

Capítulo V

Arrays

1 Introdução

No contexto de Séries de Fourier¹, podemos gerar qualquer forma de onda $f(t)$ em um período T somando um número suficiente de funções cossenos, cada uma delas com amplitude A_k e fase ψ_k específicas, tendo cada coseno uma frequência $f = k/T$, $k = 1, 2, \dots$:

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t + \psi_k\right) \quad (1)$$

No contexto de antenas, podemos gerar qualquer Diagrama de Irradiação $F(\theta, \phi)$ nos intervalos $0 < \theta < 180^\circ$ e $0 < \phi < 360^\circ$ somando os campos de um número suficiente de irradiadores eletromagnéticos, cada um deles alimentado por uma corrente com amplitude $|I_k|$ e fase $\angle I_k$ específicas, sendo cada irradiador localizado em posições distintas dos demais no espaço \mathfrak{R}^3 .

Um conjunto (*Array*) de K irradiadores localizados em uma região do espaço \mathfrak{R}^3 , cada um deles excitado por uma corrente $I_k = |I_k|e^{j\angle I_k}$, $k = 0, 1, \dots, K-1$, objetiva somar os campos individuais de cada irradiador de modo a maximizar o campo elétrico E_θ em um ponto de interesse $p(r, \theta, \phi)$ localizado na região de Campo Distante, minimizando E_θ em todas as demais direções (θ, ϕ) .

O problema de maximizar o campo irradiado em uma direção desejada foi por muito tempo resolvido através do uso de superfícies eletricamente refletoras, as quais tendem a atuar como espelhos ópticos focalizando o feixe. Uma antena parabólica é um exemplo típico deste tipo de abordagem do problema. No entanto, com a evolução da Teoria de Sistemas Adaptativos – em especial Redes Neurais Artificiais – e com o aumento da capacidade computacional e redução de custo dos microprocessadores, têm havido uma mudança na abordagem deste problema em favor dos *arrays*. A grande vantagem dos *arrays* sobre as antenas refletoras é que o diagrama de irradiação $F(\theta, \phi)$ de um *array* pode ser totalmente determinado pela amplitude $|I_k|$ e fase $\angle I_k$ das correntes de cada irradiador que o compõe. Antenas refletoras, por outro lado, têm o seu diagrama de irradiação basicamente dependente da geometria da superfície refletora o que pode elevar os custos de fabricação a níveis absurdos para determinados diagramas de irradiação desejados.

O problema básico a ser resolvido no projeto de um *array* de K irradiadores é: Dado $F(\theta, \phi)$ desejado e a localização no espaço \mathfrak{R}^3 dos K irradiadores, quais são os valores de $I_k = |I_k|e^{j\angle I_k}$, $k = 0, 1, \dots, K-1$, que resultam em uma boa aproximação de $F(\theta, \phi)$?

Existem vários métodos clássicos que resultam em um maior ou menor erro de aproximação do $F(\theta, \phi)$ desejado. Um *array* clássico é aquele definido a partir do método Dolph-Tschebyscheff².

¹ Vide Charles M. Close, *Circuitos Lineares*, Livros Técnicos e Científicos Editora, 1975.

² Vide Balanis, *Antenna Theory*, 2nd ed., John Wiley & Sons, 1997.

Nenhum método clássico, no entanto, é tão flexível quanto aqueles baseados em *beamformers*³, cujo princípio de funcionamento origina-se na Teoria de Sistemas Adaptativos.

Neste estudo focalizaremos na análise de *arrays*, especificamente em *arrays* formados por dipolos lineares. Note, no entanto, que um *array* pode ser constituído por qualquer tipo de irradiador. Começaremos nossa análise com o *array* mais simples possível, o *array* de apenas dois irradiadores, conforme mostrado na Figura 1:

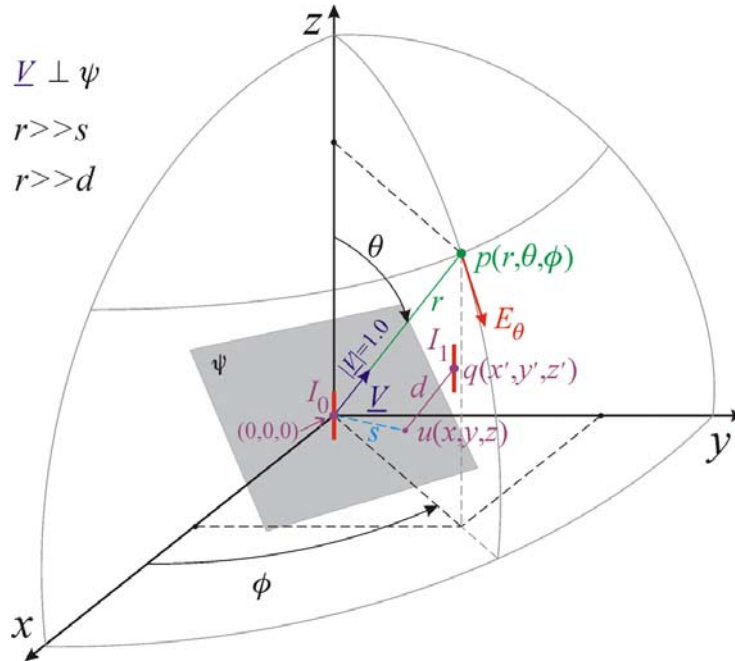


Figura 1: *Array* de dois irradiadores do tipo dipolo linear (em vermelho), cada um deles percorrido respectivamente pelas correntes $I_0 = |I_0|e^{j\angle I_0}$ e $I_1 = |I_1|e^{j\angle I_1}$. $|I_0|$ e $|I_1|$ são os valores máximos das correntes nos respectivos irradiadores. O centro do irradiador I_0 encontra-se localizado nas coordenadas $(0,0,0)$. O irradiador I_1 , com centro localizado em $q(x', y', z')$, encontra-se afastado de uma distância d do plano ψ que passa na origem $(0,0,0)$ e que é perpendicular ao raio r . Projetando $q(x', y', z')$ perpendicularmente sobre o plano ψ obtemos o ponto $u(x, y, z) \in \psi$, o qual encontra-se afastado de uma distância s da origem $(0,0,0)$.

O campo elétrico E_θ em um ponto $p(r, \theta, \phi)$ da região de Campo Distante é uma composição dos campos elétricos dos irradiadores I_0 e I_1 .

O irradiador I_0 gera um campo elétrico $E_{\theta,0}$ em $p(r, \theta, \phi)$ dado por⁴:

³ Vide Simon Haykin, *Adaptive Filter Theory, 3rd ed.*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1996.

⁴ Ver Equação (18) do Capítulo IV.

$$E_{\theta,0} = \frac{I_0 60}{r} e^{j\left(\omega t - \beta r + \frac{\pi}{2}\right)} \left\{ \frac{\cos\left(\frac{L}{\lambda} \pi \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\text{sen } \theta} \right\} \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right] \quad (2)$$

onde $\beta = 2\pi/\lambda$ e L é o tamanho total do dipolo.

Considerando que $r \gg s$, o que faz o raio r tender a ser paralelo ao segmento \overline{uq} na Figura 1, e considerando que $r \gg d$, então o irradiador I_1 gera um campo elétrico $E_{\theta,1}$ em $p(r, \theta, \phi)$ dado por:

$$\begin{aligned} E_{\theta,1} &= \frac{I_1 60}{(r-d)} e^{j\left(\omega t - \beta(r-d) + \frac{\pi}{2}\right)} \left\{ \frac{\cos\left(\frac{L}{\lambda} \pi \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\text{sen } \theta} \right\} = \\ &= \frac{I_1 e^{j\beta d} 60}{r} e^{j\left(\omega t - \beta r + \frac{\pi}{2}\right)} \left\{ \frac{\cos\left(\frac{L}{\lambda} \pi \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\text{sen } \theta} \right\} \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right] \end{aligned} \quad (3)$$

A substituição do fator de amplitude $1/(r-d)$ por $1/r$ efetuada em (3) decorre da condição $r \gg d$.

No entanto, a distância d não pode ser desprezada no fator de fase $e^{j\beta(r-d)}$ visto que o campo resultante é uma soma fasorial dos campos individuais.

Somando (2) e (3), obtemos $E_\theta = E_{\theta,0} + E_{\theta,1}$:

$$E_\theta = \left(I_0 + I_1 e^{j\beta d} \right) \frac{60}{r} e^{j\left(\omega t - \beta r + \frac{\pi}{2}\right)} \left\{ \frac{\cos\left(\frac{L}{\lambda} \pi \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\text{sen } \theta} \right\} \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right] \quad (4)$$

Necessitamos, agora, expressar a distância d do ponto $q(x', y', z')$ ao plano ψ em função da direção (θ, ϕ) do ponto $p(r, \theta, \phi)$.

Suponhamos que $p(r, \theta, \phi)$ esteja na ponta do vetor \underline{V} , suposição que não altera a direção (θ, ϕ) original de \underline{V} , conforme mostra a Figura 2:

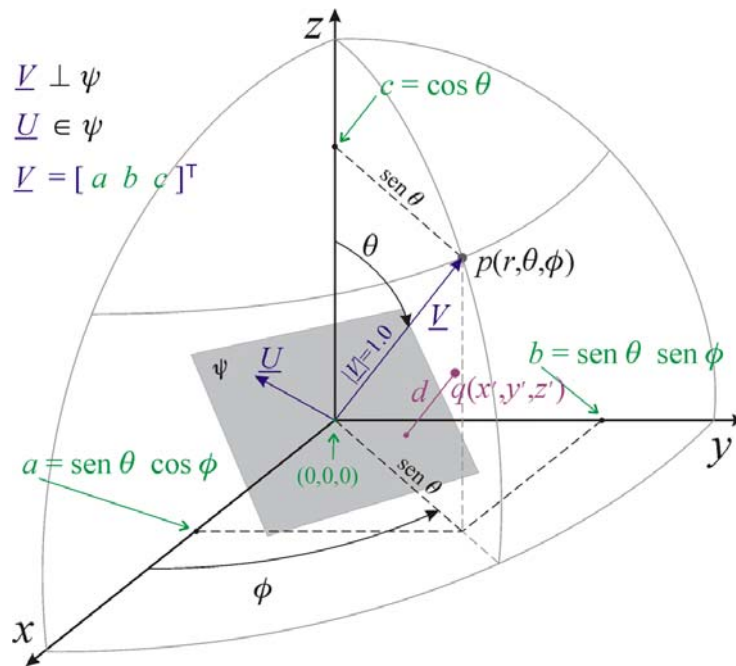


Figura 2: Componentes do vetor unitário \underline{V} em função da direção (θ, ϕ) . \underline{V} é perpendicular ao plano ψ e alinhado com o raio r .

Da Figura (2) temos:

$$\underline{V} = \begin{bmatrix} \text{sen } \theta \cos \phi \\ \text{sen } \theta \text{ sen } \phi \\ \cos \theta \end{bmatrix} \quad (5)$$

Seja agora um vetor $\underline{U} = [x \ y \ z]^T$ pertencente ao plano ψ , conforme mostrado na Figura 2. Uma vez que $\underline{U} \in \psi$ então \underline{U} é ortogonal (perpendicular) a \underline{V} . Mas o produto escalar entre dois vetores ortogonais sempre resulta zero, isto é:

$$\underline{U}^T \cdot \underline{V} = 0 \quad (6)$$

Daí

$$\underline{U}^T \cdot \underline{V} = [x \ y \ z] \begin{bmatrix} \text{sen } \theta \cos \phi \\ \text{sen } \theta \text{ sen } \phi \\ \cos \theta \end{bmatrix} = 0 \quad (7)$$

ou

$$x \text{ sen } \theta \cos \phi + y \text{ sen } \theta \text{ sen } \phi + z \cos \theta = 0 \quad (8)$$

A Equação (8) é a equação do plano ψ mostrado nas figuras 1 e 2. Todo ponto do espaço \mathfrak{R}^3 cujas coordenadas (x, y, z) satisfazem (8) é um ponto pertencente a ψ . Para estes pontos o termo à esquerda de (8) resulta 0, significando que a distância do ponto ao plano ψ é nula porque o ponto pertence ao plano. Em outras palavras, o termo à esquerda de (8) mede a distância de qualquer ponto $q(x', y', z')$ do espaço \mathfrak{R}^3 ao plano ψ na direção (θ, ϕ) . Portanto, com referência à Figura 2:

$$d = x' \sin \theta \cos \phi + y' \sin \theta \sin \phi + z' \cos \theta \quad (9)$$

Note que ψ divide o espaço \mathfrak{R}^3 em duas regiões. Se $q(x', y', z')$ encontra-se na região do espaço \mathfrak{R}^3 oposta à direção de \underline{V} , então (9) resulta em $d < 0$, caso contrário resulta em $d > 0$.

Substituindo (9) em (4):

$$\begin{aligned} E_\theta &= (I_0 + I_1 e^{j\beta d}) \frac{60}{r} e^{j\left(\omega t - \beta r + \frac{\pi}{2}\right)} \left\{ \frac{\cos\left(\frac{L}{\lambda} \pi \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\sin \theta} \right\} = \\ &= (I_0 + I_1 e^{j\beta(x' \sin \theta \cos \phi + y' \sin \theta \sin \phi + z' \cos \theta)}) \frac{60}{r} e^{j\left(\omega t - \beta r + \frac{\pi}{2}\right)} \left\{ \frac{\cos\left(\frac{L}{\lambda} \pi \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\sin \theta} \right\} \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right] \quad (10) \end{aligned}$$

Podemos fazer uma primeira generalização em (10) considerando que o irradiador I_0 pode não estar na origem $(0,0,0)$, denominada **Centro de Fase** do *array*. Nesta situação, se o irradiador I_0 estiver localizado nas coordenadas (x_0, y_0, z_0) e se o irradiador I_1 estiver localizado nas coordenadas (x_1, y_1, z_1) então (10) torna-se:

$$E_\theta = \left(\begin{array}{l} I_0 e^{j\beta(x_0 \sin \theta \cos \phi + y_0 \sin \theta \sin \phi + z_0 \cos \theta)} + \\ I_1 e^{j\beta(x_1 \sin \theta \cos \phi + y_1 \sin \theta \sin \phi + z_1 \cos \theta)} \end{array} \right) \frac{60}{r} e^{j\left(\omega t - \beta r + \frac{\pi}{2}\right)} \left\{ \frac{\cos\left(\frac{L}{\lambda} \pi \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\sin \theta} \right\} \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right] \quad (11)$$

Podemos generalizar ainda mais (11) considerando que o *array* pode não estar limitado a apenas 2 irradiadores, mas sim K irradiadores cada um deles percorrido por uma corrente $I_k = |I_k| e^{j\angle I_k}$ e situado nas coordenadas (x_k, y_k, z_k) , sendo $k = 0, 1, \dots, K-1$:

$$E_\theta = \left(\begin{array}{l} I_0 e^{j\beta(x_0 \sin \theta \cos \phi + y_0 \sin \theta \sin \phi + z_0 \cos \theta)} + \\ I_1 e^{j\beta(x_1 \sin \theta \cos \phi + y_1 \sin \theta \sin \phi + z_1 \cos \theta)} + \\ \vdots \\ I_{K-1} e^{j\beta(x_{K-1} \sin \theta \cos \phi + y_{K-1} \sin \theta \sin \phi + z_{K-1} \cos \theta)} \end{array} \right) \frac{60}{r} e^{j\left(\omega t - \beta r + \frac{\pi}{2}\right)} \left\{ \frac{\cos\left(\frac{L}{\lambda} \pi \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\sin \theta} \right\} \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right] \quad (12)$$

ou

$$E_\theta = \sum_{k=0}^{K-1} (I_k e^{j\beta(x_k \sin \theta \cos \phi + y_k \sin \theta \sin \phi + z_k \cos \theta)}) \frac{60}{r} e^{j\left(\omega t - \beta r + \frac{\pi}{2}\right)} \left\{ \frac{\cos\left(\frac{L}{\lambda} \pi \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\sin \theta} \right\} \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right] \quad (13)$$

ou ainda

$$E_{\theta} = \sum_{k=0}^{K-1} I_k e^{j\frac{2\pi}{\lambda}(x_k \text{sen } \theta \cos \phi + y_k \text{sen } \theta \text{sen } \phi + z_k \cos \theta)} \left\{ \frac{\cos\left(\frac{L}{\lambda} \pi \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\text{sen } \theta} \right\} \frac{60}{r} e^{j\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r + \frac{\pi}{2}\right)} \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right] \quad (14)$$

Mas, fundamentalmente estaremos interessados no Diagrama de Irradiação $F(\theta, \phi)$ de um *array*, o qual é definido por

$$F(\theta, \phi) = E_{\theta \text{ norm}} = \frac{|E_{\theta}|}{\max |E_{\theta}|} \quad (15)$$

Assim, de (14) e (15) temos que

$$F(\theta, \phi) = \frac{\left| \sum_{k=0}^{K-1} I_k e^{j\frac{2\pi}{\lambda}(x_k \text{sen } \theta \cos \phi + y_k \text{sen } \theta \text{sen } \phi + z_k \cos \theta)} \left\{ \frac{\cos\left(\frac{L}{\lambda} \pi \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\text{sen } \theta} \right\} \right|}{\max \left| \sum_{k=0}^{K-1} I_k e^{j\frac{2\pi}{\lambda}(x_k \text{sen } \theta \cos \phi + y_k \text{sen } \theta \text{sen } \phi + z_k \cos \theta)} \left\{ \frac{\cos\left(\frac{L}{\lambda} \pi \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\text{sen } \theta} \right\} \right|} \quad (16)$$

2 Arrays Unidimensionais

O *array* unidimensional mais simples é aquele formado por dois irradiadores, conforme mostra a Figura 3

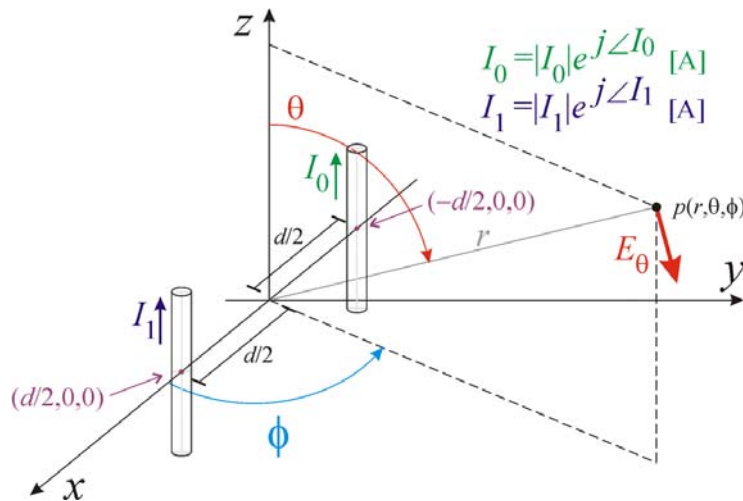


Figura 3: *Array* unidimensional com centro de fase na origem formado por dois dipolos de tamanho L alinhados com o eixo x e separados entre si de uma distância d . O Dipolo 0 encontra-se localizado nas coordenadas $(-d/2, 0, 0)$ e o Dipolo 1 encontra-se localizado nas coordenadas $(d/2, 0, 0)$.

Na situação da Figura 3 a Equação (16) simplifica-se para:

$$\begin{aligned}
 F(\theta, \phi) &= \frac{\left| \sum_{k=0}^1 I_k e^{j \frac{2\pi}{\lambda} (x_k \text{sen } \theta \cos \phi)} \left\{ \frac{\cos\left(\frac{L}{\lambda} \pi \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\text{sen } \theta} \right\} \right|}{\max \left| \sum_{k=0}^1 I_k e^{j \frac{2\pi}{\lambda} (x_k \text{sen } \theta \cos \phi)} \left\{ \frac{\cos\left(\frac{L}{\lambda} \pi \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\text{sen } \theta} \right\} \right|} \\
 &= \frac{\left| \left(I_0 e^{j \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{-d}{2} \text{sen } \theta \cos \phi\right)} + I_1 e^{j \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{d}{2} \text{sen } \theta \cos \phi\right)} \right) \left\{ \frac{\cos\left(\frac{L}{\lambda} \pi \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\text{sen } \theta} \right\} \right|}{\max \left| \left(I_0 e^{j \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{-d}{2} \text{sen } \theta \cos \phi\right)} + I_1 e^{j \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{d}{2} \text{sen } \theta \cos \phi\right)} \right) \left\{ \frac{\cos\left(\frac{L}{\lambda} \pi \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\text{sen } \theta} \right\} \right|} \quad (17)
 \end{aligned}$$

É comum na prática um dos irradiadores que compõe o *array* localizar-se no centro de fase em $(0,0,0)$, conforme mostra a Figura 4:

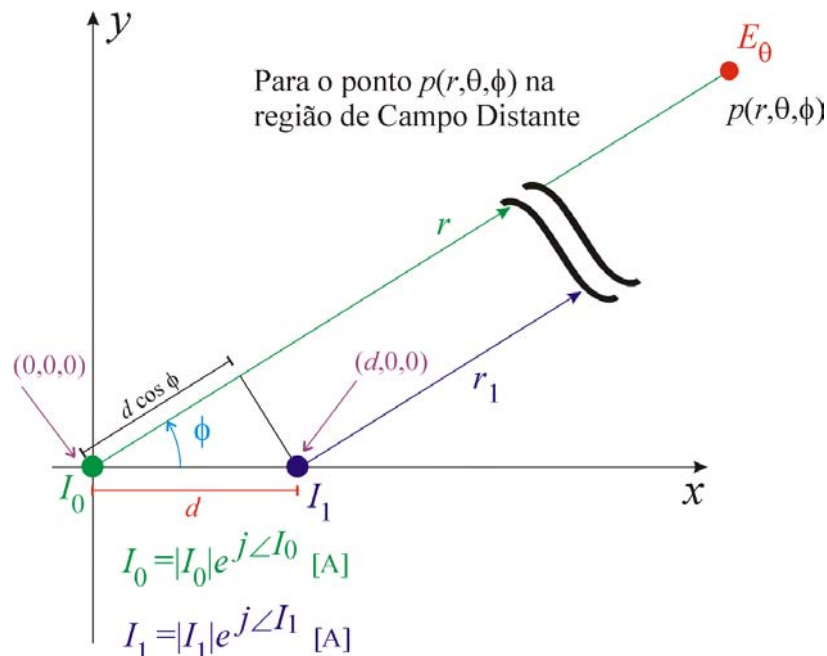


Figura 4: *Array* unidimensional formado por dois dipolos de tamanho L alinhados com o eixo x e separados entre si de uma distância d , sendo um deles situado no centro de fase. O Dipolo 0 encontra-se localizado nas coordenadas $(0,0,0)$ e o Dipolo 1 encontra-se localizado nas coordenadas $(d,0,0)$.

Na situação da Figura 4 a Equação (16) torna-se:

$$F(\theta, \phi) = \frac{\left| \left(I_0 + I_1 e^{j \frac{2\pi}{\lambda} (d \text{sen } \theta \cos \phi)} \right) \frac{\cos\left(\frac{L}{\lambda} \pi \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\text{sen } \theta} \right|}{\max \left| \left(I_0 + I_1 e^{j \frac{2\pi}{\lambda} (d \text{sen } \theta \cos \phi)} \right) \frac{\cos\left(\frac{L}{\lambda} \pi \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\text{sen } \theta} \right|} \quad (18)$$

Mas a flexibilidade na síntese de diagramas de irradiação $F(\theta, \phi)$ fica evidente quando o número de dipolos de um *array* unidimensional não é limitado a apenas 2 mas sim a um número arbitrário K de irradiadores, conforme mostra a Figura 5.

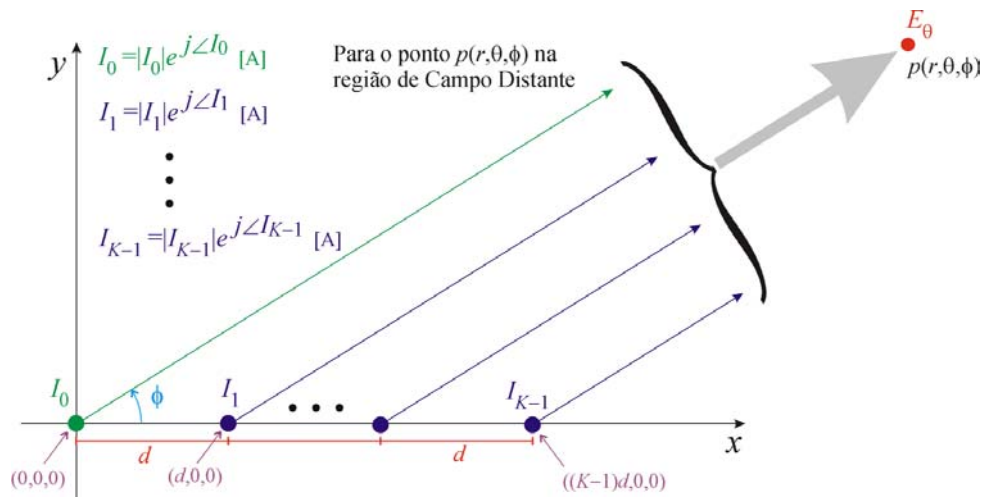


Figura 5: *Array* unidimensional formado por K dipolos de tamanho L alinhados com o eixo x e separados entre si de uma distância d . O Dipolo 0 encontra-se localizado nas coordenadas $(0,0,0)$, isto é, no centro de fase. Qualquer dipolo k deste *array* encontra-se localizado nas coordenadas $(kd,0,0)$, $k = 0,1, \dots, K-1$.

Na situação da Figura 5 a Equação (16) torna-se:

$$F(\theta, \phi) = \frac{\left| \sum_{k=0}^{K-1} I_k e^{j \frac{2\pi}{\lambda} (kd \text{sen } \theta \cos \phi)} \frac{\cos\left(\frac{L}{\lambda} \pi \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\text{sen } \theta} \right|}{\max \left| \sum_{k=0}^{K-1} I_k e^{j \frac{2\pi}{\lambda} (kd \text{sen } \theta \cos \phi)} \frac{\cos\left(\frac{L}{\lambda} \pi \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\text{sen } \theta} \right|} \quad (19)$$

2.1 Array de $K = 2$ dipolos – Diagrama de Irradiação Cardióide

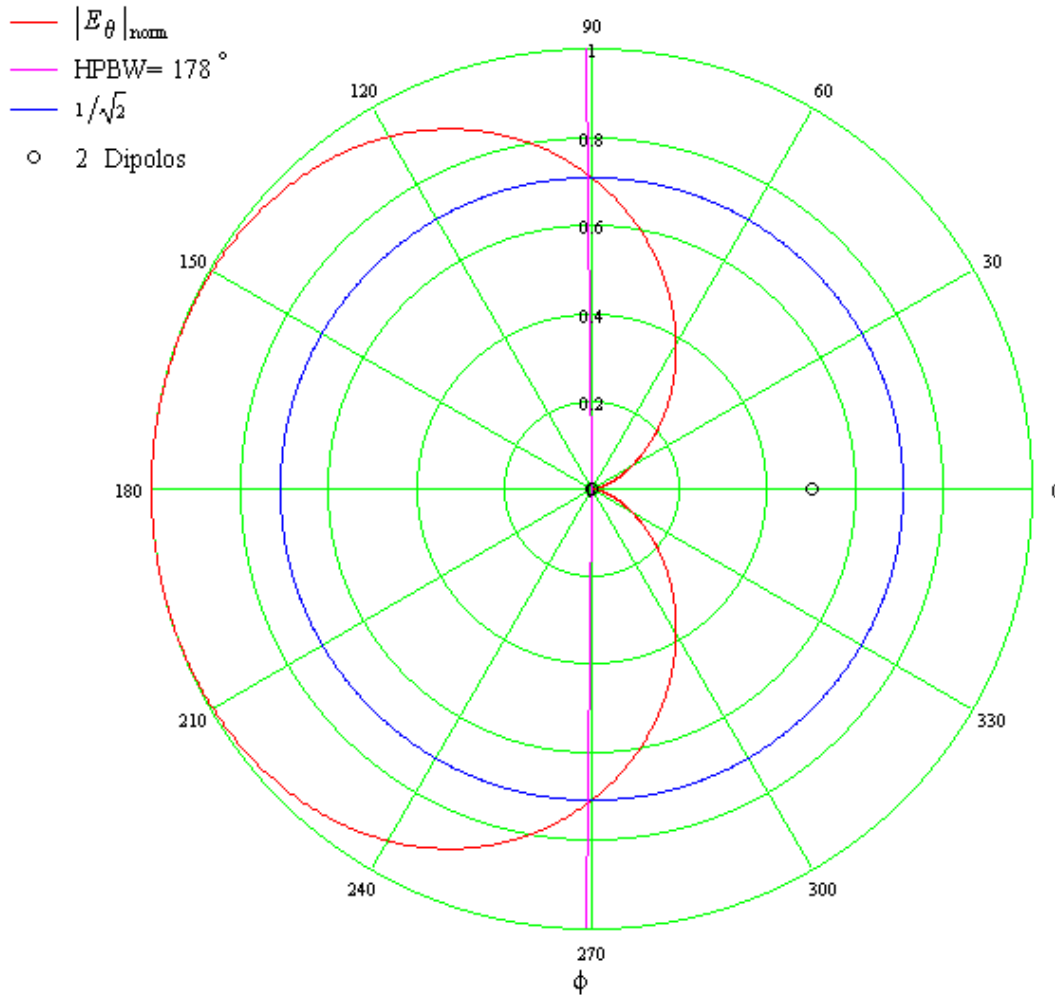


Figura 6: Diagrama de Irradiação $|E_\theta|_{\text{norm}} = F(\theta, \phi)$ p/ $\theta = 90^\circ$ de um *array* de $K = 2$ dipolos de tamanho $L = \lambda/2$ dispostos conforme a Figura 5 e separados de uma distância $d = \lambda/4$. O diagrama de irradiação $|E_\theta|_{\text{norm}} = F(\theta, \phi)$ é obtido de (19). A corrente no dipolo k é dada por $I_k = \text{IMag}_k e^{j\text{IPhase}_k}$ [A], $k = 0, 1, \dots, K - 1$. IMag_k é a k -ésima componente do vetor $\text{IMag} := (1 \ 1)^T$ [A]. IPhase_k é a k -ésima componente do vetor $\text{IPhase} := (0 \ 90)^T$ [°].

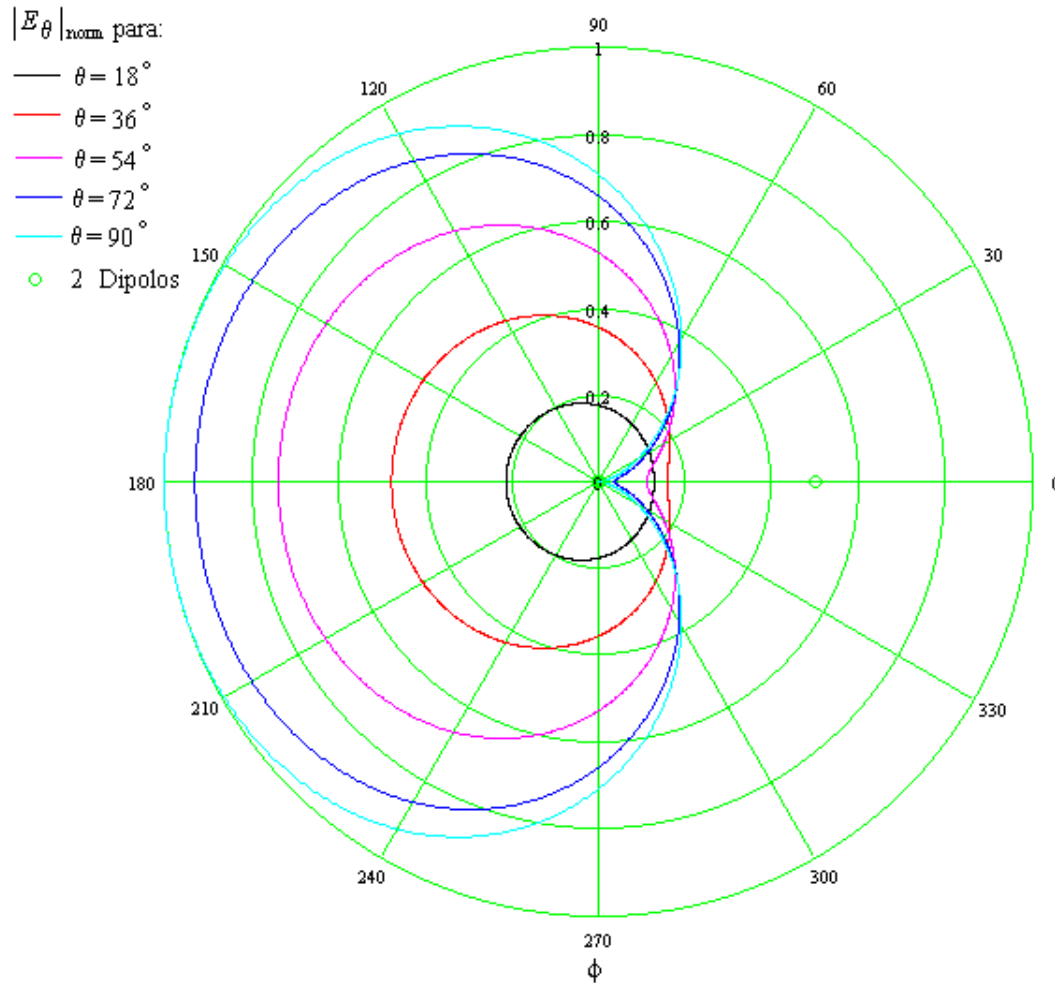


Figura 7: Diagrama de Irradiação $|E_{\theta}|_{\text{norm}} = F(\theta, \phi)$ do *array* da Figura 6 p/ $\theta = \{18^{\circ}, 36^{\circ}, 54^{\circ}, 72^{\circ}, 90^{\circ}\}$.

⇒ Este *array* é freqüentemente utilizado em radiodifusão, uma vez que o diagrama de irradiação cardióide limita a área de cobertura da estação à metade anterior do hemisfério, evitando interferência na área de cobertura de outras estações. Observe na Figura 6 que, apesar da maior parte da potência ser irradiada na metade anterior do hemisfério, o diagrama cardióide apresenta *backlobes* não desprezíveis na metade posterior do hemisfério em torno das direções $\phi = 60^{\circ}$ e $\phi = -60^{\circ} = 330^{\circ}$. Isto pode ser problemático em radiodifusão porque, em geral, é interesse de uma estação atender uma comunidade específica na direção da qual posiciona-se o máximo do *array*. A existência de *backlobes* significa potência de irradiação desperdiçada em direções nas quais não há interesse de se efetuar cobertura. No contexto de radiodifusão AM (500KHz a 1600KHz), os irradiadores I_0 e I_1 são monopolos verticais aterrados de tamanho $\lambda/4$.

2.2 Array de $K = 4$ Dipolos – redução dos *backlobes* na metade posterior do hemisfério

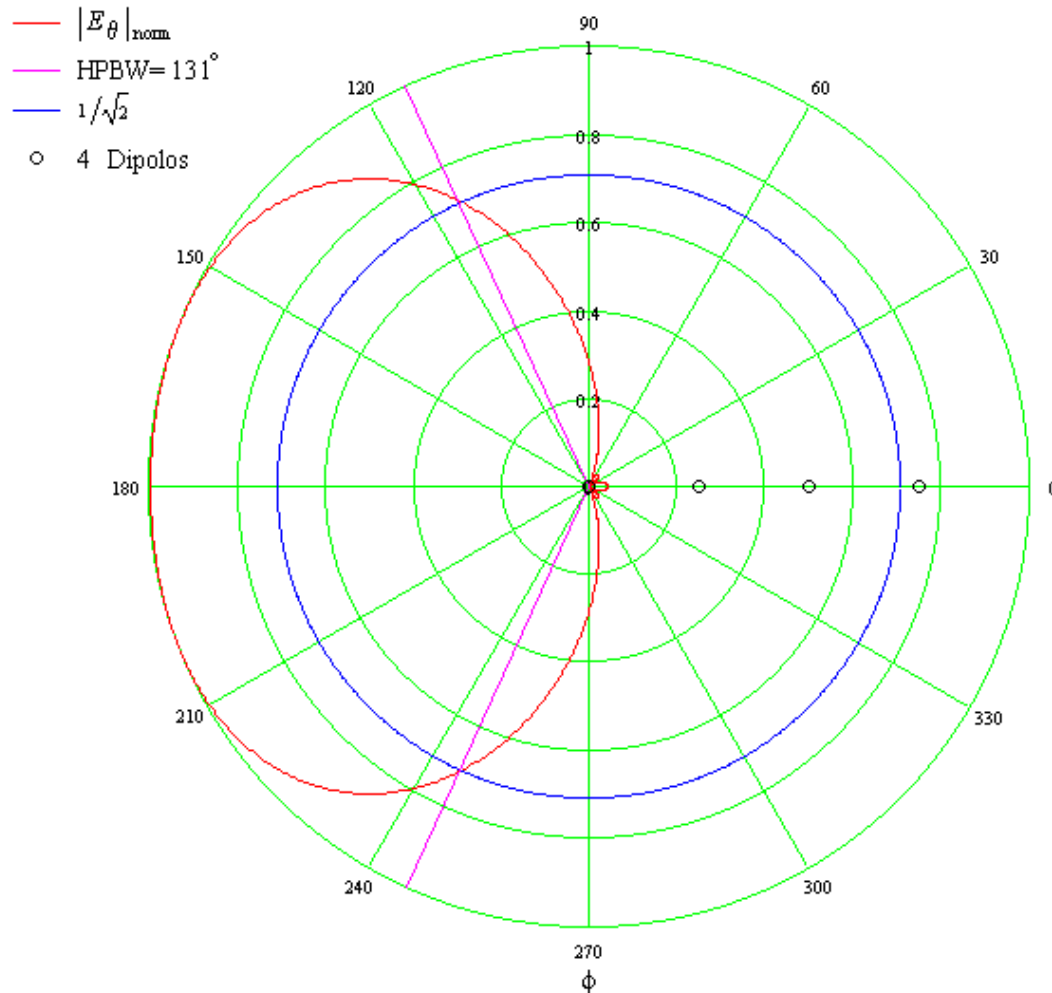


Figura 8: Diagrama de Irradiação $|E_\theta|_{\text{norm}} = F(\theta, \phi)$ p/ $\theta = 90^\circ$ de um *array* de $K = 4$ dipolos de tamanho $L = \lambda/2$ dispostos conforme a Figura 5 e separados de uma distância $d = \lambda/4$. O diagrama de irradiação $|E_\theta|_{\text{norm}} = F(\theta, \phi)$ é obtido de (19). A corrente no dipolo k é dada por $I_k = \text{IMag}_k e^{j\text{IPhase}_k}$ [A], $k = 0, 1, \dots, K - 1$. IMag_k é a k -ésima componente do vetor $\text{IMag} := (0.555 \ 1 \ 1 \ 0.555)^T$ [A]. IPhase_k é a k -ésima componente do vetor $\text{IPhase} := (5.782 \ 97.233 \ 172.767 \ -95.782)^T$ [°]. Este *array* foi determinado com o auxílio do *beamformer* especificado na Seção 3.1 – Tabela 1. Note a inexistência de *backlobes* significativos na metade posterior do hemisfério.

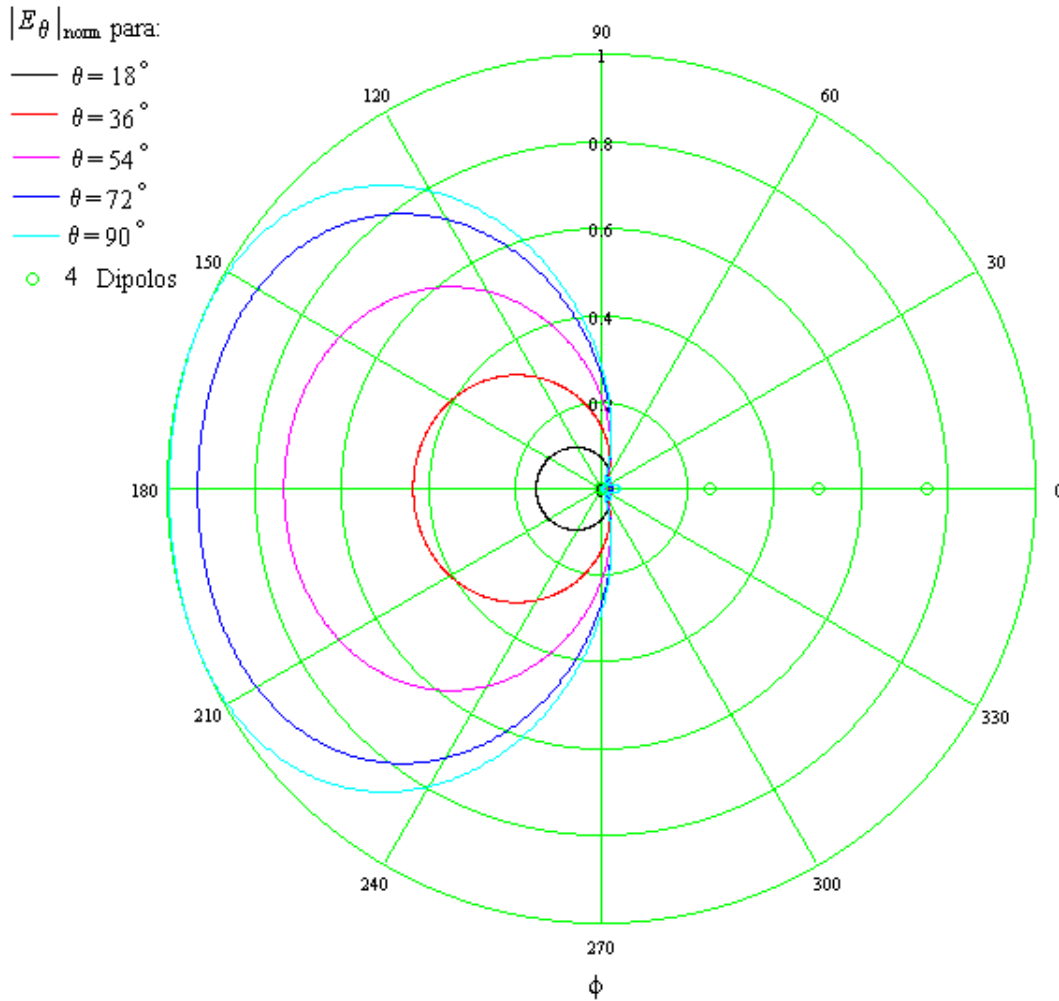


Figura 9: Diagrama de Irradiação $|E_{\theta}|_{\text{norm}} = F(\theta, \phi)$ do *array* da Figura 8 p/ $\theta = \{18^{\circ}, 36^{\circ}, 54^{\circ}, 72^{\circ}, 90^{\circ}\}$.

2.3 Array Binomial de $K = 7$ Dipolos

O *Array* Binomial é um *array* clássico caracterizado por apresentar uma distribuição de intensidade de corrente Imag_k [A], $k = 0, 1, \dots, K - 1$, que obedece aos coeficientes da Série Binomial, dados pelo Triângulo de Pascal:

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--|--|--|--|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|---|---|
| | | | | 1 | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | 1 | | 1 | | | | | | | | | |
| | | | | | | 1 | 2 | 1 | | | | | | | | |
| | | | | | | | 1 | 3 | 3 | 1 | | | | | | |
| | | | | | | | | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | | |
| | | | | | | | | | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | | |
| | | | | | | | | | | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 |

O efeito da distribuição de corrente binomial é minimizar os *sidelobes* (lobos secundários) do diagrama de irradiação.

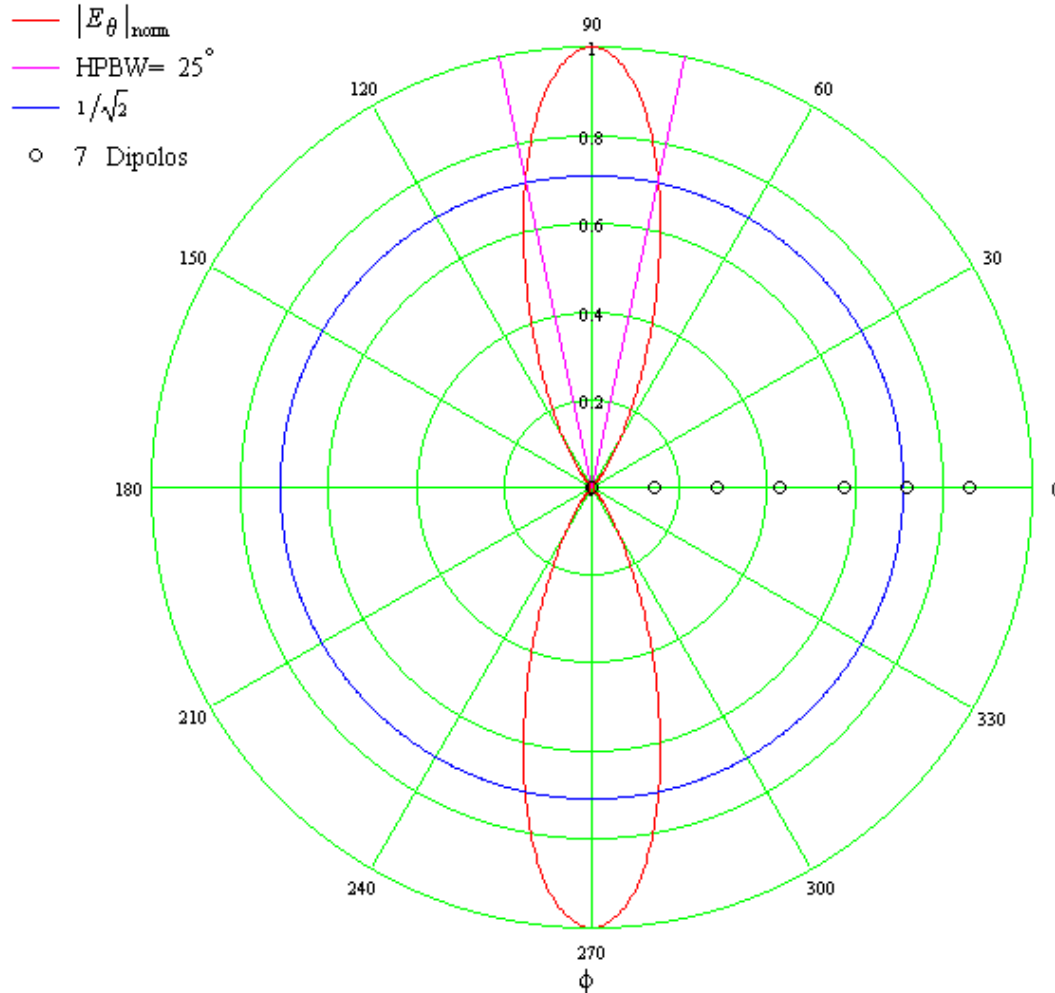


Figura 10: Diagrama de Irradiação $|E_\theta|_{\text{norm}} = F(\theta, \phi)$ p/ $\theta = 90^\circ$ de um *array* de $K = 7$ dipolos de tamanho $L = \lambda/2$ dispostos conforme a Figura 5 e separados de uma distância $d = \lambda/2$. O diagrama de irradiação $|E_\theta|_{\text{norm}} = F(\theta, \phi)$ é obtido de (19). A corrente no dipolo k é dada por $I_k = \text{IMag}_k e^{j\text{IPhase}_k}$ [A], $k = 0, 1, \dots, K - 1$. IMag_k é a k -ésima componente do vetor $\text{IMag} := (1 \ 6 \ 15 \ 20 \ 15 \ 6 \ 1)^T$ [A]. IPhase_k é a k -ésima componente do vetor $\text{IPhase} := (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ [°].

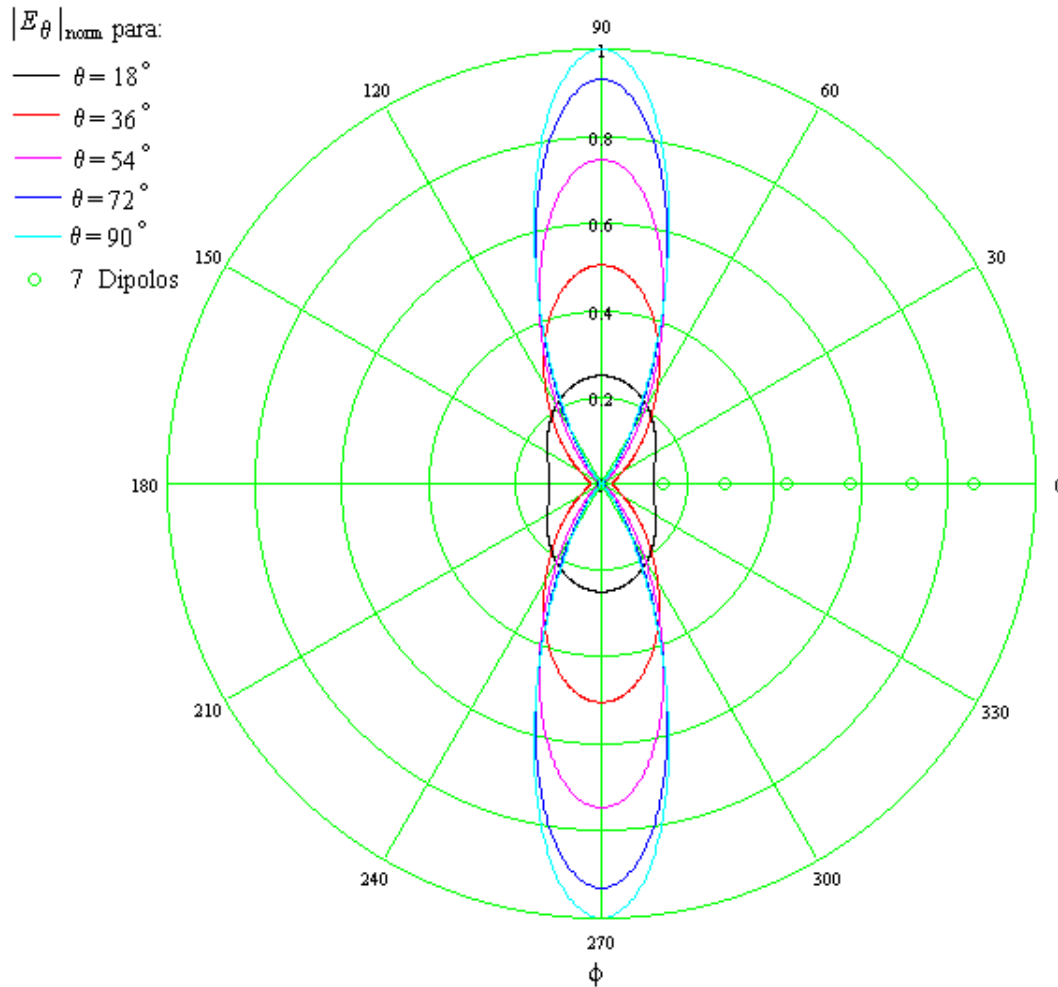


Figura 11: Diagrama de Irradiação $|E_{\theta}|_{\text{norm}} = F(\theta, \phi)$ do *array* da Figura 10 p/ $\theta = \{18^{\circ}, 36^{\circ}, 54^{\circ}, 72^{\circ}, 90^{\circ}\}$.

⇒ *Arrays* Binomiais caracterizam-se por ausência de lobos secundários mas ao custo da desvantagem de uma menor diretividade (maior HPBW). A diretividade deste *array* é dada por (ver Capítulo III):

$$|E_{\theta}|_{\text{norm}} = 1/\sqrt{2} \rightarrow \theta_{hp} \approx 51^{\circ}, \text{HPBW}_{\theta} = 2(90^{\circ} - \theta_{hp}) \approx 78^{\circ}$$

$$D \approx \frac{41253^{\circ 2}}{\text{HPBW}_{\theta} \times \text{HPBW}_{\phi}} = \frac{41253^{\circ 2}}{78^{\circ} \times 25^{\circ}} = 21.16$$

$$D_{\text{dB}} = 10 \log D = 13.3 \text{ dB}$$

⇒ Note que este *array* tem maior irradiação na direção transversal. Por isto, denomina-se este tipo de *array* de **Array Transversal** (*Broadside Array*). Por outro lado, *arrays* que apresentam maior irradiação na direção longitudinal (direção do eixo ao longo do qual os dipolos são posicionados) denomina-se **Array Longitudinal** (*Endfire Array*).

2.4 Array Broadside de $K = 20$ Dipolos com Correntes Idênticas

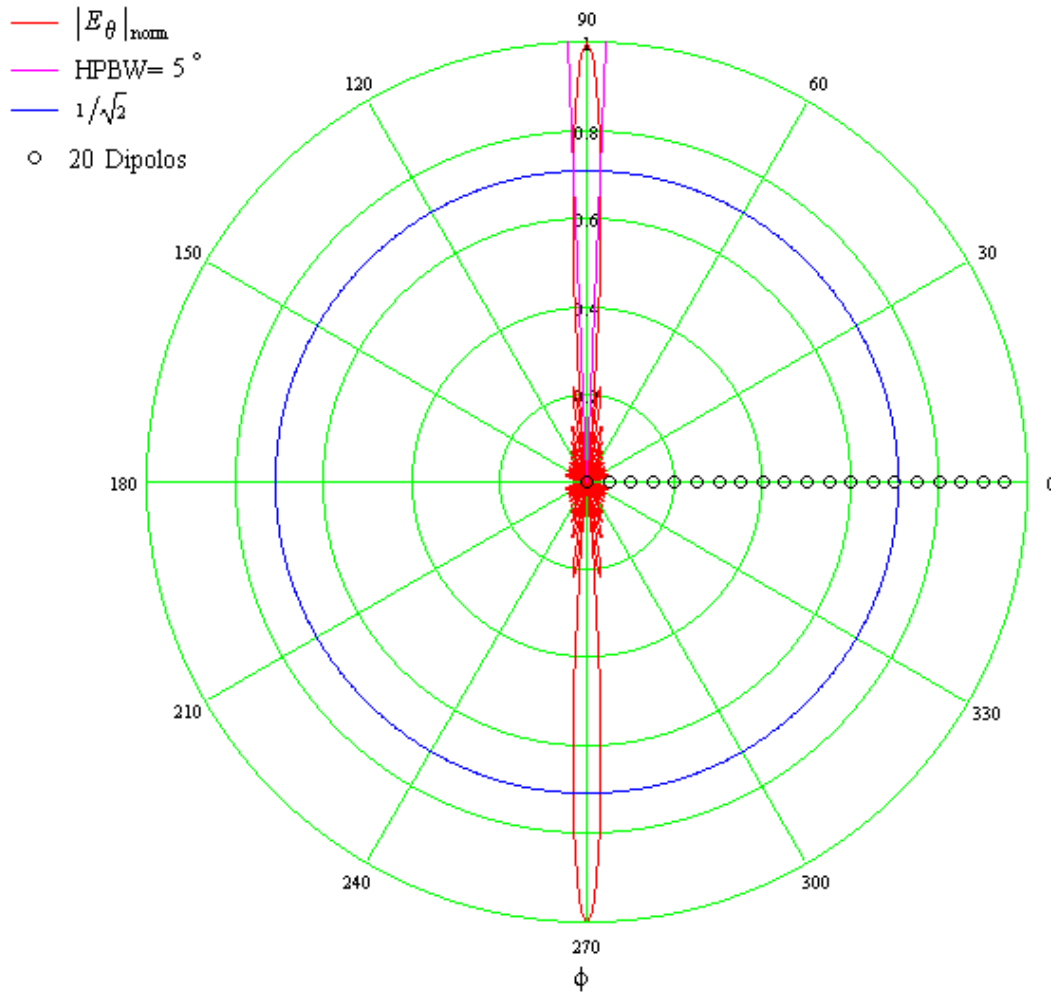


Figura 12: Diagrama de Irradiação $|E_\theta|_{\text{norm}} = F(\theta, \phi)$ p/ $\theta = 90^\circ$ de um *array* de $K = 20$ dipolos de tamanho $L = \lambda/2$ dispostos conforme a Figura 5 e separados de uma distância $d = \lambda/2$. O diagrama de irradiação $|E_\theta|_{\text{norm}} = F(\theta, \phi)$ é obtido de (19). A corrente no dipolo k é dada por $I_k = \text{IMag}_k e^{j\text{IPhase}_k}$ [A], $k = 0, 1, \dots, K - 1$. IMag_k é a k -ésima componente do vetor $\text{IMag} := (1 \ 1)^T$ [A]. IPhase_k é a k -ésima componente do vetor $\text{IPhase} := (0 \ 0)^T$ [°].

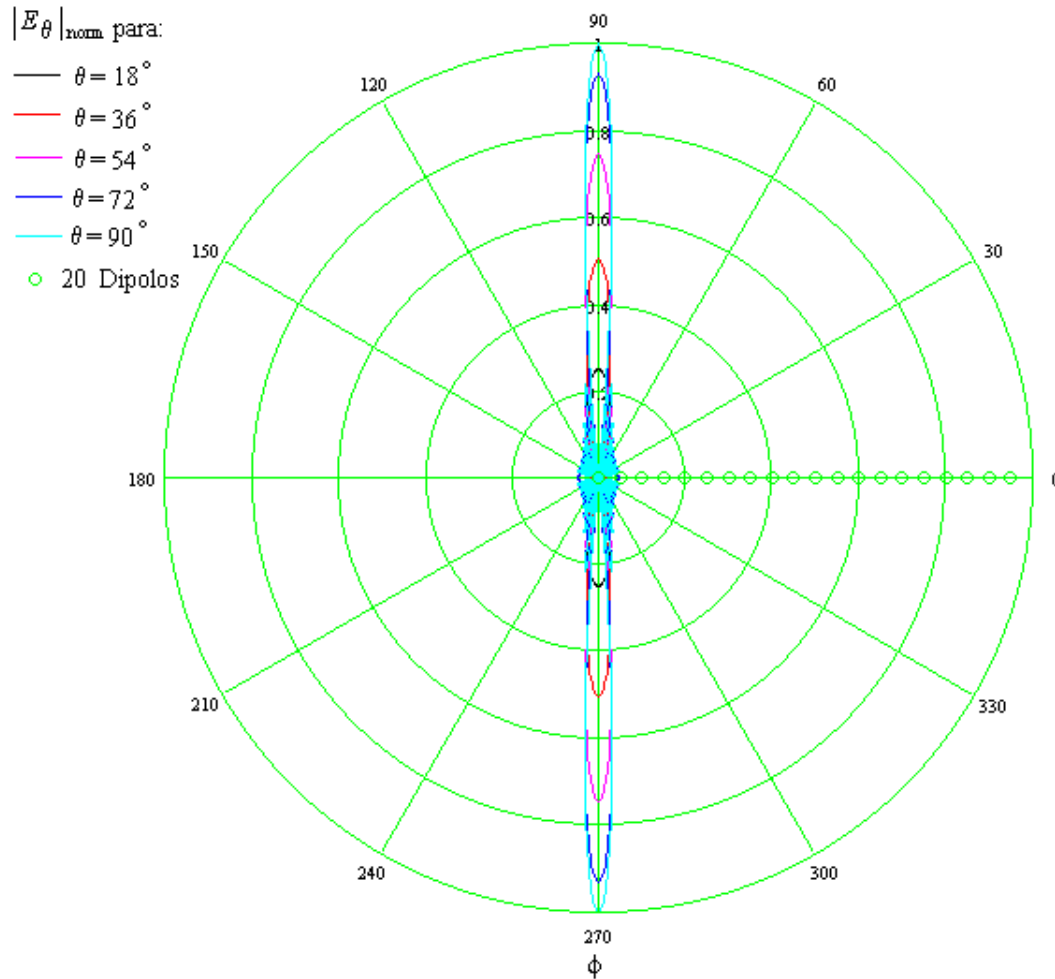


Figura 13: Diagrama de Irradiação $|E_{\theta}|_{\text{norm}} = F(\theta, \phi)$ do *array* da Figura 12 p/ $\theta = \{18^{\circ}, 36^{\circ}, 54^{\circ}, 72^{\circ}, 90^{\circ}\}$.

A diretividade deste *array* é dada por:

$$|E_{\theta}|_{\text{norm}} = 1/\sqrt{2} \rightarrow \theta_{hp} \approx 51^{\circ}, \text{HPBW}_{\theta} = 2(90^{\circ} - \theta_{hp}) \approx 78^{\circ}$$

$$D \approx \frac{41253^{\circ 2}}{\text{HPBW}_{\theta} \times \text{HPBW}_{\phi}} = \frac{41253^{\circ 2}}{78^{\circ} \times 5^{\circ}} = 105.8$$

$$D_{\text{dB}} = 10 \log D = 20.2 \text{ dB}$$

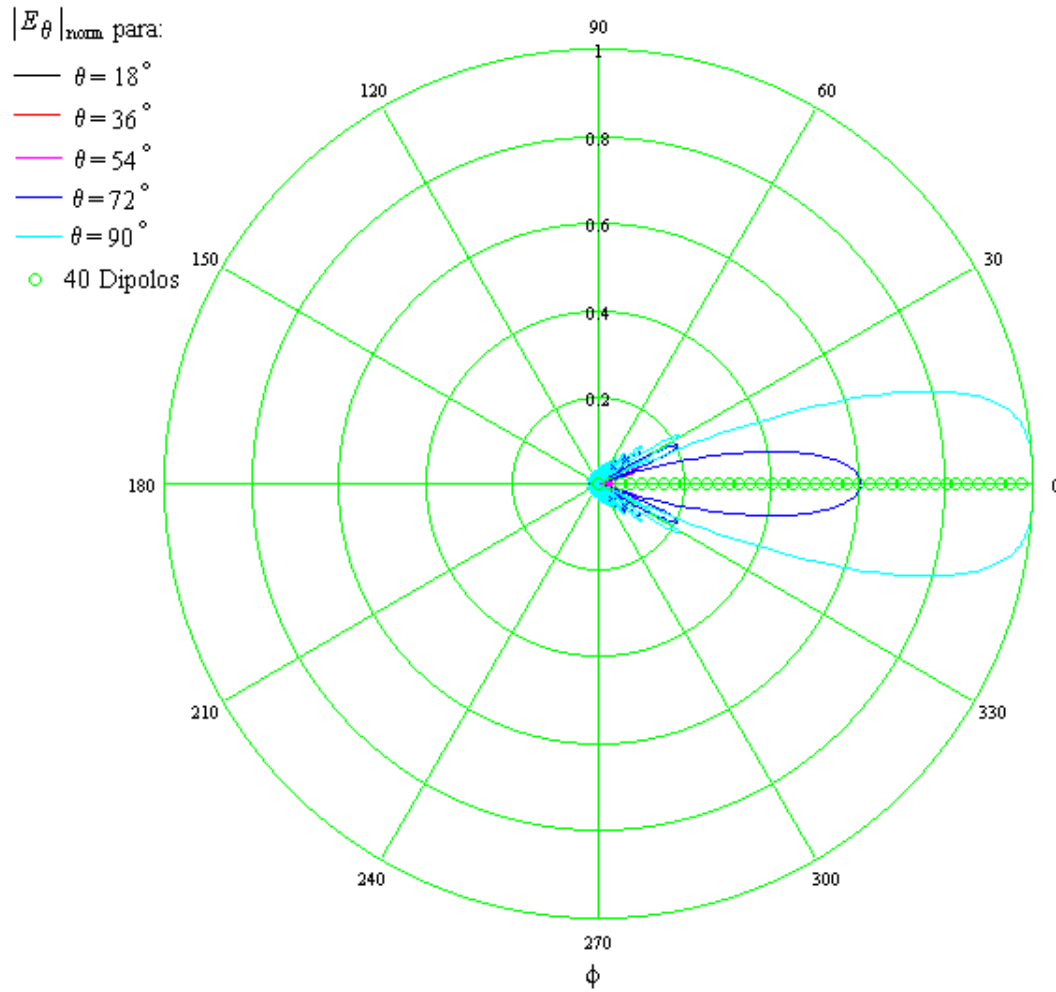


Figura 15: Diagrama de Irradiação $|E_\theta|_{\text{norm}} = F(\theta, \phi)$ do *array* da Figura 14 p/ $\theta = \{18^\circ, 36^\circ, 54^\circ, 72^\circ, 90^\circ\}$.

A diretividade deste *array* é dada por:

$$|E_\theta|_{\text{norm}} = 1/\sqrt{2} \rightarrow \theta_{hp} \approx 51^\circ, \text{HPBW}_\theta = 2(90^\circ - \theta_{hp}) \approx 78^\circ$$

$$D \approx \frac{41253^{\circ 2}}{\text{HPBW}_\theta \times \text{HPBW}_\phi} = \frac{41253^{\circ 2}}{78^\circ \times 34^\circ} = 15.555$$

$$D_{\text{dB}} = 10 \log D = 11.9 \text{ dB}$$

2.6 Scanning Arrays

Suponhamos que seja desejado direcionar o máximo de $|E_\theta|_{\text{norm}} = F(\theta, \phi)$ de um *array* de K dipolos dispostos como na Figura 5 para um ângulo $\phi = \alpha$. Demonstra-se que⁵ para tanto é necessário acrescentar à fase do k -ésimo dipolo do *array* um valor $k\delta$, sendo $k = 0, 1, \dots, K - 1$ e

$$\delta = -360 \frac{d}{\lambda} \cos \alpha \quad (20)$$

Por exemplo, suponhamos que queiramos direcionar para $\phi = \alpha = 60^\circ$ o máximo do diagrama de irradiação $|E_\theta|_{\text{norm}} = F(\theta, \phi)$ do *Array Broadside* de $K = 20$ Dipolos com Correntes Idênticas analisado na Seção 2.4. De (20) temos $\delta = -360 \frac{d}{\lambda} \cos \alpha = -360 \frac{\lambda}{2\lambda} \cos 60^\circ = -90^\circ$. Daí, a especificação das correntes resulta em:

$$\text{IMag} := (1 \ 1)^T$$

$$\text{IPhase} := (0 \ \delta \ 2\cdot\delta \ 3\cdot\delta \ 4\cdot\delta \ 5\cdot\delta \ 6\cdot\delta \ 7\cdot\delta \ 8\cdot\delta \ 9\cdot\delta \ 10\cdot\delta \ 11\cdot\delta \ 12\cdot\delta \ 13\cdot\delta \ 14\cdot\delta \ 15\cdot\delta \ 16\cdot\delta \ 17\cdot\delta \ 18\cdot\delta \ 19\cdot\delta)^T$$

O diagrama de irradiação resultante é mostrado nas Figuras 16 e 17.

⁵ Vide Balanis, *Antenna Theory*, 2nd ed., John Wiley & Sons, 1997

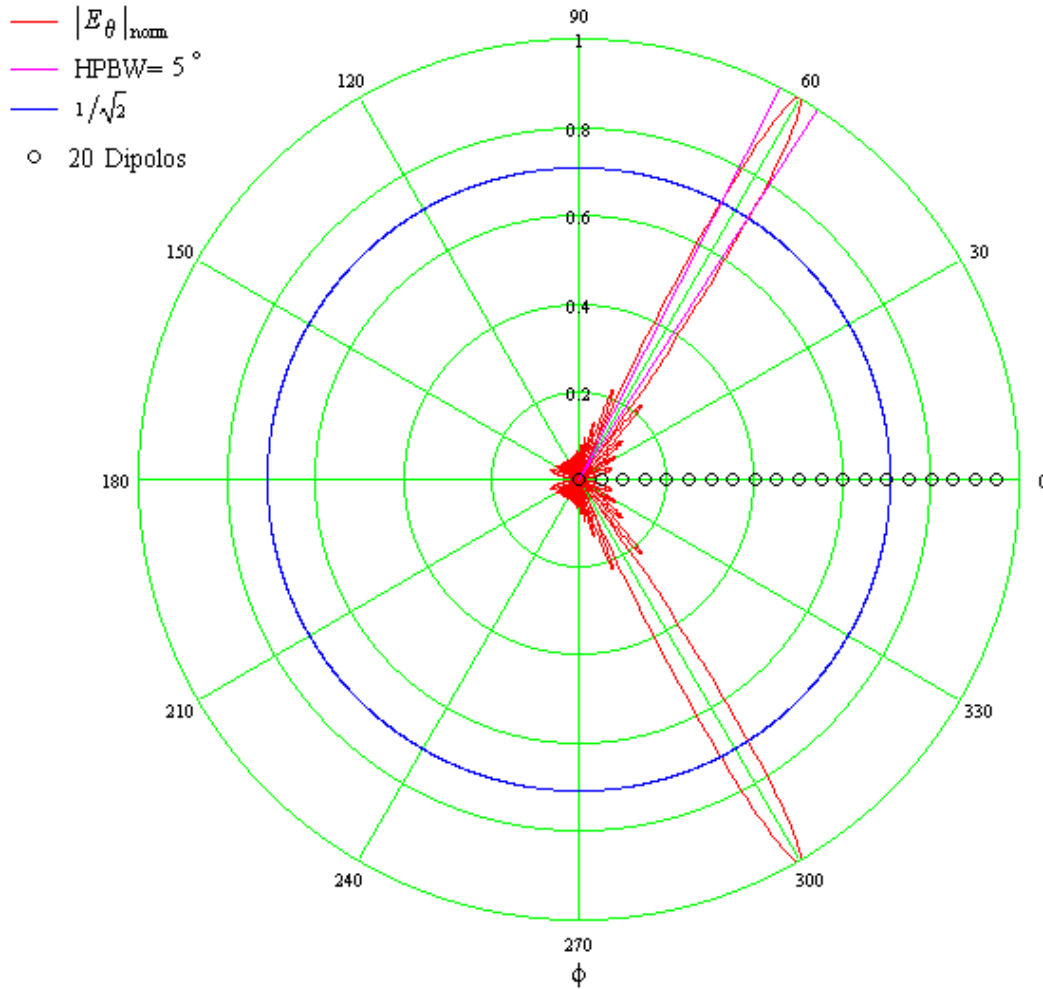


Figura 16: Diagrama de Irradiação $|E_{\theta}|_{\text{norm}} = F(\theta, \phi)$ p/ $\theta = 90^{\circ}$ de um *array* de $K = 20$ dipolos de tamanho $L = \lambda/2$ dispostos conforme a Figura 5 e separados de uma distância $d = \lambda/2$. O diagrama de irradiação $|E_{\theta}|_{\text{norm}} = F(\theta, \phi)$ é obtido de (19). A corrente no dipolo k é dada por $I_k = \text{IMag}_k e^{j\text{IPhase}_k}$ [A], $k = 0, 1, \dots, K - 1$.

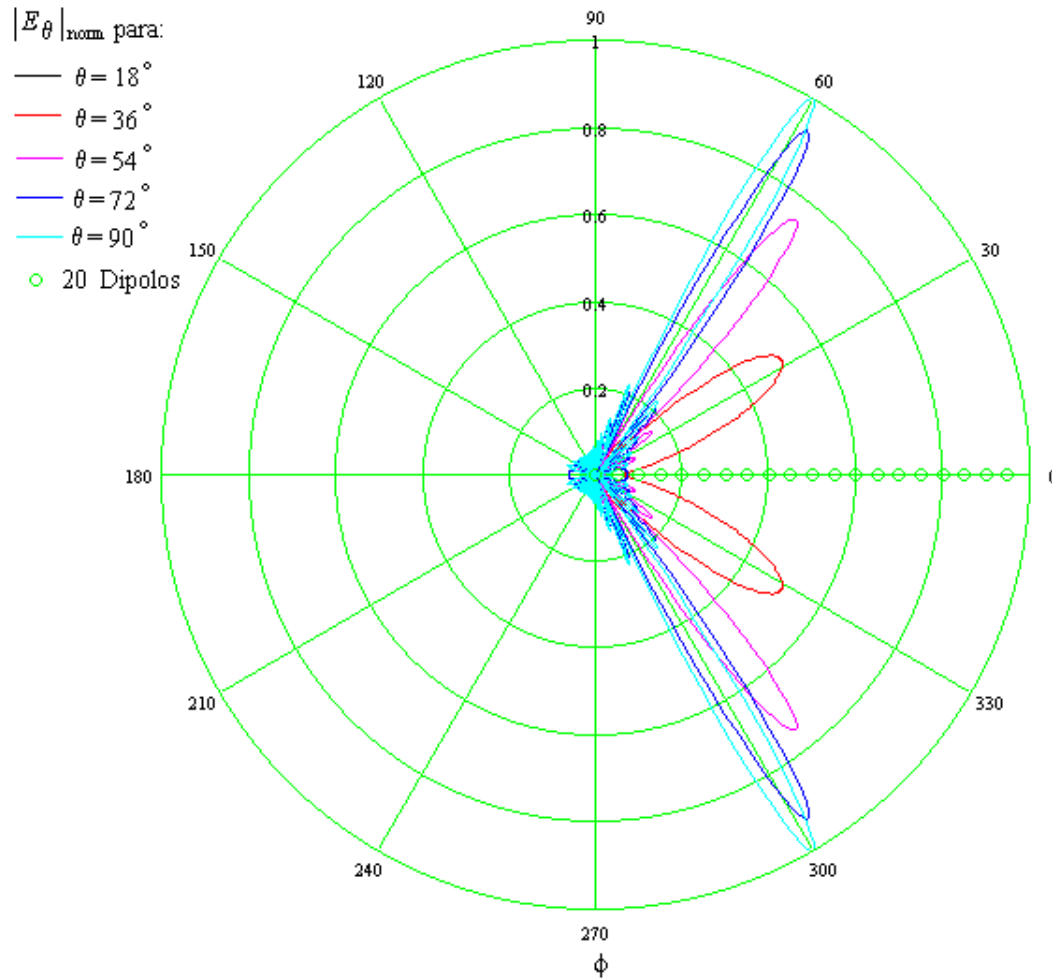


Figura 17: Diagrama de Irradiação $|E_\theta|_{\text{norm}} = F(\theta, \phi)$ do *array* da Figura 16 p/ $\theta = \{18^\circ, 36^\circ, 54^\circ, 72^\circ, 90^\circ\}$.

⇒ Variando eletricamente o valor do ângulo α podemos executar a varredura (*scanning*) de um amplo setor angular sem necessitar movimentar mecanicamente o *array*. Este tipo de *array* é utilizado em antenas de radar para determinar a direção (azimute e elevação) do alvo e em antenas adaptativas (*smart antennas*) de sistemas celulares para determinar o AOA (*angle of arrival*) dos usuários presentes na célula.

3 Arrays Tridimensionais

Para o caso de um *array* com K irradiadores situados em coordenadas genéricas no espaço \mathfrak{R}^3 , o problema de determinar as correntes $I_k = |I_k|e^{j\angle I_k}$, $k = 0, 1, \dots, K-1$, que resultem no diagrama de irradiação $F(\theta, \phi)$ desejado torna-se um problema de considerável complexidade.

Antes de analisarmos *arrays* tridimensionais é necessário solucionar este problema.

A solução mais flexível, simples e imediata é deixarmos o não pequeno “trabalho braçal” de determinar qual distribuição de corrente aproxima $F(\theta, \phi)$ ao encargo de um Sistema Adaptativo denominado *beamformer* (*beamformer*: formador do feixe). Neste estudo apresentaremos o *beamformer* linear

baseado no algoritmo LMS⁶. No entanto, *beamformers* não-lineares podem ser vantajosamente implementados com base em Redes Neurais Artificiais⁷.

3.1 *Beamformers*

Vimos que o campo E_θ de um *array* de K dipolos sendo o k -ésimo dipolo percorrido por uma corrente $I_k = |I_k| e^{j\angle I_k}$ e situado nas coordenadas (x_k, y_k, z_k) do espaço \mathfrak{R}^3 , $k = 0, 1, \dots, K-1$, é dado pela Equação (14), abaixo re-escrita por comodidade:

$$E_\theta = \sum_{k=0}^{K-1} I_k e^{j\frac{2\pi}{\lambda}(x_k \text{ sen } \theta \cos \phi + y_k \text{ sen } \theta \text{ sen } \phi + z_k \cos \theta)} \left\{ \frac{\cos\left(\frac{L}{\lambda} \pi \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\text{sen } \theta} \right\} \frac{60}{r} e^{j\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r + \frac{\pi}{2}\right)} \begin{bmatrix} \text{V} \\ \text{m} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Normalizando (14) pelo termo $\frac{60}{r} e^{j\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r + \frac{\pi}{2}\right)}$ obtemos:

$$F(\theta, \phi) = \sum_{k=0}^{K-1} I_k e^{j\frac{2\pi}{\lambda}(x_k \text{ sen } \theta \cos \phi + y_k \text{ sen } \theta \text{ sen } \phi + z_k \cos \theta)} \left\{ \frac{\cos\left(\frac{L}{\lambda} \pi \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\text{sen } \theta} \right\} \quad (21)$$

Suponhamos que existam M sensores fictícios do campo E_θ situados sobre uma superfície esférica em cujo centro encontra-se o *array*. O raio da esfera é tal que sua superfície encontra-se localizada na região de Campo Distante do *array*.

O m -ésimo sensor encontra-se na direção (θ_m, ϕ_m) , $m = 0, 1, \dots, M-1$. A intensidade relativa do campo E_θ captado pelo m -ésimo sensor, ou equivalentemente, o valor do diagrama de irradiação $F_m = F(\theta_m, \phi_m)$ na direção (θ_m, ϕ_m) do m -ésimo sensor, é obtida de (21) e é dada por:

$$F_m = \sum_{k=0}^{K-1} I_k e^{j\frac{2\pi}{\lambda}(x_k \text{ sen } \theta_m \cos \phi_m + y_k \text{ sen } \theta_m \text{ sen } \phi_m + z_k \cos \theta_m)} \left\{ \frac{\cos\left(\frac{L}{\lambda} \pi \cos \theta_m\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\text{sen } \theta_m} \right\} \quad (22)$$

Seja

$$d(m, k) = x_k \text{ sen } \theta_m \cos \phi_m + y_k \text{ sen } \theta_m \text{ sen } \phi_m + z_k \cos \theta_m \quad (23)$$

a distância, na direção do m -ésimo sensor, que separa o k -ésimo dipolo situado em (x_k, y_k, z_k) do plano ψ de fase zero (Ver Figura 1).

Seja

⁶ Vide Simon Haykin, *Adaptive Filter Theory, 3rd ed.*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1996.

⁷ Vide Simon Haykin, *Neural Networks, 2nd ed.*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1999.

$$\chi_m = \frac{\cos\left(\frac{L}{\lambda}\pi \cos\theta_m\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\text{sen}\theta_m} \quad (24)$$

a intensidade relativa do campo E_θ resultante de um único dipolo do *array* que é captado pelo m -ésimo sensor.

De (22), (23) e (24) temos:

$$\sum_{k=0}^{K-1} I_k e^{j\frac{2\pi}{\lambda}d(m,k)} \chi_m = F_m \quad (25)$$

Escrevendo (25) para todos os M sensores, isto é, para $m = 0, 1, \dots, M-1$, obtemos o sistema de equações:

$$\begin{aligned} I_0 e^{j\frac{2\pi}{\lambda}d(0,0)} \chi_0 &+ I_1 e^{j\frac{2\pi}{\lambda}d(0,1)} \chi_0 &+ \dots &+ I_{K-1} e^{j\frac{2\pi}{\lambda}d(0,K-1)} \chi_0 &= F_0 \\ I_0 e^{j\frac{2\pi}{\lambda}d(1,0)} \chi_1 &+ I_1 e^{j\frac{2\pi}{\lambda}d(1,1)} \chi_1 &+ \dots &+ I_{K-1} e^{j\frac{2\pi}{\lambda}d(1,K-1)} \chi_1 &= F_1 \\ &\vdots &&&\vdots \\ I_0 e^{j\frac{2\pi}{\lambda}d(M-1,0)} \chi_{M-1} &+ I_1 e^{j\frac{2\pi}{\lambda}d(M-1,1)} \chi_{M-1} &+ \dots &+ I_{K-1} e^{j\frac{2\pi}{\lambda}d(M-1,K-1)} \chi_{M-1} &= F_{M-1} \end{aligned} \quad (26)$$

Colocando (26) em forma matricial temos:

$$\begin{bmatrix} \chi_0 e^{j\frac{2\pi}{\lambda}d(0,0)} & \chi_0 e^{j\frac{2\pi}{\lambda}d(0,1)} & \dots & \chi_0 e^{j\frac{2\pi}{\lambda}d(0,K-1)} \\ \chi_1 e^{j\frac{2\pi}{\lambda}d(1,0)} & \chi_1 e^{j\frac{2\pi}{\lambda}d(1,1)} & \dots & \chi_1 e^{j\frac{2\pi}{\lambda}d(1,K-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \chi_{M-1} e^{j\frac{2\pi}{\lambda}d(M-1,0)} & \chi_{M-1} e^{j\frac{2\pi}{\lambda}d(M-1,1)} & \dots & \chi_{M-1} e^{j\frac{2\pi}{\lambda}d(M-1,K-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ \vdots \\ I_{K-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_{M-1} \end{bmatrix} \quad (27)$$

Se definirmos o vetor $\underline{\Phi}_m$ como

$$\underline{\Phi}_m = [\Phi_0 \quad \Phi_1 \quad \dots \quad \Phi_{K-1}] = \chi_m \left[e^{j\frac{2\pi}{\lambda}d(m,0)} \quad e^{j\frac{2\pi}{\lambda}d(m,1)} \quad \dots \quad e^{j\frac{2\pi}{\lambda}d(m,K-1)} \right] \quad (28)$$

a equação (27) pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} \underline{\Phi}_0 \\ \underline{\Phi}_1 \\ \vdots \\ \underline{\Phi}_{M-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ \vdots \\ I_{K-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_{M-1} \end{bmatrix} \quad (29)$$

→ Cada vetor $\underline{\Phi}_m$ em (29) expressa a relação entre o valor resultante do diagrama de irradiação $F_m = F(\theta_m, \phi_m)$ na direção (θ_m, ϕ_m) do m -ésimo sensor como conseqüência do conjunto de correntes $\underline{I} = [I_0 \quad I_1 \quad \dots \quad I_{K-1}]^T$ no *array*. O grafo de fluxo de sinal que descreve o processo representado por (29) é mostrado na Figura 18:

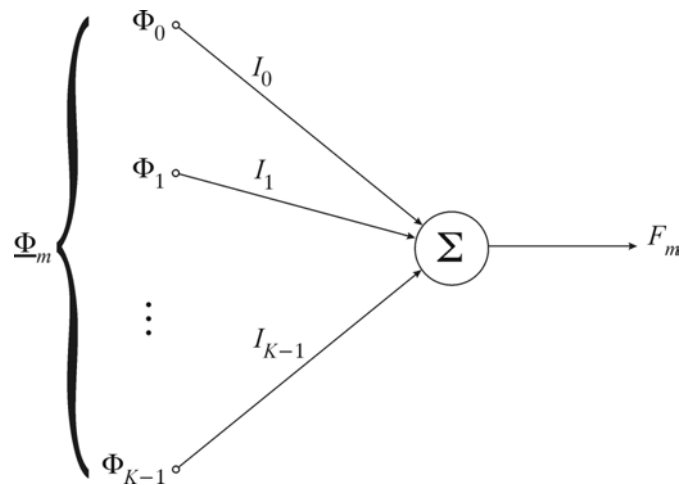


Figura 18: Grafo de fluxo de sinal que descreve o processo representado por (29).

Mas, queremos que o diagrama de irradiação resulte em um valor desejado D_m na direção (θ_m, ϕ_m) do m -ésimo sensor. Daí, podemos definir um erro $e_m = D_m - F_m$ o qual permite ajustar iterativamente o vetor $\underline{I} = [I_0 \ I_1 \ \dots \ I_{K-1}]^T$ através de um processo adaptativo que busque minimizar e_m . Neste estudo adotaremos o algoritmo LMS⁸ para o processo adaptativo de ajuste do vetor \underline{I} .

A Figura 19 mostra o grafo de fluxo de sinal do processo de ajuste do vetor \underline{I} através do algoritmo LMS e a Tabela 1 apresenta as etapas operacionais deste processo.

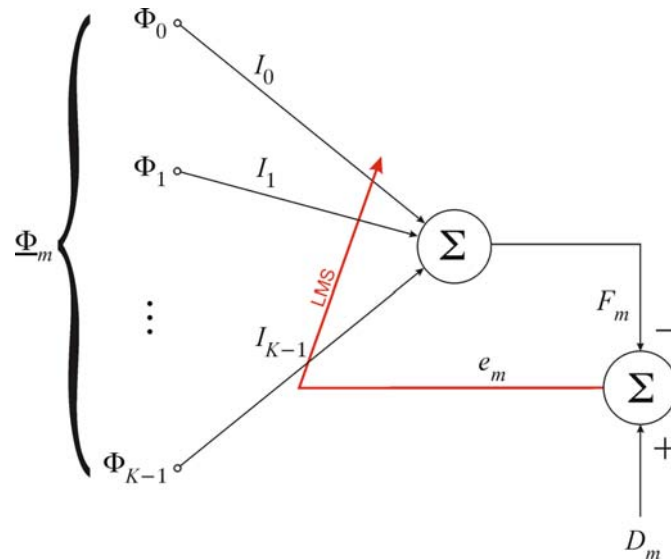


Figura 19: Grafo de fluxo de sinal do processo de ajuste do vetor \underline{I} através do algoritmo LMS.

⁸ Vide Simon Haykin, *Adaptive Filter Theory, 3rd ed.*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1996

| Etapa | Procedimento |
|-------|---|
| 1 | Inicializar o vetor K dimensional \underline{I} : $\underline{I} = \underline{0} + j\underline{0}$ onde \underline{I} é o vetor das correntes nos dipolos do <i>array</i> , $j = \sqrt{-1}$ e K é o número de dipolos. |
| 2 | Determinar o conjunto de vetores $\underline{\Phi}_m$ para $m = 0, 1, \dots, M - 1$ através da Equação (28), sendo M o número de sensores. |
| 3 | Zerar indexador de sensor: $m = 0$ |
| 4 | Determinar o valor do diagrama de irradiação $F_m = F(\theta_m, \phi_m)$ na direção (θ_m, ϕ_m) do m -ésimo sensor: $F_m = \underline{\Phi}_m \cdot \underline{I}$ |
| 5 | Calcular o erro na direção (θ_m, ϕ_m) do m -ésimo sensor a partir do valor desejado D_m para o diagrama de irradiação nesta direção: $e_m = D_m - F_m$ |
| 6 | Atualizar o vetor \underline{I} : $\underline{I}_m = \underline{I}_m + \eta e_m \underline{\Phi}_m^*$ onde o operador $*$ denota a operação complexo conjugado e η é o passo de adaptação. |
| 7 | Incrementar indexador de sensor: $m = m + 1$ |
| 8 | Se $m = M$ então ir para a Etapa 9, caso contrário ir para a Etapa 4. |
| 9 | Critério de parada: Determinar a média quadrática $\overline{e^2}$ dos últimos M valores de e_m . Se $\overline{e^2} < \varepsilon$, com ε arbitrário e positivo, então encerrar o processo, caso contrário ir para a Etapa 3. |

Tabela 1: Etapas operacionais do processo de ajuste (*beamforming*) do vetor $\underline{I} = [I_0 \ I_1 \ \dots \ I_{K-1}]^T$ através do algoritmo LMS⁹ visando atender ao conjunto de valores desejados D_m para o diagrama de irradiação nas direções (θ_m, ϕ_m) , sendo $m = 0, 1, \dots, M - 1$.

3.2 Antenas Inteligentes (*Smart Antennas*) para Estações Rádio-Base de Sistemas Celulares

Um dos problemas que reduzem a capacidade de um sistema celular é a interferência entre usuários transmitindo na mesma célula.

Vamos analisar aqui a situação em que temos um painel de 4 dipolos de meia onda distantes $\lambda/4$ do plano refletor α , conforme mostra a Figura 20.

⁹ A dedução das equações que regem a operação do algoritmo LMS com um conjunto de treino formado por dados complexos pode ser encontrada na Seção 6.2.1 do Capítulo 6 da apostila de Comunicações Digitais, disponível para *download* em <http://www.ee.pucrs.br/~decastro/download.html>.

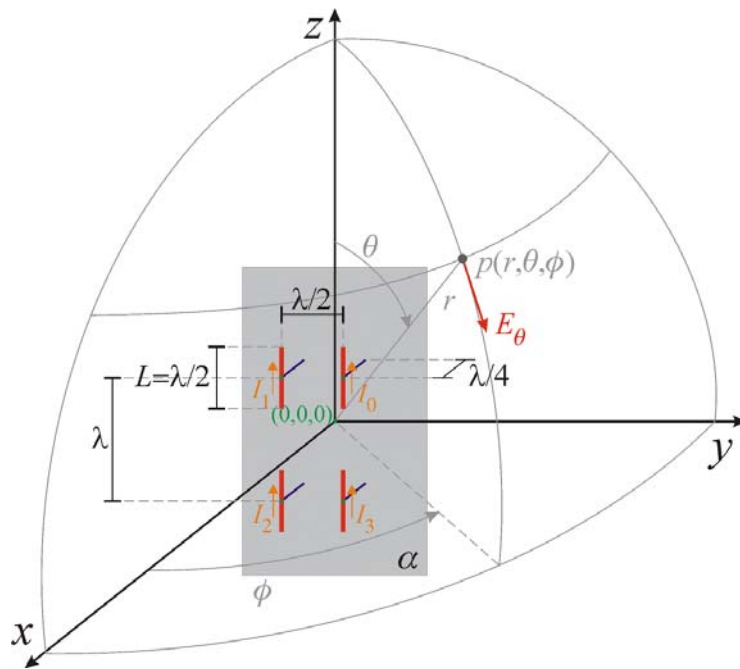


Figura 20: Painel de 4 dipolos de meia onda distantes $\lambda/4$ do plano refletor α .

Suponhamos que um usuário B esteja bem próximo à Estação Rádio-Base (ERB) e, como o seu sinal é muito forte, esteja interferindo no sinal do usuário A localizado mais distante de ERB.

Um *scanning array* bidimensional (ver Seção 2.6) determinou os seguintes AOA (*Angle Of Arrival*) para os usuários A e B :

| Usuário: | AOA θ : | AOA ϕ : |
|--------------------|----------------|--------------|
| A (interferido) | 108° | -30° |
| B (interferente) | 120° | 15° |

O problema consiste em determinar as correntes $\underline{I} = [I_0 \ I_1 \ \dots \ I_7]^T$ do *array* mostrado na Figura 20 tal que seja gerado um nulo ou pelo menos uma redução de ganho no AOA do usuário B e um máximo no AOA do usuário A .

O *array* mostrado na Figura 20 pode ser decomposto em 4 dipolos reais e 4 dipolos virtuais conforme mostrado na Figura 21:

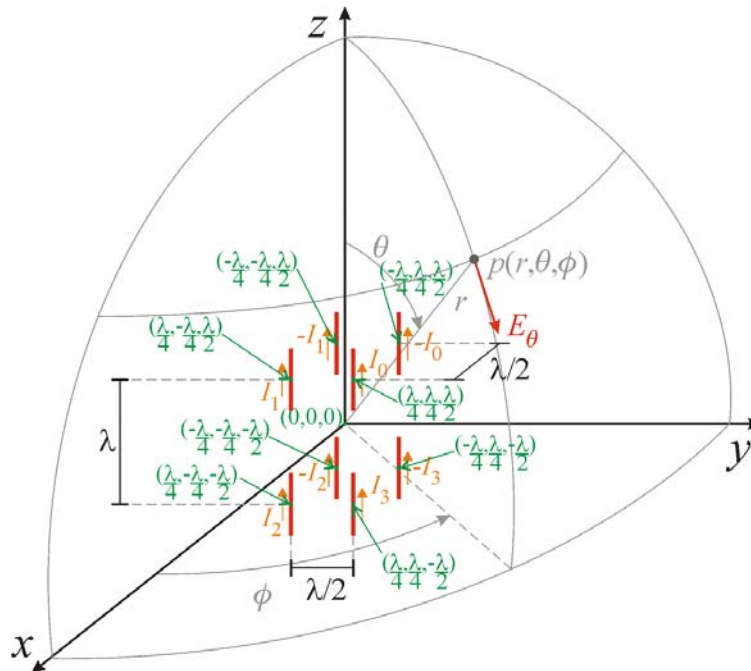


Figura 21: Decomposição do *array* mostrado na Figura 20 em dipolos reais e virtuais. São mostradas as coordenadas de cada dipolo (em verde) e as respectivas designações para as correntes.

Aplicando o procedimento da Tabela 1 obtemos o seguinte vetor $\underline{I} = [I_0 \ I_1 \ \dots \ I_7]^T$ das correntes nos dipolos:

$$\vec{I} = \begin{bmatrix} 0.624 \\ 1 \\ 0.624 \\ 1 \\ 0.624 \\ 1 \\ 0.624 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{\arg(I)} = \begin{bmatrix} 23.405 \\ -96.718 \\ 156.595 \\ -83.282 \\ -156.595 \\ 83.282 \\ -23.405 \\ 96.718 \end{bmatrix} \text{°deg} \quad (30)$$

O diagrama de irradiação $F(\theta, \phi)$ resultante da substituição de (30) em (19) é mostrado na Figura 22.

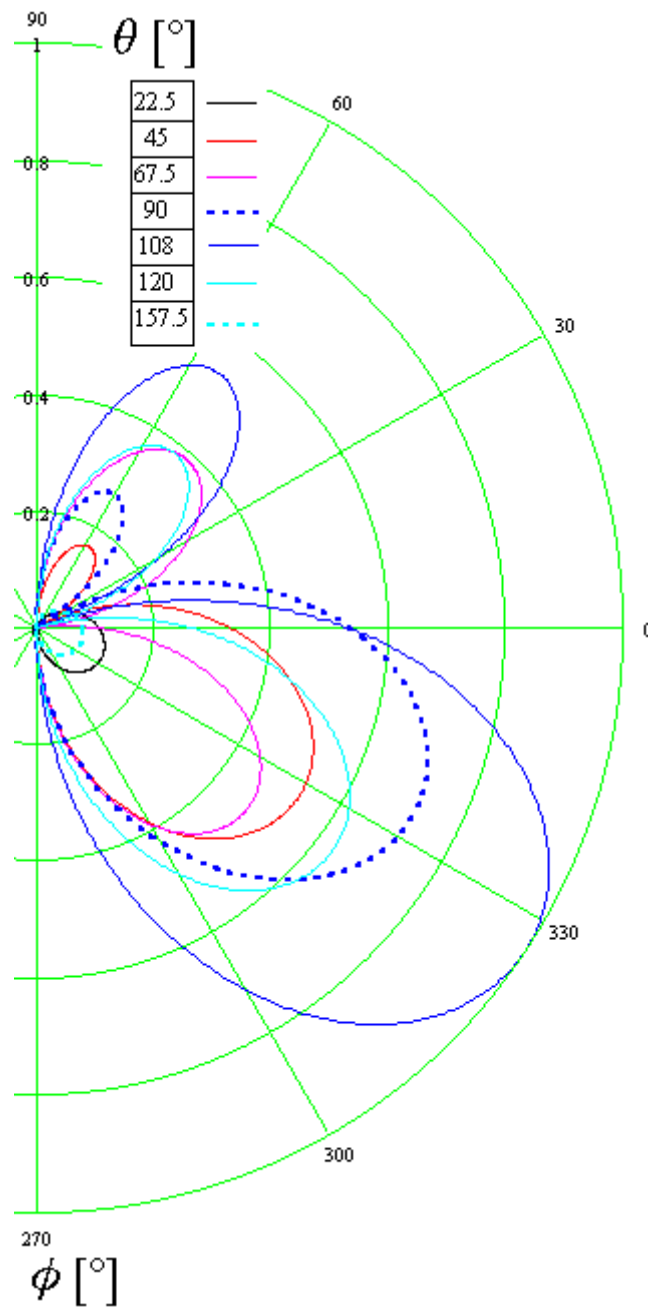


Figura 22: Diagrama de irradiação $F(\theta, \phi)$ resultante do *array* mostrado na Figura 20 para o vetor de correntes $\underline{I} = [I_0 \ I_1 \ \dots \ I_7]^T$ especificado em (30). Note que o algoritmo LMS colocou um nulo no AOA do usuário B e um máximo próximo ao AOA do usuário A , minimizando assim a interferência do usuário B no sinal do usuário A .

4 Arrays com Elementos Parasitas – A Antena Yagi-Uda

Uma antena Yagi-Uda nada mais é do que um *array* do tipo *endfire* com apenas um dipolo excitado, dipolo este que é denominado **Excitador**.

Com exceção do Excitador, cada dipolo do *array* têm sua corrente originada em consequência de indução das correntes presentes em todos os demais dipolos. Por este motivo estes dipolos são denominados de **Elementos Parasitas**.

A Figura 23 mostra uma antena Yagi-Uda de 4 elementos: Um **Excitador** e 3 **Elementos Parasitas**. No conjunto dos elementos parasitas, um deles é o **Refletor** e os demais são **Diretores**.

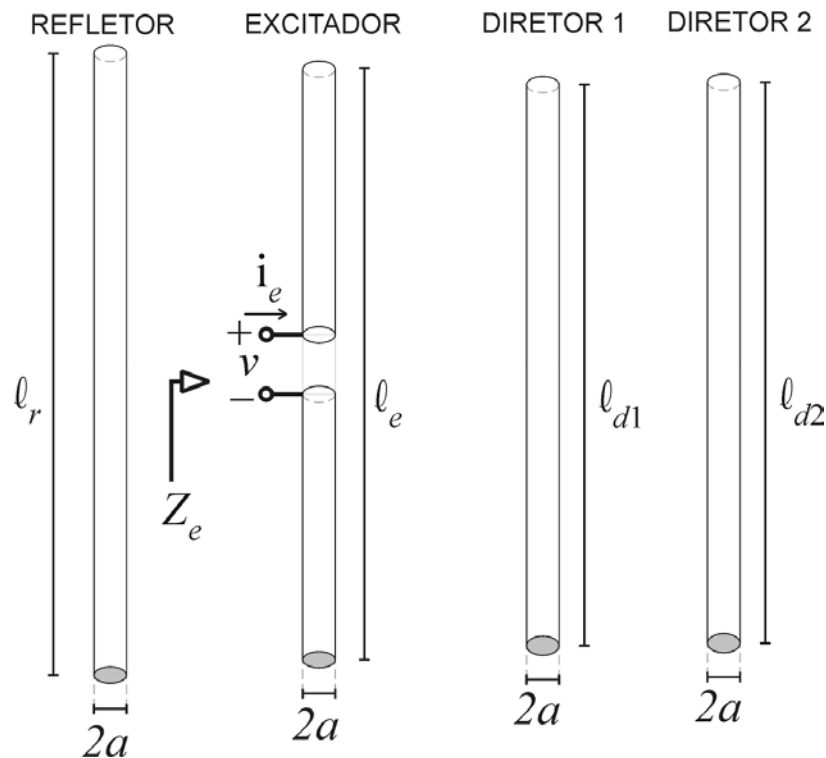


Figura 23: Antena Yagi-Uda de 4 elementos. O **Refletor** sempre é o elemento de maior tamanho, seguido pelo **Excitador** e, a seguir, pelos **Diretores**. O Excitador separa o Refletor do conjunto de Diretores. O sentido de maior irradiação de uma Yagi é no sentido Refletor → Excitador (uma Yagi é um *endfire array*).

⇒ Apesar do elevado número de variáveis interdependentes em uma antena Yagi, o que não raro sugere o uso de auxílio computacional para seu projeto teórico, algumas regras e resultados básicos emergiram ao longo dos anos como consequência da experimentação prática com antenas Yagis. Em qualquer caso, é prudente que o ajuste final de uma Yagi seja efetuado em campo.

◆ Seja f a frequência de operação em *MHz* de uma antena Yagi. São válidas as seguintes observações/recomendações:

- O(s) diretor(es) deve(m) ter tamanho em torno de $\ell_D = 138.684/f$ [m].
- O excitador deve ter tamanho $\ell_E = 144.780/f$ [m].
- O refletor deve ter tamanho $\ell_R = 152.400/f$ [m].

- O espaçamento entre os elementos de uma Yagi devem situar-se na faixa 0.1λ a 0.2λ .
- Para cada elemento diretor acrescentado obtém-se um ganho adicional de aproximadamente 1.2 dB.
- Somente os 3 diretores mais próximos do excitador afetam a impedância de entrada de uma Yagi.

4.1 A Antena Yagi-Uda de 3 Elementos

Dada a interdependência entre os dipolos de uma antena Yagi – interdependência que é quantificada pela indutância mútua entre os elementos do *array* – a análise e o projeto de uma Yagi não é uma tarefa simples.

A Yagi mais simples é aquela composta por um excitador e um refletor, no entanto ela é raramente utilizada na prática devido à baixa relação frente-costas. Para efeito didático, vamos analisar nesta seção um caso de complexidade razoável e de inúmeras aplicações práticas que é o caso da Yagi de 3 elementos: excitador, refletor e um único diretor.

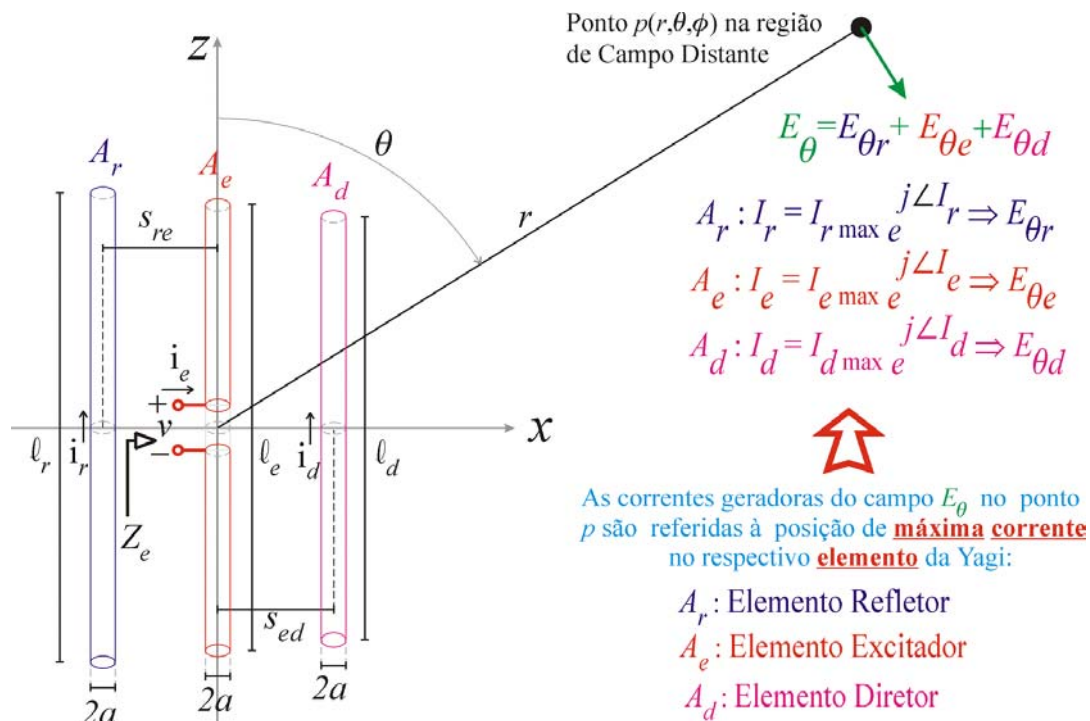


Figura 24: Antena Yagi com 3 elementos. O campo E_{θ} no ponto p é gerado pelas correntes I_r, I_e e I_d , as quais são **referidas à posição z correspondente ao valor máximo da corrente no respectivo elemento**. A impedância vista nos terminais de cada elemento (para o caso do Diretor e Refletor, imaginar ambos abertos e com terminais no centro) é **determinada pelas correntes $\underline{i}_r, \underline{i}_e$ e \underline{i}_d que atravessam a seção transversal no centro do respectivo elemento**. O *array* de 3 elementos é alimentado por um gerador senoidal de frequência $f = \omega/2\pi$ gerando ondas eletromagnéticas no ponto p com comprimento de onda $\lambda = c/f$, $c = 3 \times 10^8$ m/s.

⇒ A relação entre as correntes $\underline{i}_r, \underline{i}_e$ e \underline{i}_d e a tensão v na Figura 24 é dada por

$$\begin{bmatrix} Z_{ee} & Z_{er} & Z_{ed} \\ Z_{re} & Z_{rr} & Z_{rd} \\ Z_{de} & Z_{dr} & Z_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_e \\ i_r \\ i_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} i_e \\ i_r \\ i_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{ee} & Z_{er} & Z_{ed} \\ Z_{re} & Z_{rr} & Z_{rd} \\ Z_{de} & Z_{dr} & Z_{dd} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

sendo $\begin{bmatrix} Z_{ee} & Z_{er} & Z_{ed} \\ Z_{re} & Z_{rr} & Z_{rd} \\ Z_{de} & Z_{dr} & Z_{dd} \end{bmatrix}$ a matriz¹⁰ que define as impedâncias mútuas entre excitador, refletor e diretor.

Efetuada a inversão da matriz impedância mútua em (31) e simplificando obtemos as correntes nos dipolos em função da tensão v aplicada ao excitador:

$$\begin{bmatrix} i_e \\ i_r \\ i_d \end{bmatrix} = \frac{v}{\Delta} \begin{bmatrix} Z_{rr}Z_{dd} - Z_{rd}Z_{dr} \\ Z_{rd}Z_{de} - Z_{re}Z_{dd} \\ Z_{re}Z_{dr} - Z_{rr}Z_{de} \end{bmatrix} \quad (32)$$

onde $\Delta = Z_{ee}Z_{rr}Z_{dd} - Z_{ee}Z_{rd}Z_{dr} - Z_{re}Z_{er}Z_{dd} + Z_{re}Z_{ed}Z_{dr} + Z_{de}Z_{er}Z_{rd} - Z_{de}Z_{ed}Z_{rr}$.

- As impedâncias mútuas entre excitador, refletor e diretor podem ser determinadas pelo programa Zm_EchDip.exe, disponível para *download* em <http://diana.ee.pucrs.br/~decastro/download.html> no link **Antenas - Impedância de Dipolos Simétricos (código fonte C e script MathCad 2000) - Rev. 07/09/2003 - 322Kb (.zip)**. O programa Zm_EchDip.exe é a forma mais geral do **Método da FEM Induzida** estudado no Capítulo IV, permitindo o cálculo da impedância mútua entre dipolos simétricos paralelos situados em quaisquer coordenadas relativas entre si.

- Devido à maior precisão e devido ao fato de os dipolos da Yagi serem paralelos e situados de maneira tal que seus centros estão alinhados, utilizaremos o programa Zm_CyPDS.exe, disponível para *download* em <http://diana.ee.pucrs.br/~decastro/download.html> também no link **Antenas - Impedância de Dipolos Simétricos (código fonte C e script MathCad 2000) - Rev. 07/09/2003 - 322Kb (.zip)**. O programa Zm_CyPDS.exe determina a impedância mútua entre dipolos com base no **Método da Perturbação da Antena Bicônica de Schelkunoff**, que é mais preciso que o Método da FEM Induzida porque leva em consideração o diâmetro do condutor cilíndrico utilizado na construção do excitador, refletor e diretor da Yagi.

- Para determinar a impedância mútua de um dipolo com ele próprio, isto é, para determinar a impedância própria de um elemento da Yagi utilizaremos o programa Zi_CyDip.exe, disponível para *download* em <http://diana.ee.pucrs.br/~decastro/download.html> no link **Antenas - Impedância de Dipolos Simétricos (código fonte C e script MathCad 2000) - Rev. 07/09/2003 - 322Kb (.zip)**.

⇒ A melhor maneira de estudar este caso de razoável complexidade é através de um exemplo numérico prático, conforme segue.

¹⁰ A matriz de impedâncias mútuas entre os elementos de um *array* genérico sempre é uma matriz de tamanho $K \times K$, sendo K o número de elementos que compõe o *array*.

Exemplo 1:

Seja uma antena transmissora Yagi e uma antena receptora Dipolo Simétrico, conforme a Figura 25 abaixo.

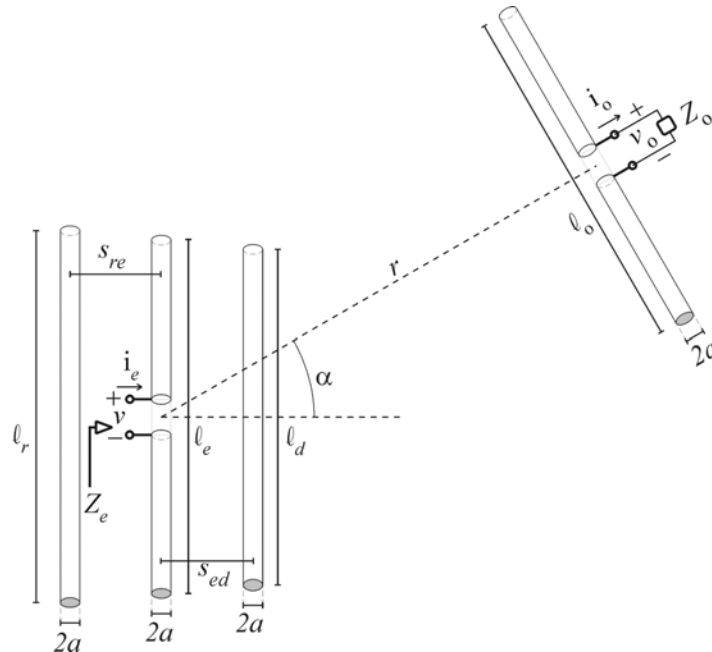


Figura 25: Antena transmissora Yagi e antena receptora Dipolo Simétrico, operando em um ambiente que se aproxima das condições de propagação no espaço livre. Ambas as antenas possuem perdas ôhmicas e dielétricas desprezíveis e estão contidas no mesmo plano (plano da página), distando entre si $r = 10 \text{ Km}$, sendo $\alpha = 30^\circ$. A Yagi opera sob uma ROE de 1:1 nos terminais de entrada e é alimentada por um transmissor cuja frequência é $f = 30 \text{ MHz}$ e cuja potência de saída é 1 Kw . A impedância de entrada Z_o do receptor conectado ao Dipolo é tal que o mesmo opera sob máxima transferência de potência. As dimensões geométricas das antenas são: $\ell_r = 5.08 \text{ m}$, $\ell_e = 4.826 \text{ m}$, $\ell_d = 4.623 \text{ m}$, $s_{re} = 2.40 \text{ m}$, $s_{ed} = 1.00 \text{ m}$, $\ell_o = 5.00 \text{ m}$ e $a = 50 \text{ mm}$.

Determine:

- A impedância Z_e nos terminais de entrada da Yagi.
- O módulo do Vetor de Poynting nas vizinhanças do Dipolo Simétrico gerado em consequência da irradiação da Yagi.
- O valor eficaz (RMS) da tensão v_o nos terminais de saída do Dipolo gerado em consequência da irradiação da Yagi.
- O gráfico do contorno do módulo do campo E_θ a $r = 10 \text{ Km}$ no plano E e no plano H ¹¹.
- A relação frente-costas FB em dB.

¹¹ No exemplo em questão os planos E e H são geometricamente gerados pelo movimento da reta definida pelo raio r no conjunto de direções θ e ϕ abaixo especificadas:

Plano E : $0 \leq \theta < 360^\circ$ e $\phi = 0^\circ$. Plano H : $\theta = 0^\circ$ e $0 \leq \phi < 360^\circ$.

Solução:

a) $f = 30 \text{ MHz} \rightarrow \lambda = c/f = 10 \text{ m} .$

Da Equação (32) temos:

$$i_e = \frac{v}{\Delta} (Z_{rr} Z_{dd} - Z_{rd} Z_{dr}) \tag{33}$$

$$i_r = \frac{v}{\Delta} (Z_{rd} Z_{de} - Z_{re} Z_{dd}) \tag{34}$$

$$i_d = \frac{v}{\Delta} (Z_{re} Z_{dr} - Z_{rr} Z_{de}) \tag{35}$$

onde $\Delta = Z_{ee} Z_{rr} Z_{dd} - Z_{ee} Z_{rd} Z_{dr} - Z_{re} Z_{er} Z_{dd} + Z_{re} Z_{ed} Z_{dr} + Z_{de} Z_{er} Z_{rd} - Z_{de} Z_{ed} Z_{rr} .$

A Tabela 2 a seguir mostra os resultados obtidos com o programa Zm_CyPDS.exe para a determinação das impedâncias mútuas entre os elementos da Yagi e os resultados obtidos com o programa Zi_CyDip.exe para a determinação das impedâncias próprias destes elementos.

```

USE: Zm_CyPDS Length1[m] Length2[m] Radius1[mm] Radius2[mm] Spac[m] Lambda[m]

Zm_PDS V1.7 by Cristina & Fernando DeCastro - decastro@ee.pucrs.br

Mutual impedance of 2 parallel dipoles D1 and D2 with symmetrical feeding,
full lengths Length1 and Length2, cylindrical wires radii Radius1 and
Radius2, spatially separated by Spac and operating at wavelength Lambda.
Based upon The Biconical Antenna Perturbation Method by Schelkunoff.

Full length of dipole D1:      4.826 [m]
Full length of dipole D2:      4.623 [m]
D1 cylindrical wire radius:    50 [mm]
D2 cylindrical wire radius:    50 [mm]
Spacing between parallel dipoles D1 and D2:      1 [m]
Operating wavelength:         10 [m]

Z12= 58.7722+1.80549i [ohm] (referred to D1 input terminals)

Full length of dipole D1:      4.623 [m]
Full length of dipole D2:      4.826 [m]
D1 cylindrical wire radius:    50 [mm]
D2 cylindrical wire radius:    50 [mm]
Spacing between parallel dipoles D1 and D2:      1 [m]
Operating wavelength:         10 [m]

Z12= 58.7705+1.69846i [ohm] (referred to D1 input terminals)

Full length of dipole D1:      4.623 [m]
Full length of dipole D2:      5.08 [m]
D1 cylindrical wire radius:    50 [mm]
D2 cylindrical wire radius:    50 [mm]
Spacing between parallel dipoles D1 and D2:      3.4 [m]
Operating wavelength:         10 [m]

Z12= 19.0415-39.5968i [ohm] (referred to D1 input terminals)

Full length of dipole D1:      5.08 [m]
Full length of dipole D2:      4.623 [m]
D1 cylindrical wire radius:    50 [mm]
D2 cylindrical wire radius:    50 [mm]
Spacing between parallel dipoles D1 and D2:      3.4 [m]
Operating wavelength:         10 [m]

Z12= 19.1029-32.4691i [ohm] (referred to D1 input terminals)
    
```

```

Full length of dipole D1:      5.08 [m]
Full length of dipole D2:      4.826 [m]
D1 cylindrical wire radius:    50 [mm]
D2 cylindrical wire radius:    50 [mm]
Spacing between parallel dipoles D1 and D2:      2.4 [m]
Operating wavelength:         10 [m]

Z12= 45.5942-26.2034i [ohm] (referred to D1 input terminals)

Full length of dipole D1:      4.826 [m]
Full length of dipole D2:      5.08 [m]
D1 cylindrical wire radius:    50 [mm]
D2 cylindrical wire radius:    50 [mm]
Spacing between parallel dipoles D1 and D2:      2.4 [m]
Operating wavelength:         10 [m]

Z12= 45.5807 -31.105i [ohm] (referred to D1 input terminals)

USE: Zi_CyDip WireRadius[mm] Lambda[m] Length[m]

    Zi_CyDip V1.7 by Cristina & Fernando DeCastro - decastro@ee.pucrs.br

    Input impedance of a cylindrical dipole with symmetrical feeding, full
    length Length, cylindrical wire radius WireRadius and operating at
    wavelength Lambda. Based upon The Biconical Antenna Perturbation Method by
    Scheikunoff.

Cylindrical wire radius:      50 [mm]
Dipole full length:          5.08 [m]
Operating wavelength:        10 [m]

Zin= 81.7238+55.4294i [ohm] (referred to the input terminals)

Cylindrical wire radius:      50 [mm]
Dipole full length:          4.826 [m]
Operating wavelength:        10 [m]

Zin= 67.3502+21.8355i [ohm] (referred to the input terminals)

Cylindrical wire radius:      50 [mm]
Dipole full length:          4.623 [m]
Operating wavelength:        10 [m]

Zin= 57.7473-4.25613i [ohm] (referred to the input terminals)
    
```

Tabela 2: Resultados obtidos com os programas Zm_CyPDS.exe e Zi_CyDip.exe respectivamente na determinação das impedâncias mútuas e próprias dos dipolos do *array* definido pela Yagi da Figura 25.

Resumindo os resultados da Tabela 2:

$$Z_{ed} = 58.8 + j1.8 \Omega \quad Z_{dr} = 19.1 - j39.6 \Omega \quad Z_{re} = 45.6 - j26.2 \Omega \quad Z_{rr} = 81.7 + j55.4 \Omega$$

$$Z_{de} = 58.8 + j1.7 \Omega \quad Z_{rd} = 19.1 - j32.5 \Omega \quad Z_{er} = 45.6 - j31.1 \Omega \quad Z_{ee} = 67.4 + j21.8 \Omega$$

$$Z_{dd} = 57.8 - j4.3 \Omega$$

Substituindo estes resultados em (33) obtemos:

$$Z_e = \frac{v}{i_e} = \frac{\Delta}{(Z_{rr}Z_{dd} - Z_{rd}Z_{dr})} = 3.983 + j14.692 \Omega$$

b) A potência de saída do transmissor é $P = 1 \text{ Kw}$. Seja Z_g a impedância de saída do transmissor. Sabemos do enunciado que a Yagi opera sob ROE 1 : 1 nos terminais de entrada. Então isto implica que $Z_g = Z_e^*$ (máxima transferência de potência). Portanto o transmissor entrega toda potência de saída à Yagi e o **valor instantâneo de pico** (no tempo) da corrente i_e é :

$$i_e = \sqrt{\frac{2P}{\text{Re}\{Z_e\}}} = 22.408 \text{ A}$$

Daí, a tensão v nos terminais da Yagi é

$$v = Z_e i_e = 89.253 + j329.225 \text{ V}$$

E de (33), (34) e (35):

$$i_e = |i_e| e^{j\angle i_e} = 22.408 e^{j0} \text{ A} \quad (36)$$

$$i_r = |i_r| e^{j\angle i_r} = -3.681 + j2.005 = 4.192 e^{j151.42^\circ} \text{ A} \quad (37)$$

$$i_d = |i_d| e^{j\angle i_d} = -22.543 - j5.521 = 23.209 e^{-j166.24^\circ} \text{ A} \quad (38)$$

Mas os campos gerados por qualquer elemento irradiante são referidos à corrente máxima no elemento. Daí, para poder determinar o campo distante gerado pelo *array* de 3 elementos que constitui a Yagi mostrada nas Figuras 24 e 25 é necessário converter o valor dos módulos de i_e , i_r e i_d no centro dos dipolos para aquele encontrado na posição z correspondente aos valores máximos de corrente $I_{e\max}$, $I_{r\max}$, $I_{d\max}$ no respectivo elemento. Usando a Equação (33) do Capítulo IV (vide nota de rodapé ¹² abaixo) em (36),(37) e (38), temos:

$$I_{e\max} = |i_e| = 22.408 \text{ A} \quad (39)$$

$$I_{r\max} = |i_r| \left/ \text{sen}\left(\frac{\pi \ell_r}{\lambda}\right)\right. = 4.193 \text{ A} \quad (40)$$

$$I_{d\max} = |i_d| = 23.209 \text{ A} \quad (41)$$

Portanto, com referência à Figura 24 e às equações (36) à (41), as correntes na posição z em que ocorrem seu valores máximos é dada por

¹² A Equação (33) do Capítulo IV é

$$I_0 = \begin{cases} \frac{I(z_i)}{\text{sen}\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)} & , L \geq \frac{\lambda}{2} \\ I(z_i) & , L \leq \frac{\lambda}{2} \end{cases}$$

$$I_e = I_{e\max} e^{j\angle i_e} = 22.408 e^{j0} \text{ A} \quad (42)$$

$$I_r = I_{r\max} e^{j\angle i_r} = 4.193 e^{j151.42^\circ} \text{ A} \quad (43)$$

$$I_d = I_{d\max} e^{j\angle i_d} = 23.209 e^{-j166.24^\circ} \text{ A} \quad (44)$$

O campo E_θ de um *array* de K dipolos de tamanho L , sendo o k -ésimo dipolo percorrido por uma corrente $I_k = |I_k| e^{j\angle I_k}$ e situado nas coordenadas (x_k, y_k, z_k) do espaço \mathfrak{R}^3 , $k = 0, 1, \dots, K-1$, é dado pela Equação (14), abaixo re-escrita por comodidade:

$$E_\theta = \sum_{k=0}^{K-1} I_k e^{j\frac{2\pi}{\lambda}(x_k \sin \theta \cos \phi + y_k \sin \theta \sin \phi + z_k \cos \theta)} \left\{ \frac{\cos\left(\frac{L}{\lambda} \pi \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\sin \theta} \right\} \frac{60}{r} e^{j\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r + \frac{\pi}{2}\right)} \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right] \quad (14)$$

Mas os elementos do *array* que formam uma Yagi possuem tamanhos L distintos, de modo que para (14) ser válida no exemplo em questão esta deve ser generalizada para

$$E_\theta = \sum_{k=0}^{K-1} I_k e^{j\frac{2\pi}{\lambda}(x_k \sin \theta \cos \phi + y_k \sin \theta \sin \phi + z_k \cos \theta)} \left\{ \frac{\cos\left(\frac{L_k}{\lambda} \pi \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi L_k}{\lambda}\right)}{\sin \theta} \right\} \frac{60}{r} e^{j\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r + \frac{\pi}{2}\right)} \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right] \quad (45)$$

O módulo do campo E_θ para o *array* em questão é obtido de (45) e resulta em

$$|E_\theta| = \left| \sum_{k=0}^{K-1} I_k e^{j\frac{2\pi}{\lambda}(x_k \sin \theta \cos \phi + y_k \sin \theta \sin \phi + z_k \cos \theta)} \left\{ \frac{\cos\left(\frac{L_k}{\lambda} \pi \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi L_k}{\lambda}\right)}{\sin \theta} \right\} \frac{60}{r} \right| \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right] \quad (46)$$

Os $K = 3$ dipolos do *array* na Figura 25 (ver também Figura 24) possuem as seguintes coordenadas no espaço \mathfrak{R}^3 :

$$\text{Excitador: } (x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$$

$$\text{Refletor: } (x_1, y_1, z_1) = (-s_{re}, 0, 0)$$

$$\text{Diretor: } (x_2, y_2, z_2) = (s_{ed}, 0, 0)$$

Para este *array* de $K = 3$ dipolos nestas coordenadas a Equação (46) simplifica-se para:

$$|E_\theta| = \left| \sum_{k=0}^2 I_k e^{j\frac{2\pi}{\lambda}(x_k \text{sen } \theta \cos \phi)} \left\{ \frac{\cos\left(\frac{L_k}{\lambda} \pi \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi L_k}{\lambda}\right)}{\text{sen } \theta} \right\} \frac{60}{r} \right| \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right] \quad (47)$$

ou, com referência à Figura 25,

$$|E_\theta| = \frac{60}{r} \left(\begin{array}{l} I_e e^{j0} \left\{ \frac{\cos\left(\frac{\ell_e}{\lambda} \pi \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi \ell_e}{\lambda}\right)}{\text{sen } \theta} \right\} + \\ I_r e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}(s_{re} \text{sen } \theta \cos \phi)} \left\{ \frac{\cos\left(\frac{\ell_r}{\lambda} \pi \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi \ell_r}{\lambda}\right)}{\text{sen } \theta} \right\} + \\ I_d e^{j\frac{2\pi}{\lambda}(s_{ed} \text{sen } \theta \cos \phi)} \left\{ \frac{\cos\left(\frac{\ell_d}{\lambda} \pi \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi \ell_d}{\lambda}\right)}{\text{sen } \theta} \right\} \end{array} \right) \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right] \quad (48)$$

De (48), com $r = 10 \times 10^3$ m, $\theta = 90^\circ - \alpha = 60^\circ$, $\phi = 0$ obtém-se $|E_\theta| = 0.064$ V/m.

Daí, o módulo do Vetor de Poynting a $r = 10 \times 10^3$ m da Yagi e na direção do Dipolo Simétrico

$$\text{receptor resulta em } S = \frac{\left(\frac{|E_\theta|}{\sqrt{2}}\right)^2}{120\pi[\Omega]} = 5.354 \times 10^{-6} \text{ W/m}^2.$$

c) A tensão v_0 nos terminais de saída de uma antena receptora é função de sua Abertura Efetiva. Vimos no Capítulo V que a Abertura Efetiva de um Dipolo de Meia Onda é $A_{\text{RX(max)}} = 0.130\lambda^2$.

Da Equação (67) do Capítulo III temos¹³

$$V = 2\sqrt{A_{\text{RX(max)}}SR_r} = 2\sqrt{0.130\lambda^2SR_r} = 2\lambda\sqrt{0.130SR_r} \quad (49)$$

¹³ A Equação (67) do Capítulo III é

$$A_{\text{RX(max)}} = \frac{V^2}{4SR_r} \quad [\text{m}^2]$$

onde S é o módulo do Vetor de Poynting incidente na antena receptora, R_r é a resistência de radiação da antena receptora e V é a tensão que aparece a circuito aberto nos terminais da antena receptora em consequência da densidade de potência incidente dada por S .

Para determinar a Resistência de Radiação R_r do dipolo receptor de tamanho $\ell_o = 5.00$ m precisamos saber a sua Resistência de Entrada R_{in} . Utilizando o programa Zi_CyDip.exe obtemos:

```
Cylindrical wire radius:      50 [mm]
Dipole full length:         5 [m]
Operating wavelength:      10 [m]
```

```
Zin= 76.8798+44.7263i [ohm] (referred to the input terminals)
```

Portanto $R_{in} = 76.9 \Omega$. É necessário agora converter a Resistência de Entrada R_{in} para a Resistência de Radiação R_r , utilizando para tanto a Equação (35) do Capítulo IV com $\ell = \ell_o = 5.00$ m, $\lambda = 10$ m e $R_{in} = 76.9 \Omega$:

$$R_r = R_{in} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi\ell}{\lambda}\right) = 76.9 \Omega \quad (50)$$

Substituindo $S = 5.354 \times 10^{-6} \text{ W/m}^2$, $R_r = 76.9 \Omega$ e $\lambda = 10$ m em (49) obtemos $V = 2\lambda\sqrt{0.130SR_r} = 0.146 \text{ V}_{\text{rms}}$ à circuito aberto nos terminais do dipolo da Figura 25.

Mas como a impedância de entrada Z_o do receptor conectado ao Dipolo é tal que o mesmo opera sob máxima transferência de potência, então $Z_o = Z_{in}^*$ e, em consequência, a tensão v_o nos terminais de saída do Dipolo é $v_o = V/2 = 0.073 \text{ V}_{\text{rms}}$.

d) Os contornos do $|E_\theta|$ a uma distância $r = 10 \times 10^3$ m são obtidos de (48) e são mostrados nas Figuras 26 e 27:

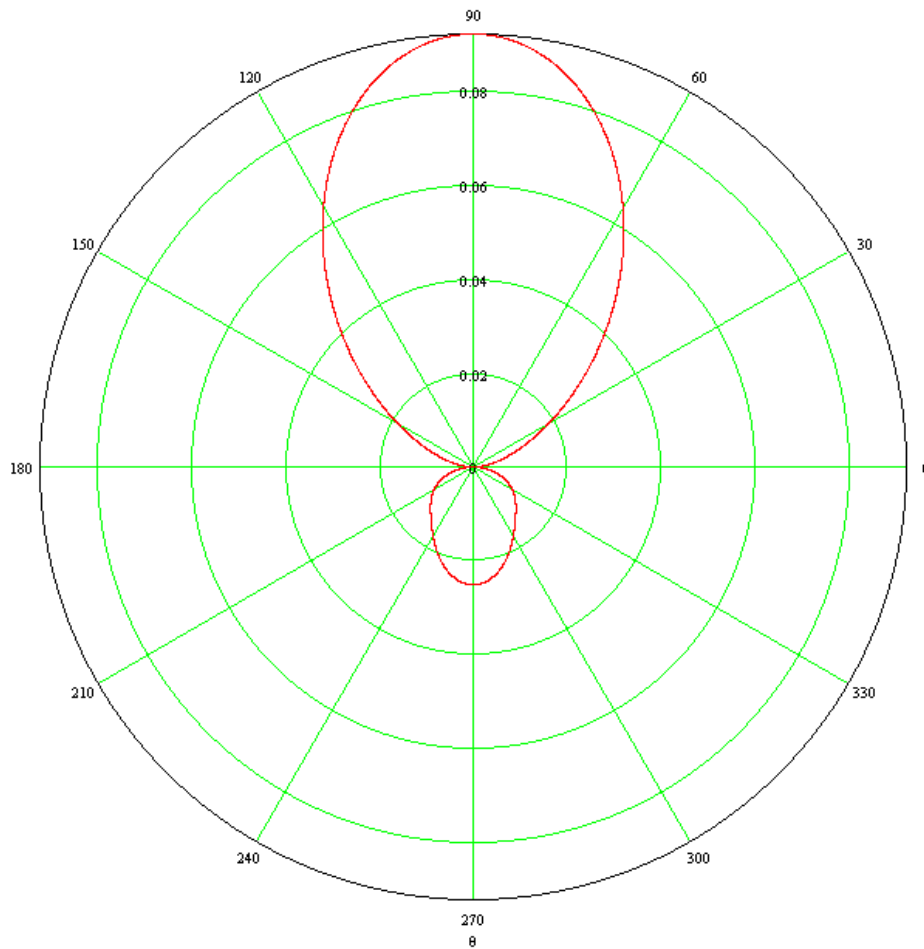


Figura 26: Contorno $|E_\theta|$ em $\left[\frac{\text{V}}{\text{m}}\right]$ no plano E a uma distância $r = 10 \times 10^3$ m da Yagi.

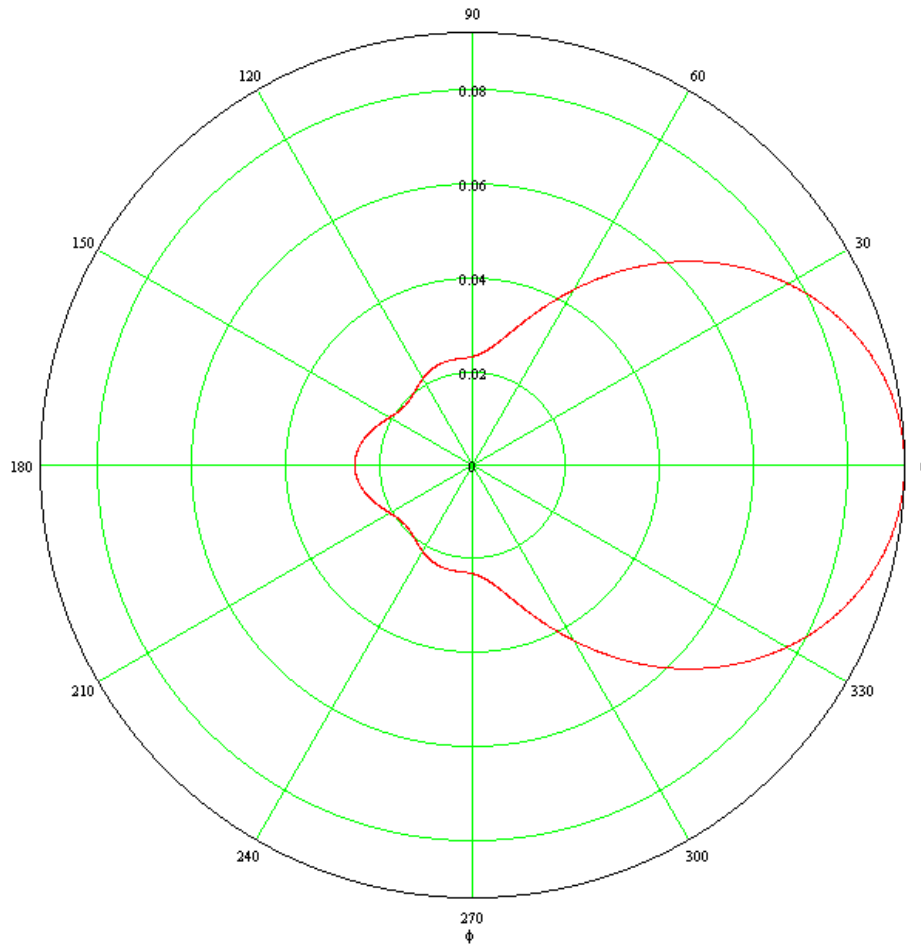


Figura 27: Contorno $|E_\theta|$ em $\left[\frac{\text{V}}{\text{m}}\right]$ no plano H a uma distância $r = 10 \times 10^3$ m da Yagi.

e) A relação frente-costas é obtida de (48) como a razão entre $|E_\theta|$ obtido em um ponto situado em $(r, \theta = 90^\circ, \phi = 0^\circ)$ e $|E_\theta|$ obtido em um ponto situado em $(r, \theta = 90^\circ, \phi = 180^\circ)$, sendo r uma distância que localiza ambos os pontos na região de Campo Distante.

Especificamente, para $r = 10 \times 10^3$ m (campo distante), obtemos

$$\text{FB} := 20 \cdot \log \left(\frac{|E_\theta(r, 90\text{-deg}, 0\text{-deg})|}{|E_\theta(r, 90\text{-deg}, 180\text{-deg})|} \right) \quad \text{FB} = 11.3 \quad \text{dB}$$

4.2 Acoplamento de uma Antena Yagi-Uda ao Cabo Coaxial

Uma antena Yagi-Uda é usualmente alimentada por um cabo coaxial de impedância característica $Z_0 = 50\Omega$.

A impedância de entrada de uma Yagi é, em geral, muito diferente de $Z_0 = 50\Omega$ ¹⁴ para que seja obtida uma ROE menor que 1.3:1. Em função disto, é comum utilizar um acoplador entre a Yagi e o cabo coaxial, acoplador que é denominado *Gamma Match*.

A sistemática de projeto de um *Gamma Match* encontra-se disponível para *download* em <http://diana.ee.pucrs.br/~decastro/download.html> no link **Antenas - Acoplamento ao cabo coaxial utilizando Gamma Match (script MathCad 7) - Rev. 28/05/2002 - 20Kb (.zip)**.

Um dos exemplos resolvidos neste *script* é o projeto do *Gamma Match* que acopla um cabo coaxial de $Z_0 = 50\Omega$ à Yagi-Uda analisada no Exemplo 1 deste Capítulo. A Figura 28 a seguir mostra o *Gamma Match* resultante.

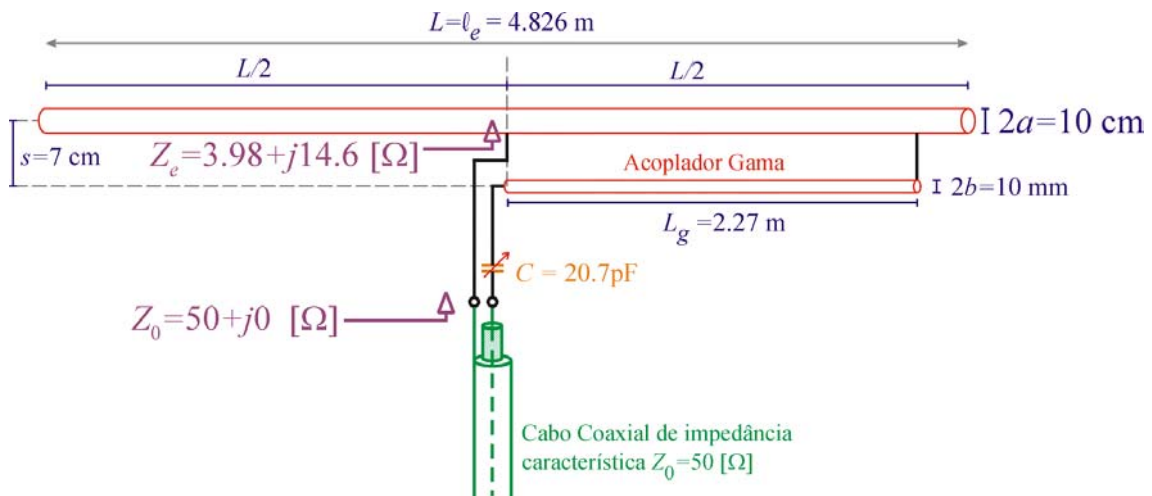


Figura 28: *Gamma Match* instalado no elemento **excitador** da antena Yagi-Uda do Exemplo 1.

¹⁴ Por exemplo, $Z_e = 3.98 + j14.6\Omega$ na Yagi do Exemplo 1, valor que é bastante diferente de $Z_0 = 50 + j0\Omega$.