow r$ para Campo Distante, não consideramos $s = r$ especificamente no fator $e^{-j\beta s}$ de (12) porque **pequenas diferenças de fase são importantes na composição vetorial do campo distante** \mathbf{E} em $p(x, y, z)$.

\Rightarrow Da Figura 5 temos que $s + z \cos \theta = r$. Daí, substituindo $s = r - z \cos \theta$ no fator $e^{-j\beta s}$ de (12) temos:

$$E_{\theta} = \int dE_{\theta} = \frac{60\pi}{\lambda} \text{sen } \theta e^{j\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{r} I(z) e^{-j\beta(r-z \cos \theta)} dz \quad (13)$$

⇒ Mas como r independe de z , (13) é re-escrita como:

$$E_{\theta} = \int dE_{\theta} = \frac{60\pi}{r\lambda} \text{sen } \theta e^{j\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)} \int_{-L/2}^{L/2} I(z) e^{-j\beta(r-z \cos \theta)} dz \quad (14)$$

⇒ Substituindo (7) em (14):

$$\begin{aligned} E_{\theta} &= \frac{60\pi}{r\lambda} \text{sen } \theta e^{j\left(\omega t - \beta r + \frac{\pi}{2}\right)} \left\{ \int_{-L/2}^0 I(z) e^{j\beta z \cos \theta} dz + \int_0^{L/2} I(z) e^{j\beta z \cos \theta} dz \right\} = \\ &= \frac{I_0 60\pi}{r\lambda} \text{sen } \theta e^{j\left(\omega t - \beta r + \frac{\pi}{2}\right)} \left\{ \int_{-L/2}^0 \text{sen} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{L}{2} + z \right) \right) e^{j\beta z \cos \theta} dz + \int_0^{L/2} \text{sen} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{L}{2} - z \right) \right) e^{j\beta z \cos \theta} dz \right\} \quad (15) \end{aligned}$$

⇒ Mas como a constante de propagação é $\beta = 2\pi/\lambda \left[\frac{\text{rad}}{\text{m}} \right]$, (15) pode ser escrita como

$$E_{\theta} = \frac{I_0 60\pi}{r\lambda} \text{sen } \theta e^{j\left(\omega t - \beta r + \frac{\pi}{2}\right)} \left\{ \int_{-L/2}^0 e^{j\beta z \cos \theta} \text{sen} \left(\beta \left(\frac{L}{2} + z \right) \right) dz + \int_0^{L/2} e^{j\beta z \cos \theta} \text{sen} \left(\beta \left(\frac{L}{2} - z \right) \right) dz \right\} \quad (16)$$

Mas,

$$\int e^{az} \text{sen}(c + bz) dz = \frac{e^{az}}{a^2 + b^2} [a \text{sen}(c + bz) - b \cos(c + bz)] \quad (17)$$

onde $a = j\beta z \cos \theta$, $b = \beta$ (ou $b = -\beta$ na segunda integral de (16)) e $c = \frac{\beta L}{2}$.

● Efetuando as duas integrais de (16) com base em (17), multiplicando por $\text{sen } \theta$ e simplificando obtemos a expressão analítica para o Campo Distante de um Dipolo Linear Simétrico:

$$\begin{aligned}
 E_{\theta} &= \frac{I_0 60\pi}{r\lambda} e^{j\left(\omega t - \beta r + \frac{\pi}{2}\right)} \left\{ \frac{2}{\beta} \frac{\cos\left(\frac{\beta L \cos \theta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\beta L}{2}\right)}{\sin \theta} \right\} \\
 E_{\theta} &= \frac{I_0 60\pi}{r\lambda} e^{j\left(\omega t - \beta r + \frac{\pi}{2}\right)} \left\{ \frac{2}{\frac{2\pi}{\lambda}} \frac{\cos\left(\frac{\frac{2\pi}{\lambda} L \cos \theta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\frac{2\pi}{\lambda} L}{2}\right)}{\sin \theta} \right\} \\
 E_{\theta} &= \frac{I_0 60}{r} e^{j\left(\omega t - \beta r + \frac{\pi}{2}\right)} \left\{ \frac{\cos\left(\frac{L}{\lambda} \pi \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\sin \theta} \right\} \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right]
 \end{aligned} \tag{18}$$

⇒ Note que, a partir de (18), o **Padrão de Irradiação**⁵ $F(\theta, \phi)$ de qualquer antena linear é dado por

$$F(\theta, \phi) = F(\theta) = \frac{\left| \frac{\cos\left(\frac{L}{\lambda} \pi \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\sin \theta} \right|}{\max \left\{ \left| \frac{\cos\left(\frac{L}{\lambda} \pi \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\sin \theta} \right| \right\}} \tag{19}$$

⇒ O valor θ_{hp} para o qual $F(\theta_{hp}) = 1/\sqrt{2}$ define o *HPBW* (já estudado no Capítulo III) que é dado por

$$HPBW = 2 \left(\frac{\pi}{2} - \theta_{hp} \right) [\text{rad}] \tag{20}$$

4 O Diagrama de Irradiação de um Dipolo Linear Simétrico

- A partir dos resultados obtidos na Seção 3, esta seção apresenta os seguintes gráficos:

⁵ Ver Seção 3 do Capítulo III.

- (I) Diagrama de irradiação cartesiano de $F(\theta)$ com identificação do ângulo *HPBW*.
- (II) Diagrama de irradiação polar de $|F(\theta)|$ com identificação do ângulo *HPBW*.
- (III) A distribuição de corrente $I(z)$ em função de z .

● Os gráficos apresentados referem-se a um dipolo horizontal linear simétrico (ver Figura 6) imerso no espaço livre cujo valor instantâneo máximo de corrente é $I_0 = 1.0 \text{ A}$ e com comprimento L de valores:

- a) $L = 0.01\lambda$ (dipolo curto)
- b) $L = 0.5\lambda$
- c) $L = 1.0\lambda$
- d) $L = 1.1\lambda$
- e) $L = 1.5\lambda$
- f) $L = 2.0\lambda$

● As seguintes equações foram utilizadas para a construção dos gráficos aqui mostrados:

- Os diagramas de irradiação cartesiano de $F(\theta)$ e polar de $|F(\theta)|$ são obtidos de (19).
- O *HPBW* é obtido de (20).
- $I(z)$ é obtido de (7).

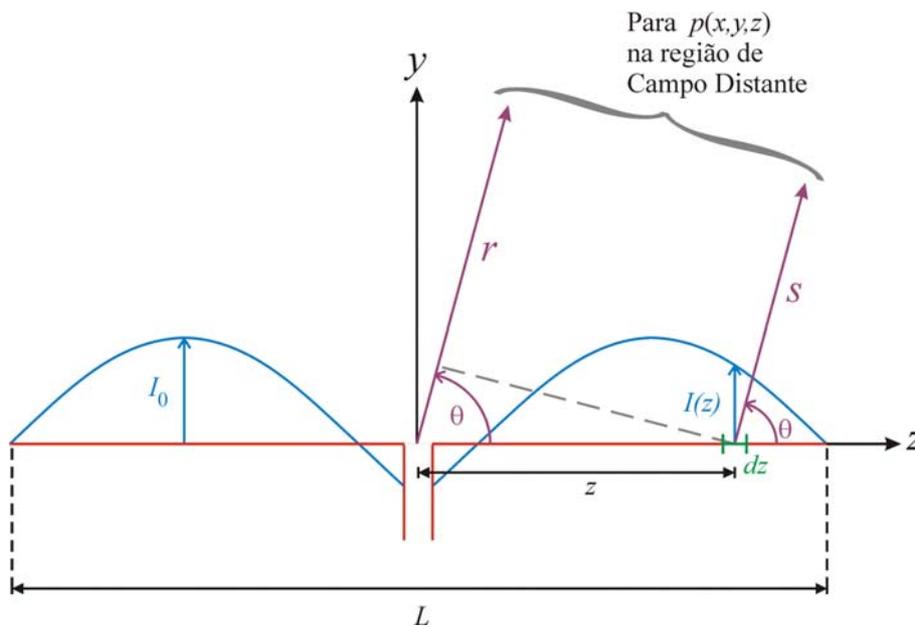


Figura 6: Dipolo horizontal linear simétrico de comprimento L alimentado no centro por uma linha de transmissão bifilar balanceada.

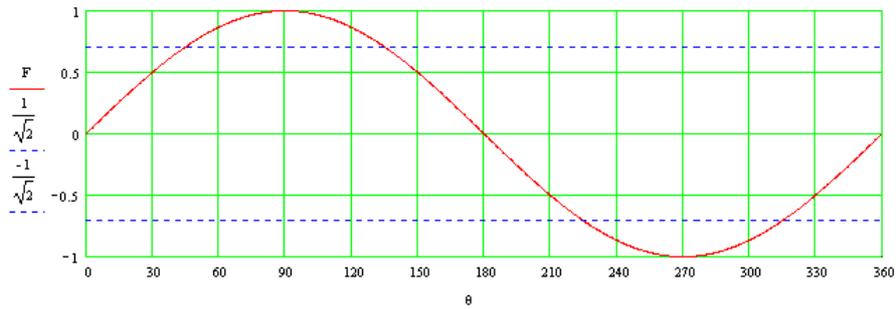


Figura 7: Diagrama de irradiação $F(\theta)$ cartesiano do dipolo mostrado na Figura 6 para $L = 0.01\lambda$. $F(\theta_{hp}) = 1/\sqrt{2} \rightarrow \theta_{hp} = 45.0^\circ$ (linha azul). $HPBW = 2(90 - \theta_{hp}) = 90^\circ$.

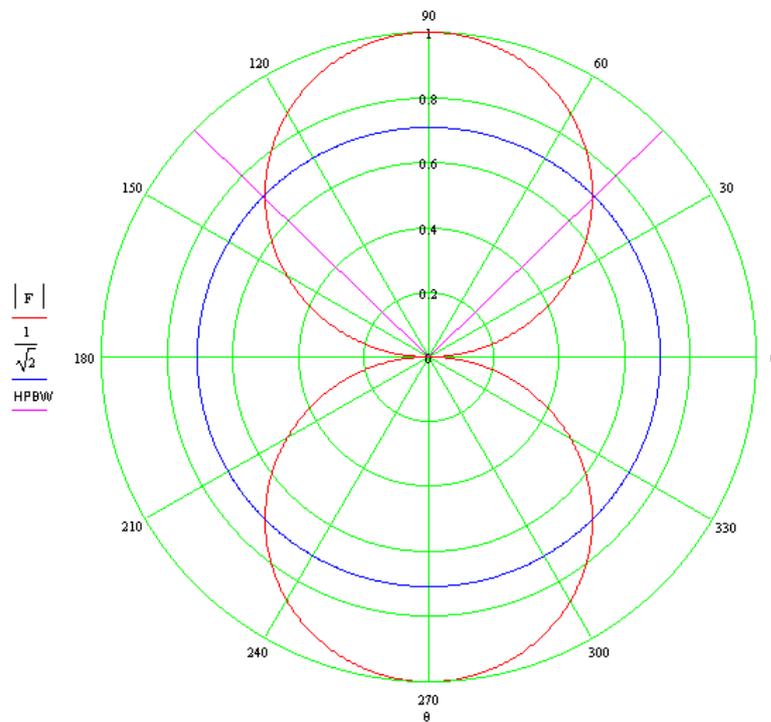


Figura 8: Diagrama de irradiação $|F(\theta)|$ polar do dipolo mostrado na Figura 6 para $L = 0.01\lambda$. $HPBW = 2(90 - \theta_{hp}) = 90^\circ$ (setor em magenta).

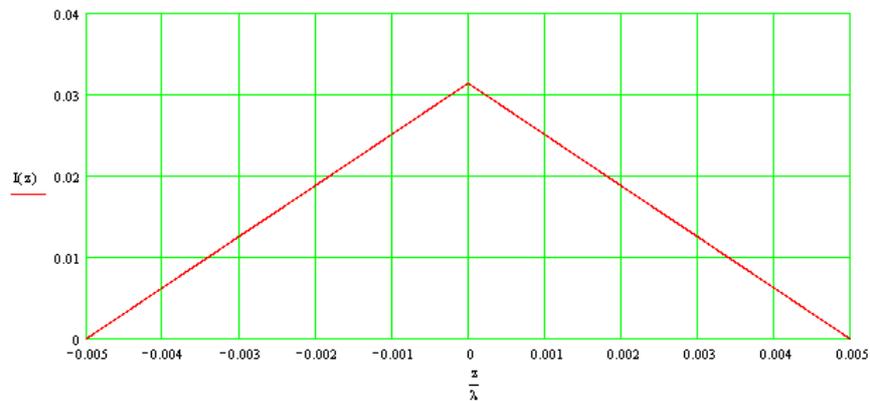


Figura 9: Distribuição de corrente $I(z)$ do dipolo mostrado na Figura 6 para $L = 0.01\lambda$.

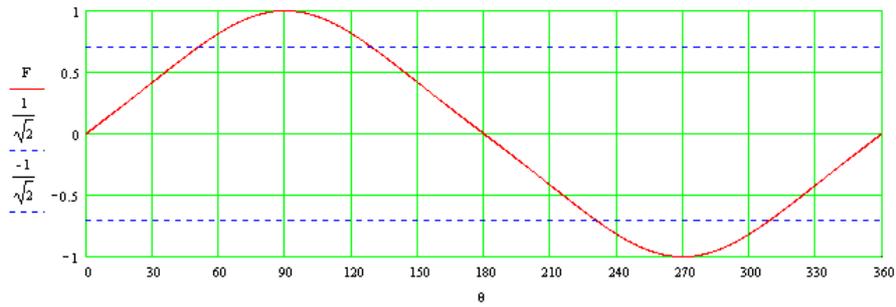


Figura 10: Diagrama de irradiação $F(\theta)$ cartesiano do dipolo mostrado na Figura 6 para $L = 0.5\lambda$. $F(\theta_{hp}) = 1/\sqrt{2} \rightarrow \theta_{hp} = 50.9^\circ$ (linha azul). $HPBW = 2(90 - \theta_{hp}) = 78.1^\circ$.

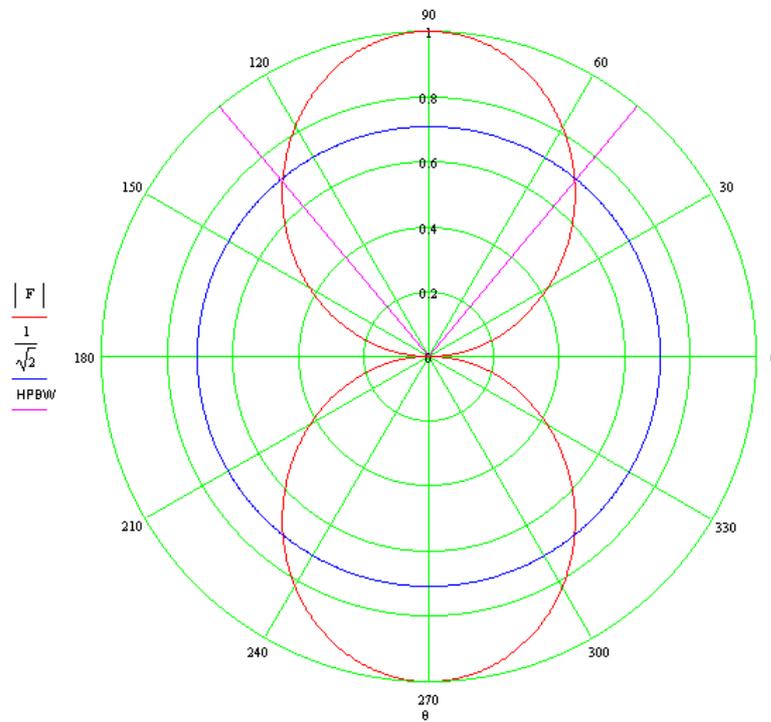


Figura 11: Diagrama de irradiação $|F(\theta)|$ polar do dipolo mostrado na Figura 6 para $L = 0.5\lambda$. $HPBW = 2(90 - \theta_{hp}) = 78.1^\circ$ (setor em magenta).

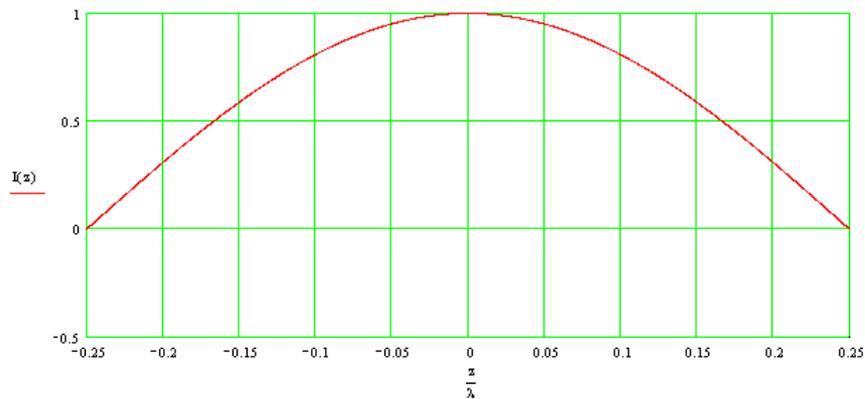


Figura 12: Distribuição de corrente $I(z)$ do dipolo mostrado na Figura 6 para $L = 0.5\lambda$.

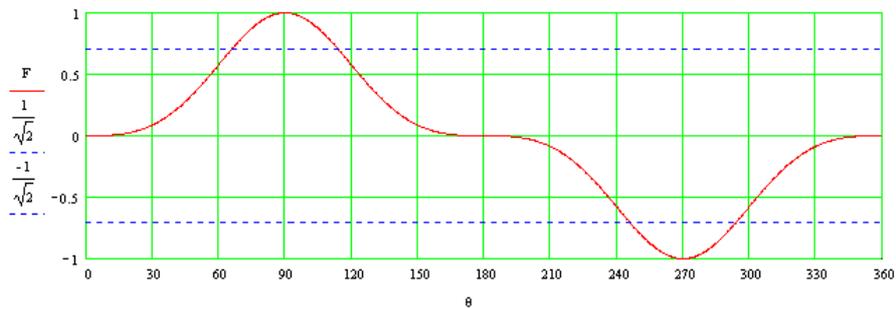


Figura 13: Diagrama de irradiação $F(\theta)$ cartesiano do dipolo mostrado na Figura 6 para $L = 1.0\lambda$. $F(\theta_{hp}) = 1/\sqrt{2} \rightarrow \theta_{hp} = 66.1^\circ$ (linha azul). $HPBW = 2(90 - \theta_{hp}) = 47.8^\circ$.

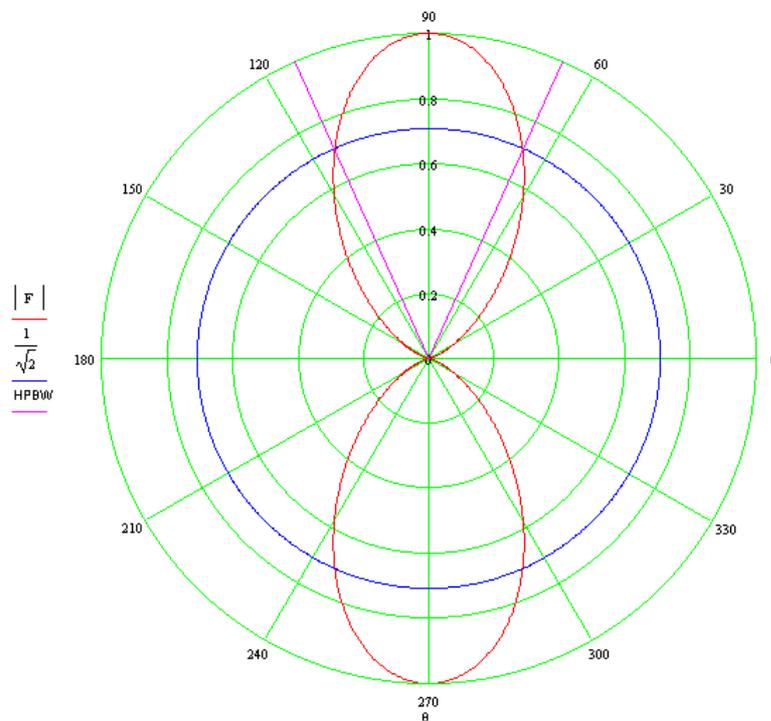


Figura 14: Diagrama de irradiação $|F(\theta)|$ polar do dipolo mostrado na Figura 6 para $L = 1.0\lambda$. $HPBW = 2(90 - \theta_{hp}) = 47.8^\circ$ (setor em magenta).

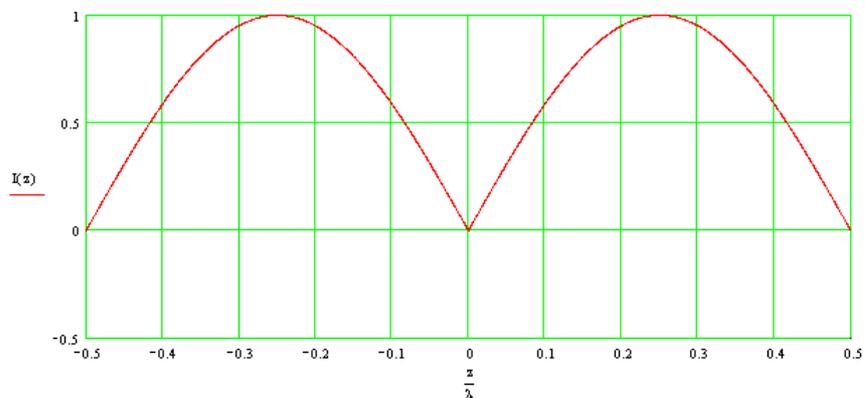


Figura 15: Distribuição de corrente $I(z)$ do dipolo mostrado na Figura 6 para $L = 1.0\lambda$.

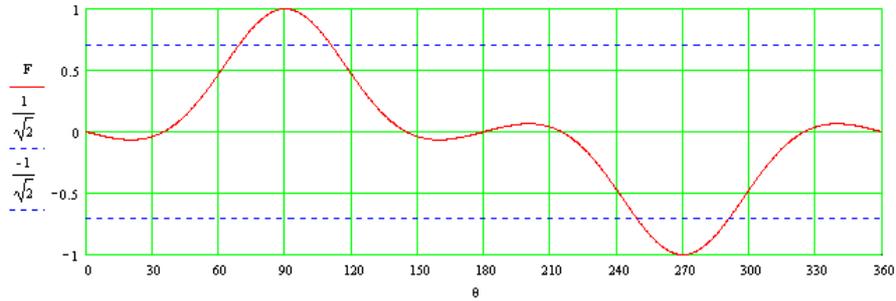


Figura 16: Diagrama de irradiação $F(\theta)$ cartesiano do dipolo mostrado na Figura 6 para $L = 1.1\lambda$. $F(\theta_{hp}) = 1/\sqrt{2} \rightarrow \theta_{hp} = 69.2^\circ$ (linha azul). $HPBW = 2(90 - \theta_{hp}) = 41.5^\circ$.

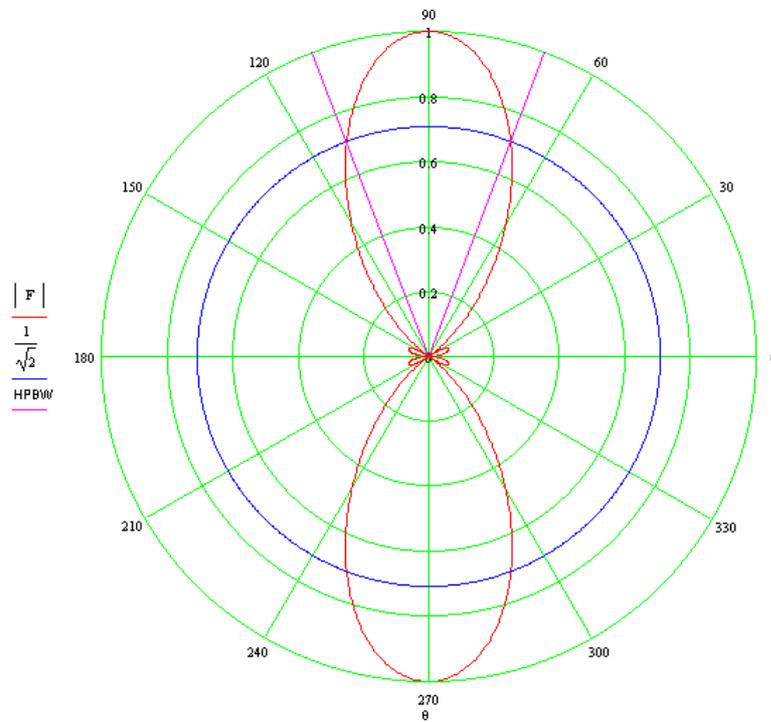


Figura 17: Diagrama de irradiação $|F(\theta)|$ polar do dipolo mostrado na Figura 6 para $L = 1.1\lambda$. $HPBW = 2(90 - \theta_{hp}) = 41.5^\circ$ (setor em magenta).

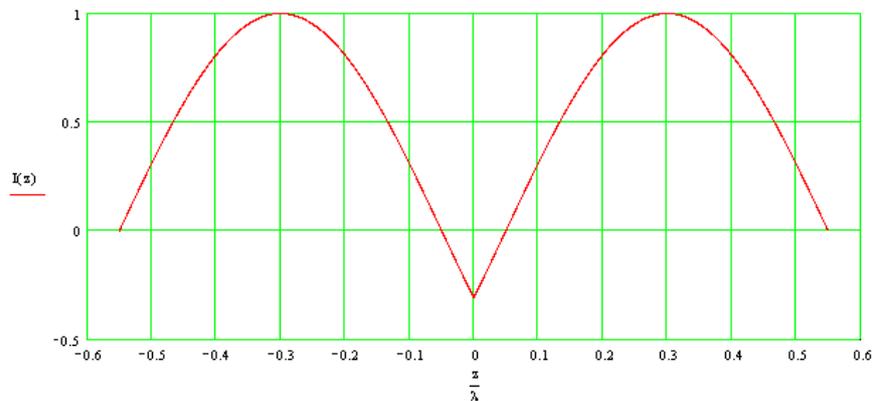


Figura 18: Distribuição de corrente $I(z)$ do dipolo mostrado na Figura 6 para $L = 1.1\lambda$.

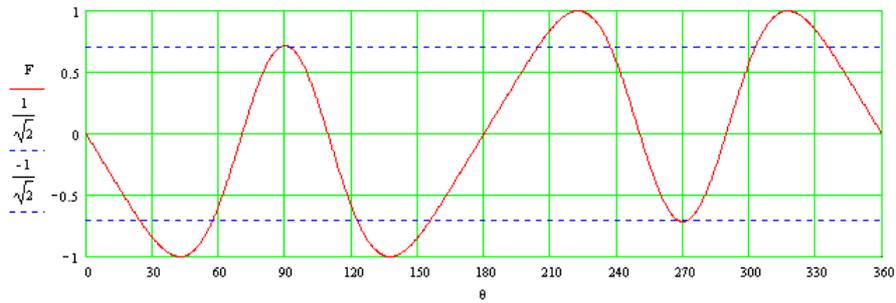


Figura 19: Diagrama de irradiação $F(\theta)$ cartesiano do dipolo mostrado na Figura 6 para $L = 1.5\lambda$. $F(\theta_{hp}) = 1/\sqrt{2} \rightarrow \theta_{hp} = 24.4^\circ$ (linha azul). $HPBW = 2(90 - \theta_{hp}) = 131.2^\circ$.

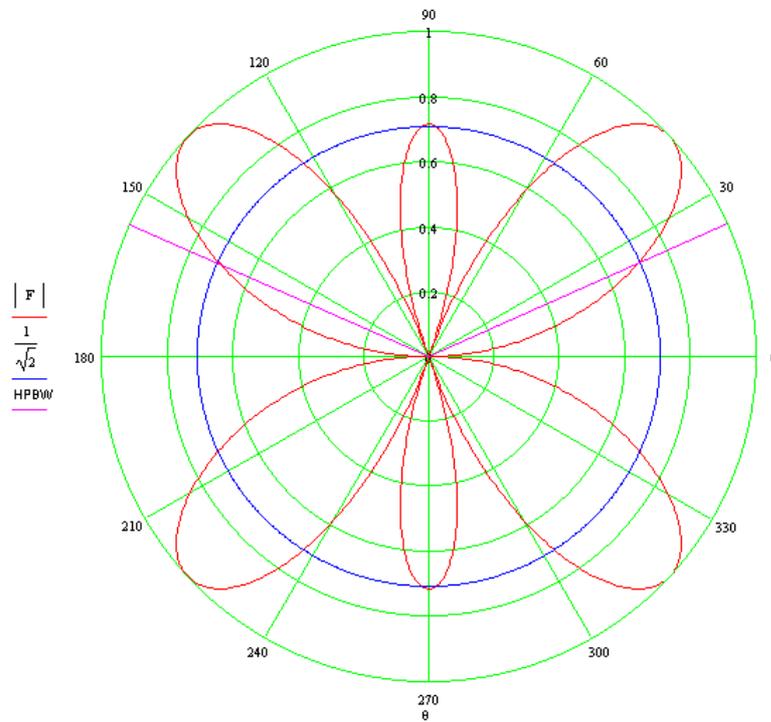


Figura 20: Diagrama de irradiação $|F(\theta)|$ polar do dipolo mostrado na Figura 6 para $L = 1.5\lambda$. $HPBW = 2(90 - \theta_{hp}) = 131.2^\circ$ (setor em magenta).

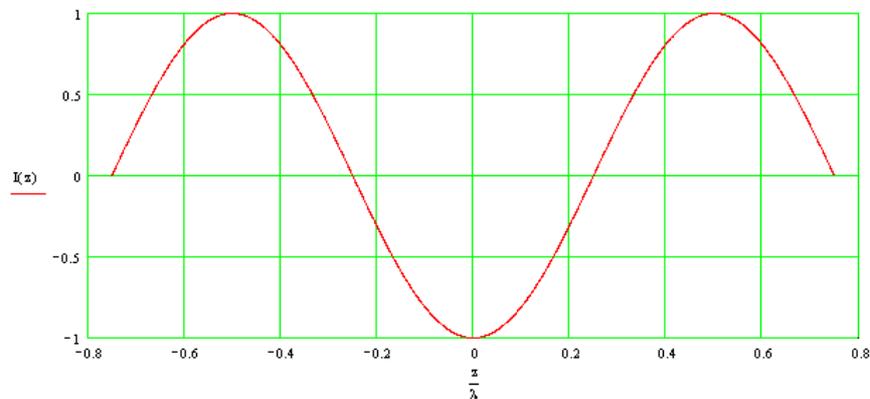


Figura 21: Distribuição de corrente $I(z)$ do dipolo mostrado na Figura 6 para $L = 1.5\lambda$.

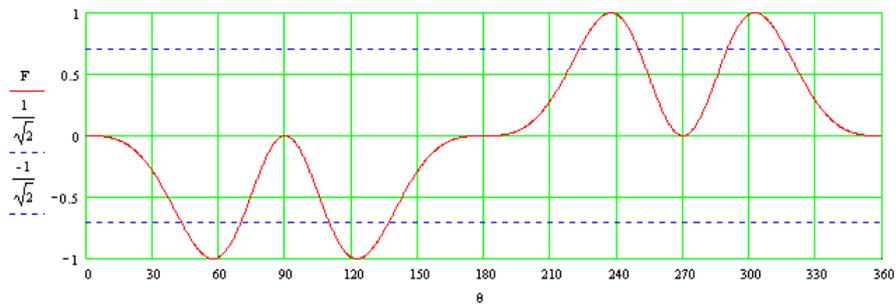


Figura 22: Diagrama de irradiação $F(\theta)$ cartesiano do dipolo mostrado na Figura 6 para $L = 2.0\lambda$. $F(\theta_{hp}) = 1/\sqrt{2} \rightarrow \theta_{hp} = 43.2^\circ$ (linha azul). $HPBW = 2(90 - \theta_{hp}) = 93.6^\circ$.

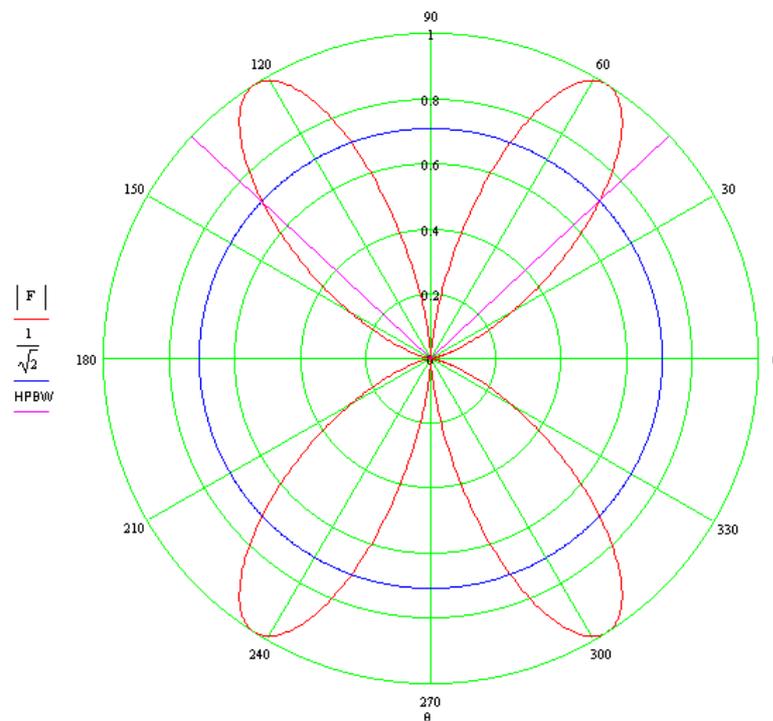


Figura 23: Diagrama de irradiação $|F(\theta)|$ polar do dipolo mostrado na Figura 6 para $L = 2.0\lambda$. $HPBW = 2(90 - \theta_{hp}) = 93.6^\circ$ (setor em magenta).

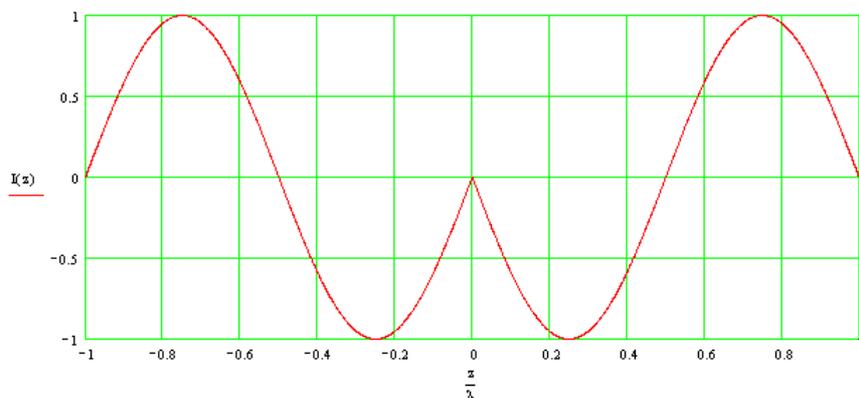


Figura 24: Distribuição de corrente $I(z)$ do dipolo mostrado na Figura 6 para $L = 2.0\lambda$.

5 A Resistência de Radiação e a Resistência de Entrada de um Dipolo Linear Simétrico

- Vimos no Capítulo II que a integral de superfície do Vetor de Poynting Médio $\underline{S} = \text{Re}\{\underline{\underline{S}}\} \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right]$ sobre qualquer superfície fechada Σ que englobe uma antena resulta na potência total que **flui para fora** da superfície Σ , isto é, **a potência P [W] total irradiada pela antena:**

$$P = \oiint_{\Sigma} \underline{S} \cdot d\underline{\Sigma} = \frac{1}{2} \oiint_{\Sigma} \text{Re}\{\underline{E} \times \underline{H}^*\} \cdot d\underline{\Sigma} \quad [\text{W}] \quad (21)$$

- Vimos também que a superfície fechada Σ mais simples e conveniente que podemos utilizar para o cômputo de (21) é uma esfera em cujo centro encontra-se o irradiador.
- Vimos ainda que a potência total irradiada P por um dipolo é dada por (assumindo não haver perdas ôhmicas ou dielétricas):

$$P = R_r \left(I_0 / \sqrt{2} \right)^2 \quad [\text{W}] \quad (22)$$

onde R_r é a **resistência de radiação** do dipolo e I_0 é o valor instantâneo máximo da corrente.

- ⇒ Pelo Teorema da Conservação da Energia, a potência total que atravessa uma superfície fechada Σ na região de Campo Distante de um irradiador obrigatoriamente deve igualar a potência total irradiada, de modo que (21) é identicamente igual a (22), pelo que obtemos

$$R_r = \frac{\oiint_{\Sigma} \text{Re}\{\underline{E} \times \underline{H}^*\} \cdot d\underline{\Sigma}}{I_0^2} \quad [\Omega] \quad (23)$$

- Como estamos interessados em determinar a resistência de radiação R_r com base na potência total irradiada, o procedimento é simplificado se utilizarmos como superfície fechada de integração Σ uma esfera de raio r com o dipolo no centro, tal que $r \gg \lambda$ de modo a poder utilizar os resultados obtidos em (18) para Campo Distante:

$$R_r = \frac{\oiint_{\Sigma} \text{Re}\{\underline{E} \times \underline{H}^*\} \cdot d\underline{\Sigma}}{I_0^2} = \frac{\oiint_{\text{Esfera}} \text{Re}\{\underline{E} \times \underline{H}^*\} \cdot d\underline{S}}{I_0^2} \quad [\Omega] \quad (24)$$

onde $d\underline{S}$ é o elemento de área de uma esfera.

- Desenvolvendo (24) temos:

$$\begin{aligned}
 R_r &= \frac{\iint_{\text{Esfera}} \text{Re}\{\underline{E} \times \underline{H}^*\} \cdot d\underline{S}}{I_0^2} = \frac{\iint_{\text{Esfera}} \text{Re}\{\hat{\theta}E_\theta \times \hat{\phi}H_\phi^*\} \cdot \hat{r} dS}{I_0^2} = \\
 &= \frac{(\hat{\theta} \times \hat{\phi}) \cdot \hat{r} \iint_{\text{Esfera}} \text{Re}\{E_\theta H_\phi^*\} dS}{I_0^2} = \frac{\hat{r} \cdot \hat{r} \iint_{\text{Esfera}} \text{Re}\{E_\theta H_\phi^*\} dS}{I_0^2} = \\
 &= \frac{\iint_{\text{Esfera}} \text{Re}\{E_\theta H_\phi^*\} dS}{I_0^2} = \frac{\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \text{Re}\{E_\theta H_\phi^*\} r^2 \text{sen } \theta d\theta d\phi}{I_0^2} = \\
 &= \frac{\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \text{Re}\left\{E_\theta \frac{E_\theta^*}{Z_0}\right\} r^2 \text{sen } \theta d\theta d\phi}{I_0^2} = \\
 &= \frac{\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \text{Re}\left\{\frac{|E_\theta|^2}{Z_0}\right\} r^2 \text{sen } \theta d\theta d\phi}{I_0^2} = \\
 &= \frac{\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{|E_\theta|^2}{Z_0} r^2 \text{sen } \theta d\theta d\phi}{I_0^2} = \\
 &= \frac{r^2 \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} |E_\theta|^2 \text{sen } \theta d\theta d\phi}{Z_0 I_0^2} = \frac{r^2 \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} |E_\theta|^2 \text{sen } \theta d\theta d\phi}{120\pi I_0^2} \quad (25)
 \end{aligned}$$

- De (18) temos que

$$|E_\theta| = \frac{I_0 60}{r} \left\{ \frac{\cos\left(\frac{L}{\lambda} \pi \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\text{sen } \theta} \right\} \quad (26)$$

- Substituindo (26) em (25):

$$\begin{aligned}
 R_r &= \frac{\oiint_{\text{Esfera}} \operatorname{Re}\{\underline{E} \times \underline{H}^*\} \cdot d\underline{S}}{I_0^2} = \frac{r^2 \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} |E_\theta|^2 \operatorname{sen} \theta \, d\theta \, d\phi}{120\pi I_0^2} = \\
 &= \frac{r^2 \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \left(\frac{I_0 60}{r} \left[\frac{\cos\left(\frac{L}{\lambda} \pi \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\operatorname{sen} \theta} \right] \right)^2 \operatorname{sen} \theta \, d\theta \, d\phi}{120\pi I_0^2} = \\
 &= \frac{r^2 \left(\frac{I_0 60}{r} \right)^2 \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \left(\frac{\cos\left(\frac{L}{\lambda} \pi \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\operatorname{sen} \theta} \right)^2 \operatorname{sen} \theta \, d\theta \, d\phi}{120\pi I_0^2} \tag{27}
 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
 R_r &= \frac{r^2 \left(\frac{I_0 60}{r} \right)^2 \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \left(\frac{\cos\left(\frac{L}{\lambda} \pi \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\operatorname{sen} \theta} \right)^2 \operatorname{sen} \theta \, d\theta \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} d\phi}{120\pi I_0^2} = \\
 &= \frac{2\pi r^2 \frac{I_0^2 60^2}{r^2} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \left(\frac{\cos\left(\frac{L}{\lambda} \pi \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\operatorname{sen} \theta} \right)^2 \operatorname{sen} \theta \, d\theta}{120\pi I_0^2} = \\
 &= 60 \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{\left(\cos\left(\frac{L}{\lambda} \pi \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right) \right)^2}{\operatorname{sen} \theta} \, d\theta \tag{28}
 \end{aligned}$$

- Fazendo $u = \cos \theta$ e $du = -\operatorname{sen} \theta d\theta \rightarrow d\theta = -\frac{du}{\operatorname{sen} \theta}$ e substituindo em (28):

$$R_r = 60 \int_{u=-1}^{u=1} \frac{\left(\cos\left(\frac{L}{\lambda} \pi u\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right) \right)^2}{1-u^2} \, du \tag{29}$$

- Fazendo $k = \pi L/\lambda$ (29) torna-se

$$R_r = 60 \int_{u=-1}^{u=1} \frac{(\cos(ku) - \cos(k))^2}{1-u^2} du \quad (30)$$

Mas

$$\frac{1}{1-u^2} = \frac{1}{(1+u)(1-u)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u} \right) \quad (31)$$

● Daí, de (30) e (31):

$$R_r = 30 \int_{u=-1}^{u=1} \frac{(\cos(ku) - \cos(k))^2}{1+u} + \frac{(\cos(ku) - \cos(k))^2}{1-u} du \quad (32)$$

⇒ A Equação (32) determina a **Resistência de Radiação** R_r de um dipolo simétrico de tamanho total L em função de $k = \pi L/\lambda$, **tendo como referência o valor máximo instantâneo I_0 da corrente.**

⇒ Isto significa que R_r somente será igual à resistência de entrada R_i “vista” nos terminais do dipolo se a posição onde se encontram seus terminais coincidirem com a posição z em que ocorre o máximo de corrente I_0 (ver Figura 6).

⇒ Esta situação só ocorre quando $L \leq \lambda/2$ ou quando L é um múltiplo ímpar de $\lambda/2$. Para todas as demais situações precisamos referenciar (32) ao valor da corrente $I(z_i)$ onde z_i é a posição dos terminais do dipolo.

⇒ Para o dipolo alimentado no centro ($z_i = 0$) mostrado na Figura 6, e a partir da equação (7), temos que para $L \geq \lambda/2$:

$$I(z_i) = I(z=0) = I_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right) \rightarrow \frac{I_0}{I(z_i)} = \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)} \quad (33)$$

onde $I(z_i)$ é o valor instantâneo máximo da corrente na posição z_i onde se encontram os terminais de alimentação do dipolo.

⇒ Note que para $L \leq \lambda/2$ sempre obtemos $I(z_i) = I_0$ (ver Figura 6), porque o máximo da distribuição da corrente para esta situação sempre ocorrerá no centro ($z = z_i = 0$) do dipolo simétrico.

⇒ Visto que a potência é conservada ao longo do dipolo, temos

$$I^2(z_i)R_i = I_0^2 R_r \quad (34)$$

⇒ Ou seja, de (33) e (34) temos que $R_i = \left(\frac{I_0}{I(z_i)} \right)^2 R_r$ para $L \geq \lambda/2$, e, portanto

$$R_i = \begin{cases} \frac{R_r}{\text{sen}^2\left(\frac{\beta L}{2}\right)}, & L \geq \frac{\lambda}{2} \\ R_r & , L \leq \frac{\lambda}{2} \end{cases} \quad (35)$$

sendo $\beta = 2\pi/\lambda$.

⇒ As Figuras 25 a 28 mostram as curvas de R_r e R_i resultantes de (32) e (35) em função de L/λ .

⇒ Embora os métodos sejam diferentes, a resistência de entrada R_i obtida de (35) tende ao valor da resistência de entrada obtida com o programa Zi_CyDip.exe, utilizado no Capítulo III. Lembre que o programa Zi_CyDip.exe é baseado no Método da Perturbação da Antena Bicônica de Schelkunoff, conforme discutido no Capítulo III, e, portanto, leva em consideração o diâmetro do dipolo.

⇒ Note que para $L \leq \lambda/2$ a resistência de radiação R_r de um dipolo simétrico é igual à resistência de entrada R_i “vista” nos terminais do dipolo pois, para esta situação, sempre obteremos $I(z_i) = I_0$ (ver Figura 6), porque o máximo da distribuição da corrente sempre ocorrerá no centro ($z = z_i = 0$) do dipolo simétrico quando $L \leq \lambda/2$. Por exemplo, para o caso de um dipolo de meia onda temos $R_r\left(\frac{L}{\lambda} = 0.5\right) = R_i\left(\frac{L}{\lambda} = 0.5\right) = 73 \Omega$.

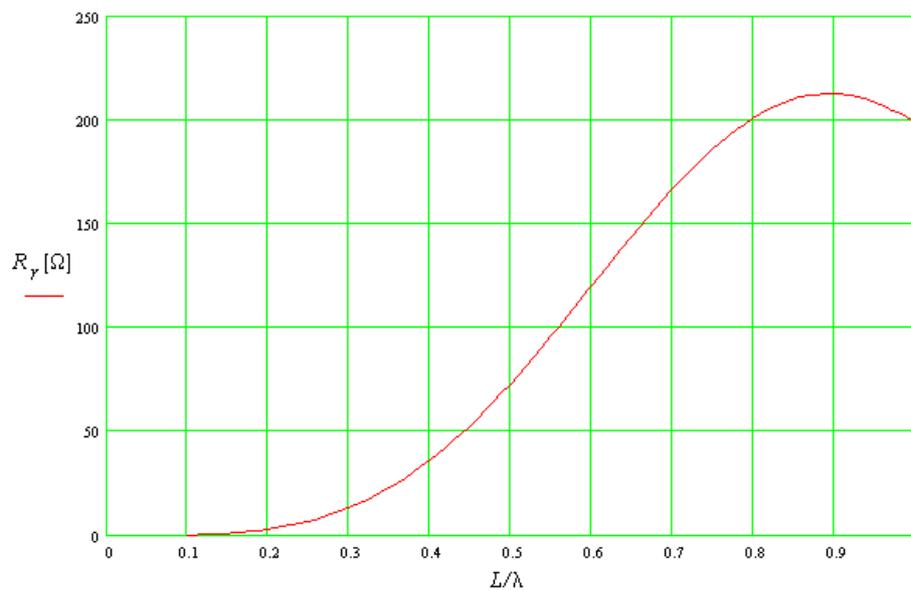


Figura 25: Resistência de radiação R_r de um dipolo obtida de (32) para $0.1 < L/\lambda < 1.0$.

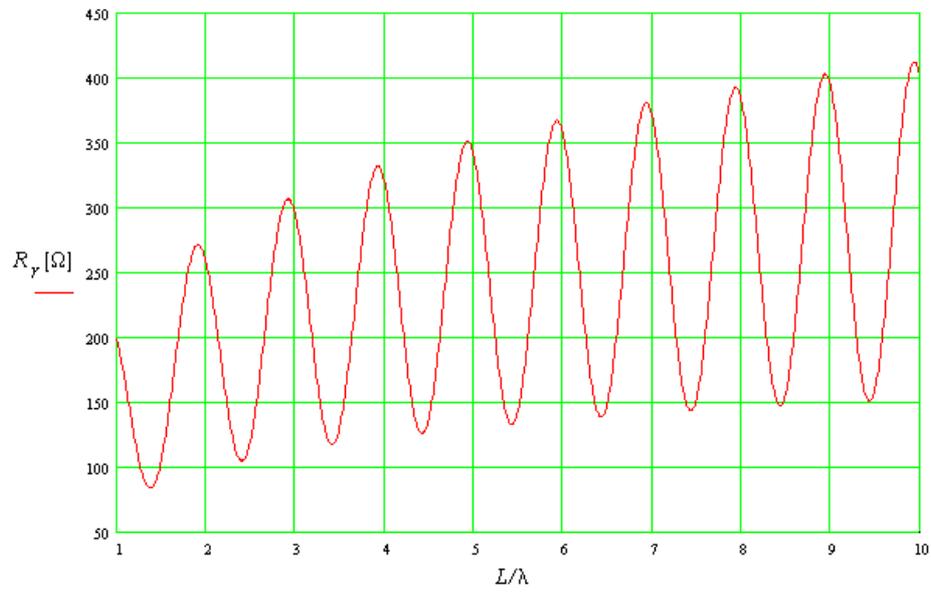


Figura 26: Resistência de radiação R_r de um dipolo obtida de (32) para $1.0 < L/\lambda < 10.0$.

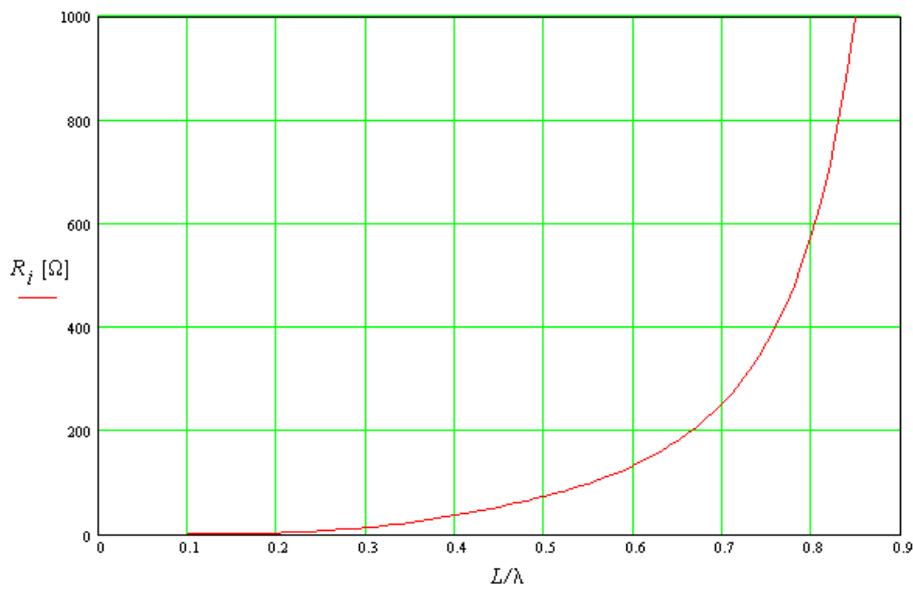


Figura 27: Resistência de entrada R_i de um dipolo obtida de (35) para $0.1 < L/\lambda < 1.0$.

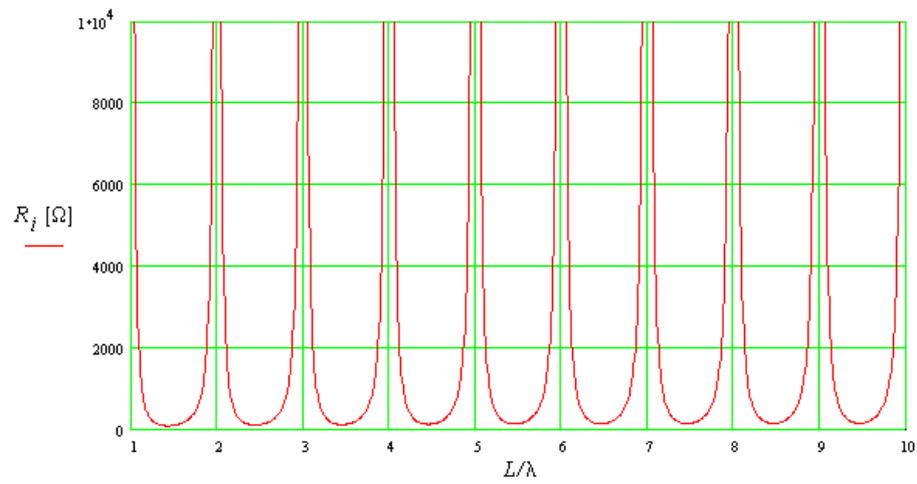


Figura 28: Resistência de entrada R_i de um dipolo obtida de (35) para $1.0 < L/\lambda < 10.0$.

6 A Reatância de Radiação e a Reatância de Entrada de um Dipolo Linear Simétrico

● Vimos no Capítulo II que a energia reativa de um irradiador, responsável pela sua reatância de entrada, é originada na região de Campo Próximo por ondas estacionárias resultantes de **reflexão de ondas** nesta região.

⇒ Em função da **reflexão de ondas** e conseqüente re-indução dos campos \underline{E} e \underline{H} a impedância de entrada $Z_i = R_i + jX_i$ de um dipolo pode ser obtida se o mecanismo de reflexão for interpretado como resultante da existência de um **dipolo “virtual”** idêntico ao dipolo real e situado na região de campo próximo do mesmo, distanciados entre si de uma distância d , conforme mostra a Figura 29.

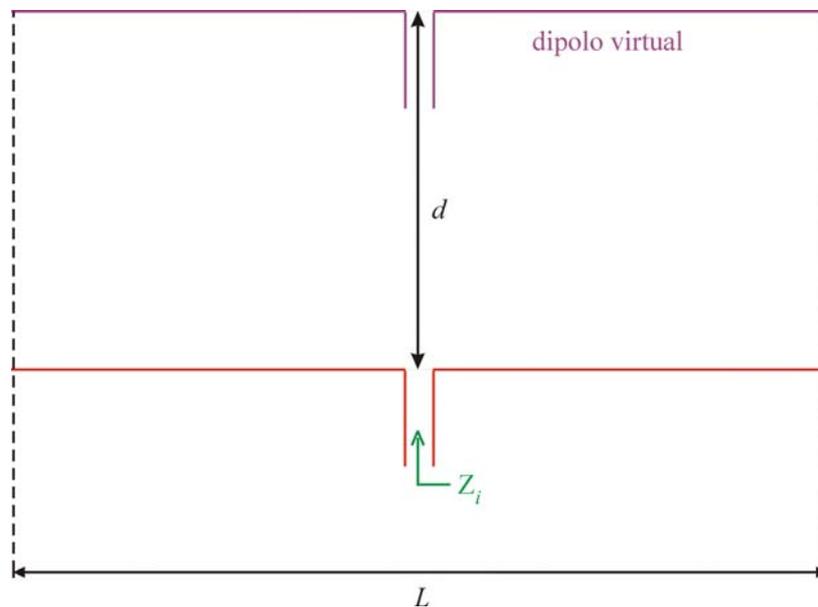


Figura 29: Dipolos real e virtual, distanciados entre si de uma distância d .

● Este procedimento, conhecido como **Método da FEM Induzida**⁶ e já discutido brevemente no Capítulo III, consiste em calcular o campo \underline{E} induzido no dipolo virtual e o campo \underline{E} re-induzido pelo dipolo virtual sobre o dipolo real, sujeito à condição de contorno de que o campo \underline{E} tangencial à superfície cilíndrica do dipolo real é uma superposição dos campos gerados por ambos dipolos e deve ser nulo porque o campo elétrico tangencial a um condutor é sempre zero.

● Resolvendo a equação resultante da condição de contorno gerada pelo artifício acima descrito, determinamos a impedância mútua $Z_{12} = Z_{21} = Z_m$ entre os dipolos, e, ao fazermos $d \rightarrow 0$, obtemos $Z_i = R_i + jX_i = Z_m$. Em outras palavras, **a impedância de entrada do dipolo real tende para a impedância mútua entre os dipolos real e virtual quando a distância entre eles tende a zero.**

⁶ Vide Balanis, *Antenna Theory*, 2nd ed., John Wiley & Sons, 1997

● No contexto do **Método da FEM Induzida**, a impedância mútua entre dois dipolos paralelos de mesmo tamanho total L , distanciados entre si de uma distância d e localizados face a face (ver Figura 29) é dada por ⁷ $Z_m = R_m + jX_m$, onde:

$$R_m = \frac{60}{\sin\left(\beta \cdot \frac{L}{2}\right)^2} \int_0^{\frac{L}{2}} \sin\left[\beta \cdot \left(\frac{L}{2} - z\right)\right] \cdot \left[\frac{\sin\left[\beta \cdot \sqrt{\left(\frac{L}{2} - z\right)^2 + d^2}\right]}{\sqrt{\left(\frac{L}{2} - z\right)^2 + d^2}} + \frac{\sin\left[\beta \cdot \sqrt{\left(\frac{L}{2} + z\right)^2 + d^2}\right]}{\sqrt{\left(\frac{L}{2} + z\right)^2 + d^2}} - 2 \cdot \cos\left(\beta \cdot \frac{L}{2}\right) \cdot \frac{\sin\left(\beta \cdot \sqrt{z^2 + d^2}\right)}{\sqrt{z^2 + d^2}} \right] dz \quad (36)$$

$$X_m = \frac{60}{\sin\left(\beta \cdot \frac{L}{2}\right)^2} \int_0^{\frac{L}{2}} \sin\left[\beta \cdot \left(\frac{L}{2} - z\right)\right] \cdot \left[\frac{\cos\left[\beta \cdot \sqrt{\left(\frac{L}{2} - z\right)^2 + d^2}\right]}{\sqrt{\left(\frac{L}{2} - z\right)^2 + d^2}} + \frac{\cos\left[\beta \cdot \sqrt{\left(\frac{L}{2} + z\right)^2 + d^2}\right]}{\sqrt{\left(\frac{L}{2} + z\right)^2 + d^2}} - 2 \cdot \cos\left(\beta \cdot \frac{L}{2}\right) \cdot \frac{\cos\left(\beta \cdot \sqrt{z^2 + d^2}\right)}{\sqrt{z^2 + d^2}} \right] dz \quad (37)$$

sendo $\beta = 2\pi/\lambda$.

● As Figuras 30 e 31 mostram as curvas de impedância mútua $Z_m = R_m + jX_m$ obtidas de (36) e (37) em função de d/λ para dois dipolos dispostos conforme a Figura 29. Mesmo que o dipolo virtual seja um segundo dipolo que fisicamente exista, a validade de (36) e (37) ainda é mantida.

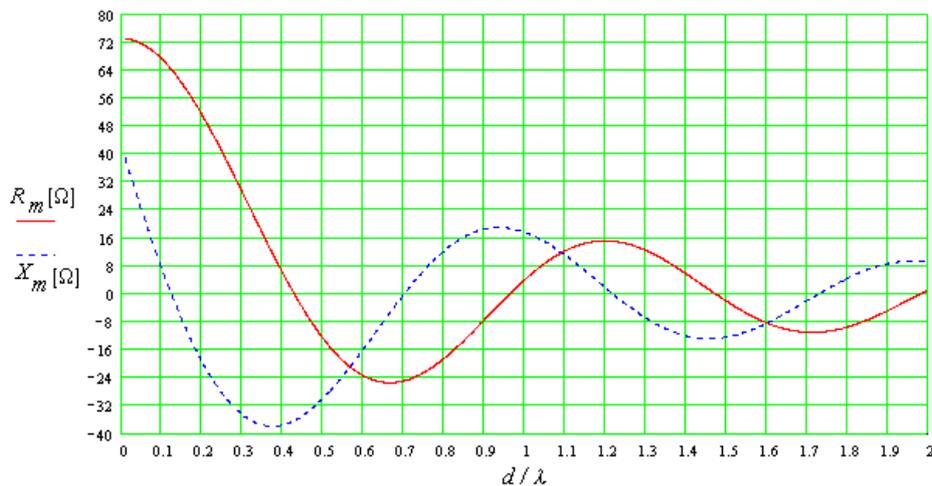


Figura 30: Impedância mútua $Z_m = R_m + jX_m$ entre dois dipolos de meia onda ($L = \lambda/2$) dispostos conforme a Figura 29.

⁷ Vide Balanis, *Antenna Theory*, 2nd ed., John Wiley & Sons, 1997

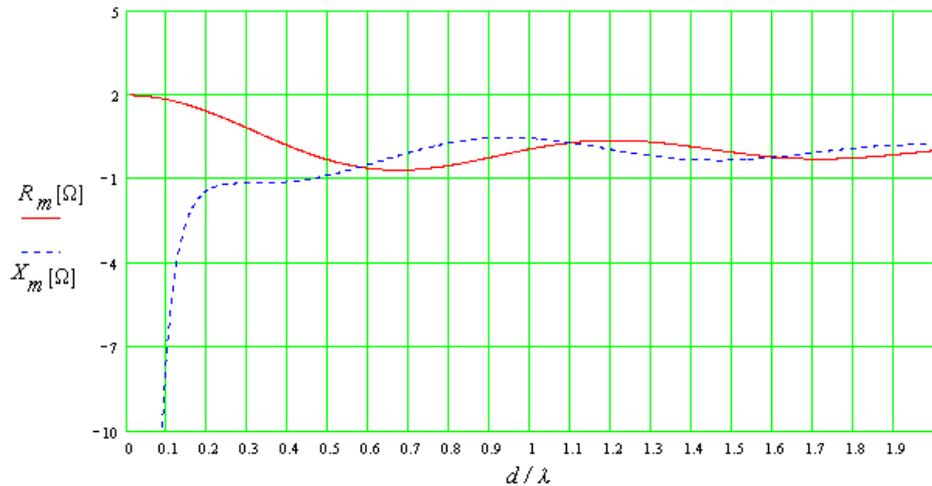


Figura 31: Impedância mútua $Z_m = R_m + jX_m$ entre dois dipolos curtos ($L = \lambda/10$) dispostos conforme a Figura 29.

- As equações (36) e (37) encontram-se implementadas no programa Zm_EchDip.exe, disponível para *download* em <http://diana.ee.pucrs.br/~decastro/download.html> no link **Antenas - Impedância de Dipolos Simétricos (código fonte C e script MathCad 7) - Rev. 06/03/2002 - 328Kb (.zip)**. O programa Zm_EchDip.exe é a forma mais geral do **Método da FEM Induzida**, permitindo o cálculo da impedância mútua entre dipolos simétricos paralelos situados em quaisquer coordenadas relativas entre si e não apenas situados com os centros alinhados conforme a Figura 29.

- Um método mais preciso para a determinação da impedância mútua entre dois dipolos simétricos é aquele baseado no **Método da Perturbação da Antena Bicônica de Schelkunoff**, já discutido no Capítulo III. Embora mais preciso, este método é mais complexo que o Método da FEM Induzida porque leva em consideração o diâmetro do fio cilíndrico. Este método encontra-se implementado no programa Zm_CyPDS.exe, disponível para *download* em <http://diana.ee.pucrs.br/~decastro/download.html> também no link **Antenas - Impedância de Dipolos Simétricos (código fonte C e script MathCad 7) - Rev. 06/03/2002 - 328Kb (.zip)**. O programa Zm_CyPDS.exe determina a impedância mútua entre dipolos simétricos paralelos situados de maneira tal que seus centros são alinhados conforme a Figura 29.

⇒ Note da Figura 30 que se $d \rightarrow 0$ então a impedância mútua entre os dipolos de meia onda tendem para a impedância de entrada de um único dipolo, i.e, se $d \rightarrow 0$ então $Z_m = R_m + jX_m \rightarrow Z_i = R_i + jX_i = 73 + j42.5\Omega$, já obtida com o programa Zi_CyDip.exe no Capítulo III.

⇒ Note da Figura 31 que se $d \rightarrow 0$ então a resistência mútua entre os dipolos curtos tendem para a resistência de radiação $R_r = 80\pi^2(L/\lambda) \approx 2\Omega$, $Le = L/2$, $L = \lambda/10$ de um único dipolo curto.

⇒ No entanto, em consequência do efeito pelicular (*skin effect*), ocorre uma maior concentração de cargas na superfície externa do cilindro condutor que forma a estrutura irradiante do dipolo. Portanto, a distância d entre os dipolos virtual e real que faz $Z_m \rightarrow Z_i$ **não é exatamente** $d = 0$, porque a distribuição de cargas não é uniforme na seção reta do cilindro.

⇒ Determinou-se **experimentalmente** que a distância d entre os dipolos virtual e real que faz $Z_m \rightarrow Z_i$ é $d = a\sqrt{2}$, onde a é o raio do cilindro.

⇒ Daí, em função do exposto, se substituirmos $d = a\sqrt{2}$ em (37) podemos também substituir $X_m = X_i$.

⇒ Mas, visto que a potência reativa também é conservada ao longo do dipolo, temos que $I^2(z_i)X_i = I_0^2 X_r$, onde $z_i = 0$ é a posição dos terminais do dipolo. Daí, com o auxílio de (33), (34) e (35) temos que:

$$X_r = \begin{cases} X_i \operatorname{sen}^2\left(\frac{\beta L}{2}\right) & , L \geq \frac{\lambda}{2} \\ X_i & , L \leq \frac{\lambda}{2} \end{cases} \quad (38)$$

⇒ Substituindo $d = a\sqrt{2}$ e $X_m = X_i$ em (37) e com o auxílio de (38) obtemos a reatância de radiação X_r para um dipolo linear de tamanho L :

$$X_r = \frac{60 \cdot C}{\sin\left(\beta \frac{L}{2}\right)^2} \int_0^{\frac{L}{2}} \sin\left[\beta \cdot \left(\frac{L}{2} - z\right)\right] \cdot \left[\frac{\cos\left[\beta \cdot \sqrt{\left(\frac{L}{2} - z\right)^2 + (a\sqrt{2})^2}\right]}{\sqrt{\left(\frac{L}{2} - z\right)^2 + (a\sqrt{2})^2}} + \frac{\cos\left[\beta \cdot \sqrt{\left(\frac{L}{2} + z\right)^2 + (a\sqrt{2})^2}\right]}{\sqrt{\left(\frac{L}{2} + z\right)^2 + (a\sqrt{2})^2}} - 2 \cdot \cos\left(\beta \cdot \frac{L}{2}\right) \cdot \frac{\cos\left[\beta \cdot \sqrt{z^2 + (a\sqrt{2})^2}\right]}{\sqrt{z^2 + (a\sqrt{2})^2}} \right] dz \quad (39)$$

sendo $C = \begin{cases} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\beta L}{2}\right) & , L \geq \lambda/2 \\ 1.0 & , L \leq \lambda/2 \end{cases}$ e $\beta = 2\pi/\lambda$.

● A Figura 33 mostra as curvas de X_i obtida de (37) fazendo-se $d = a\sqrt{2}$, e a Figura 32 mostra as curvas de X_r resultante de (39):

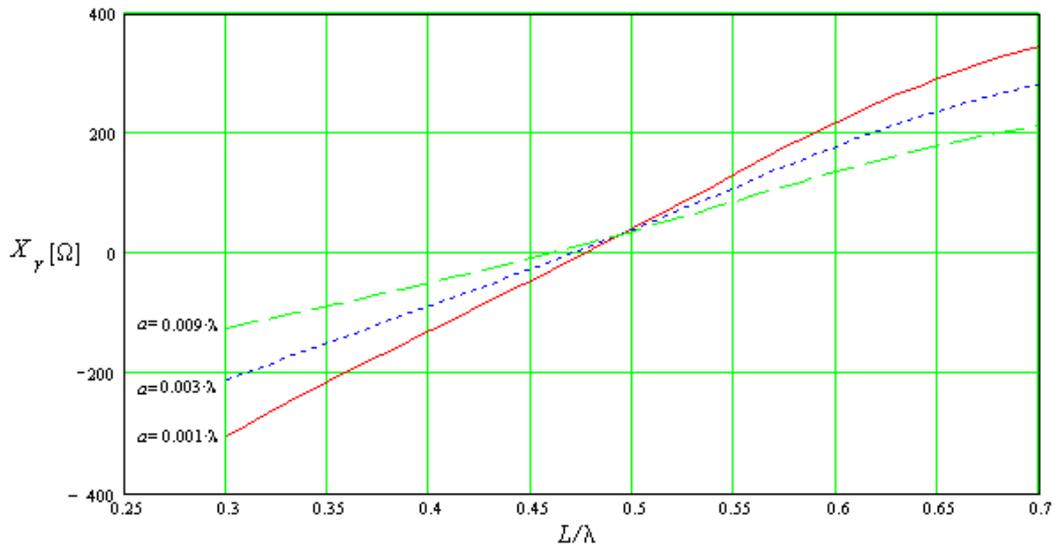


Figura 32: Reatância de radiação X_r do Campo Próximo para um dipolo simétrico de tamanho L e fio condutor de raio a .

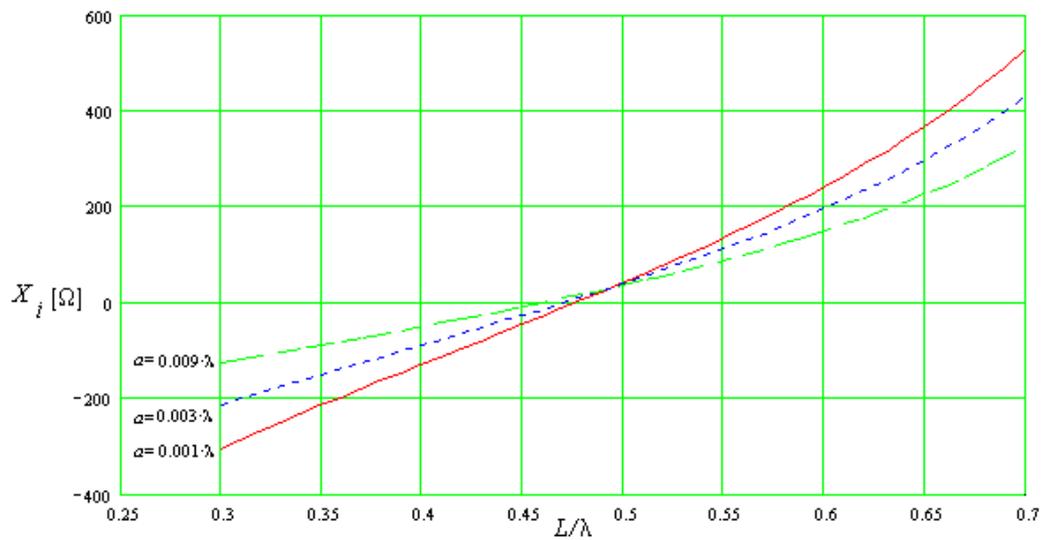


Figura 33: Reatância de entrada X_i para um dipolo simétrico de tamanho L e fio condutor de raio a .

⇒ Note da Figura 33 que **quanto maior for o raio a** do fio condutor de um dipolo de meia onda com relação ao comprimento de onda λ , **maior será a redução necessária com relação ao comprimento de referência $\lambda/2$** para que o dipolo fique em ressonância ($X_i = 0$).

7 O Dipolo Dobrado de Meia Onda

O Dipolo Dobrado de Meia Onda é um artifício de construção utilizado para elevar a impedância de entrada de uma antena linear de meio comprimento de onda. Muitas vezes isto é necessário, principalmente quando o dipolo excitador é parte de um conjunto com elementos parasitas, como é o caso da antena Yagi-Uda, a ser estudada em capítulo posterior. A presença de elementos parasitas reduz excessivamente a impedância de entrada do dipolo excitador, de modo que a utilização de um dipolo dobrado compensa a redução de impedância.

A Figura 34 mostra a decomposição de um dipolo dobrado de meia onda em dois dipolos lineares simétricos.

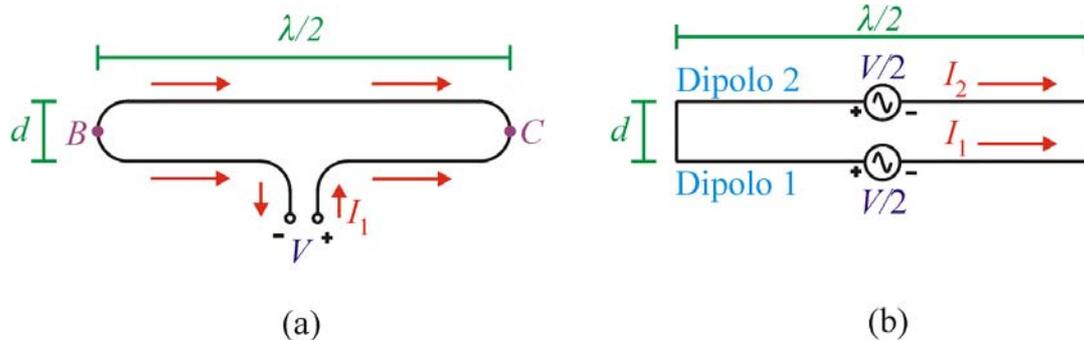


Figura 34: (a) Decomposição de um dipolo dobrado de meia onda em (b) dois dipolos lineares simétricos. A distância d é tal que $d/\lambda < 0.01$.

⇒ Visto que o dipolo dobrado é alimentado no centro, e como o comprimento entre “B” e “C” é $\lambda/2$, a corrente nestes pontos é zero, apesar da continuidade física do condutor para além deste tamanho.

⇒ Portanto, para efeito de análise, desconectando “B” e “C”, temos dois dipolos de meia onda muito próximos um do outro ($d/\lambda < 0.01$).

● Da Teoria de Circuitos, a indutância mútua M_{12} entre dois indutores L_1 e L_2 é $M_{12} = k\sqrt{L_1L_2}$, onde $0 \leq k < 1$ é o **coeficiente de acoplamento** entre os indutores. Em termos das impedâncias envolvidas, $Z_{12} = k\sqrt{Z_1Z_2}$.

● Considerando os condutores dos dipolos 1 e 2 como indutores os L_1 e L_2 com $k \rightarrow 1$ porque estão muito próximos, temos que a impedância mútua Z_{12} entre os dipolos tende para a impedância própria $Z_{11} \approx 73\Omega$ de cada um deles, isto é $Z_{12} = k\sqrt{Z_{11}Z_{11}} \approx Z_{11} \approx 73\Omega$ ⁸.

● Ainda, em consequência da proximidade dos condutores, o dipolo 1 tende a induzir no dipolo 2 a mesma distribuição de corrente nele presente, de modo que $I_2 = I_1$.

● Considerando os dois dipolos como um quadripolo e escrevendo a equação para os terminais do Dipolo 1 temos:

$$\frac{V}{2} = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \tag{40}$$

⇒ Mas, conforme já discutido $Z_{12} = Z_{11} \approx 73\Omega$ e $I_2 = I_1$. Daí (40) torna-se:

⁸ Assuma que o tamanho do dipolo é feito ligeiramente menor do que $\lambda/2$ de modo a torná-lo ressonante, isto é, de modo a anular a componente reativa de sua impedância de radiação.

$$V = 2I_1(Z_{11} + Z_{11}) = 4I_1Z_{11} \quad (41)$$

⇒ Portanto a impedância de entrada Z_i de um dipolo dobrado de meia onda é

$$\frac{V}{I_1} = Z_i = 4Z_{11} \approx 300 \Omega \quad (42)$$

8 A Impedância de Entrada de um Dipolo Linear Simétrico pelo Método de Hallén

● Dentre os métodos não-numéricos para a determinação da impedância de entrada de um dipolo cilíndrico conforme a Figura 35, o **Método da Antena Cilíndrica**, formulado por L.V. King⁹ e desenvolvido por Erik Hallén¹⁰, é considerado o método que mais se aproxima dos valores obtidos experimentalmente. O método de Hallén é preciso para $\ell/a > 60$.

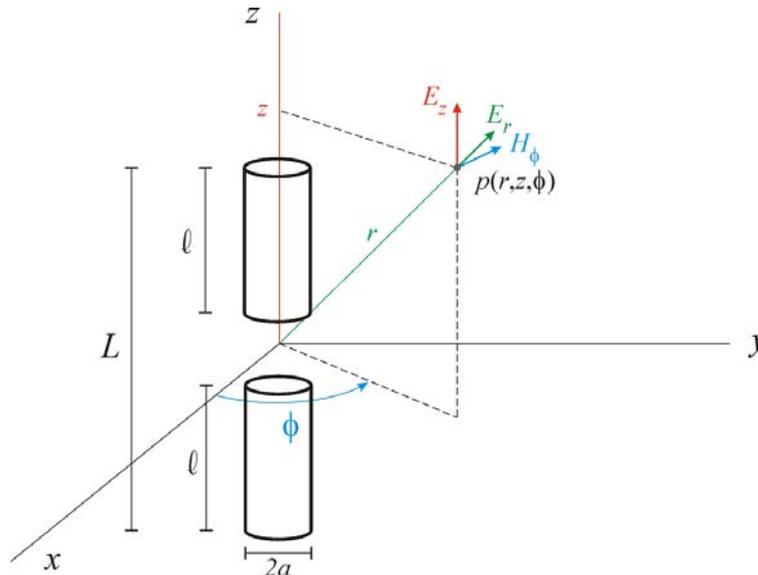


Figura 35: Dipolo linear de comprimento $L = 2\ell$ e raio do fio condutor a em um sistema de coordenadas cilíndricas (r, z, ϕ) . Na análise de Campo Próximo de um dipolo cilíndrico é preferível trabalhar neste sistema de coordenadas devido à geometria do dipolo.

● O Método de Hallén não assume uma distribuição de corrente senoidal, como o faz o Método da FEM Induzida. **A incógnita na Equação Integral de Hallén é a própria distribuição de corrente no cilindro**, tendo como condição de contorno a continuidade do campo E_z tangencial na fronteira entre o exterior do cilindro e o interior do mesmo.

⁹ L. V. King, On the Radiation Field of a Perfectly Conductive Base Insulated Cylindrical Antenna Over a Perfectly Conducting Plane Earth, and the Calculation of Radiation Resistance and Reactance, *Transactions of Royal Society*, A236, pp. 381-422, London, 1937.

¹⁰ E. Hallén, Transmitting and Receiving Qualities of Antennas, *Nova Acta Upasaliensis*, Séries IV, vol.11, pp. 1-43, 1938.

- Portanto a solução da Equação Integral de Hallén implicitamente leva em consideração a tendência das cargas aceleradas concentrarem-se na casca exterior do cilindro (*skin effect*), porque não assume a priori nenhuma distribuição de corrente. Daí a conseqüente melhor conformidade do método com resultados experimentais para razões ℓ/a tão pequenas quanto $\ell/a = 60$.
- As Figuras 36 e 37 mostram curvas de impedância de entrada $Z_i = R_i + jX_i$ [Ω] de uma antena cilíndrica conforme a Figura 35, resultante da solução da Equação Integral de Hallén. As curvas são função de L/λ e são parametrizadas por ℓ/a .

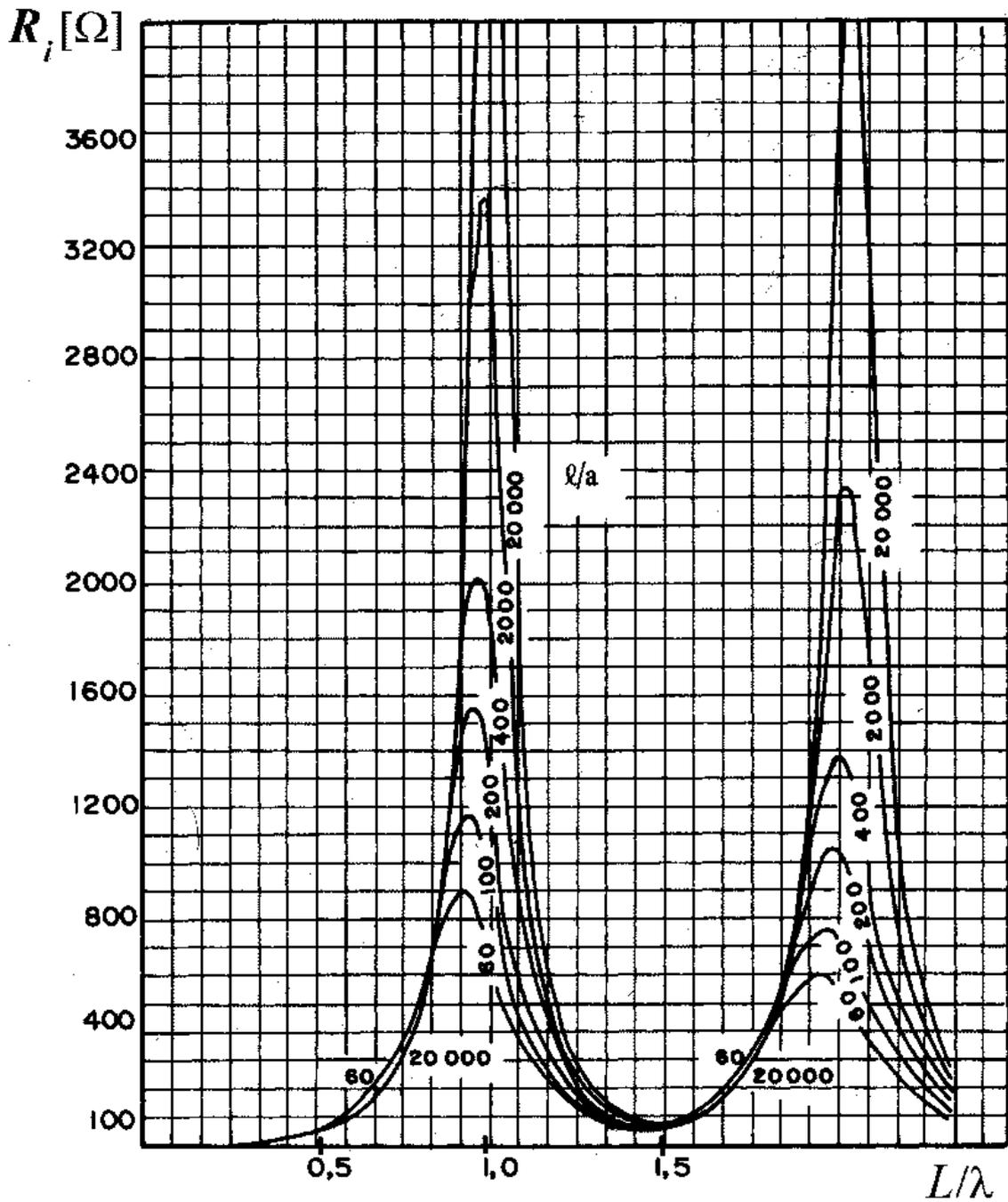


Figura 36: Curvas da resistência de entrada R_i de uma antena cilíndrica conforme a Figura 35, resultante da solução da Equação Integral de Hallén.

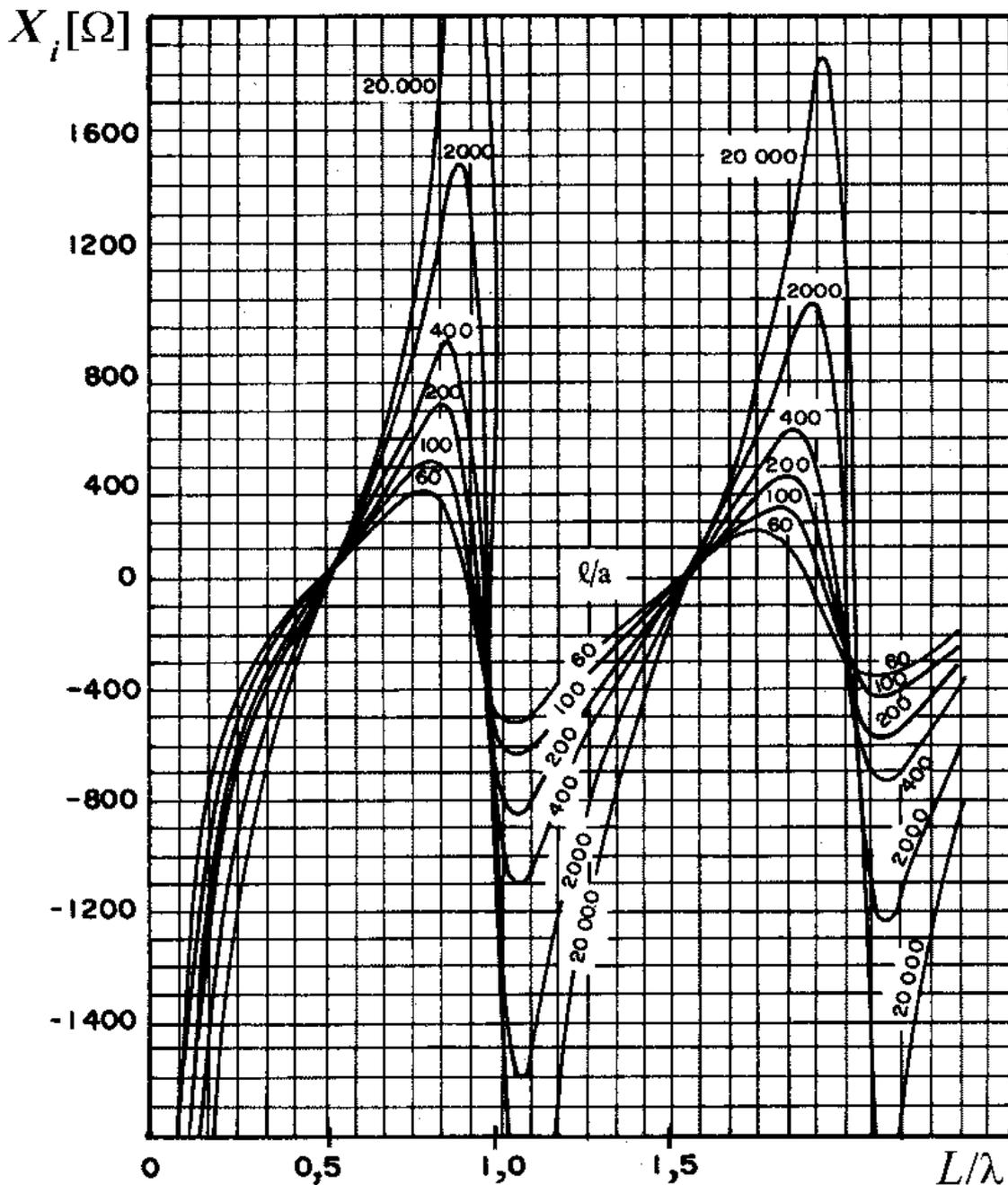


Figura 37: Curvas da reatância de entrada X_i de uma antena cilíndrica conforme a Figura 35, resultante da solução da Equação Integral de Hallén.

⇒ Observe das Figuras 36 e 37 que quanto menor é l/a (tanto menor é l/a tanto mais “gordo” é o dipolo) menor a variação de Z_i com o comprimento de onda de operação λ , e, em consequência, menor a variação de Z_i com $f = c/\lambda$. Portanto, antenas “gordas” têm uma maior banda de passagem sob o ponto de vista da ROE do que antenas “magras”.

9 O Teorema da Reciprocidade entre antenas TX e RX

O Teorema da Reciprocidade postula que os seguintes parâmetros de uma antena:

- Diagrama da Radiação
- Diretividade
- Abertura
- Impedância da Antena

são **invariantes** quando alternamos a utilização da antena como transmissora ou receptora e vice-versa.

- O Teorema da Reciprocidade é enunciado como (ver Figura 38):

◆ Sejam duas antenas idênticas, Antena 1 e Antena 2, em um meio **linear, passivo e isotrópico**.

◆ Seja um gerador de tensão senoidal $V_g(t)$ aplicado nos terminais da Antena 1 tal que a corrente I_1 resultante induz uma tensão V_{21} nos terminais (abertos) da Antena 2.

◆ Seja o mesmo gerador $V_g(t)$ aplicado nos terminais da Antena 2 tal que a corrente I_2 resultante induz uma tensão V_{12} nos terminais (abertos) da Antena 1.

⇒ Visto que as antenas são idênticas e o gerador $V_g(t)$ é o mesmo, então $I_1 = I_2$.

⇒ Daí, em consequência, $V_{12} = V_{21}$, o que prova a reciprocidade.

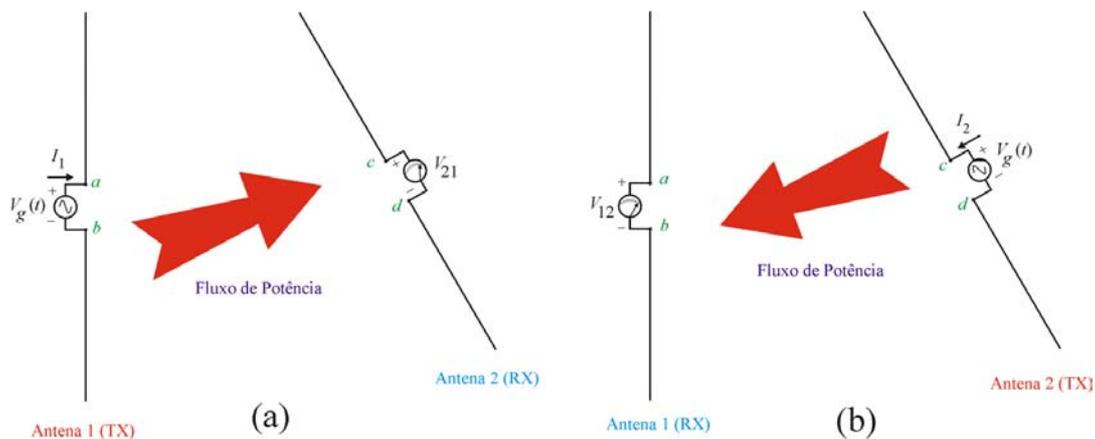


Figura 38: Reciprocidade entre duas antenas idênticas em um meio linear, passivo e isotrópico (meio linear, passivo e isotrópico → O fluxo de potência independe do sentido e da intensidade da potência aplicada ao meio).

Observação: Em geral, no entanto, a distribuição de corrente em uma antena transmissora não é a mesma distribuição de corrente para a mesma antena utilizada como receptora.

- Sob o ponto de vista da Teoria de Circuitos, podemos demonstrar a reciprocidade considerando que qualquer circuito de 4 terminais pode ser reduzido a uma seção T equivalente. Daí, podemos representar as antenas da Figura 38 pelo seguinte quadripolo:

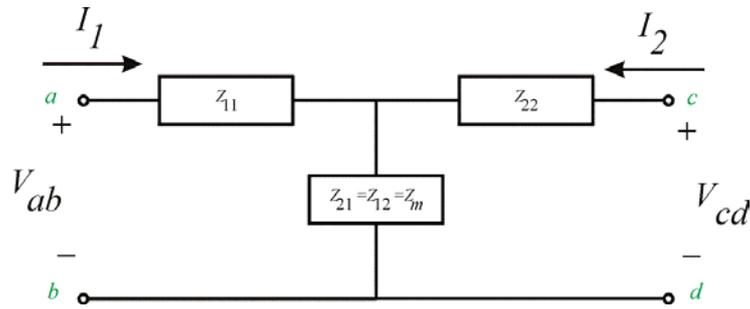


Figura 39: Circuito T equivalente para as antenas da Figura 38, onde Z_{11} é a impedância própria da Antena 1, Z_{22} é a impedância própria da Antena 2 e Z_m é a impedância mútua entre as duas antenas. $Z_{21} = Z_{12} = Z_m$ é válido porque o meio é assumido ser linear, passivo e isotrópico.

● Ao aplicarmos uma tensão $V_{ab} = V_g(t)$ nos terminais ab resulta uma corrente $I_1 = \frac{V_g(t)}{Z_{11} + Z_m}$ entrando pelo terminal a , a qual gera uma tensão $V_{cd} = V_{21} = I_1 Z_m$ com os terminais c e d abertos.

● Ao aplicarmos uma tensão $V_{cd} = V_g(t)$ nos terminais cd resulta uma corrente $I_2 = \frac{V_g(t)}{Z_{22} + Z_m}$ entrando pelo terminal c , a qual gera uma tensão $V_{ab} = V_{12} = I_2 Z_m$ com os terminais c e d abertos.

⇒ Mas, visto que as antenas são idênticas, então $Z_{22} = Z_{11} = Z_A$. Daí $I_1 = I_2 = \frac{V_g(t)}{Z_A + Z_m}$, e, portanto, $V_{21} = V_{12} = I_1 Z_m = I_2 Z_m$.

10 Efeito do Solo na Impedância de Entrada e no Diagrama de Irradiação de um Dipolo Horizontal Simétrico

● Até agora só consideramos antenas horizontais no espaço livre. Entretanto dependendo da altura h da antena em relação ao solo, o comportamento da antena poderá ser grandemente modificados. Na prática as antenas horizontais estão sobre ou a uns poucos comprimentos de onda do solo.

● Seja um dipolo horizontal simétrico de tamanho L situado a uma altura h do solo, aqui assumido como sendo um condutor perfeito, conforme a Figura 40:

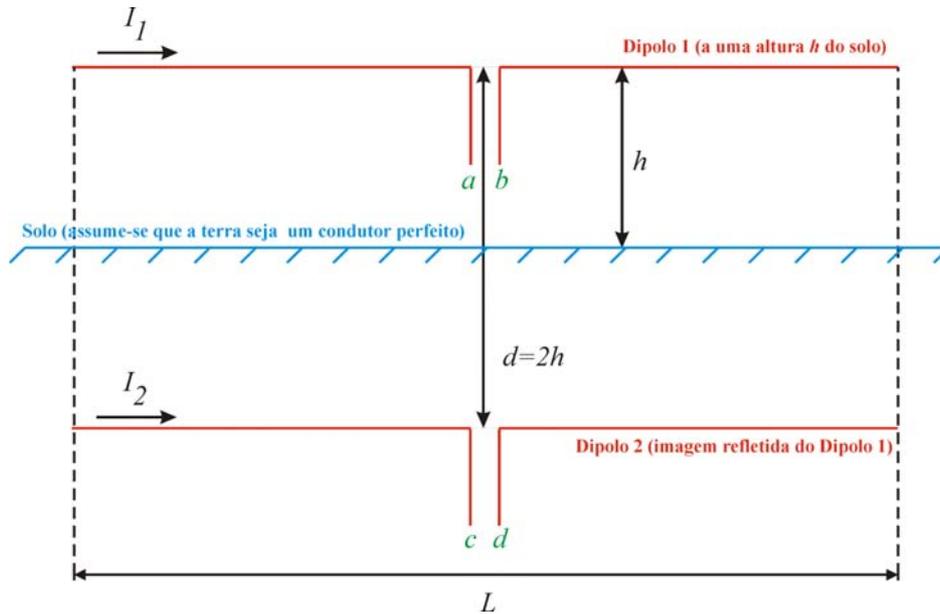


Figura 40: Dipolo horizontal de tamanho L situado a uma altura h do solo e sua imagem resultante.

⇒ Para qualquer meio condutor perfeito, a componente tangencial do campo elétrico é nula na fronteira com um meio dielétrico (ar). **Portanto o campo elétrico tangencial ao solo é zero.**

⇒ O fato de o campo elétrico tangencial ao solo ser zero pode ser interpretado como se não houvesse a fronteira condutor-dielétrico entre o solo e o ar, **mas o anulamento do campo elétrico tangencial é garantido pela existência de um dipolo “virtual” ou “imagem espelhada” do dipolo (Dipolo 2 na Figura 40) alimentado por um gerador “virtual” $V_{cd} = -V_g(t)$ tal que $V_{cd} = -V_{ab}$.**

⇒ A tensão V_{ab} nos terminais do Dipolo 1 da Figura 40 pode ser expressa pela superposição de uma tensão própria com uma tensão induzida pelo Dipolo 2, isto é:

$$V_{ab} = I_1 Z_i + I_2 Z_m \quad (43)$$

onde Z_i é a impedância de entrada do Dipolo 1 caso ele estivesse no espaço livre (longe do solo), Z_m é a impedância mútua entre o Dipolo 1 e o Dipolo 2 e I_2 é a corrente no Dipolo 2.

⇒ Mas $V_{ab} = V_g(t)$ e $V_{cd} = -V_g(t)$, e, visto que as antenas são idênticas, então, $I_2 = -I_1$. Substituindo esta condição em (43):

$$V_{ab} = I_1 Z_i - I_1 Z_m \quad (44)$$

ou

$$Z_{ab} = R_{ab} + jX_{ab} = \frac{V_{ab}}{I_1} = Z_i - Z_m \quad (45)$$

⇒ Mas $Z_i = R_i + jX_i$ pode ser dado por (36) e (37) p/ $d = a\sqrt{2}$ e $Z_m = R_m + jX_m$ pode ser obtido também de (36) e (37) p/ $d = 2h$. A Figura 41 a seguir mostra as curvas de R_{ab} e X_{ab} obtidas de (36), (37) e (45) em função de h para um dipolo de meia onda ($L = \lambda/2$) e $a = 0.001\lambda$:

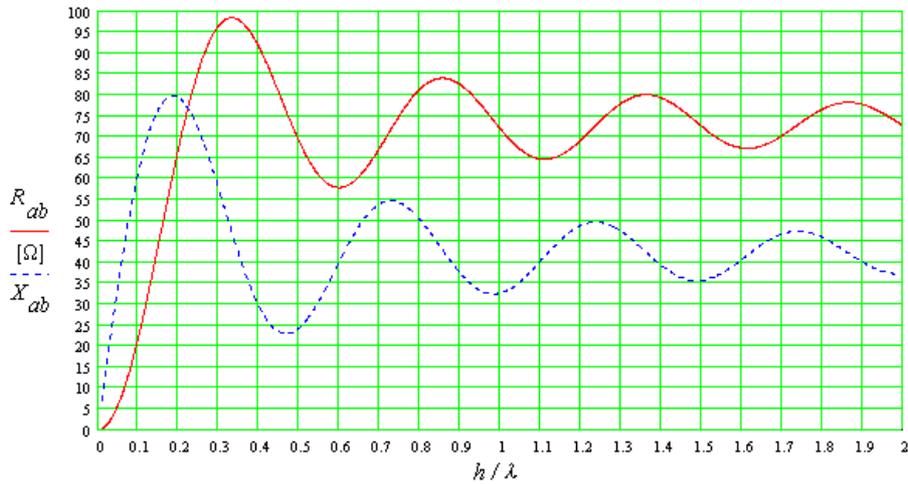


Figura 41: $Z_{ab} = R_{ab} + jX_{ab} = Z_i - Z_m$ para um dipolo horizontal de tamanho $L = \lambda/2$ em função de sua altura do solo normalizada h/λ .

⇒ Note da Figura 41 que para antenas a uma altura do solo entre 0 e 0.2λ , há uma redução substancial na resistência de entrada R_{ab} , o que tende a baixar a eficiência da antena.

10.1 O Efeito do Solo sobre o Diagrama de Irradiação

⇒ Note da Figura 41 que X_{ab} varia com h , indicando que a fase da corrente em relação à tensão do gerador é função h . Isto implica em que a distribuição de corrente nos dois dipolos também é função de h . Portanto, a composição fasorial do Campo Distante gerado por cada dipolo infinitesimal que constitui ambos dipolos também é dependente de h .

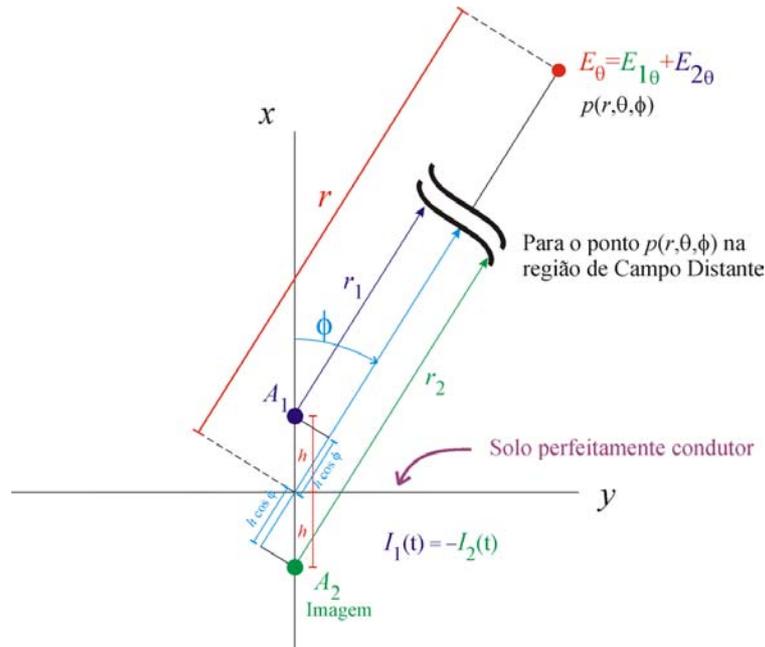


Figura 42: Dipolo real A_1 e dipolo imagem A_2 formada no solo.

⇒ Vimos que a Equação (18) define o Campo Distante de qualquer antena linear de tamanho L situada no espaço livre:

$$E_{\theta} = \frac{I_0 60}{r} e^{j(\omega t - \beta r + \frac{\pi}{2})} \left\{ \frac{\cos\left(\frac{L}{\lambda} \pi \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\sin \theta} \right\} \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right] \quad (18)$$

⇒ Portanto, com base na Figura 42, os campos $E_{1\theta}$ e $E_{2\theta}$ gerados respectivamente pelos dipolos real A_1 e imagem A_2 no ponto distante $p(r, \theta, \phi)$, são dados por:

$$\begin{aligned}
 E_{1\theta} &= \frac{I_0 60}{r} e^{j\left(\omega t - \beta r_1 + \frac{\pi}{2}\right)} \left\{ \frac{\cos\left(\frac{L}{\lambda} \pi \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\text{sen } \theta} \right\} = \\
 &= \frac{I_0 60}{r} e^{j\left(\omega t - \beta(r-h \cos \phi) + \frac{\pi}{2}\right)} \left\{ \frac{\cos\left(\frac{L}{\lambda} \pi \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\text{sen } \theta} \right\} = \\
 &= \frac{I_0 60}{r} e^{j(\beta h \cos \phi)} e^{j\left(\omega t - \beta r + \frac{\pi}{2}\right)} \left\{ \frac{\cos\left(\frac{L}{\lambda} \pi \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\text{sen } \theta} \right\} \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right] \quad (46)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_{2\theta} &= \frac{-I_0 60}{r} e^{j\left(\omega t - \beta r_2 + \frac{\pi}{2}\right)} \left\{ \frac{\cos\left(\frac{L}{\lambda} \pi \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\text{sen } \theta} \right\} = \\
 &= \frac{-I_0 60}{r} e^{j\left(\omega t - \beta(r+h \cos \phi) + \frac{\pi}{2}\right)} \left\{ \frac{\cos\left(\frac{L}{\lambda} \pi \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\text{sen } \theta} \right\} = \\
 &= \frac{-I_0 60}{r} e^{-j(\beta h \cos \phi)} e^{j\left(\omega t - \beta r + \frac{\pi}{2}\right)} \left\{ \frac{\cos\left(\frac{L}{\lambda} \pi \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\text{sen } \theta} \right\} \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right] \quad (47)
 \end{aligned}$$

onde $\beta = 2\pi/\lambda$.

\Rightarrow O campo total E_θ é dado pela soma fasorial de $E_{2\theta}$ e $E_{1\theta}$ em $p(r, \theta, \phi)$:

$$E_\theta = E_{1\theta} + E_{2\theta} = I_0 \left(e^{j(\beta h \cos \phi)} - e^{-j(\beta h \cos \phi)} \right) \left\{ \frac{\cos\left(\frac{L}{\lambda} \pi \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\text{sen } \theta} \right\} \frac{60}{r} e^{j\left(\omega t - \beta r + \frac{\pi}{2}\right)} \quad (48)$$

ou

$$\begin{aligned}
 E_{\theta} &= I_0 \left(e^{j(\beta h \cos \phi)} - e^{-j(\beta h \cos \phi)} \right) \left\{ \frac{\cos\left(\frac{L}{\lambda} \pi \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\text{sen } \theta} \right\} \frac{60}{r} e^{j\left(\omega t - \beta r + \frac{\pi}{2}\right)} = \\
 &\stackrel{[2]}{=} jI_0 \frac{\left(e^{j(\beta h \cos \phi)} - e^{-j(\beta h \cos \phi)} \right)}{2j} \left\{ \frac{\cos\left(\frac{L}{\lambda} \pi \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\text{sen } \theta} \right\} \frac{60}{r} e^{j\left(\omega t - \beta r + \frac{\pi}{2}\right)} = \\
 &\stackrel{[2]}{=} jI_0 \text{sen}(\beta h \cos \phi) \left\{ \frac{\cos\left(\frac{L}{\lambda} \pi \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\text{sen } \theta} \right\} \frac{60}{r} e^{j\left(\omega t - \beta r + \frac{\pi}{2}\right)} = \\
 &\stackrel{[2]}{=} I_0 \text{sen}(\beta h \cos \phi) \left\{ \frac{\cos\left(\frac{L}{\lambda} \pi \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\text{sen } \theta} \right\} \frac{60}{r} e^{j(\omega t - \beta r + \pi)} \quad \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right]
 \end{aligned} \tag{49}$$

⇒ Mas, vimos no Capítulo III, que o **Padrão de Irradiação** $F(\theta, \phi)$ de uma antena é a expressão analítica que define a intensidade normalizada do campo elétrico $E_{\theta}(\theta, \phi)$ resultante em cada ponto de uma superfície esférica Σ de raio $r = r_{\Sigma}$ em cujo centro encontra-se a antena:

$$F(\theta, \phi) = \frac{E_{\theta}(\theta, \phi)}{E_{\theta \max}} \tag{50}$$

⇒ Daí, para o Campo Distante temos de (49) e (50):

$$F(\theta, \phi) = \frac{\text{sen}(\beta h \cos \phi) \left\{ \frac{\cos\left(\frac{L}{\lambda} \pi \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\text{sen } \theta} \right\}}{\max \left\{ \text{sen}(\beta h \cos \phi) \left\{ \frac{\cos\left(\frac{L}{\lambda} \pi \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\text{sen } \theta} \right\} \right\}} \tag{51}$$

⇒ As Figuras 43 a 46 mostram o Diagrama de Irradiação no plano H de um dipolo horizontal de tamanho $L = \lambda/2$ a uma altura h do solo perfeitamente condutor. Os gráficos foram obtidos de (51) para $\theta = 90^{\circ}$.

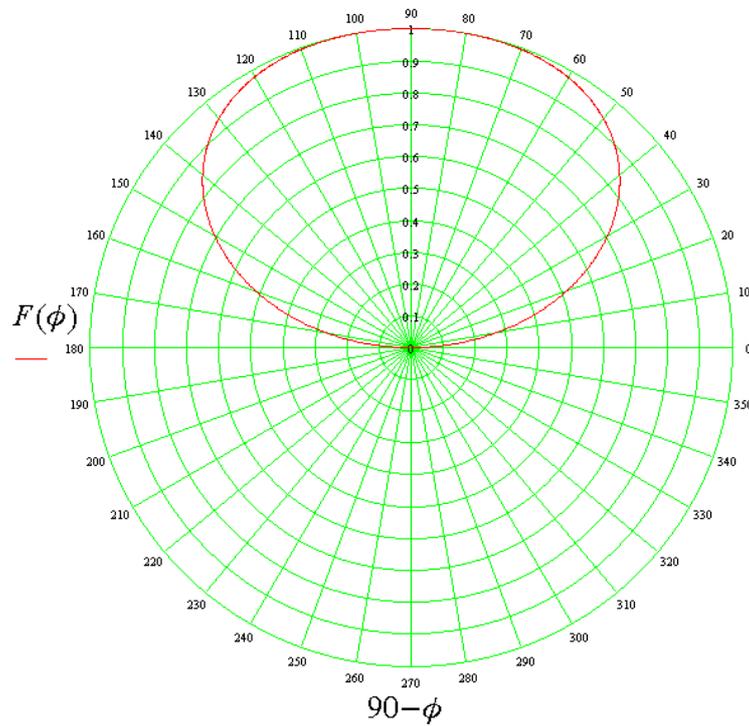


Figura 43: o Diagrama de Irradiação no plano H de um dipolo horizontal de tamanho $L = \lambda/2$ a uma altura $h = 0.25\lambda$ do solo. O fio condutor do dipolo é perpendicular ao plano da figura.

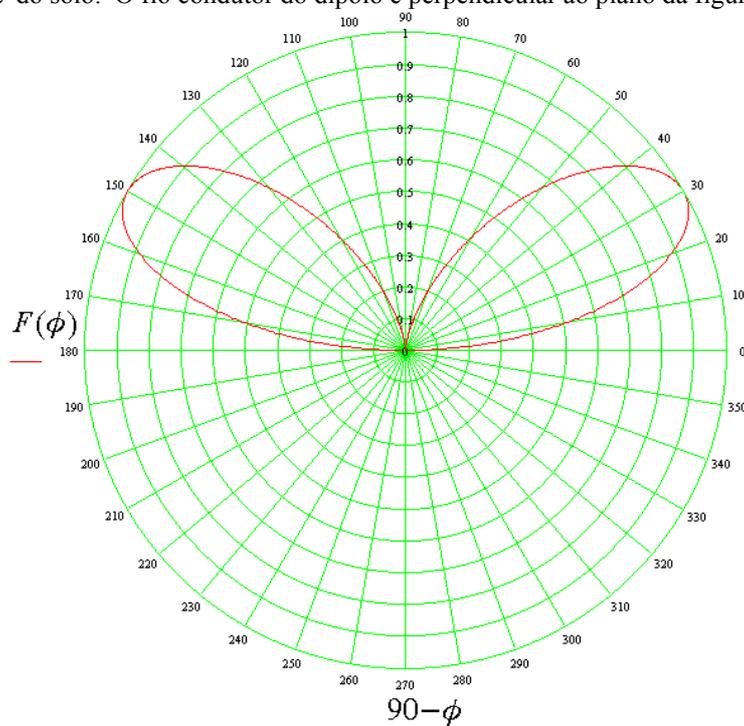


Figura 44: o Diagrama de Irradiação no plano H de um dipolo horizontal de tamanho $L = \lambda/2$ a uma altura $h = 0.5\lambda$ do solo. O fio condutor do dipolo é perpendicular ao plano da figura.

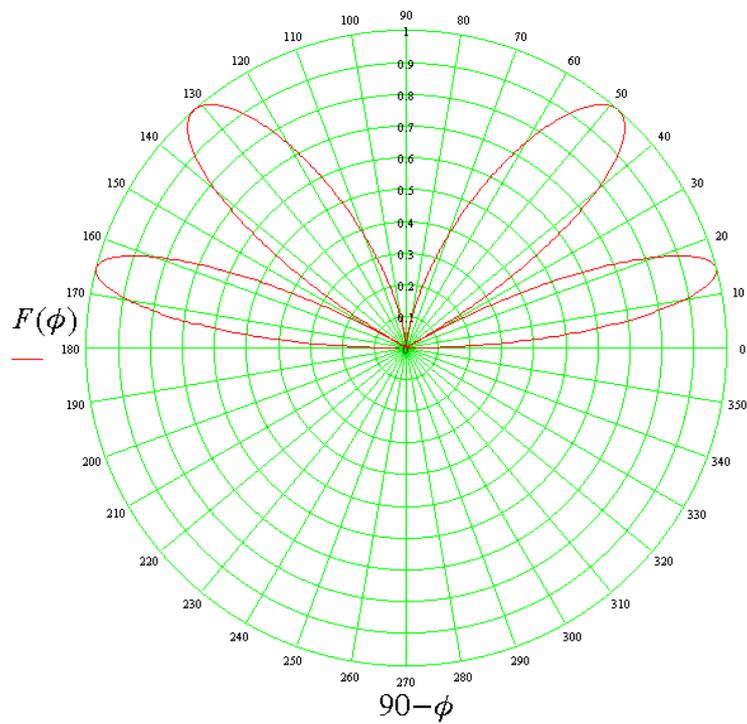


Figura 45: o Diagrama de Irradiação no plano H de um dipolo horizontal de tamanho $L = \lambda/2$ a uma altura $h = 1.0\lambda$ do solo. O fio condutor do dipolo é perpendicular ao plano da figura.

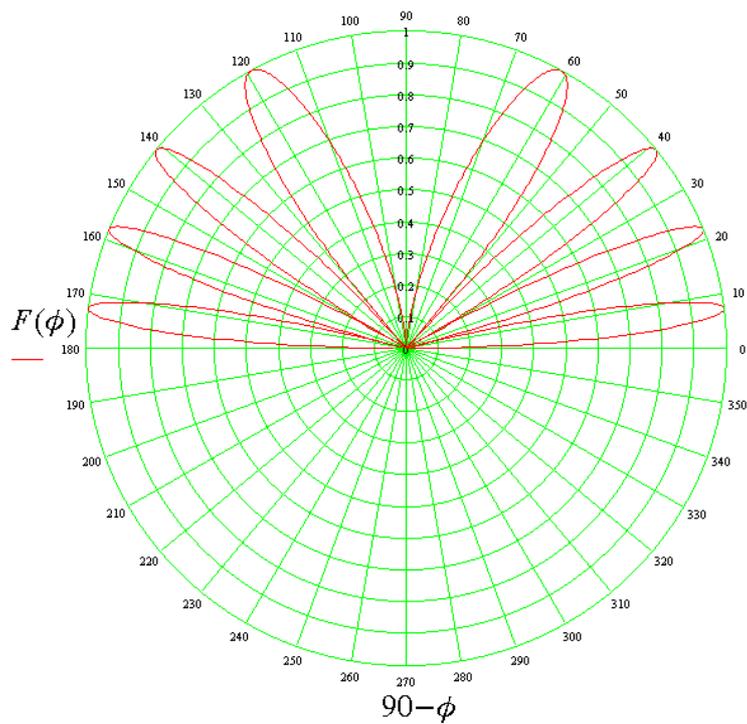


Figura 46: o Diagrama de Irradiação no plano H de um dipolo horizontal de tamanho $L = \lambda/2$ a uma altura $h = 2.0\lambda$ do solo. O fio condutor do dipolo é perpendicular ao plano da figura.

11 A Diretividade e a Abertura Efetiva de um Dipolo de Meia Onda

● Vimos no Capítulo III que a **Diretividade** de uma antena é dada por $D = 4\pi/\Omega_a$ sendo

$\Omega_a = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} P(\theta, \phi) \text{sen } \theta \, d\theta \, d\phi$ [rad²] o **Ângulo Sólido do Feixe** e $P(\theta, \phi)$ é o **Padrão de Potência** da antena.

De (19), para um dipolo de tamanho L o **Padrão de Irradiação** é dado por:

$$F(\theta, \phi) = \frac{\cos\left(\frac{L}{\lambda} \pi \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\text{sen } \theta}, \quad \forall \phi \quad (52)$$

Logo o **Padrão de Potência** é

$$P(\theta, \phi) = \left(\frac{\cos\left(\frac{L}{\lambda} \pi \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\text{sen } \theta} \right)^2, \quad \forall \phi \quad (53)$$

daí

$$\Omega_a = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} P_n(\theta, \phi) \text{sen } \theta \, d\theta \, d\phi = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \left(\frac{\cos\left(\frac{L}{\lambda} \pi \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\text{sen } \theta} \right)^2 \text{sen } \theta \, d\theta \, d\phi \quad (54)$$

Para um dipolo de tamanho $L = \lambda/2$ (54) torna-se:

$$\Omega_a = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\text{sen } \theta} \right)^2 \text{sen } \theta \, d\theta \, d\phi = 7.658 \text{ rad}^2 \quad (55)$$

⇒ Portanto, para um dipolo de meia-onda temos que

$$D = 4\pi/\Omega_a = 1.64 \quad (56)$$

⇒ E, da Equação (87) do Capítulo III temos

$$A_{\text{RX(max)Dipolo}\lambda/2} = D \frac{\lambda^2}{4\pi} = 1.64 \frac{\lambda^2}{4\pi} = 0.130\lambda^2 \quad (57)$$