

MUSIC - *M*U*L*tiple *S*ignal *C*lassification  
ESPRIT - *E*stimation of *S*ignal *P*arameters via  
*R*ational *I*nvariance *T*echniques

Departamento de Eletrônica e Computação  
Centro de Tecnologia  
ELC1148 – Comunicações Estratégicas  
Prof. Fernando DeCastro

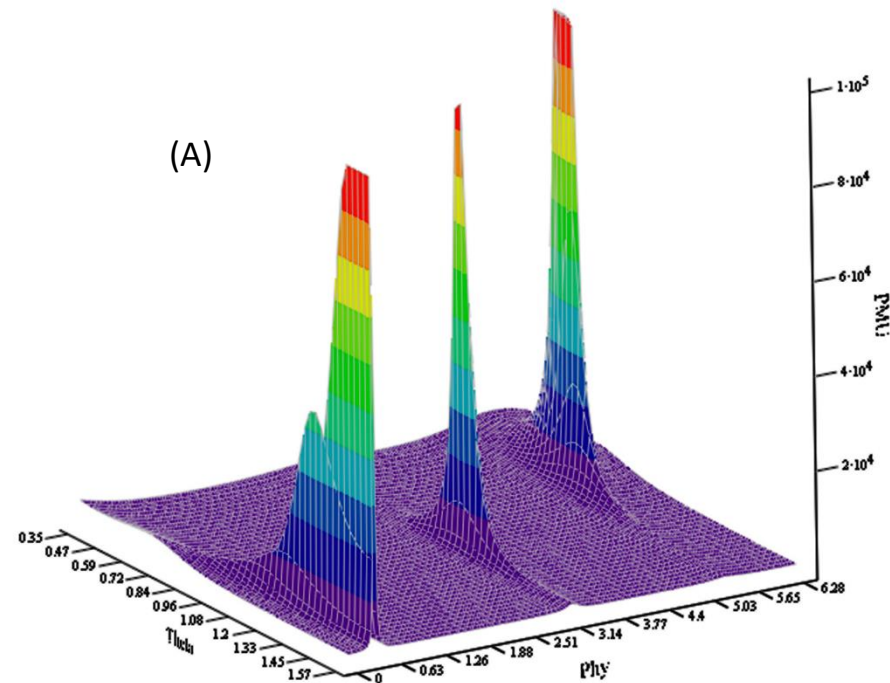


## MUSIC - MUltiple Signal Classification

Nos Caps I.1, I.2, I.3 e I.4 vimos situações em que o conhecimento do DOA (*Direction Of Arrival*) de sinais-ameaça (*threat signals*) é imperativa para o sucesso das ações de ataque eletrônico (EA) e proteção eletrônica (EP). No Cap II.3, no Exemplo 9 e no Exemplo 10, a partir do DOA de sinais de facções amigas e inimigas, vimos algoritmos para *beamforming* agindo para tornar *stealth* a operação da *base station* de um sistema de comunicações tático, minimizando a probabilidade do sinal da *base station* ser detectado pelo inimigo. A determinação do DOA de sinais é, portanto, uma ação de ES (*Electronic Support*) altamente demandada em um teatro de operações de EW.

Neste capítulo estudaremos o MUSIC (*MUltiple Signal Classification*), que é um algoritmo para determinação do DOA de sinais com alta precisão (o MUSIC enquadra-se na classe denominada *super-resolution*). O MUSIC opera sobre um vetor  $\underline{V}_T[n] = [V_{T_0}[n] \ V_{T_1}[n] \ \dots \ V_{T_{K-1}}[n]]^T$  com cada um dos  $K$  componentes  $V_{T_k}[n]$  representando a sequência de amostras resultante da digitalização do sinal de tensão medido nos terminais do respectivo  $k$ -ésimo dipolo do *array*,  $k = 0, 1, \dots, K - 1$ .

Resumidamente, o MUSIC determina a matriz de covariância  $\mathbf{Cov}$  da sequência de vetores  $\underline{V}_T[n]$  para  $n = 0, 1, \dots, N_{smp} - 1$ , onde  $N_{smp}$  é número de amostras consecutivas na sequência de amostras recebido por cada dipolo usadas para montar a matriz  $\mathbf{Cov}$  ([https://pt.wikipedia.org/wiki/Matriz\\_de\\_covari%C3%A2ncia](https://pt.wikipedia.org/wiki/Matriz_de_covari%C3%A2ncia)).



É efetuada então a eigendecomposição da matriz  $\mathbf{Cov}$  ([https://en.wikipedia.org/wiki/Eigenvalues\\_and\\_eigenvectors](https://en.wikipedia.org/wiki/Eigenvalues_and_eigenvectors)) e os autovetores associados aos menores autovalores (denominados autovetores de ruído) são considerados serem ortogonais ao *steering vector* de cada  $m$ -ésimo sinal que incide no *array* no DOA  $(\theta_m, \phi_m)$ , e, por serem ortogonais, o produto escalar entre eles é nulo.

Desta maneira, o inverso da soma do produto escalar entre cada autovetor de ruído e o *steering vector* do sinal no DOA genérico  $(\theta, \phi)$ , denominado “espectro” do MUSIC, resulta em um valor infinito (na prática, muito grande) na situação em que  $(\theta, \phi)$  corresponde ao DOA de um sinal que incide no *array*, conforme veremos adiante. A determinação do DOA dos sinais que incidem no *array* equivale, portanto, a determinar para quais ângulos  $(\theta, \phi)$  a superfície do “espectro” do MUSIC apresenta máximos locais (picos), conforme mostrado em (A) ao lado para 3 sinais incidentes.

## Onda EM plana incidindo em um dipolo

Para efeito de simular o desempenho do MUSIC, precisamos inicialmente modelar como o *array* de  $K$  dipolos gera o vetor de tensões  $\underline{x}[n] = [x_0[n] \ x_1[n] \ \dots \ x_{K-1}[n]]^T$ , com cada um dos componentes  $x_k[n]$  representando a sequência de amostras resultante da digitalização do sinal de tensão medido nos terminais do respectivo  $k$ -ésimo dipolo do *array*,  $k = 0, 1, \dots, K - 1$ . Para tanto, precisamos determinar como cada dipolo do *array* de  $K$  dipolos extrai a amplitude e a fase da onda EM plana que nele incide e a converte no fasor de tensão respectivo em seus terminais. Consideremos o dipolo cilíndrico em (A), em cuja superfície incide uma onda EM plana na direção  $(\theta, \phi)$  cujo vetor de propagação é  $\underline{k} = |\underline{k}|\underline{\hat{k}}$ , sendo  $\underline{\hat{k}}$  o vetor unitário que define a direção de propagação da onda EM e  $|\underline{k}| = k = 2\pi/\lambda$  [rad/m] é a constante de propagação que define a variação da fase da onda à medida que a onda EM se propaga na direção  $\underline{\hat{k}}$ . A polarização do campo elétrico da onda EM é dada pelo vetor  $\underline{\hat{\rho}}$ :

$$\underline{\hat{\rho}} = \left( \frac{\rho_\theta \underline{\hat{\theta}} + \rho_\phi \underline{\hat{\phi}}}{\sqrt{(\rho_\theta)^2 + (\rho_\phi)^2}} \right) \quad (1)$$

onde os parâmetros  $\rho_\theta$  e  $\rho_\phi$  definem as componentes do campo elétrico nas direções  $\underline{\hat{\theta}}$  e  $\underline{\hat{\phi}}$ .

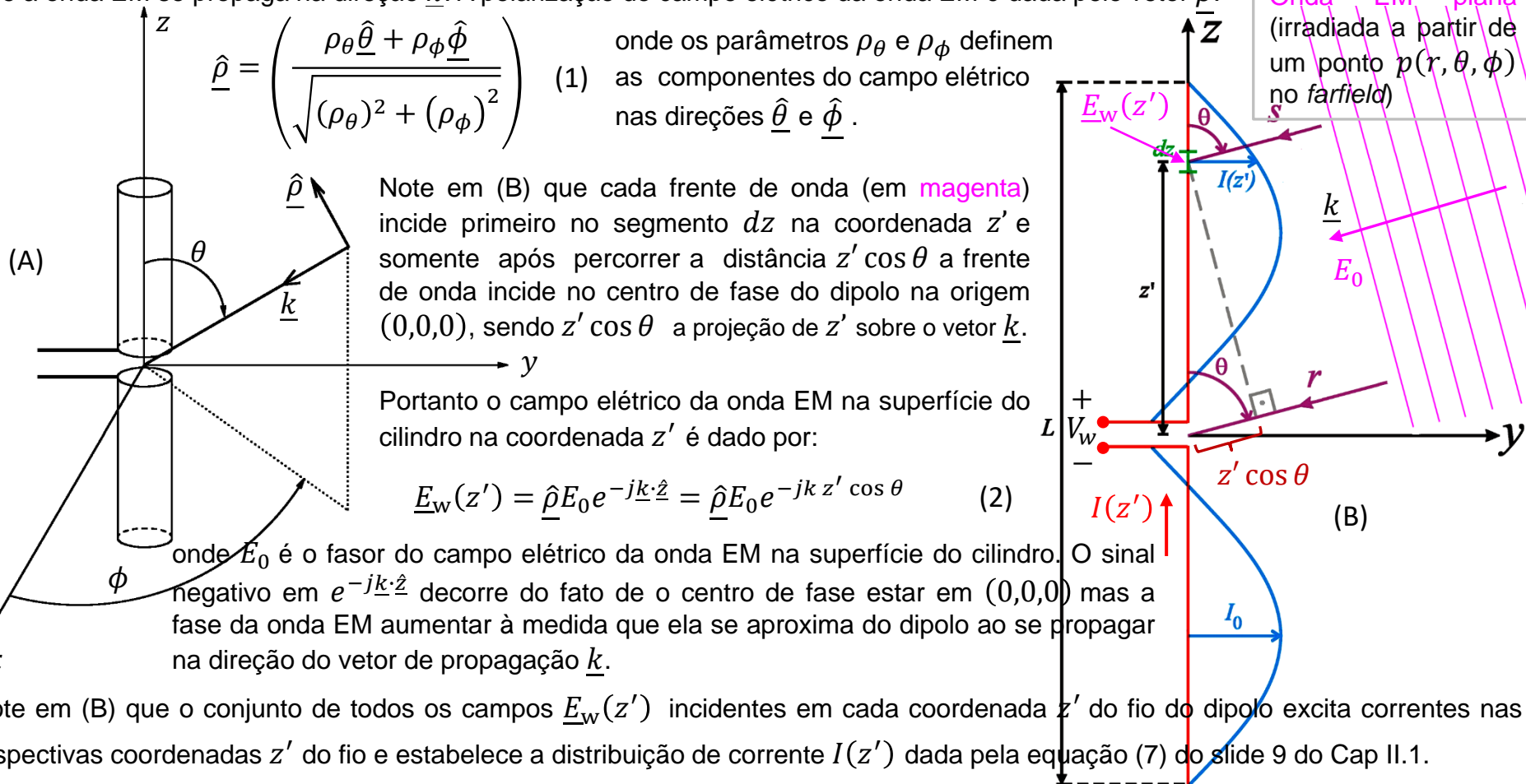
Note em (B) que cada frente de onda (em magenta) incide primeiro no segmento  $dz$  na coordenada  $z'$  e somente após percorrer a distância  $z' \cos \theta$  a frente de onda incide no centro de fase do dipolo na origem  $(0,0,0)$ , sendo  $z' \cos \theta$  a projeção de  $z'$  sobre o vetor  $\underline{k}$ .

Portanto o campo elétrico da onda EM na superfície do cilindro na coordenada  $z'$  é dado por:

$$\underline{E}_w(z') = \underline{\hat{\rho}} E_0 e^{-jk \cdot \underline{\hat{z}}} = \underline{\hat{\rho}} E_0 e^{-jk z' \cos \theta} \quad (2)$$

onde  $E_0$  é o fasor do campo elétrico da onda EM na superfície do cilindro. O sinal negativo em  $e^{-jk \cdot \underline{\hat{z}}}$  decorre do fato de o centro de fase estar em  $(0,0,0)$  mas a fase da onda EM aumentar à medida que ela se aproxima do dipolo ao se propagar na direção do vetor de propagação  $\underline{k}$ .

Note em (B) que o conjunto de todos os campos  $\underline{E}_w(z')$  incidentes em cada coordenada  $z'$  do fio do dipolo excita correntes nas respectivas coordenadas  $z'$  do fio e estabelece a distribuição de corrente  $I(z')$  dada pela equação (7) do slide 9 do Cap II.1.



## Onda EM plana incidindo em um dipolo

A distribuição de corrente  $I(z')$  ao longo do fio do dipolo de comprimento  $L$  em (A) abaixo varia senoidalmente com a coordenada  $z'$  em consequência de todos os campos  $\underline{E}_w(z')$  incidentes em cada coordenada  $z'$  do fio variarem senoidalmente no tempo. Como as equações de Maxwell relacionam derivadas no tempo e no espaço dos campos  $E$  [V/m] e  $H$  [A/m], e como a derivada de uma variação senoidal também resulta senoidal, a corrente  $I(z')$  (que é dada pelo próprio campo  $H$  [A/m] na superfície cilíndrica do fio) **precisa** ter a forma senoidal no espaço dada pela equação (7) do slide 9 do Cap II.1 (abaixo reproduzida) para que as derivadas no tempo e no espaço nas equações de Maxwell sejam compatíveis.

$$I(z') = \begin{cases} I_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{L}{2} + z'\right)\right) & p/ z' < 0 \\ I_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{L}{2} - z'\right)\right) & p/ z' \geq 0 \end{cases} = I_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{L}{2} - |z'|\right)\right) \quad [\text{A}] \quad (7) - \text{Cap II.1}$$

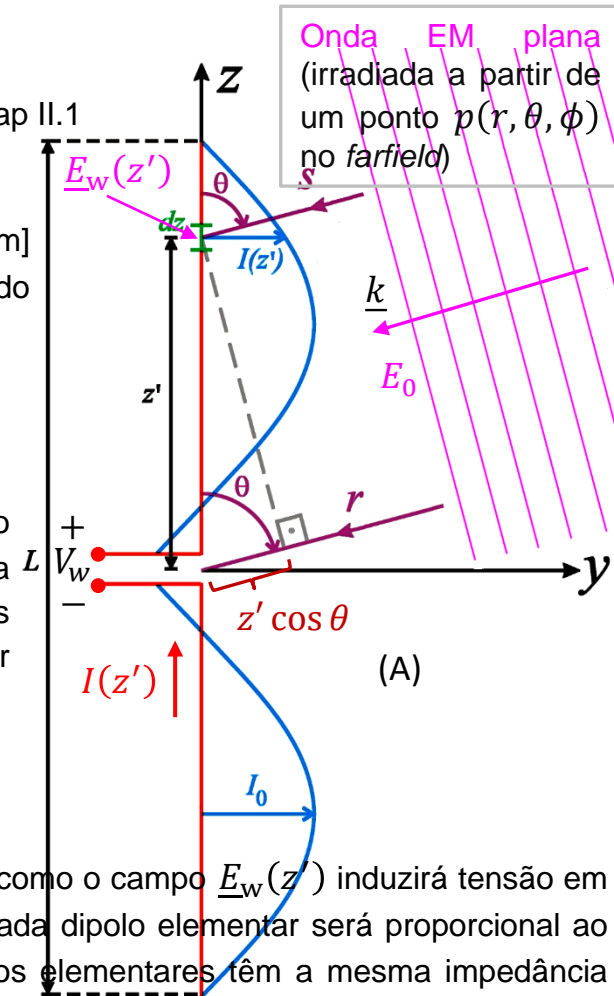
O produto de  $\underline{E}_w(z')$  [V/m] incidente na coordenada  $z'$  pelo tamanho do segmento  $dz$  [m] na coordenada  $z'$  define a tensão  $V_{dz}(z') = \underline{E}_w(z') dz$  [V] entre as extremidades do segmento  $dz$ . Somando todas as tensões  $V_{dz}(z')$  ao longo do comprimento  $L$ :

$$V_w = -\frac{1}{I(z'=0)} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \underline{E}_w(z') \cdot \underline{I}(z') dz' \quad (3)$$

onde  $\underline{I}(z') = I(z') \hat{z}$ , sendo  $I(z')$  dado por (7) acima e sendo  $\hat{z}$  o vetor unitário do eixo cartesiano  $z$ . O sinal negativo em (3) decorre do fato de, se conectarmos uma impedância de carga  $Z_T$  nos terminais do dipolo a tensão gerada pela corrente  $I(z'=0)$  nos terminais será negativa, i.e.,  $V_w = -Z_T I(z'=0)$ . Neste contexto, é instrutivo interpretar o papel da razão  $I(z')/I(z'=0)$  em (3):

$$\frac{I(z')}{I(z'=0)} = \frac{I_0}{I(z'=0)} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{L}{2} - |z'|\right)\right) \quad (4)$$

A razão  $I(z')/I(z=0)$  define a condição de contorno (i.e., o “template” ou “molde”) de como o campo  $\underline{E}_w(z')$  induzirá tensão em cada dipolo elementar  $dz$  ao longo de  $z$ . A tensão  $V_{dz}(z') = \underline{E}_w(z') dz$  induzida em cada dipolo elementar será proporcional ao valor da corrente  $I(z')$  na posição  $z'$ . Isto define um “template” porque todos os dipolos elementares têm a mesma impedância própria, logo, quanto maior a corrente  $I(z')$  induzida por  $\underline{E}_w(z')$  na posição  $z'$  maior será a tensão  $V_{dz}(z')$  nesta posição. A integral em (3) soma, então, ao longo de  $z$  a contribuição da tensão  $V_{dz}(z')$  de todos os dipolos elementares, resultando em  $V_w$ .





## Onda EM plana incidindo em um dipolo

Substituindo as equações (4) e (2) em (3), temos:

$$\begin{aligned} V_w &= -\frac{1}{I(z'=0)} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \underline{E}_w(z') \cdot \underline{I}(z') dz' = -\frac{1}{I(z'=0)} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \underline{E}_w(z') \cdot I_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{L}{2} - |z'|\right)\right) \underline{\hat{z}} dz' = \\ &= -\frac{1}{I(z'=0)} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \underline{\hat{\rho}} E_0 e^{-jkz' \cos \theta} \cdot I_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{L}{2} - |z'|\right)\right) \underline{\hat{z}} dz' = \\ &= -\frac{E_0 I_0}{I(z'=0)} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{L}{2} - |z'|\right)\right) e^{-jkz' \cos \theta} \underline{\hat{\rho}} \cdot \underline{\hat{z}} dz' \end{aligned}$$

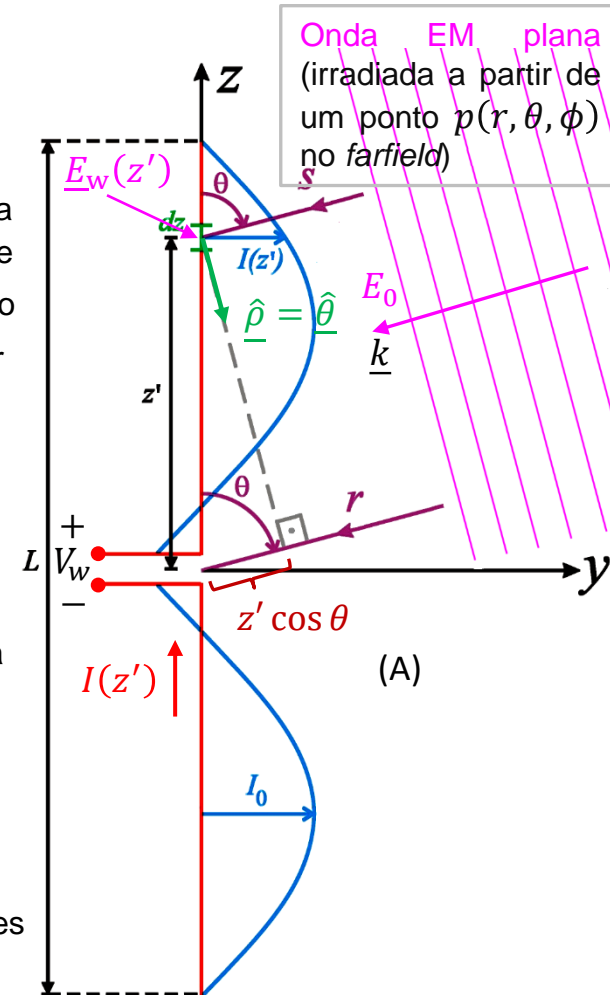
Na grande maioria das situações práticas a orientação espacial do dipolo é coerente com a polarização da onda EM plana incidente, situação em que  $\rho_\phi = 0$  na equação (1) do slide 3, resultando  $\underline{\hat{\rho}} = \underline{\hat{\theta}}$ . Nesta situação a projeção do vetor de polarização  $\underline{\hat{\rho}}$  sobre a direção  $\underline{\hat{z}}$  da corrente  $\underline{I}(z')$  no fio do dipolo resulta  $\underline{\hat{\rho}} \cdot \underline{\hat{z}} = -\cos(90^\circ - \theta) = -\sin \theta$  (ver vetor  $\underline{\hat{\rho}} = \underline{\hat{\theta}}$  em (A) ao lado). Substituindo esta condição na expressão de  $V_w$  acima, temos:

$$V_w = \frac{E_0 I_0}{I(z'=0)} \sin \theta \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{L}{2} - |z'|\right)\right) e^{-jkz' \cos \theta} dz'$$

Fazendo  $z' = 0$  na equação (7) do Cap II.1 no slide anterior e substituindo  $I(z'=0)$  na expressão de  $V_w$  acima, temos:

$$V_w = \frac{E_0}{\sin \frac{\pi L}{\lambda}} \sin \theta \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{L}{2} - |z'|\right)\right) e^{-jkz' \cos \theta} dz'$$

Resolvendo a integral acima através de um desenvolvimento algébrico similar ao dos slides 12 e 13 do Cap II.1, obtemos o resultado em (5) no próximo slide.

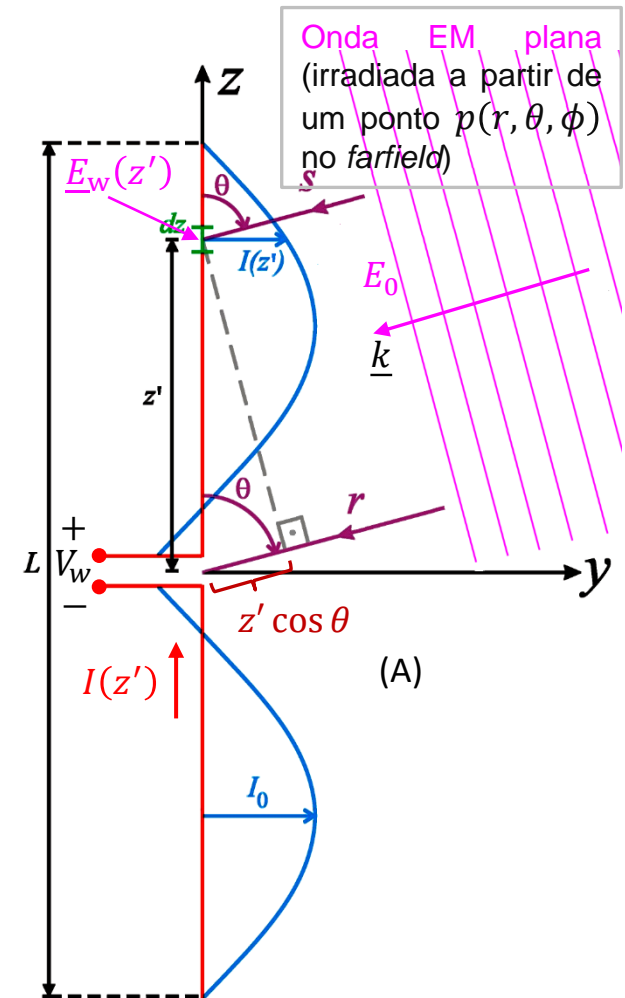


## Onda EM plana incidindo em um dipolo

$$V_w = E_0 \frac{\lambda}{\pi \sin \frac{\pi L}{\lambda}} \left\{ \frac{\cos \left( \frac{L}{\lambda} \pi \cos \theta \right) - \cos \left( \frac{\pi L}{\lambda} \right)}{\sin \theta} \right\} \text{ [V]} \quad (5)$$

onde  $\theta$  é o DOA em que a onda EM incide no dipolo.

Note a similaridade entre a equação (5) acima, que define a tensão  $V_w$  que surge a circuito aberto nos terminais de um dipolo quando nele incide uma onda EM plana com fasor do campo elétrico  $E_\theta$  dado por  $E_0$ , e a equação (18) do slide 13 do Cap II.1, que (ao ser dividida por  $e^{j\omega t}$ ) define o fasor do campo elétrico  $E_\theta$  da onda EM irradiada pelo dipolo quando o dipolo é excitado por uma corrente de radiação  $I_0$ .



## Onda EM plana incidindo em um array de dipolos

Consideremos um *array* (não necessariamente um ULA) com  $K$  dipolos de tamanho  $L$  e espaçados de  $d$  entre si, no qual incide uma onda EM plana na direção  $(\theta, \phi)$  sendo  $E_0$  o fasor do campo elétrico  $E_\theta$ , conforme mostrado em (A) abaixo.

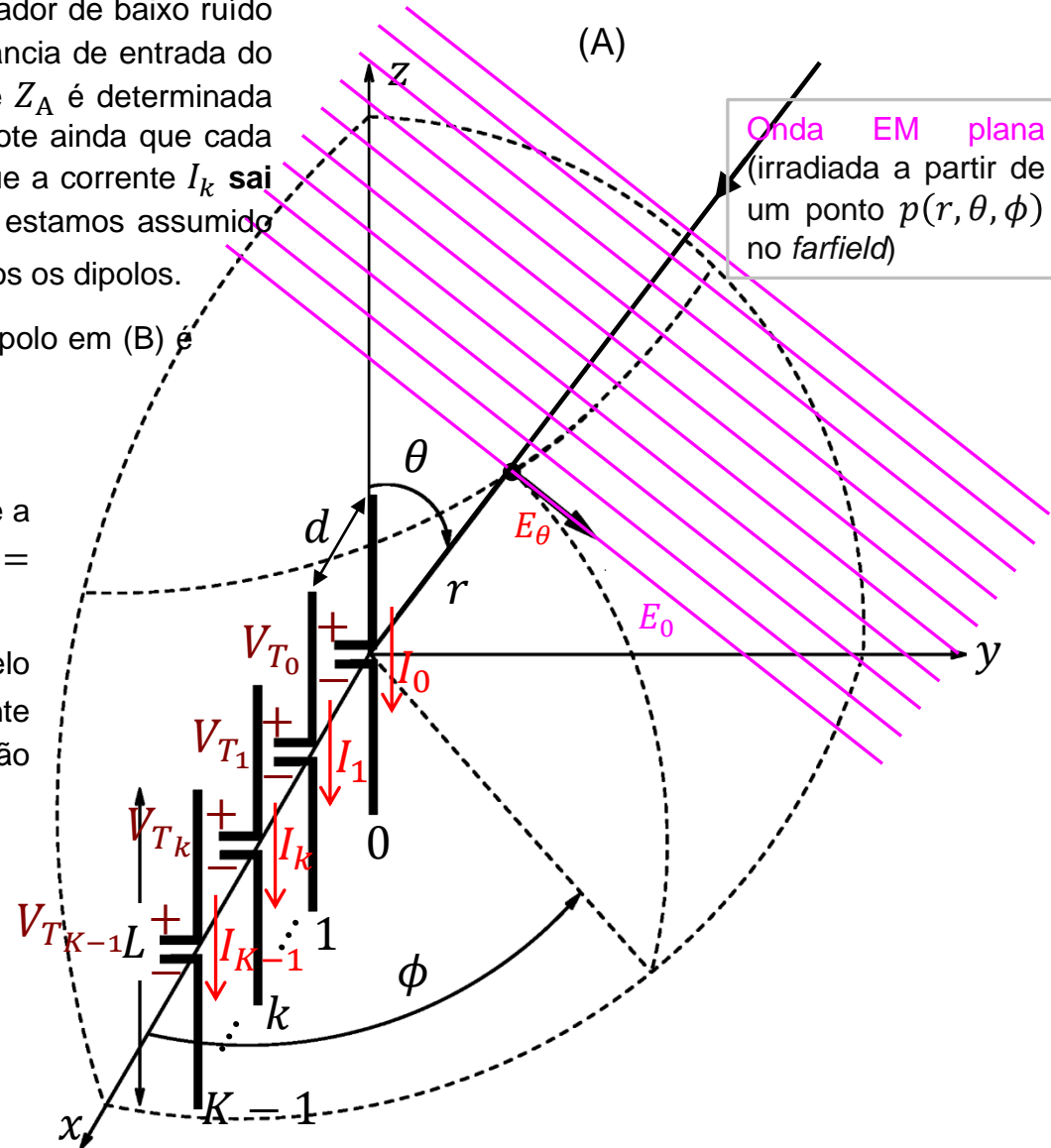
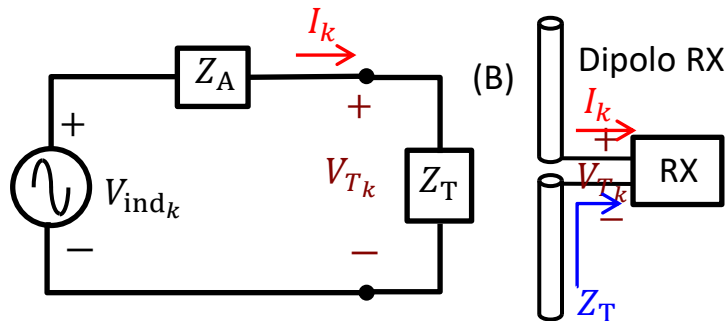
Cada dipolo de impedância interna  $Z_A$  alimenta o amplificador de baixo ruído do *front end* de RF do respectivo RX, sendo  $Z_T$  a impedância de entrada do amplificador, conforme mostrado em (B) abaixo. Note que  $Z_A$  é determinada pela função  $Z_{in\_Schelkunoff}$  (ver slide 18 do Cap II.1). Note ainda que cada dipolo **entrega potência** à impedância de carga  $Z_T$  porque a corrente  $I_k$  **sai pelo terminal “+”** do  $k$ -ésimo dipolo. Note também que estamos assumindo que a impedância de carga  $Z_T$  é de mesmo valor para todos os dipolos.

A tensão  $V_{ind_k}$  no equivalente de Thévenin do  $k$ -ésimo dipolo em (B) é dada por

$$V_{ind_k} = V_{w_k} - \sum_{\ell \neq k} I_\ell Z_{k\ell} \quad (6)$$

onde a tensão  $V_{w_k}$  é dada por (5) no slide anterior e  $Z_{k\ell}$  é a impedância mútua entre os dipolos  $k$  e  $\ell$ , com  $k = 0, 1, \dots, K-1$  e  $\ell = 0, 1, \dots, K-1$ .

O sinal “-” em (6) decorre de a corrente  $I_\ell$  sair pelo terminal “+” do  $\ell$ -ésimo dipolo enquanto que a corrente  $I_k$  que dá origem a  $V_{w_k}$  através da equação (3) do slide (4) entra pelo terminal “+” do  $k$ -ésimo dipolo.



# Onda EM plana incidindo em um array de dipolos

Isolando  $V_{wk}$  em (6):

$$V_{wk} = V_{indk} + \sum_{\ell \neq k} I_{\ell} Z_{k\ell}$$

Do equivalente de Thévenin do  $k$ -ésimo dipolo em (B) abaixo, temos:

$$V_{indk} = (Z_A + Z_T) I_k$$

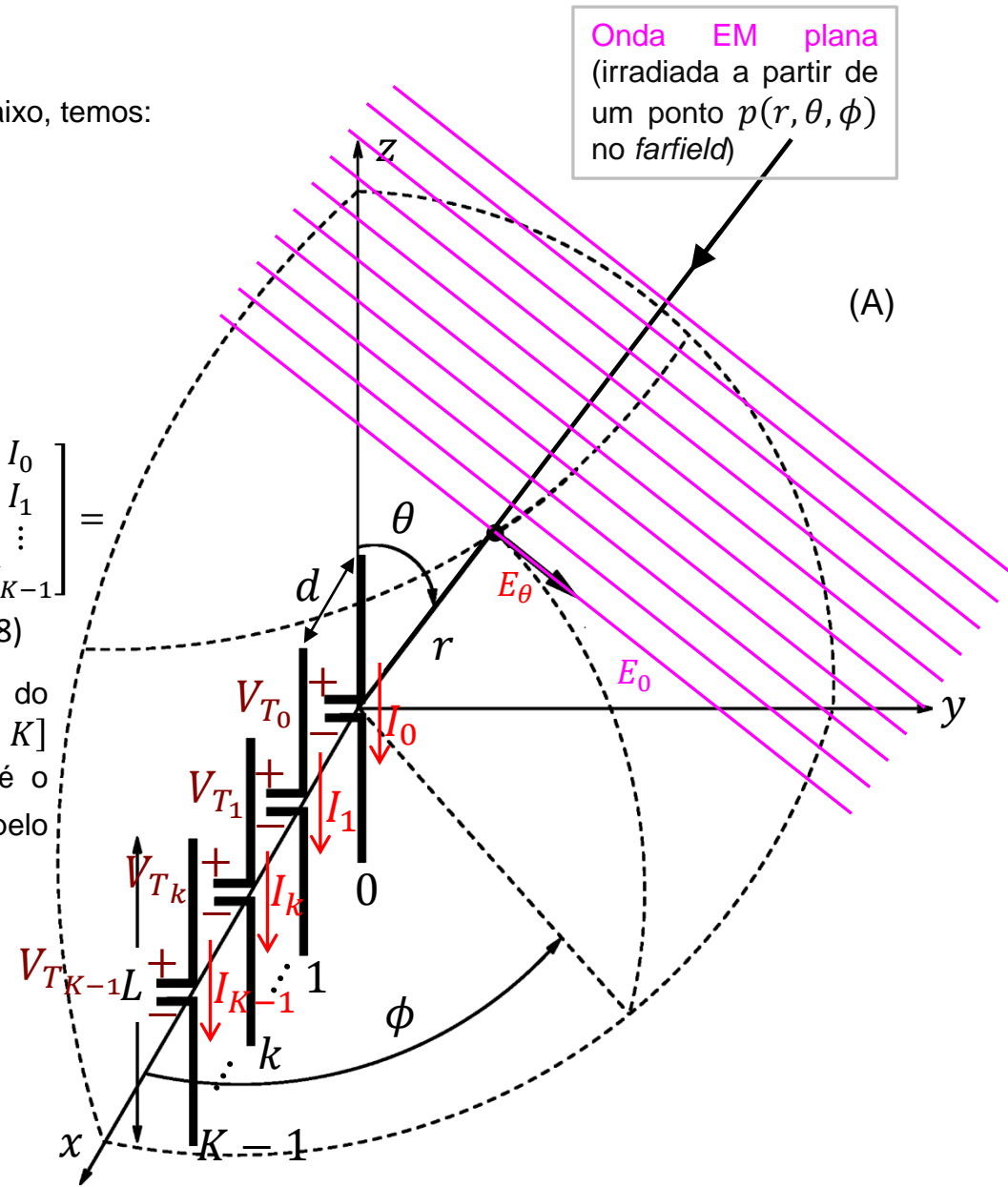
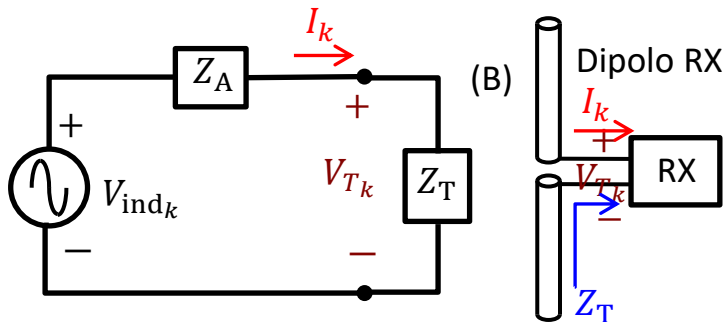
Substituindo  $V_{indk}$  na expressão de  $V_{wk}$  acima, resulta:

$$V_{wk} = (Z_A + Z_T) I_k + \sum_{\ell \neq k} I_{\ell} Z_{k\ell} \quad (7)$$

Reescrevendo (7) em forma matricial:

$$\underline{V}_w = \begin{bmatrix} V_{w0} \\ V_{w1} \\ \vdots \\ V_{wK-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_A + Z_T & Z_{01} & \cdots & Z_{0(K-1)} \\ Z_{10} & Z_A + Z_T & \cdots & Z_{1(K-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{(K-1)0} & Z_{(K-1)1} & \cdots & Z_A + Z_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ \vdots \\ I_{K-1} \end{bmatrix} = (\mathbf{Z} + Z_T \mathbf{I}) \underline{I}_{out} \quad (8)$$

onde  $\mathbf{Z}[K \times K]$  é a matriz impedância entre os dipolos do array,  $Z_T$  é a impedância de carga de cada dipolo,  $\mathbf{I}[K \times K]$  é a matriz identidade, e  $\underline{I}_{out} = [I_0 \ I_1 \ \cdots \ I_{K-1}]^T$  é o vetor cujos componentes representam a corrente que sai pelo terminal "+" do respectivo dipolo.





## Onda EM plana incidindo em um array de dipolos

Resolvendo (8) para  $\underline{I}_{out} = [I_0 \ I_1 \ \dots \ I_{K-1}]^T$ :

$$\underline{I}_{out} = (\mathbf{Z} + \mathbf{Z}_T \mathbf{I})^{-1} \underline{V}_w \quad (9)$$

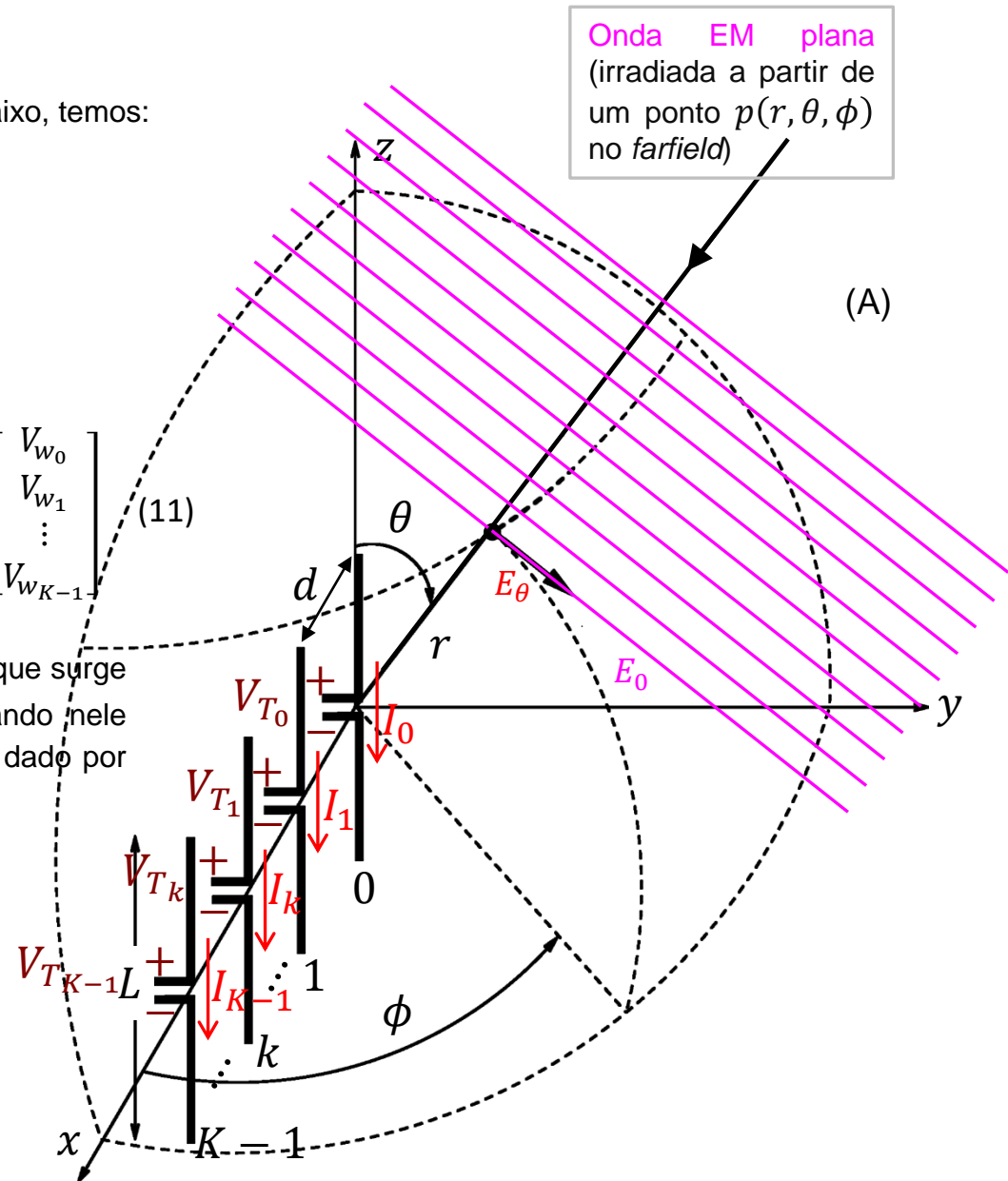
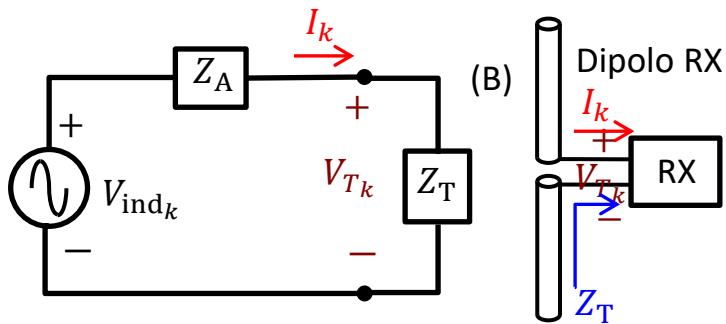
Do equivalente de Thévenin do  $k$ -ésimo dipolo em (B) abaixo, temos:

$$\underline{V}_T = \begin{bmatrix} V_{T_0} \\ V_{T_1} \\ \vdots \\ V_{T_{K-1}} \end{bmatrix} = \mathbf{Z}_T \underline{I}_{out} = \mathbf{Z}_T \begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ \vdots \\ I_{K-1} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Substituindo (9) em (10):

$$\underline{V}_T = \begin{bmatrix} V_{T_0} \\ V_{T_1} \\ \vdots \\ V_{T_{K-1}} \end{bmatrix} = \mathbf{Z}_T (\mathbf{Z} + \mathbf{Z}_T \mathbf{I})^{-1} \underline{V}_w = \mathbf{Z}_T (\mathbf{Z} + \mathbf{Z}_T \mathbf{I})^{-1} \begin{bmatrix} V_{w_0} \\ V_{w_1} \\ \vdots \\ V_{w_{K-1}} \end{bmatrix} \quad (11)$$

onde  $V_{w_k}$  é dada por (5) do slide 6, sendo  $V_{w_k}$  a tensão que surge a circuito aberto nos terminais do  $k$ -ésimo dipolo quando nele incide uma onda plana com fasor do campo elétrico  $E_\theta$  dado por  $E_{0k}$ , estando o dipolo isolado no espaço livre.



## Onda EM plana incidindo em um array de dipolos

A tensão  $V_{wk}$  que surge a circuito aberto nos terminais do  $k$ -ésimo dipolo do *array* (estando o dipolo isolado no espaço livre) quando nele incide uma onda EM plana com fasor do campo elétrico  $E_\theta$  dado por  $E_{0k} = |E_{0k}|e^{j\angle E_{0k}}$  é dada por (5) do slide 6, abaixo reproduzida:

$$V_{wk} = E_{0k} \frac{\lambda}{\pi \sin \frac{\pi L}{\lambda}} \left\{ \frac{\cos\left(\frac{L}{\lambda} \pi \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\sin \theta} \right\} \text{ [V]} \quad (5)$$

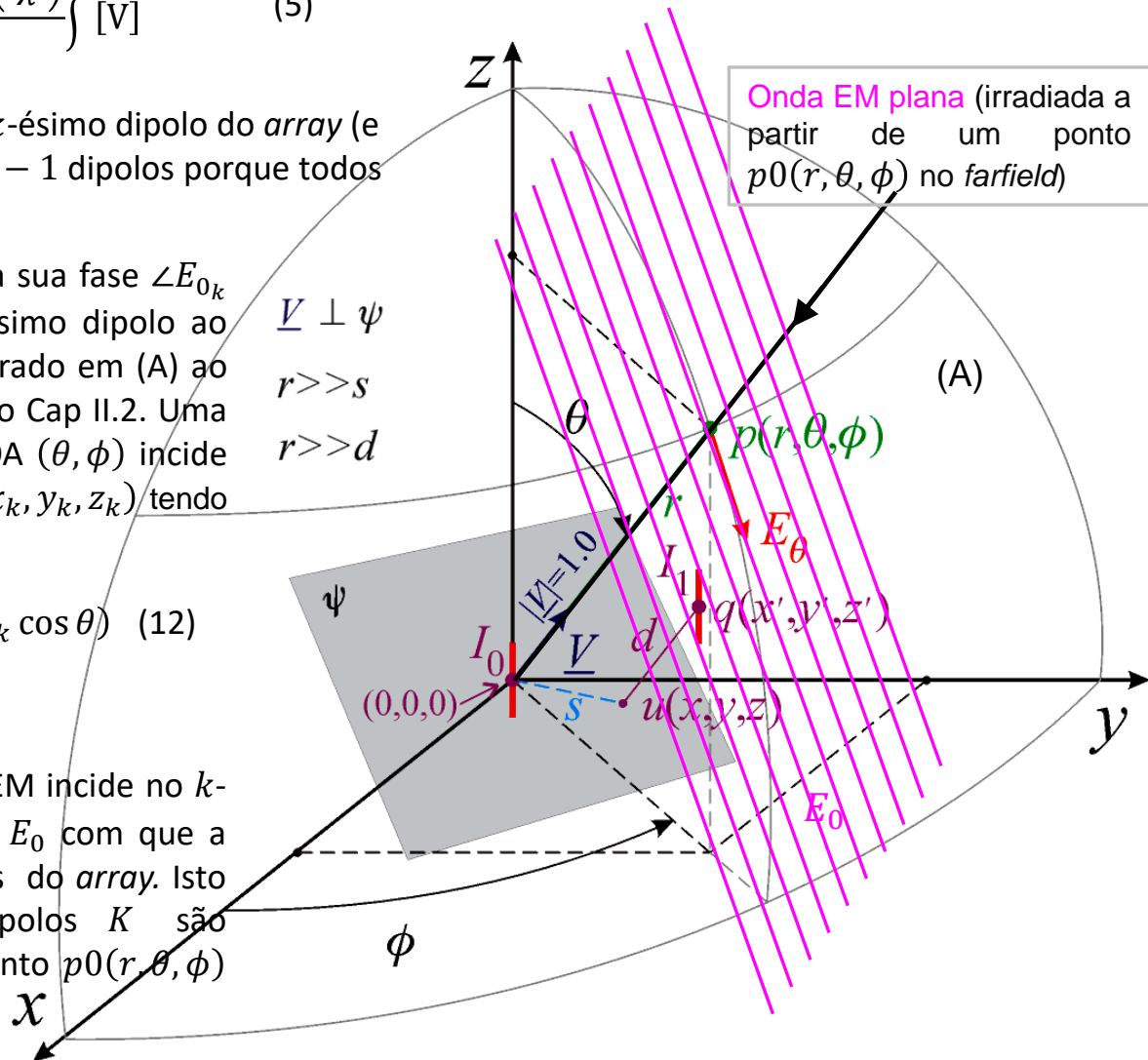
onde  $\theta$  é o DOA em que a onda EM incide no  $k$ -ésimo dipolo do *array* (e que é o mesmo DOA  $\theta$  para todos os demais  $K - 1$  dipolos porque todos os  $K$  dipolos do *array* são paralelos ao eixo  $z$ ).

Ocorre que o campo elétrico  $E_{0k}$  em (5) tem a sua fase  $\angle E_{0k}$  dependente da distância  $d$  do centro do  $k$ -ésimo dipolo ao plano  $\psi$  de fase zero do *array*, conforme mostrado em (A) ao lado e conforme discutido nos slides 64 a 68 do Cap II.2. Uma onda EM plana incidente no *array* sob um DOA  $(\theta, \phi)$  incide no  $k$ -ésimo dipolo do *array* com centro em  $(x_k, y_k, z_k)$  tendo uma fase  $\angle E_0$  dada por

$$\angle E_{0k} = \frac{2\pi}{\lambda} (x_k \sin \theta \cos \phi + y_k \sin \theta \sin \phi + z_k \cos \theta) \quad (12)$$

(rever discussão nos slides 64 a 68 do Cap II.2)

Note que a magnitude  $|E_{0k}|$  com que a onda EM incide no  $k$ -ésimo dipolo é a mesma magnitude do fasor  $E_0$  com que a onda incide em todos os demais  $K - 1$  dipolos do *array*. Isto ocorre porque as distâncias entre os dipolos  $K$  são insignificantes em relação à distância  $r$  ao ponto  $p_0(r, \theta, \phi)$  no *farfield*, de onde a onda EM é irradiada.



## Onda EM plana incidindo em um *array* de dipolos

Incluindo em (5) o giro de fase dado por (12) que a onda EM incidente no *array* sob um DOA  $(\theta, \phi)$  exibe ao incidir no dipolo do *array* com centro em  $(x_k, y_k, z_k)$ , e adicionalmente considerando que  $|E_{0k}| = |E_0|$ , temos:

$$V_{wk} = E_0 e^{j\frac{2\pi}{\lambda}(x_k \sin \theta \cos \phi + y_k \sin \theta \sin \phi + z_k \cos \theta)} \frac{\lambda}{\pi \sin \frac{\pi L}{\lambda}} \left\{ \frac{\cos \left( \frac{L}{\lambda} \pi \cos \theta \right) - \cos \left( \frac{\pi L}{\lambda} \right)}{\sin \theta} \right\} \text{ [V]} \quad (13)$$

Substituindo (13) em (11):

$$\underline{V_T} = \begin{bmatrix} V_{T_0} \\ V_{T_1} \\ \vdots \\ V_{T_{K-1}} \end{bmatrix} = Z_T (\mathbf{Z} + Z_T \mathbf{I})^{-1} \begin{bmatrix} E_0 e^{j\frac{2\pi}{\lambda}(x_0 \sin \theta \cos \phi + y_0 \sin \theta \sin \phi + z_0 \cos \theta)} \frac{\lambda}{\pi \sin \frac{\pi L}{\lambda}} \left\{ \frac{\cos \left( \frac{L}{\lambda} \pi \cos \theta \right) - \cos \left( \frac{\pi L}{\lambda} \right)}{\sin \theta} \right\} \\ E_0 e^{j\frac{2\pi}{\lambda}(x_1 \sin \theta \cos \phi + y_1 \sin \theta \sin \phi + z_1 \cos \theta)} \frac{\lambda}{\pi \sin \frac{\pi L}{\lambda}} \left\{ \frac{\cos \left( \frac{L}{\lambda} \pi \cos \theta \right) - \cos \left( \frac{\pi L}{\lambda} \right)}{\sin \theta} \right\} \\ \vdots \\ E_0 e^{j\frac{2\pi}{\lambda}(x_{K-1} \sin \theta \cos \phi + y_{K-1} \sin \theta \sin \phi + z_{K-1} \cos \theta)} \frac{\lambda}{\pi \sin \frac{\pi L}{\lambda}} \left\{ \frac{\cos \left( \frac{L}{\lambda} \pi \cos \theta \right) - \cos \left( \frac{\pi L}{\lambda} \right)}{\sin \theta} \right\} \end{bmatrix}$$

## Onda EM plana incidindo em um array de dipolos

Que pode ser simplificada para a forma:

$$\underline{V}_T = \begin{bmatrix} V_{T_0} \\ V_{T_1} \\ \vdots \\ V_{T_{K-1}} \end{bmatrix} = Z_T (\mathbf{Z} + Z_T \mathbf{I})^{-1} \frac{\lambda}{\pi \sin \frac{\pi L}{\lambda}} \left\{ \frac{\cos \left( \frac{L}{\lambda} \pi \cos \theta \right) - \cos \left( \frac{\pi L}{\lambda} \right)}{\sin \theta} \right\} \begin{bmatrix} e^{j \frac{2\pi}{\lambda} (x_0 \sin \theta \cos \phi + y_0 \sin \theta \sin \phi + z_0 \cos \theta)} \\ e^{j \frac{2\pi}{\lambda} (x_1 \sin \theta \cos \phi + y_1 \sin \theta \sin \phi + z_1 \cos \theta)} \\ \vdots \\ e^{j \frac{2\pi}{\lambda} (x_{K-1} \sin \theta \cos \phi + y_{K-1} \sin \theta \sin \phi + z_{K-1} \cos \theta)} \end{bmatrix} E_0$$

Ou ainda simplificada para a forma:

$$\underline{V}_T = \underbrace{(Z_T + Z_A)(\mathbf{Z} + Z_T \mathbf{I})^{-1}}_{\mathbf{Cpl}} \frac{Z_T}{(Z_T + Z_A)} \frac{\lambda}{\pi \sin \frac{\pi L}{\lambda}} \left\{ \frac{\cos \left( \frac{L}{\lambda} \pi \cos \theta \right) - \cos \left( \frac{\pi L}{\lambda} \right)}{\sin \theta} \right\} \begin{bmatrix} e^{j \frac{2\pi}{\lambda} (x_0 \sin \theta \cos \phi + y_0 \sin \theta \sin \phi + z_0 \cos \theta)} \\ e^{j \frac{2\pi}{\lambda} (x_1 \sin \theta \cos \phi + y_1 \sin \theta \sin \phi + z_1 \cos \theta)} \\ \vdots \\ e^{j \frac{2\pi}{\lambda} (x_{K-1} \sin \theta \cos \phi + y_{K-1} \sin \theta \sin \phi + z_{K-1} \cos \theta)} \end{bmatrix} E_0$$

$$\underline{V}_T = \begin{bmatrix} V_{T_0} \\ V_{T_1} \\ \vdots \\ V_{T_{K-1}} \end{bmatrix} = \frac{Z_T}{(Z_T + Z_A)} \mathbf{Cpl} \underline{S}_v(\theta, \phi) E_0 \quad (14)$$

$$\mathbf{Cpl} = (Z_T + Z_A)(\mathbf{Z} + Z_T \mathbf{I})^{-1} \quad (15)$$

$$\underline{S}_v(\theta, \phi) = \frac{\lambda}{\pi \sin \frac{\pi L}{\lambda}} \left\{ \frac{\cos \left( \frac{L}{\lambda} \pi \cos \theta \right) - \cos \left( \frac{\pi L}{\lambda} \right)}{\sin \theta} \right\} \begin{bmatrix} e^{j \frac{2\pi}{\lambda} (x_0 \sin \theta \cos \phi + y_0 \sin \theta \sin \phi + z_0 \cos \theta)} \\ e^{j \frac{2\pi}{\lambda} (x_1 \sin \theta \cos \phi + y_1 \sin \theta \sin \phi + z_1 \cos \theta)} \\ \vdots \\ e^{j \frac{2\pi}{\lambda} (x_{K-1} \sin \theta \cos \phi + y_{K-1} \sin \theta \sin \phi + z_{K-1} \cos \theta)} \end{bmatrix} \quad (16)$$

onde:

- $E_0$  é o fasor do campo elétrico  $E_\theta$  da onda EM que incide no array sob um DOA  $(\theta, \phi)$ .
- $\mathbf{Cpl}[K \times K]$  é a matriz de acoplamento do array. Note em (15) que se não há acoplamento entre os dipolos, as impedâncias mútuas fora da diagonal da matriz  $\mathbf{Z}$  são nulas e  $\mathbf{Z}$  se torna uma matriz diagonal com elementos de valor  $Z_A$  na diagonal determinados pela função Zin\_Schelkunoff – ver slide 18 do Cap II.1). Nesta situação  $\mathbf{Cpl}$  simplifica para uma matriz identidade.
- $\underline{S}_v(\theta, \phi)$  é o *steering vector* da onda EM que incide no array na direção  $(\theta, \phi)$  com magnitude e fase dada pelo fasor  $E_0$ . Note a semelhança de (16) com a equação (28) no slide 126 do Cap II.3.



## Onda EM plana incidindo em um *array* de dipolos

Para o caso em que  $M$  ondas EM incidem no *array* respectivamente sob um DOA  $(\theta_m, \phi_m)$ , com  $m = 0, 1 \dots M - 1$ , tendo cada  $m$ -ésima onda EM um fasor do campo elétrico  $E_\theta$  dado por  $E_{0_m}$ , a equação (14) é generalizada para:

$$\underline{V}_T = \begin{bmatrix} V_{T_0} \\ V_{T_1} \\ \vdots \\ V_{T_{K-1}} \end{bmatrix} = \frac{Z_T}{(Z_T + Z_A)} \mathbf{Cpl SvM} \begin{bmatrix} E_{0_0} \\ E_{0_1} \\ \vdots \\ E_{0_{M-1}} \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\mathbf{SvM} = [\underline{S}_v(\theta_0, \phi_0) \quad \underline{S}_v(\theta_1, \phi_1) \quad \dots \quad \underline{S}_v(\theta_{M-1}, \phi_{M-1})] \quad (18)$$

onde  $\mathbf{SvM}[K \times M]$  é a matriz de *steering vectors* em que cada  $m$ -ésima coluna corresponde ao *steering vector*  $\underline{S}_v(\theta_m, \phi_m)$  dado por (16).

Ocorre que a onda EM é inevitavelmente corrompida por ruído aditivo Gaussiano branco ao se propagar através do canal de transmissão (ver [http://www.fccdecastro.com.br/pdf/T2\\_Aula3\\_18032020.pdf](http://www.fccdecastro.com.br/pdf/T2_Aula3_18032020.pdf)). Para contemplar esta situação, (17) é reescrita como

$$\underline{V}_T = \begin{bmatrix} V_{T_0} \\ V_{T_1} \\ \vdots \\ V_{T_{K-1}} \end{bmatrix} = \frac{Z_T}{(Z_T + Z_A)} \mathbf{Cpl SvM} \begin{bmatrix} E_{0_0} \\ E_{0_1} \\ \vdots \\ E_{0_{M-1}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_0 \\ \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_{K-1} \end{bmatrix} \quad (19)$$

onde  $\eta_k$  é o sinal de ruído recebido do canal de transmissão pelo  $k$ -ésimo dipolo do *array* de  $K$  dipolos,  $k = 0, 1 \dots K - 1$ . Explicitando em (19) as sequências de amostras em banda-base no domínio tempo discreto  $n$ , temos:

$$\underline{V}_T[n] = \begin{bmatrix} V_{T_0}[n] \\ V_{T_1}[n] \\ \vdots \\ V_{T_{K-1}}[n] \end{bmatrix} = \frac{Z_T}{(Z_T + Z_A)} \mathbf{Cpl SvM} \begin{bmatrix} E_{0_0}[n] \\ E_{0_1}[n] \\ \vdots \\ E_{0_{M-1}}[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_0[n] \\ \eta_1[n] \\ \vdots \\ \eta_{K-1}[n] \end{bmatrix} \quad (20)$$

## A *eigen*-decomposição da matriz de covariância da sequência de vetores $\underline{V}_T[n]$

Para uma sequência de  $NSmpl$  vetores  $\underline{V}_T[n]$ , com  $n = 0, 1 \dots NSmpl - 1$ , a matriz de covariância  $\mathbf{Cov}$  [ $K \times K$ ] da sequência  $\underline{V}_T[n]$  é obtida através de :

$$\underline{V}_m = \frac{1}{NSmpl} \sum_{n=0}^{NSmpl-1} \underline{V}_T[n] \quad (21)$$

$$\mathbf{Cov} = \frac{1}{NSmpl} \sum_{n=0}^{NSmpl-1} (\underline{V}_T[n] - \underline{V}_m) (\underline{V}_T[n] - \underline{V}_m)^H \quad (22)$$

onde  $(\cdot)^H$  é o operador que retorna o conjugado transposto de seu vetor-argumento. Daí, os  $K$  *eigenvalues* (autovalores) e os  $K$  respectivos *eigenvectors* (autovetores) da matriz de covariância  $\mathbf{Cov}$  são determinados (ver [https://en.wikipedia.org/wiki/Eigenvalues\\_and\\_eigenvectors](https://en.wikipedia.org/wiki/Eigenvalues_and_eigenvectors)) resultando:

$$\begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{K-1} \end{bmatrix} = \text{eigenvals}(\mathbf{Cov}) \quad (23)$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_{00} & U_{01} & \cdots & U_{0(K-1)} \\ U_{10} & U_{11} & \cdots & U_{1(K-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ U_{(K-1)0} & U_{(K-1)1} & \cdots & U_{(K-1)(K-1)} \end{bmatrix} = [\underline{U}_0 \quad \underline{U}_1 \quad \cdots \quad \underline{U}_{K-1}] = \text{eigenvec}(\mathbf{Cov}) \quad (24)$$

onde a  $k$ -ésima coluna  $\underline{U}_k$  da matriz  $\mathbf{U}[K \times K]$  é o autovetor  $\underline{U}_k = \begin{bmatrix} U_{0k} \\ U_{1k} \\ \vdots \\ U_{(K-1)k} \end{bmatrix}$  associado ao autovalor  $\lambda_k$ , sendo  $k =$

$0, 1 \dots K - 1$ . As  $K$  componentes de cada autovetor  $\underline{U}_k$  são valores no domínio complexo  $\mathbb{C}$ . Os  $K$  autovetores tem módulo unitário, i.e.,  $\underline{U}_k^H \cdot \underline{U}_k = |\underline{U}_k|^2 = 1$  e são ortogonais entre si, i.e.,  $\underline{U}_\ell^H \cdot \underline{U}_k = 0$ , sendo  $\ell \neq k$ . Note, portanto, que os  $K$  autovetores formam uma **base ortogonal de vetores unitários** no domínio complexo  $\mathbb{C}^K$ , definindo  $K$  eixos cartesianos.

## A *eigen*-decomposição da matriz de covariância da sequência de vetores $\underline{V}_T[n]$

Se projetarmos cada vetor  $\underline{V}_T[n]$  da sequência de  $NSmpl$  vetores (após subtrair o vetor média  $\underline{V}_m$ ) sobre cada um dos  $K$  eixos cartesianos definidos pelos respectivos autovetores  $\underline{U}_k$ , obteremos uma sequência de  $NSmpl$  projeções  $\underline{Proj}[n]$  sobre cada um dos  $K$  eixos, onde  $n = 0, 1 \dots NSmpl - 1$  e  $k = 0, 1 \dots K - 1$ :

$$\underline{Proj}[n] = \underline{U}_k^H \cdot \underline{V}_T[n] \quad (25)$$

Se determinarmos a potência  $Pot_k$  da sequência de  $NSmpl$  projeções em cada respectivo  $k$ -ésimo eixo cartesiano, observaremos que  $Pot_k = \lambda_k$ , conforme veremos no Exemplo 1 do slide 18:

$$Pot_k = \frac{1}{NSmpl} \sum_{n=0}^{NSmpl-1} |\text{Proj}_{k,n}|^2 = \lambda_k \quad (26)$$

O fato de a potência  $Pot_k$  da sequência de  $NSmpl$  projeções no respectivo  $k$ -ésimo eixo cartesiano ser igual ao autovalor  $\lambda_k$  associado ao autovetor  $\underline{U}_k$  que dá a direção do eixo sugere a seguinte interpretação para a *eigen*-decomposição da matriz **Cov**:

Dentre as  $M$  ondas EM incidentes no *array*, a  $m$ -ésima onda EM incidindo sob um DOA  $(\theta_m, \phi_m)$  gera um autovalor  $\lambda_m$  que indica com que “intensidade” os vetores da  $m$ -ésima classe de vetores semelhantes entre si e implícitos na sequência de  $NSmpl$  vetores  $\underline{V}_T[n]$  (após subtrair o vetor média  $\underline{V}_m$ ) se alinham com o respectivo eixo cartesiano definido pelo autovetor  $\underline{U}_m$ , sendo  $m = 0, 1 \dots M - 1$ . Os vetores da  $m$ -ésima classe de vetores são consequência da  $m$ -ésima onda EM incidente, e, por esta razão, mantêm coerência (correlação) temporal consigo mesmo. Portanto, os vetores da  $m$ -ésima classe se alinham preferencialmente com os respectivos  $M$  eixos cartesianos  $\underline{U}_m$  que mais fielmente os representam, sendo a “intensidade” com que os vetores da  $m$ -ésima classe se alinham com o eixos  $\underline{U}_m$  medida pelo correspondente autovalor  $\lambda_m$ . Já o ruído branco Gaussiano do canal, também implícito na sequência de vetores em  $\underline{V}_T[n]$  (ver equação (20) do slide 13), é descorrelacionado consigo mesmo por ser aleatório e branco. Portanto, o sinal de ruído não se alinha preferencialmente a qualquer eixo cartesiano  $\underline{U}_k$  particular, alinhando-se e distribuindo-se uniformemente em todos os  $K$  eixos cartesianos.

Como a relação-sinal ruído SNR no canal deve ser suficientemente alta para que os sinais sejam demodulados, a consequência é que a potência do ruído é significativamente menor que a do sinal. Portanto, os autovalores  $\lambda_\ell$  associados aos  $K - M$  eixos cartesianos  $\underline{U}_\ell$  aos quais somente o ruído se alinha serão muito menores que os autovalores  $\lambda_m$  associados aos  $M$  eixos cartesianos  $\underline{U}_m$  aos quais respectivamente se alinham os sinais das  $M$  ondas EM que incidem no *array*, sendo  $\ell = M, M + 1 \dots K - 1$ .

## A *eigen*-decomposição da matriz de covariância da sequência de vetores $\underline{V}_T[n]$

A discussão no slide anterior nos leva ao conceito de **signal eigenvector** (autovetor de sinal) e **noise eigenvector** (autovetor de ruído):

**Signal eigenvector**  $\underline{E}_{S_m}$ : Autovetor ao qual se alinha a  $m$ -ésima classe de vetores semelhantes entre si e implícitos na sequência de  $NSmpl$  vetores  $\underline{V}_T[n]$  (após subtrair o vetor média  $\underline{V}_m$ ), classe que representa um dos  $M$  sinais transportados pelas respectivas  $M$  ondas EM que incidem no *array*, sendo  $m = 0, 1 \dots M - 1$ .

**Noise eigenvector**  $\underline{E}_{n_\ell}$ : Autovetor ortogonal a qualquer uma das  $M$  classes de vetores semelhantes entre si e implícitos na sequência de  $NSmpl$  vetores  $\underline{V}_T[n]$  (após subtrair o vetor média  $\underline{V}_m$ ), classes que respectivamente representam os  $M$  sinais transportados pelas respectivas  $M$  ondas EM que incidem no *array*, sendo  $\ell = M, M + 1 \dots K - 1$ . Um **noise eigenvector** é identificado pelo autovalor  $\lambda_\ell$  associado que, conforme discutido no slide anterior, é muito menor que os autovalores  $\lambda_m$  associados aos **signal eigenvectors**  $\underline{U}_m$  que definem a direção dos  $M$  eixos cartesianos aos quais respectivamente se alinham os sinais das  $M$  ondas EM que incidem no *array*.

Importante notar nas equações (17) e (18) do slide 13 que a  $m$ -ésima classe de vetores semelhantes entre si e implícitos na sequência de  $NSmpl$  vetores  $\underline{V}_T[n]$  (após subtrair o vetor média  $\underline{V}_m$ ) é explicitada na combinação linear do produto entre os  $M$  *steering vectors*  $\underline{S}_v(\theta_m, \phi_m)$  e a matriz de acoplamento **Cpl** ponderados pelos fasores  $E_{0_m}$  da respectiva  $m$ -ésima onda EM que incide no *array* no DOA  $(\theta_m, \phi_m)$ :

$$\underline{V}_T = \begin{bmatrix} V_{T_0} \\ V_{T_1} \\ \vdots \\ V_{T_{K-1}} \end{bmatrix} = \frac{Z_T}{(Z_T + Z_A)} \left[ \underbrace{E_{0_0} \mathbf{Cpl} \underline{S}_v(\theta_0, \phi_0)}_{\text{classe 0}} + \underbrace{E_{0_1} \mathbf{Cpl} \underline{S}_v(\theta_1, \phi_1)}_{\text{classe 1}} + \dots + \underbrace{E_{0_{M-1}} \mathbf{Cpl} \underline{S}_v(\theta_{M-1}, \phi_{M-1})}_{\text{classe } M - 1} \right] \quad (27)$$

Portanto, como cada **noise eigenvector**  $\underline{E}_{n_\ell}$  é ortogonal a qualquer uma das  $M$  classes de vetores que se alinham com o respectivo eixo cartesiano definido pelo autovetor  $\underline{U}_m$ , então, cada **noise eigenvector**  $\underline{E}_{n_\ell}$  é ortogonal a cada um dos produtos  $\mathbf{Cpl} \underline{S}_v(\theta_m, \phi_m)$  em (27).



## A determinação do DOA através do MUSIC:

A ortogonalidade entre os *noise eigenvectors*  $\underline{En}_\ell$  e o produto  $\mathbf{Cpl} \underline{S}_v(\theta_m, \phi_m)$  implica ser nulo o resultado do produto escalar entre o *noise eigenvector*  $\underline{En}_\ell$  e o produto  $\mathbf{Cpl} \underline{S}_v(\theta_m, \phi_m)$ , sendo  $m = 0, 1 \dots M - 1$  e  $\ell = M, M + 1 \dots K - 1$ :

$$\left[ \mathbf{Cpl} \underline{S}_v(\theta_m, \phi_m) \right]^H \cdot \underline{En}_\ell = 0 \quad (28)$$

Como o produto escalar em (28) resulta zero nos DOAs  $(\theta_m, \phi_m)$  das  $M$  ondas EM que incidem no *array*, o seu inverso resulta um valor infinito para  $(\theta_m, \phi_m)$ , e daí podemos definir a função  $\text{PMU}(\theta, \phi)$ , denominada “espectro” do MUSIC, que resulta em um valor infinito (na prática, muito grande) na situação em que  $(\theta, \phi)$  corresponde ao DOA  $(\theta_m, \phi_m)$  de uma das  $M$  ondas EM que incidem no *array*:

$$\text{PMU}(\theta, \phi) = \frac{1}{\left| \underline{\rho}(\theta, \phi) \right|^2} \quad (29)$$

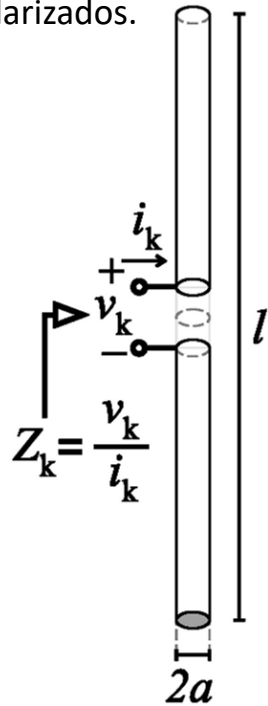
$$\underline{\rho}(\theta, \phi) = \left[ \left[ \mathbf{Cpl} \underline{S}_v(\theta, \phi) \right]^H \cdot \mathbf{En} \right]^T \quad (30)$$

onde  $\underline{\rho}(\theta, \phi)$  é um vetor coluna com  $\text{NnoiseEigV} = K - M$  componentes e onde  $\mathbf{En} [K \times \text{NnoiseEigV}]$  é a matriz cujas colunas correspondem aos  $\text{NnoiseEigV}$  *noise eigenvectors*. Cada um dos  $\text{NnoiseEigV}$  *noise eigenvectors* é identificado pelo autovalor  $\lambda_\ell$  associado que, conforme a discussão no slide 15, é muito menor que os autovalores  $\lambda_m$  associados aos autovetores  $\underline{U}_m$  que definem a direção dos  $M$  eixos cartesianos aos quais respectivamente se alinham os sinais das  $M$  ondas EM que incidem no *array*.

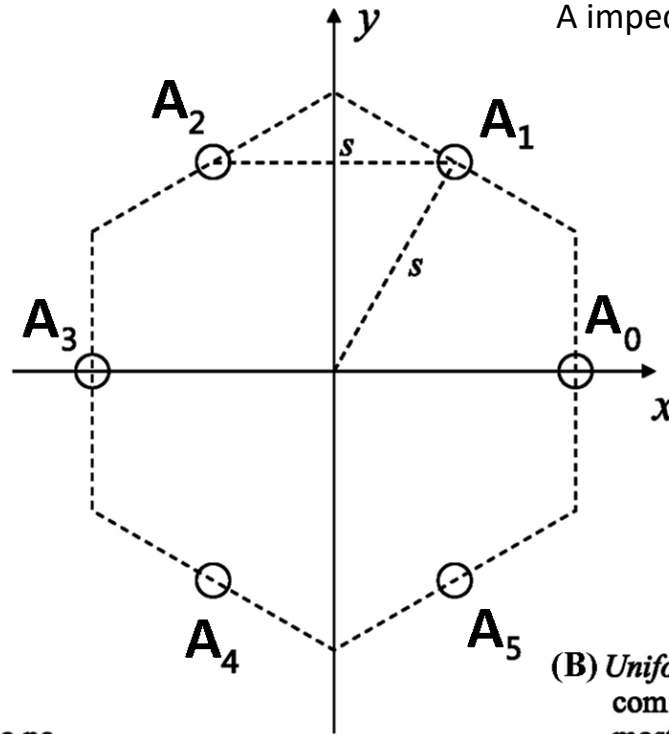
A determinação do DOA  $(\theta_m, \phi_m)$ , dos sinais das  $M$  ondas EM que incidem no *array* consiste em determinar para quais ângulos  $(\theta, \phi)$  a superfície  $\text{PMU}(\theta, \phi)$  apresenta máximos locais (picos).

## A determinação do DOA através do MUSIC:

**Exemplo 1:** Consideremos o *phased-array* do tipo *Uniform Circular Array* (UCA) mostrado em (B), operando em  $f_0 = 850\text{MHz}$  e constituído por 6 dipolos cilíndricos de tamanho  $l = 0.5\lambda$  e de raio  $a=5\text{mm}$  conforme (A), separados entre si de  $s=0.25\lambda$ , sendo  $\lambda$  o comprimento de onda em  $f_0$ . O plano  $xy$  é paralelo ao plano do solo de modo que os dipolos são verticalmente polarizados. A impedância de carga de cada dipolo é  $Z_T = 50 [\Omega]$ .



(A) Geometria do dipolo usado no array mostrado em (B).



A impedância de carga de cada dipolo é  $Z_T = 50 [\Omega]$ .

Coordenadas do centro do dipolo  $A_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, 5$

$$A_0: (s, 0, 0)$$

$$A_1: (s \cos 60^\circ, s \sin 60^\circ, 0)$$

$$A_2: (-s \cos 60^\circ, s \sin 60^\circ, 0)$$

$$A_3: (-s, 0, 0)$$

$$A_4: (-s \cos 60^\circ, -s \sin 60^\circ, 0)$$

$$A_5: (s \cos 60^\circ, -s \sin 60^\circ, 0)$$

(B) *Uniform Circular Array* (UCA) com 6 dipolos idênticos ao mostrado em (A) e coordenadas do centro de cada dipolo.

$$\begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{00} & Z_{01} & Z_{02} & Z_{03} & Z_{04} & Z_{05} \\ Z_{10} & Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & Z_{14} & Z_{15} \\ Z_{20} & Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} & Z_{24} & Z_{25} \\ Z_{30} & Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} & Z_{34} & Z_{35} \\ Z_{40} & Z_{41} & Z_{42} & Z_{43} & Z_{44} & Z_{45} \\ Z_{50} & Z_{51} & Z_{52} & Z_{53} & Z_{54} & Z_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_0 \\ i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix}$$

(C) Relação entre tensões e correntes nos dipolos do UCA mostrado em (B).  $Z_{mn}$  é a impedância mútua entre os dipolos  $A_m$  e  $A_n$ .  $Z_{nn}$  é a impedância própria do dipolo  $A_n$ .

## A determinação do DOA através do MUSIC:

Um conjunto de ondas EM originadas em transmissores localizados em coordenadas distintas incidem no UCA com amplitudes Mag relativas e DOAs  $(\theta, \phi)$  conforme tabela em (A). Os transmissores utilizam modulação 16-QAM com um alfabeto da modulação dado pelo mapa IQSymbolMap em (B), sendo cada um dos 16 símbolos IQ em IQSymbolMap mapeado em uma palavra de 4 bits (ver [http://www.fccdecastro.com.br/pdf/T2\\_Aula10&11\\_22042020.pdf](http://www.fccdecastro.com.br/pdf/T2_Aula10&11_22042020.pdf)).

(A) Mag:	DOA $\theta$ :	DOA $\phi$ :
1.0	45°	315°
0.7	62°	180°
0.5	71°	20°

$$(B) \quad \text{IQSymbolMap} = \begin{pmatrix} -3 + 3i & -1 + 3i & 1 + 3i & 3 + 3i \\ -3 + i & -1 + i & 1 + i & 3 + i \\ -3 - i & -1 - i & 1 - i & 3 - i \\ -3 - 3i & -1 - 3i & 1 - 3i & 3 - 3i \end{pmatrix}$$

Para efeito de eficiência espectral, como é usual em qualquer sistema digital, os transmissores adotam um *scrambler* na entrada do modulador (*energy dispersal scrambler* - ver <https://en.wikipedia.org/wiki/Scrambler>) que torna aleatória e uniforme a distribuição dos símbolos IQ na sequência de símbolos IQ extraídos do mapa IQSymbolMap em função da sequência de palavras binárias de 4 bits na entrada do *scrambler*, sequência que corresponde à informação digital a ser transmitida pelo transmissor.

As tensões nos terminais dos 6 dipolos resultantes da incidência das ondas EM são digitalizadas e convertidas para banda-

base pelos respectivos receptores (RX) do *array* de dipolos e são armazenadas no vetor  $\underline{V}_T[n] = \begin{bmatrix} V_{T_0}[n] \\ V_{T_1}[n] \\ \vdots \\ V_{T_5}[n] \end{bmatrix}$ .

Uma sequência de  $NSmpl = 2000$  vetores  $\underline{V}_T[n]$ ,  $n = 0, 1 \dots NSmpl - 1$ , é processada pelo algoritmo MUSIC para efeito de determinar o DOA  $(\theta, \phi)$  das ondas EM incidentes.

## A determinação do DOA através do MUSIC:

**Pede-se:** **(a)** Determine e plote a constelação das 6 sequências de símbolos IQ armazenadas em  $\underline{V}_T[n]$  caso não houvesse ruído no canal ( $SNR = \infty$ ). **(b)** Determine e plote a constelação das 6 sequências de símbolos IQ armazenadas em  $\underline{V}_T[n]$  sabendo que a relação sinal-ruído do canal no local onde o UCA situa-se é  $SNR = 15$  [dB]. **(c)** Determine a matriz de covariância  $\mathbf{Cov}$  da sequência de vetores  $\underline{V}_T[n]$  e efetue a sua *eigen*-decomposição. **(d)** Verifique a ortogonalidade entre autovetores da matriz  $\mathbf{Cov}$  e o módulo unitário de cada um deles. **(e)** Efetue a projeção da sequência de  $NSmpl$  vetores  $\underline{V}_T[n]$  sobre cada um dos 6 eixos cartesianos da base ortonormal formada pelos autovetores de  $\mathbf{Cov}$ , determine a potência de cada uma das 6 projeções e verifique a correspondência com os respectivos autovalores. **(f)** Determine os auto vetores de ruído da matriz  $\mathbf{Cov}$ . **(g)** Determine o espectro  $PMU(\theta, \phi)$  resultante do processamento efetuado pelo algoritmo MUSIC. Plote em um gráfico 3D a superfície  $PMU(\theta, \phi)$  e, adicionalmente, plote a superfície  $PMU(\theta, \phi)$  em um gráfico de contornos. Verifique se os máximos locais de  $PMU(\theta, \phi)$  ocorrem nos DOAs  $(\theta_m, \phi_m)$  das  $M$  ondas EM que incidem no *array*,  $m = 0, 1 \dots M - 1$ .

O *script* do software MathCad utilizado na solução deste exemplo está disponível em <http://www.fccdecastro.com.br/ZIP/E1S18.zip>.



## A determinação do DOA através do MUSIC:

**Solução:**

$f := 850 \text{ MHz}$  → frequência de operação       $\lambda := \frac{c}{f}$      $\lambda = 0.353 \text{ m}$  → comprimento de onda da onda eletromagnética

$Z_T := 50 \cdot \Omega$  → impedância de carga de cada um dos 6 dipolos do array

$\text{SNR} := 15 \text{ [dB]}$  → Relação sinal-ruído no canal de transmissão

$\text{NSmpl} := 2000$  → Número de amostras em banda-base (símbolos IQ) recebidas por dipolo

DOAs ( $\theta, \phi$ ) e magnitude relativa Mag das ondas EM planas que incidem no UCA moduladas em 16-QAM:

$$\text{DOA} := \begin{pmatrix} 45^\circ & 315^\circ \\ 62^\circ & 180^\circ \\ 71^\circ & 20^\circ \end{pmatrix} \quad \text{Mag} := \begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.7 \\ 0.5 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \text{amplitudes das ondas EM são distintas em razão das condições de propagação distintas no canal de transmissão}$$

$M := \text{rows}(\text{DOA}) = 3$  → Número de ondas EM planas que incidem no UCA.

$L := 0.5 \cdot \lambda$  → tamanho dos dipolos

$R := 5 \text{ mm}$  → raio do dipolo cilíndrico

$$\beta := \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} = 17.815 \frac{\text{rad}}{\text{m}} \quad \rightarrow \text{constante de propagação da onda EM}$$

$s := 0.25 \lambda$  → espaçamento entre dipolos

$$C := \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ s \cdot \cos(60\text{deg}) & s \cdot \sin(60\text{deg}) & 0 \\ -s \cdot \cos(60\text{deg}) & s \cdot \sin(60\text{deg}) & 0 \\ -s & 0 & 0 \\ -s \cdot \cos(60\text{deg}) & -s \cdot \sin(60\text{deg}) & 0 \\ s \cdot \cos(60\text{deg}) & -s \cdot \sin(60\text{deg}) & 0 \end{pmatrix} \rightarrow C = \begin{pmatrix} 0.088 & 0 & 0 \\ 0.044 & 0.076 & 0 \\ -0.044 & 0.076 & 0 \\ -0.088 & 0 & 0 \\ -0.044 & -0.076 & 0 \\ 0.044 & -0.076 & 0 \end{pmatrix} \text{ m} \quad \rightarrow \text{coordenadas do centro de cada um dos 6 dipolos do UCA.}$$

$K := \text{rows}(C) = 6$  → número de dipolos do array

## A determinação do DOA através do MUSIC:

**(a) Matriz impedância entre os dipolos do array:**

$$aa := 0..K - 1 \quad bb := 0..K - 1 \quad D_{aa,bb} := \sqrt{\left[ \left( C^{(0)} \right)_{aa} - \left( C^{(0)} \right)_{bb} \right]^2 + \left[ \left( C^{(1)} \right)_{aa} - \left( C^{(1)} \right)_{bb} \right]^2 + \left[ \left( C^{(2)} \right)_{aa} - \left( C^{(2)} \right)_{bb} \right]^2}$$

$$Z_{aa,bb} := \text{if} \left( aa = bb, Z_{in\_Schelkunoff} \left( \frac{R}{mm}, \frac{\lambda}{m}, \frac{L}{m} \right), Z_{Mutual\_Schelkunoff} \left( \frac{L}{m}, \frac{L}{m}, \frac{R}{mm}, \frac{R}{mm}, \frac{D_{aa,bb}}{m}, \frac{\lambda}{m} \right) \right)$$

$$Z = \begin{pmatrix} 78.517 + 45.679i & 47.016 - 32.68i & -0.772 - 41.449i & -14.447 - 34.501i & -0.772 - 41.449i & 47.016 - 32.68i \\ 47.016 - 32.68i & 78.517 + 45.679i & 47.016 - 32.68i & -0.772 - 41.449i & -14.447 - 34.501i & -0.772 - 41.449i \\ -0.772 - 41.449i & 47.016 - 32.68i & 78.517 + 45.679i & 47.016 - 32.68i & -0.772 - 41.449i & -14.447 - 34.501i \\ -14.447 - 34.501i & -0.772 - 41.449i & 47.016 - 32.68i & 78.517 + 45.679i & 47.016 - 32.68i & -0.772 - 41.449i \\ -0.772 - 41.449i & -14.447 - 34.501i & -0.772 - 41.449i & 47.016 - 32.68i & 78.517 + 45.679i & 47.016 - 32.68i \\ 47.016 - 32.68i & -0.772 - 41.449i & -14.447 - 34.501i & -0.772 - 41.449i & 47.016 - 32.68i & 78.517 + 45.679i \end{pmatrix} \cdot \Omega$$

**Steering vector Sv(θ,φ) - equação (16) do slide 12 do Cap II.6:**

$$Sv(\theta, \phi) := \frac{\lambda}{\pi \cdot \sin\left(\frac{\beta \cdot L}{2}\right)} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\beta \cdot L}{2} \cdot \cos(\theta)\right) - \cos\left(\frac{\beta \cdot L}{2}\right)}{\sin(\theta)} \cdot \begin{bmatrix} e^{j \cdot [\beta \cdot (\sin(\theta) \cdot \cos(\phi) \cdot C_{0,0} + \sin(\theta) \cdot \sin(\phi) \cdot C_{0,1} + \cos(\theta) \cdot C_{0,2})]} \\ e^{j \cdot [\beta \cdot (\sin(\theta) \cdot \cos(\phi) \cdot C_{1,0} + \sin(\theta) \cdot \sin(\phi) \cdot C_{1,1} + \cos(\theta) \cdot C_{1,2})]} \\ e^{j \cdot [\beta \cdot (\sin(\theta) \cdot \cos(\phi) \cdot C_{2,0} + \sin(\theta) \cdot \sin(\phi) \cdot C_{2,1} + \cos(\theta) \cdot C_{2,2})]} \\ e^{j \cdot [\beta \cdot (\sin(\theta) \cdot \cos(\phi) \cdot C_{3,0} + \sin(\theta) \cdot \sin(\phi) \cdot C_{3,1} + \cos(\theta) \cdot C_{3,2})]} \\ e^{j \cdot [\beta \cdot (\sin(\theta) \cdot \cos(\phi) \cdot C_{4,0} + \sin(\theta) \cdot \sin(\phi) \cdot C_{4,1} + \cos(\theta) \cdot C_{4,2})]} \\ e^{j \cdot [\beta \cdot (\sin(\theta) \cdot \cos(\phi) \cdot C_{5,0} + \sin(\theta) \cdot \sin(\phi) \cdot C_{5,1} + \cos(\theta) \cdot C_{5,2})]} \end{bmatrix}$$

## A determinação do DOA através do MUSIC:

Matriz do acoplamento Cpl- equação (15) do slide 12 do Cap II.6:

$Z_A := Z_{0,0} \rightarrow$  impedância própria dos  $K = 6$  dipolos do UCA

$$C_{pl} := (Z_T + Z_A) \cdot (Z + Z_T \cdot \text{identity}(K))^{-1}$$

$$C_{pl} = \begin{pmatrix} 0.866 - 0.327i & -0.256 + 0.333i & 0.012 + 0.035i & -0.048 + 0.032i & 0.012 + 0.035i & -0.256 + 0.333i \\ -0.256 + 0.333i & 0.866 - 0.327i & -0.256 + 0.333i & 0.012 + 0.035i & -0.048 + 0.032i & 0.012 + 0.035i \\ 0.012 + 0.035i & -0.256 + 0.333i & 0.866 - 0.327i & -0.256 + 0.333i & 0.012 + 0.035i & -0.048 + 0.032i \\ -0.048 + 0.032i & 0.012 + 0.035i & -0.256 + 0.333i & 0.866 - 0.327i & -0.256 + 0.333i & 0.012 + 0.035i \\ 0.012 + 0.035i & -0.048 + 0.032i & 0.012 + 0.035i & -0.256 + 0.333i & 0.866 - 0.327i & -0.256 + 0.333i \\ -0.256 + 0.333i & 0.012 + 0.035i & -0.048 + 0.032i & 0.012 + 0.035i & -0.256 + 0.333i & 0.866 - 0.327i \end{pmatrix}$$

Constelação 16-QAM do sinal transportado por cada onda EM:

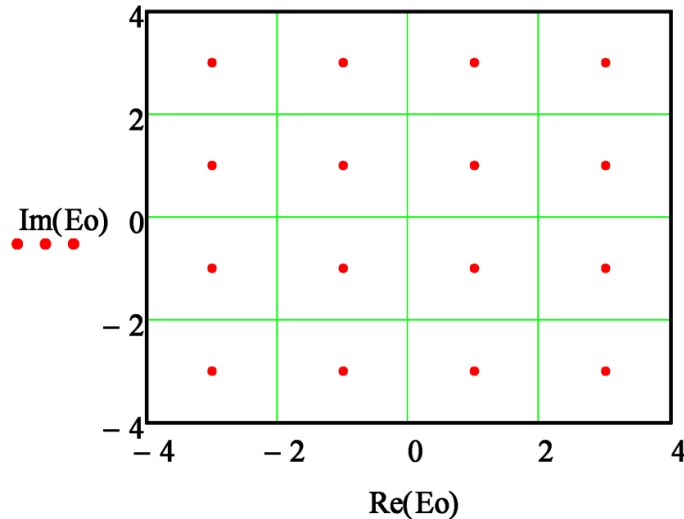
$$A := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad ii := 0..3 \quad jj := 0..3 \quad IQSymbolMap_{ii,jj} := A_{3-jj} + j \cdot A_{ii}$$

$$IQSymbolMap = \begin{pmatrix} -3 + 3i & -1 + 3i & 1 + 3i & 3 + 3i \\ -3 + i & -1 + i & 1 + i & 3 + i \\ -3 - i & -1 - i & 1 - i & 3 - i \\ -3 - 3i & -1 - 3i & 1 - 3i & 3 - 3i \end{pmatrix}$$

## A determinação do DOA através do MUSIC:

Geração da sequência de amostras em banda-base transportadas pelas  $M = 3$  ondas EM planas que incidem no UCA moduladas pela sequência de  $NSmpl = 2000$  símbolos IQ 16-QAM:

$$n := 0 .. NSmpl - 1 \quad \_m := 0 .. M - 1 \quad Eo_{\_m,n} := IQSymbolMap_{\text{round}(\text{rnd}(3)), \text{round}(\text{rnd}(3))} \cdot \frac{V}{m}$$



→ constelação de símbolos IQ 16-QAM gerada nos  $M = 3$  TXs que dão origem às respectivas ondas EM moduladas pelas respectivas sequências de símbolos IQ.

Amplitude de cada onda EM:  $Eo_{\_m,n} := Mag_{\_m} \cdot Eo_{\_m,n}$

Sequência de amostras em banda-base transportadas por cada uma das  $M = 3$  ondas EM planas que incidem no UCA:

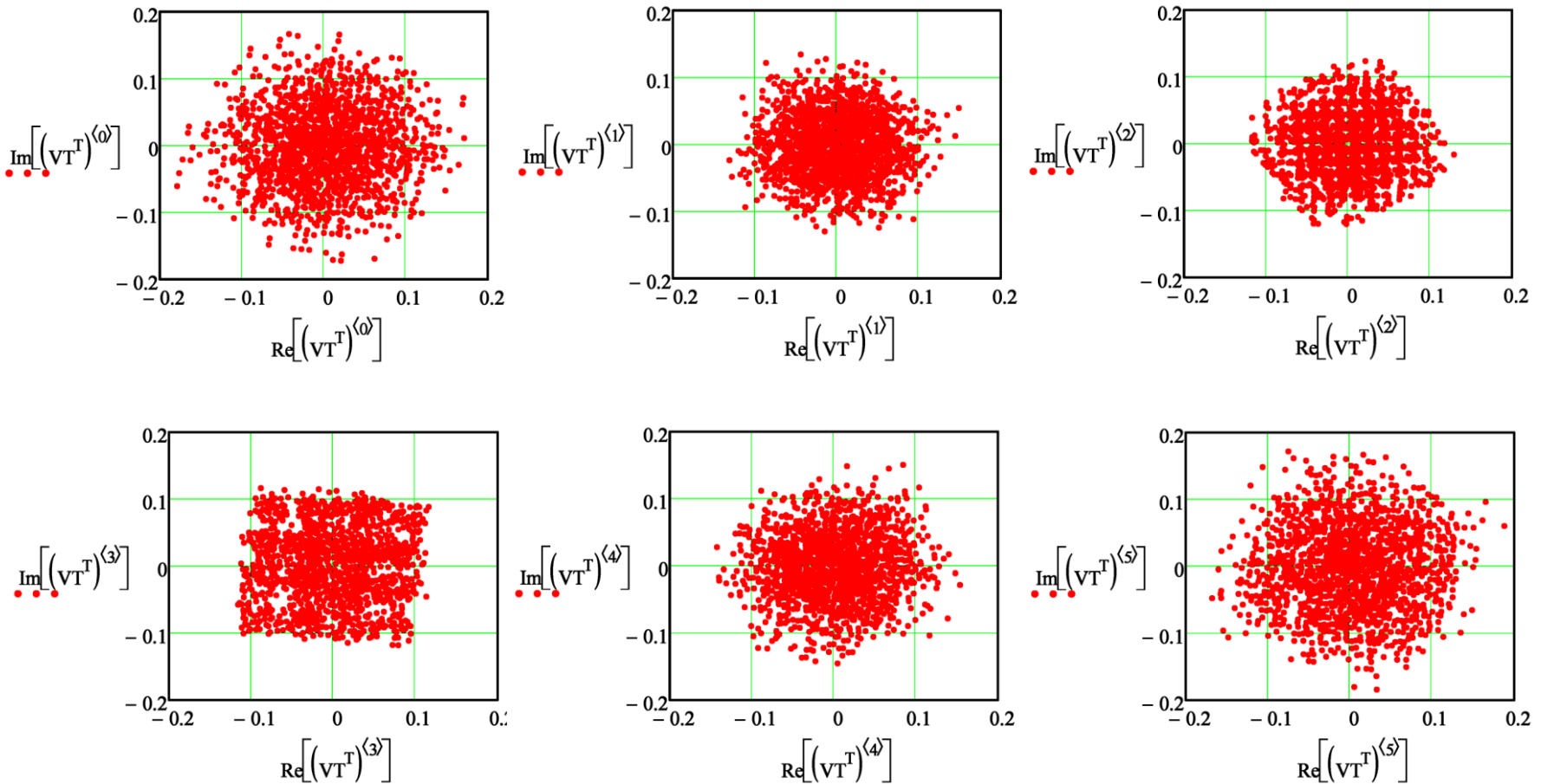
	0	1	2	3	4	5		
$Eo =$	0	-1+3i	-1-i	-1-i	-1-i	-3+3i	-3-3i	$\cdot \frac{V}{m}$
	1	-0.7+2.1i	0.7+0.7i	-2.1+0.7i	0.7+2.1i	0.7+0.7i	0.7-2.1i	
	2	0.5+0.5i	-1.5-0.5i	-1.5-0.5i	-0.5-0.5i	-0.5-0.5i	...	

## A determinação do DOA através do MUSIC:

$SvM^{(m)} := Sv(DOA_{m,0}, DOA_{m,1}) \rightarrow$  matriz de *steering vectors* - equação (18) do slide 13 do Cap II.6

$VT := \frac{ZT}{ZT + ZA} \cdot Cpl \cdot SvM \cdot Eo \rightarrow$  VT é o vetor em que cada componente é a sequência de amostras da tensão digitalizada em banda-base nos terminais do respectivo dipolo - equação (17) do slide 13 do Cap II.6.

Plotando a constelação de símbolos IQ recebidas nos terminais VT de cada um dos  $K = 6$  dipolos:

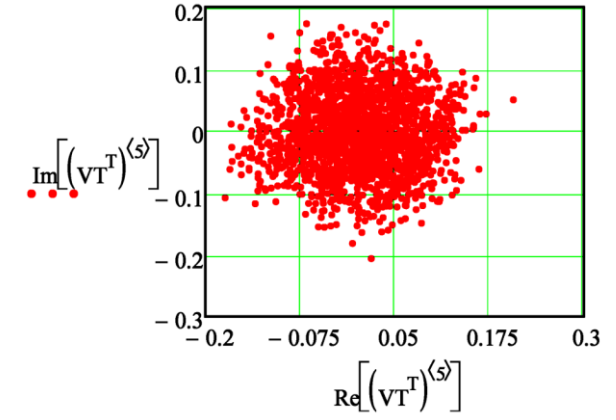
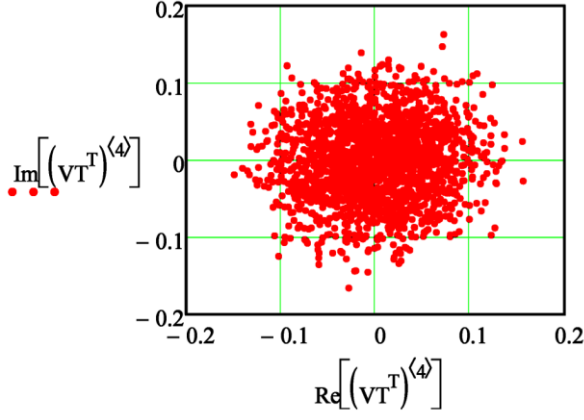
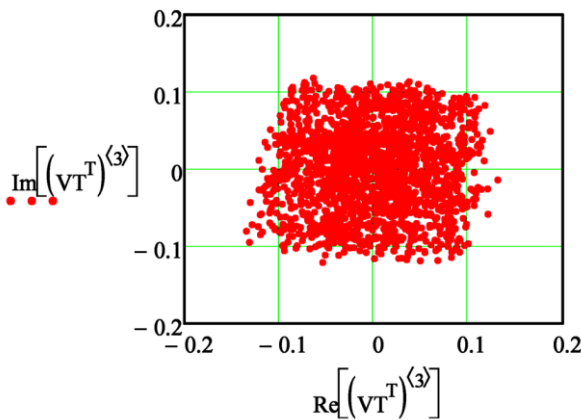
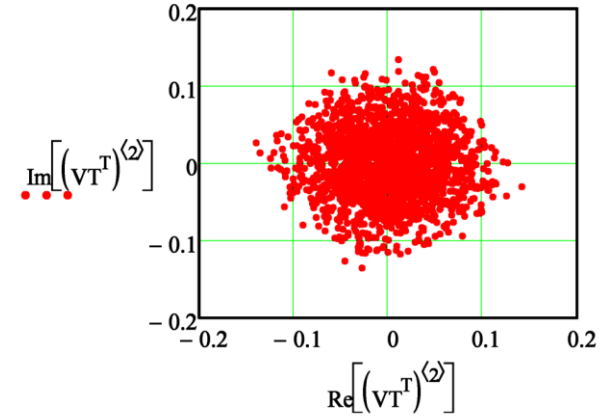
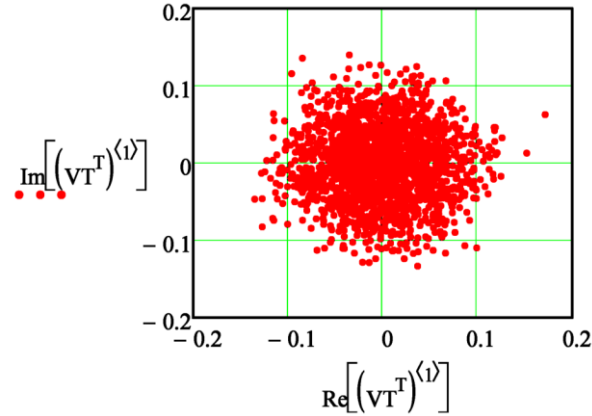
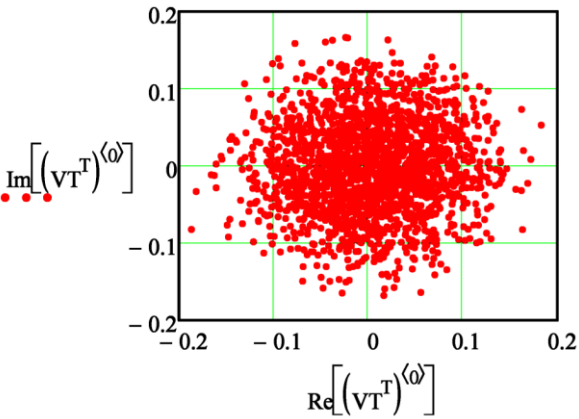


## A determinação do DOA através do MUSIC:

**(b)** Adicionando às tensões do vetor  $\mathbf{V}_T$  o ruído gaussiano do canal de modo que a relação sina-ruído seja  $\text{SNR} = 15$  [dB]:

$\mathbf{V}_T := \text{AWGN}(\mathbf{V}_T, \text{SNR}) \rightarrow$  equação (20) do slide 13 do Cap II.6

Plotando a constelação de símbolos IQ recebidas nos terminais  $\mathbf{V}_T$  de cada um dos  $K = 6$  dipolos após a adição do ruído gaussiano do canal:



## A determinação do DOA através do MUSIC:

**(c) Construindo a matriz de covariância Cov da seqüência de vetores  $V_T^{(n)}$ :**

$$V_m := \frac{1}{NSmpl} \cdot \sum_{n=0}^{NSmpl-1} V_T^{(n)} = \begin{pmatrix} 2.117 - 1.769i \\ 0.115 - 1.647i \\ 0.622 + 0.681i \\ -0.998 + 1.329i \\ 0.299 - 1.075i \\ 2.483 - 3.082i \end{pmatrix} \cdot mV \rightarrow \text{Vetor média } V_m \text{ da seqüência de vetores } V_T^{(n)} \text{ - equação (21) do slide 14 do Cap II.6}$$

**Extraindo o vetor média  $V_m$  da seqüência de vetores  $V_T^{(n)}$ :**

$$V_T^{(n)} := V_T^{(n)} - V_m$$

**Matriz de covariância Cov da seqüência de vetores  $V_T^{(n)}$ :**

$$Cov := \frac{1}{NSmpl} \cdot \sum_{n=0}^{NSmpl-1} \left[ (V_T^{(n)}) \cdot (\overline{V_T^{(n)}})^T \right] \rightarrow \text{equação (22) do slide 14 do Cap II.6}$$

$$10^3 \cdot Cov = \begin{pmatrix} 7.04 & 2.85 + 2.31i & -2.14 + 1.82i & -0.9 + 1.38i & 0.58 + 1.66i & 3.95 + 0.01i \\ 2.85 - 2.31i & 4.4 & -0.98 + 0.23i & -2.05 - 0.82i & -0.29 - 2.34i & 1.33 - 0.44i \\ -2.14 - 1.82i & -0.98 - 0.23i & 4.19 & 2.18 - 2.82i & 2.75 + 0.44i & 0.06 + 1.06i \\ -0.9 - 1.38i & -2.05 + 0.82i & 2.18 + 2.82i & 5.9 & 2.55 + 2.08i & -3.57 - 0.28i \\ 0.58 - 1.66i & -0.29 + 2.34i & 2.75 - 0.44i & 2.55 - 2.08i & 5.23 & 1 - 1.73i \\ 3.95 - 0.01i & 1.33 + 0.44i & 0.06 - 1.06i & -3.57 + 0.28i & 1 + 1.73i & 7.69 \end{pmatrix} \cdot V^2$$



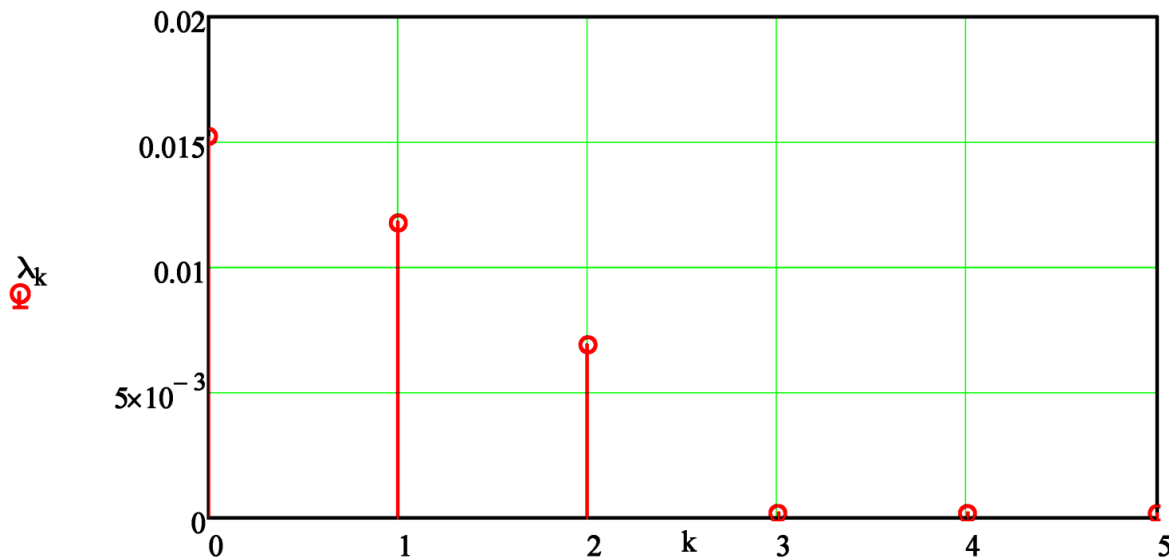
## A determinação do DOA através do MUSIC:

Autovalores  $\lambda_k$  da matriz Cov:

$$k := 0 \dots K - 1 \quad ka := 0 \dots K - 1$$

$$\lambda_k := \text{eigenvals}(\text{Cov})_k \rightarrow 10^3 \cdot \lambda = \begin{pmatrix} 15.234 \\ 11.775 \\ 6.909 \\ 0.187 \\ 0.176 \\ 0.173 \end{pmatrix} \cdot V^2 \rightarrow \text{equação (23) do slide 14 do Cap II.6}$$

Gráfico do espectro de autovalores  $\lambda_k$ . Note os últimos  $N_{\text{noiseEigV}} := 3$  valores de  $\lambda_k$  insignificantes aproximadamente iguais, o que indica haver  $N_{\text{noiseEigV}} = 3$  *noise eigenvectors* e portanto  $K - N_{\text{noiseEigV}} = 3$  sinais incidentes (ajustar manualmente o valor de  $N_{\text{noiseEigV}}$  no início do parágrafo acima a partir da inspeção visual do gráfico do espectro de autovalores  $\lambda_k$  abaixo - ver discussão no slide 16 do Cap II.6).



## A determinação do DOA através do MUSIC:

Autovetores  $U^{(k)}$  da matriz Cov (equação (24) do slide 14 do Cap II.6):

$$U_{k,ka} := \text{eigenvec}(\text{Cov}, \lambda_{ka})_k \rightarrow$$

$$U = \begin{pmatrix} -0.474 + 0.237i & 0.307 + 0.238i & -0.341 - 0.122i & -0.124 - 0.553i & -0.085 - 0.32i & 0.074 + 0.019i \\ -0.245 + 0.132i & 0.142 - 0.309i & -0.48 + 0.154i & 0.229 + 0.107i & 0.513 + 0.446i & 0.123 + 0.108i \\ 0.293 - 0.124i & 0.349 - 0.031i & 0.213 + 0.334i & 0.382 - 0.495i & -0.237 + 0.26i & 0.18 + 0.266i \\ 0.475 + 0.066i & 0.223 + 0.34i & -0.177 - 0.144i & 0.049 - 0.152i & 0.252 + 0.17i & -0.095 - 0.653i \\ 0.166 + 3.963i \times 10^{-3} & 0.582 - 0.052i & 0.173 - 0.266i & 0.029 + 0.352i & 0.238 - 0.381i & 0.423 + 0.156i \\ -0.519 + 0.117i & 0.321 + 6.877i \times 10^{-3} & 0.492 + 0.25i & 0.194 + 0.189i & -0.047 + 0.091i & -0.183 - 0.438i \end{pmatrix}$$

**(d)** Verificando a ortogonalidade entre autovetores e o módulo unitário de cada um:

$$SS_{k,ka} := \overline{(U^{(k)})^T} \cdot U^{(ka)} \rightarrow SS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



## A determinação do DOA através do MUSIC:

**(f)** Obtendo os *noise eigenvectors*  $E_n$  (autovetores com autovalor associado insignificante):

$startcol := K - NnoiseEigV = 3 \rightarrow$  índice das colunas de  $U$  onde começam os *noise eigenvectors*

$$E_n := submatrix(U, 0, rows(U) - 1, startcol, cols(U) - 1) \rightarrow E_n = \begin{pmatrix} -0.124 - 0.553i & -0.085 - 0.32i & 0.074 + 0.019i \\ 0.229 + 0.107i & 0.513 + 0.446i & 0.123 + 0.108i \\ 0.382 - 0.495i & -0.237 + 0.26i & 0.18 + 0.266i \\ 0.049 - 0.152i & 0.252 + 0.17i & -0.095 - 0.653i \\ 0.029 + 0.352i & 0.238 - 0.381i & 0.423 + 0.156i \\ 0.194 + 0.189i & -0.047 + 0.091i & -0.183 - 0.438i \end{pmatrix}$$

**(g)** O MUSIC spectrum PMU é determinado através de:

$$PMU(\theta, \phi) = \frac{1}{(|\rho(\theta, \phi)|)^2} \rightarrow \text{equação (29) do slide 17 do Cap II.6}$$

onde  $\rho(\theta, \phi) := \left[ \left[ (Cpl \cdot Sv(\theta, \phi))^T \right] \cdot E_n \cdot identity(NnoiseEigV) \right]^T \cdot m^{-1}$  é a equação (30) do slide 17 (foi inserida a unidade  $m^{-1}$  para tornar  $\rho(\theta, \phi)$  dimensional e foi multiplicado pela matriz identidade para manter  $\rho(\theta, \phi)$  como matriz na situação em que  $NnoiseEigV = 1$ ).

Tratando numericamente a divisão por zero em  $PMU(\theta, \phi)$  e limitando seu valor máximo em  $Max$ , o espectro  $PMU(\theta, \phi)$  é determinado como:

$$PMU(\theta, \phi) := \text{if} \left[ |\rho(\theta, \phi)| = 0, 10^{37}, \text{if} \left[ \frac{1}{(|\rho(\theta, \phi)|)^2} > Max, Max, \frac{1}{(|\rho(\theta, \phi)|)^2} \right] \right]$$

onde

$Max := 1 \cdot 10^5 \rightarrow$  ajustar  $Max$  para o topo das "torres" do PMU serem igualmente visíveis no gráfico 3D de  $PMU(\theta, \phi)$  para cada DOA  $(\theta, \phi)$  das ondas EM incidentes

## A determinação do DOA através do MUSIC:

Plotando o MUSIC spectrum  $PMU(\theta, \phi)$  no *grid range*  $[\theta_{min}, \theta_{max}]$  e  $[\phi_{min}, \phi_{max}]$  :

Nota:  $\theta \rightarrow 0$  é o zenite do UCA e deve ser evitado porque  $|\rho(\theta, \phi)| \rightarrow 0$  nesta situação (os dipolos não irradiam p/  $\theta=0$ ). Esta situação mascara a condição de ortogonalidade entre  $Cpl.Sv(\theta, \phi)$  e  $E_n$ , resultando em falsa detecção de DOA para  $\theta \rightarrow 0$ .

$$\theta_{min} := 20^\circ$$

$$\theta_{max} := 90^\circ$$

$$\text{Grid}\theta := 50$$

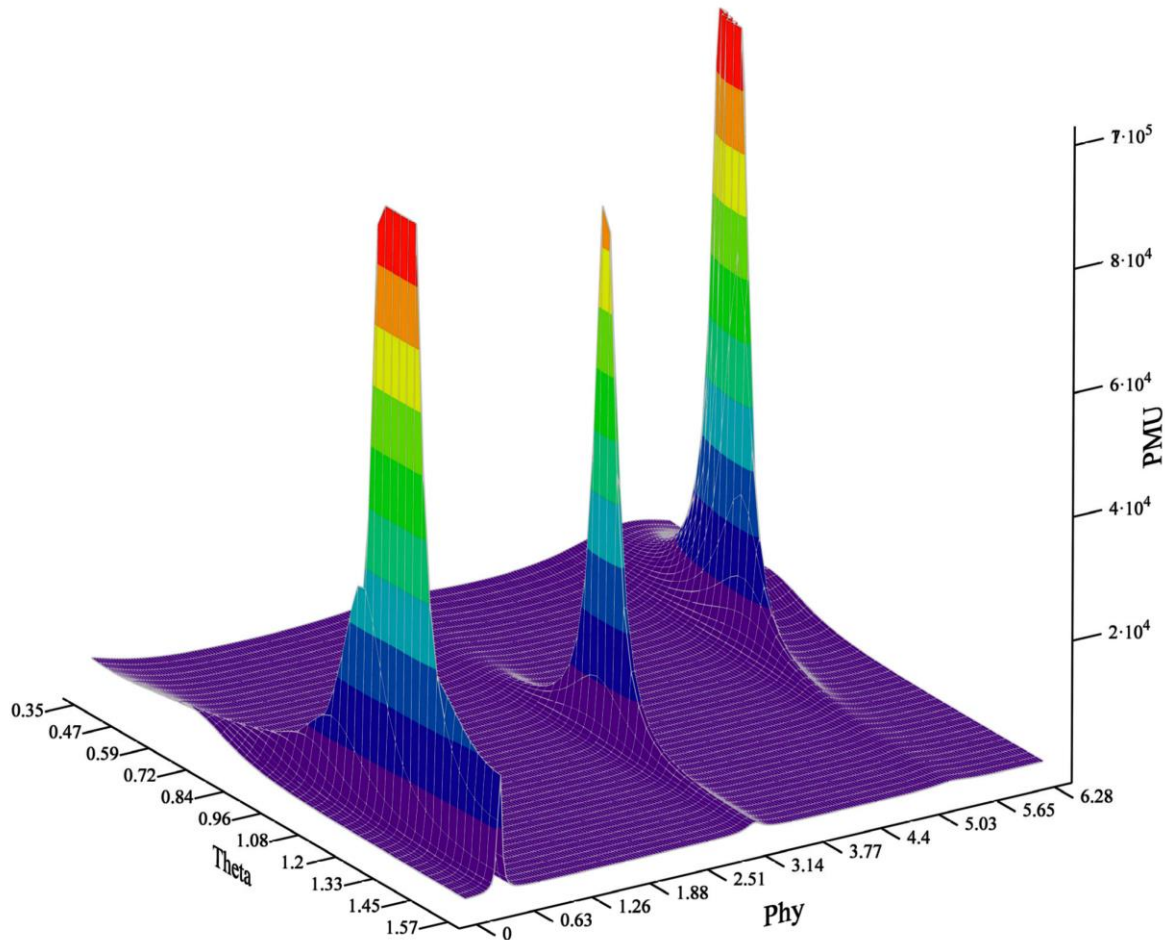
$$\phi_{min} := 0^\circ$$

$$\phi_{max} := 360^\circ$$

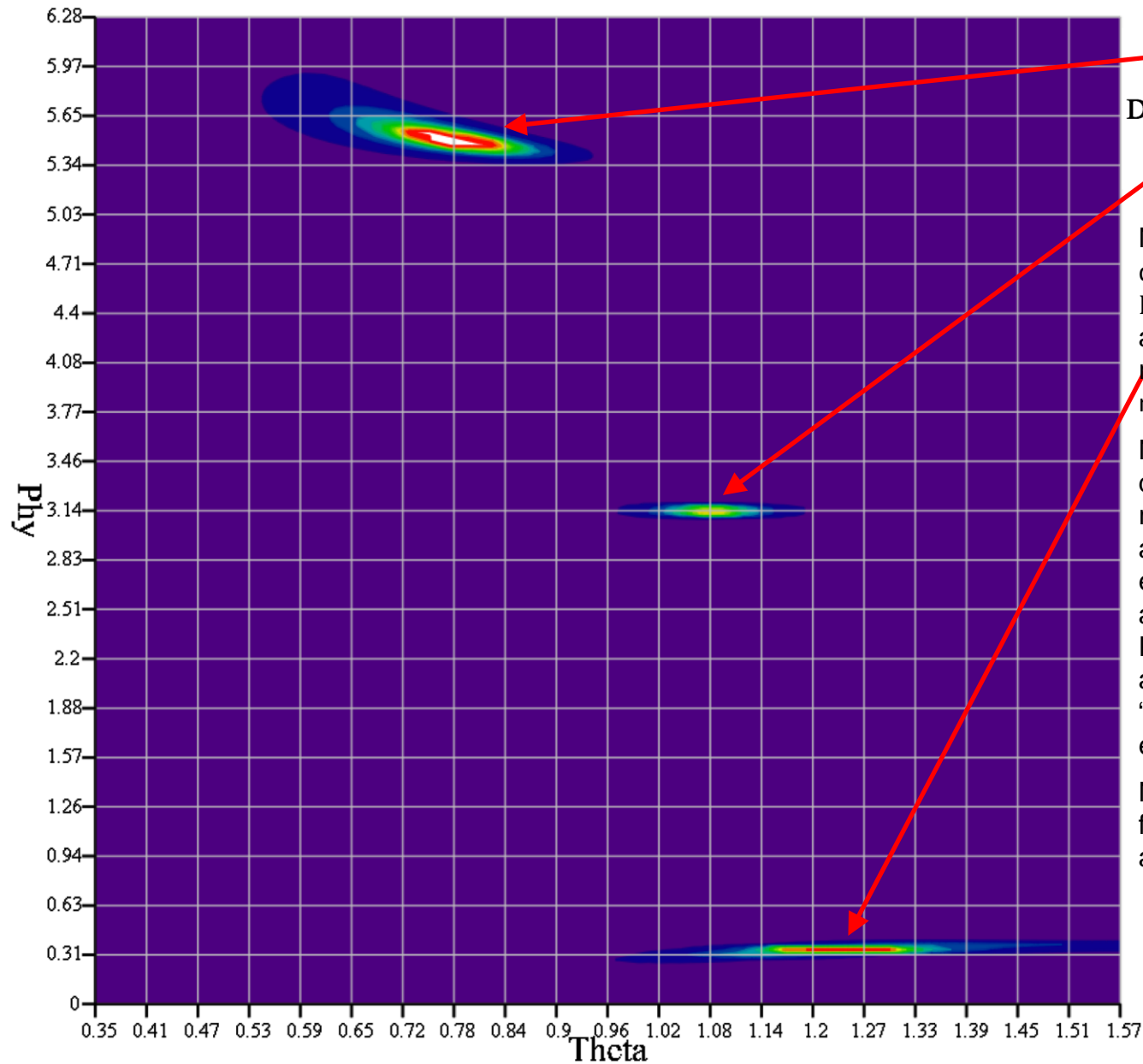
$$\text{Grid}\phi := 200$$

$$\text{DOA} = \begin{pmatrix} 45 & 315 \\ 62 & 180 \\ 71 & 20 \end{pmatrix} \cdot^\circ \rightarrow \text{DOA} = \begin{pmatrix} 0.785 & 5.498 \\ 1.082 & 3.142 \\ 1.239 & 0.349 \end{pmatrix} \cdot \text{rad}$$

$\text{Dat} := \text{CreateMesh}(PMU, \theta_{min}, \theta_{max}, \phi_{min}, \phi_{max}, \text{Grid}\theta, \text{Grid}\phi)$



## A determinação do DOA através do MUSIC:



DOA =  $\begin{pmatrix} 0.785 & 5.498 \\ 1.082 & 3.142 \\ 1.239 & 0.349 \end{pmatrix}$  rad

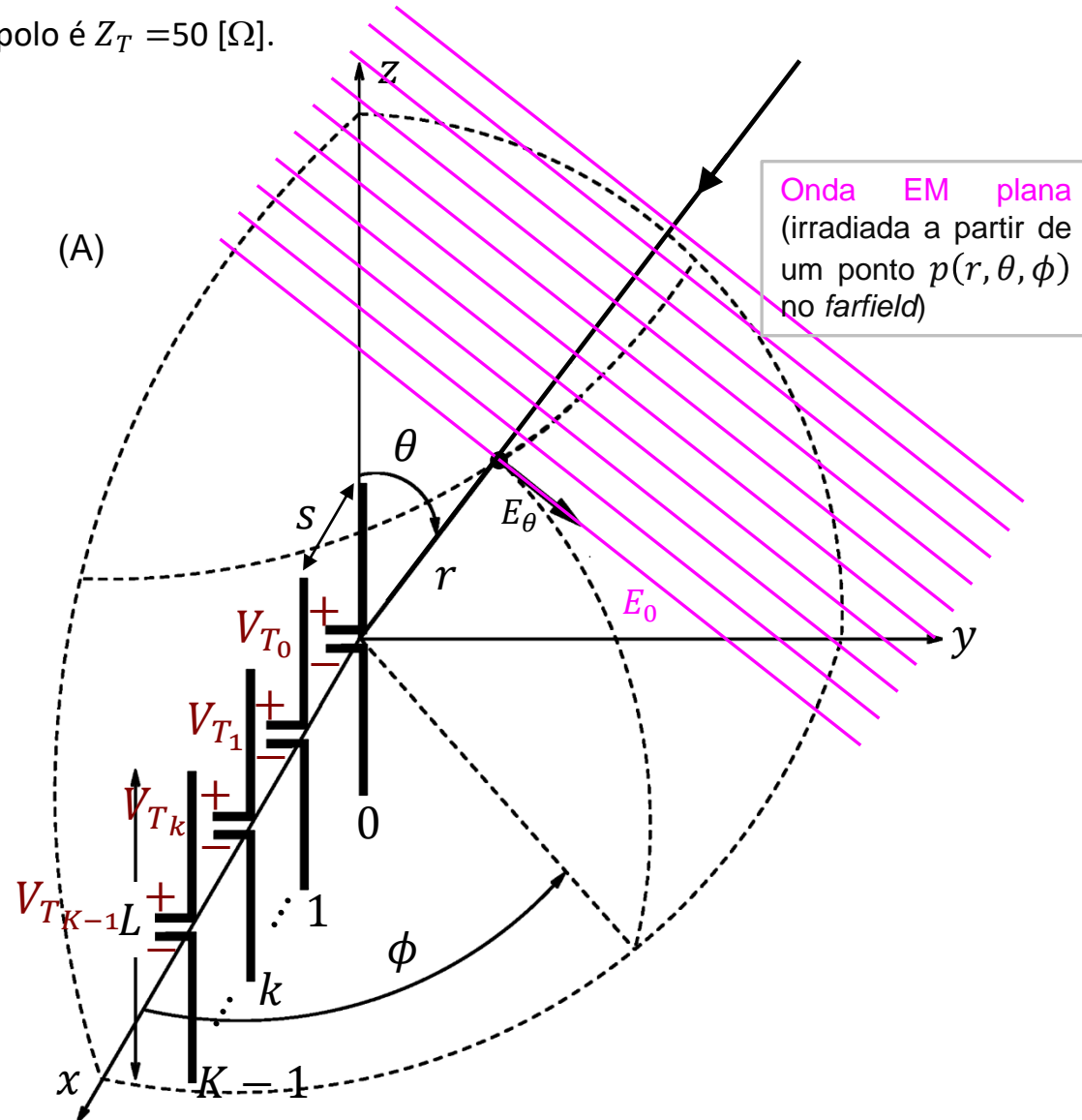
Note portanto que os ângulos  $(\theta, \phi)$  em que ocorrem os máximos locais de  $PMU(\theta, \phi)$  correspondem com boa aproximação aos DOAs  $(\theta_m, \phi_m)$  das respectivas  $M = 3$  ondas EM que incidem no array.

Note também que a resolução angular do DOA  $\phi$  é muito maior do que a resolução angular do DOA  $\theta$ . Isto acontece porque os dipolos estão espacialmente distribuídos no plano azimutal onde  $\phi$  é medido (plano  $xy$ ). Portanto, para aumentar a resolução angular do DOA  $\theta$ , seria necessário "empilhar" réplicas do UCA ao longo do eixo  $z$ .

Note ainda que quanto mais dipolos formar o UCA, maior será a resolução angular do DOA  $\phi$ .

## A determinação do DOA através do MUSIC:

**Exemplo 2:** Consideremos o *phased-array* do tipo *Uniform Linear Array* (ULA) mostrado em (A), operando em  $f_0 = 850\text{MHz}$  e constituído por 6 dipolos cilíndricos de tamanho  $L = 0.5\lambda$  e de raio  $a=5\text{mm}$ , separados entre si de  $s=0.5\lambda$ , sendo  $\lambda$  o comprimento de onda em  $f_0$ . O plano  $xy$  é paralelo ao plano do solo de modo que os dipolos são verticalmente polarizados. A impedância de carga de cada dipolo é  $Z_T = 50 [\Omega]$ .





## A determinação do DOA através do MUSIC:

Um conjunto de ondas EM originadas em transmissores localizados em coordenadas distintas incidem no ULA com amplitudes Mag relativas e DOAs  $(\theta, \phi)$  conforme tabela em (A). Os transmissores utilizam modulação 16-QAM com um alfabeto da modulação dado pelo mapa IQSymbolMap em (B), sendo cada um dos 16 símbolos IQ em IQSymbolMap mapeado em uma palavra de 4 bits (ver [http://www.fccdecastro.com.br/pdf/T2\\_Aula10&11\\_22042020.pdf](http://www.fccdecastro.com.br/pdf/T2_Aula10&11_22042020.pdf)).

(A)	Mag:	DOA $\theta$ :	DOA $\phi$ :
	1.0	60°	120°
	0.7	80°	60°
	0.5	90°	15°

$$(B) \quad \text{IQSymbolMap} = \begin{pmatrix} -3 + 3i & -1 + 3i & 1 + 3i & 3 + 3i \\ -3 + i & -1 + i & 1 + i & 3 + i \\ -3 - i & -1 - i & 1 - i & 3 - i \\ -3 - 3i & -1 - 3i & 1 - 3i & 3 - 3i \end{pmatrix}$$

Para efeito de eficiência espectral, como é usual em qualquer sistema digital, os transmissores adotam um *scrambler* na entrada do modulador (*energy dispersal scrambler* - ver <https://en.wikipedia.org/wiki/Scrambler>) que torna aleatória e uniforme a distribuição dos símbolos IQ na sequência de símbolos IQ extraídos do mapa IQSymbolMap em função da sequência de palavras binárias de 4 bits na entrada do *scrambler*, sequência que corresponde à informação digital a ser transmitida pelo transmissor.

As tensões nos terminais dos 6 dipolos resultantes da incidência das ondas EM são digitalizadas e convertidas para banda-

base pelos respectivos receptores (RX) do *array* de dipolos e são armazenadas no vetor  $\underline{V}_T[n] = \begin{bmatrix} V_{T_0}[n] \\ V_{T_1}[n] \\ \vdots \\ V_{T_5}[n] \end{bmatrix}$ .

Uma sequência de  $NSmpl = 2000$  vetores  $\underline{V}_T[n]$ ,  $n = 0, 1 \dots NSmpl - 1$ , é processada pelo algoritmo MUSIC para efeito de determinar o DOA  $\phi$  das ondas EM incidentes.

## A determinação do DOA através do MUSIC:

**Pede-se:** **(a)** Determine e plote a constelação das 6 sequências de símbolos IQ armazenadas em  $\underline{V}_T[n]$  caso não houvesse ruído no canal ( $SNR = \infty$ ). **(b)** Determine e plote a constelação das 6 sequências de símbolos IQ armazenadas em  $\underline{V}_T[n]$  sabendo que a relação sinal-ruído do canal no local onde o UCA situa-se é  $SNR = 15$  [dB]. **(c)** Determine a matriz de covariância  $\mathbf{Cov}$  da sequência de vetores  $\underline{V}_T[n]$  e efetue a sua *eigen*-decomposição. **(d)** Verifique a ortogonalidade entre autovetores da matriz  $\mathbf{Cov}$  e o módulo unitário de cada um deles. **(e)** Efetue a projeção da sequência de  $NSmpl$  vetores  $\underline{V}_T[n]$  sobre cada um dos 6 eixos cartesianos da base ortonormal formada pelos autovetores de  $\mathbf{Cov}$ , determine a potência de cada uma das 6 projeções e verifique a correspondência com os respectivos autovalores. **(f)** Determine os auto vetores de ruído da matriz  $\mathbf{Cov}$ . **(g)** Determine o espectro  $PMU(\theta, \phi)$  resultante do processamento efetuado pelo algoritmo MUSIC. Plote em um gráfico cartesiano a curva  $PMU(\theta = 90^\circ, \phi)$  e, adicionalmente, plote a curva  $PMU(\theta = 90^\circ, \phi)$  em um gráfico polar. Verifique se os máximos locais de  $PMU(\theta = 90^\circ, \phi)$  ocorrem nos DOAs  $(\theta_m, \phi_m)$  das  $M$  ondas EM que incidem no array,  $m = 0, 1 \dots M - 1$ .

O *script* do software MathCad utilizado na solução deste exemplo está disponível em <http://www.fccdecastro.com.br/ZIP/E2S34.zip>.

## A determinação do DOA através do MUSIC:

Solução:

$f := 850 \text{ MHz}$  → frequência de operação       $\lambda := \frac{c}{f}$      $\lambda = 0.353 \text{ m}$  → comprimento de onda da onda eletromagnética

$Z_T := 50 \cdot \Omega$  → impedância de carga de cada um dos 6 dipolos do array

$\text{SNR} := 15 \text{ [dB]}$  → Relação sinal-ruído no canal de transmissão

$\text{NSmpl} := 2000$  → Número de amostras em banda-base (símbolos IQ) recebidas por dipolo

DOAs ( $\theta, \phi$ ) e magnitude relativa Mag das ondas EM planas que incidem no ULA moduladas em 16-QAM:

$$\text{DOA} := \begin{pmatrix} 60^\circ & 120^\circ \\ 80^\circ & 60^\circ \\ 90^\circ & 15^\circ \end{pmatrix}$$

$$\text{Mag} := \begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.7 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

→ amplitudes das ondas EM são distintas em razão das condições de propagação distintas no canal de transmissão

$M := \text{rows}(\text{DOA}) = 3$  → Número de ondas EM planas que incidem no ULA.

$L := 0.5 \cdot \lambda$  → tamanho dos dipolos

$R := 5 \text{ mm}$  → raio do dipolo cilíndrico

$s := 0.5 \cdot \lambda$  → espaçamento entre dipolos

$\beta := \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} = 17.815 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$  → constante de propagação da onda EM

$$C := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ s & 0 & 0 \\ 2 \cdot s & 0 & 0 \\ 3 \cdot s & 0 & 0 \\ 4 \cdot s & 0 & 0 \\ 5 \cdot s & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

→

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.176 & 0 & 0 \\ 0.353 & 0 & 0 \\ 0.529 & 0 & 0 \\ 0.705 & 0 & 0 \\ 0.882 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ m}$$

→ coordenadas do centro de cada um dos 6 dipolos do ULA.

$K := \text{rows}(C) = 6$  → número de dipolos do array

## A determinação do DOA através do MUSIC:

**(a) Matriz impedância entre os dipolos do array:**

$$aa := 0..K - 1 \quad bb := 0..K - 1 \quad D_{aa,bb} := \sqrt{\left[ \left( C^{(0')} \right)_{aa} - \left( C^{(0')} \right)_{bb} \right]^2 + \left[ \left( C^{(1')} \right)_{aa} - \left( C^{(1')} \right)_{bb} \right]^2 + \left[ \left( C^{(2')} \right)_{aa} - \left( C^{(2')} \right)_{bb} \right]^2}$$

$$Z_{aa,bb} := \text{if} \left( aa = bb, \text{Zin\_Schelkunoff} \left( \frac{R}{mm}, \frac{\lambda}{m}, \frac{L}{m} \right), \text{ZMutual\_Schelkunoff} \left( \frac{L}{m}, \frac{L}{m}, \frac{R}{mm}, \frac{R}{mm}, \frac{D_{aa,bb}}{m}, \frac{\lambda}{m} \right) \right)$$

$$Z = \begin{pmatrix} 78.517 + 45.679i & -14.447 - 34.501i & 4.624 + 20.452i & -2.176 - 14.184i & 1.25 + 10.795i & -0.808 - 8.696i \\ -14.447 - 34.501i & 78.517 + 45.679i & -14.447 - 34.501i & 4.624 + 20.452i & -2.176 - 14.184i & 1.25 + 10.795i \\ 4.624 + 20.452i & -14.447 - 34.501i & 78.517 + 45.679i & -14.447 - 34.501i & 4.624 + 20.452i & -2.176 - 14.184i \\ -2.176 - 14.184i & 4.624 + 20.452i & -14.447 - 34.501i & 78.517 + 45.679i & -14.447 - 34.501i & 4.624 + 20.452i \\ 1.25 + 10.795i & -2.176 - 14.184i & 4.624 + 20.452i & -14.447 - 34.501i & 78.517 + 45.679i & -14.447 - 34.501i \\ -0.808 - 8.696i & 1.25 + 10.795i & -2.176 - 14.184i & 4.624 + 20.452i & -14.447 - 34.501i & 78.517 + 45.679i \end{pmatrix} \cdot \Omega$$

**Steering vector Sv(θ,φ) - equação (16) do slide 12 do Cap II.6:**

$$Sv(\theta, \phi) := \frac{\lambda}{\pi \cdot \sin\left(\frac{\beta \cdot L}{2}\right)} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\beta \cdot L}{2} \cdot \cos(\theta)\right) - \cos\left(\frac{\beta \cdot L}{2}\right)}{\sin(\theta)} \cdot \begin{bmatrix} e^{j \cdot [\beta \cdot (\sin(\theta) \cdot \cos(\phi) \cdot C_{0,0} + \sin(\theta) \cdot \sin(\phi) \cdot C_{0,1} + \cos(\theta) \cdot C_{0,2})]} \\ e^{j \cdot [\beta \cdot (\sin(\theta) \cdot \cos(\phi) \cdot C_{1,0} + \sin(\theta) \cdot \sin(\phi) \cdot C_{1,1} + \cos(\theta) \cdot C_{1,2})]} \\ e^{j \cdot [\beta \cdot (\sin(\theta) \cdot \cos(\phi) \cdot C_{2,0} + \sin(\theta) \cdot \sin(\phi) \cdot C_{2,1} + \cos(\theta) \cdot C_{2,2})]} \\ e^{j \cdot [\beta \cdot (\sin(\theta) \cdot \cos(\phi) \cdot C_{3,0} + \sin(\theta) \cdot \sin(\phi) \cdot C_{3,1} + \cos(\theta) \cdot C_{3,2})]} \\ e^{j \cdot [\beta \cdot (\sin(\theta) \cdot \cos(\phi) \cdot C_{4,0} + \sin(\theta) \cdot \sin(\phi) \cdot C_{4,1} + \cos(\theta) \cdot C_{4,2})]} \\ e^{j \cdot [\beta \cdot (\sin(\theta) \cdot \cos(\phi) \cdot C_{5,0} + \sin(\theta) \cdot \sin(\phi) \cdot C_{5,1} + \cos(\theta) \cdot C_{5,2})]} \end{bmatrix}$$

## A determinação do DOA através do MUSIC:

Matriz do acoplamento Cpl - equação (15) do slide 12 do Cap II.6:

$Z_A := Z_{0,0} \rightarrow$  impedância própria dos  $K = 6$  dipolos do ULA

$$Cpl := (Z_T + Z_A) \cdot (Z + Z_T \cdot \text{identity}(K))^{-1}$$

$$Cpl = \begin{pmatrix} 0.993 + 0.089i & 0.161 + 0.18i & -0.073 - 0.048i & 0.045 + 0.023i & -0.032 - 0.015i & 0.026 + 0.016i \\ 0.161 + 0.18i & 0.991 + 0.147i & 0.157 + 0.161i & -0.07 - 0.038i & 0.043 + 0.017i & -0.032 - 0.015i \\ -0.073 - 0.048i & 0.157 + 0.161i & 0.993 + 0.153i & 0.155 + 0.158i & -0.07 - 0.038i & 0.045 + 0.023i \\ 0.045 + 0.023i & -0.07 - 0.038i & 0.155 + 0.158i & 0.993 + 0.153i & 0.157 + 0.161i & -0.073 - 0.048i \\ -0.032 - 0.015i & 0.043 + 0.017i & -0.07 - 0.038i & 0.157 + 0.161i & 0.991 + 0.147i & 0.161 + 0.18i \\ 0.026 + 0.016i & -0.032 - 0.015i & 0.045 + 0.023i & -0.073 - 0.048i & 0.161 + 0.18i & 0.993 + 0.089i \end{pmatrix}$$

Constelação 16-QAM do sinal transportado por cada onda EM:

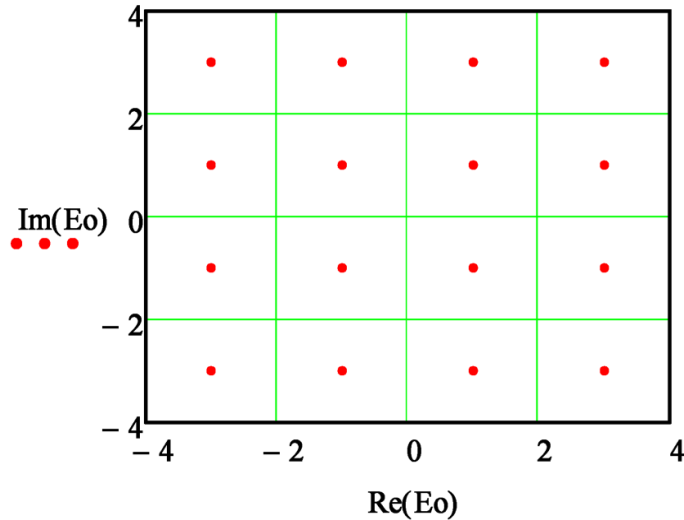
$$A := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad ii := 0..3 \quad jj := 0..3 \quad IQSymbolMap_{ii,jj} := A_{3-jj} + j \cdot A_{ii}$$

$$IQSymbolMap = \begin{pmatrix} -3 + 3i & -1 + 3i & 1 + 3i & 3 + 3i \\ -3 + i & -1 + i & 1 + i & 3 + i \\ -3 - i & -1 - i & 1 - i & 3 - i \\ -3 - 3i & -1 - 3i & 1 - 3i & 3 - 3i \end{pmatrix}$$

## A determinação do DOA através do MUSIC:

Geração da sequência de amostras em banda-base transportadas pelas  $M = 3$  ondas EM planas que incidem no ULA moduladas pela sequência de  $NSmpl = 2000$  símbolos IQ 16-QAM:

$$n := 0 .. NSmpl - 1 \quad \_m := 0 .. M - 1 \quad Eo_{\_m,n} := IQSymbolMap_{\text{round}(\text{rnd}(3)), \text{round}(\text{rnd}(3))} \cdot \frac{V}{m}$$



→ constelação de símbolos IQ 16-QAM gerada nos  $M = 3$  TXs que dão origem às respectivas ondas EM moduladas pelas respectivas sequências de símbolos IQ.

Amplitude de cada onda EM:  $Eo_{\_m,n} := \text{Mag}_{\_m} \cdot Eo_{\_m,n}$

Sequência de amostras em banda-base transportadas por cada uma das  $M = 3$  ondas EM planas que incidem no ULA:

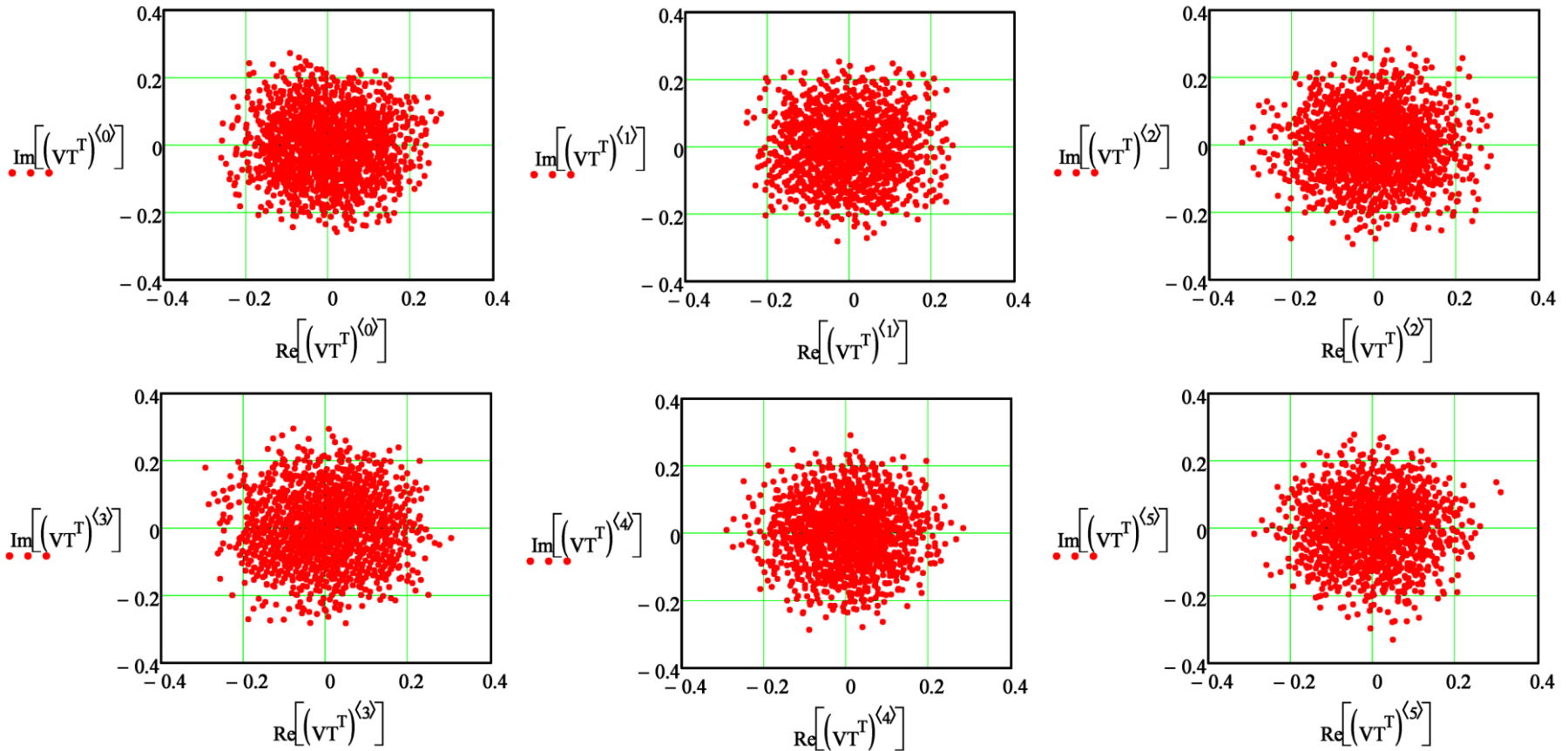
	0	1	2	3	4	5	
$Eo =$	0	1	2	3	4	5	· $\frac{V}{m}$
	-1-i	1-i	1-3i	3+i	1-i	3-i	
	-0.7-0.7i	0.7+2.1i	-0.7+2.1i	0.7+0.7i	-0.7+0.7i	-0.7-2.1i	
	-1.5-0.5i	-1.5+0.5i	0.5+0.5i	1.5+0.5i	1.5-0.5i	...	

## A determinação do DOA através do MUSIC:

$SvM^{\langle m \rangle} := Sv(\text{DOA}_{-m,0}, \text{DOA}_{-m,1}) \rightarrow$  matriz de *steering vectors* - equação (18) do slide 13 do Cap II.6

$V_T := \frac{Z_T}{Z_T + Z_A} \cdot C_{pl} \cdot SvM \cdot E_o \rightarrow$   $V_T$  é o vetor em que cada componente é a sequência de amostras da tensão digitalizada em banda-base nos terminais do respectivo dipolo - equação (17) do slide 13 do Cap II.6.

Plotando a constelação de símbolos IQ recebidas nos terminais  $V_T$  de cada um dos  $K = 6$  dipolos:



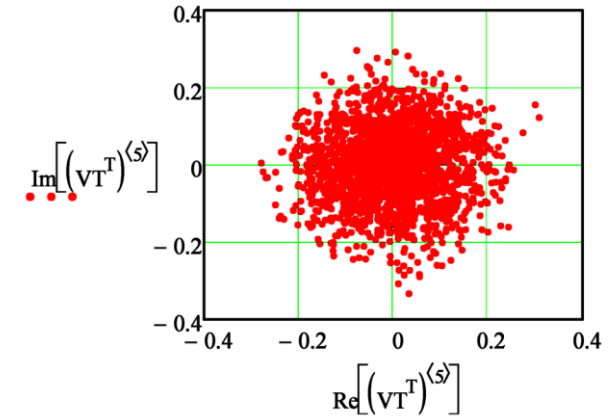
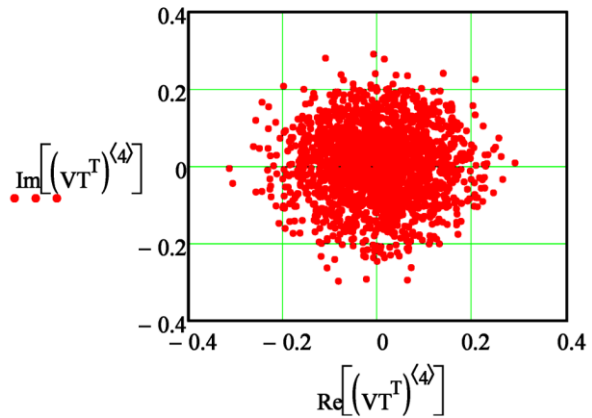
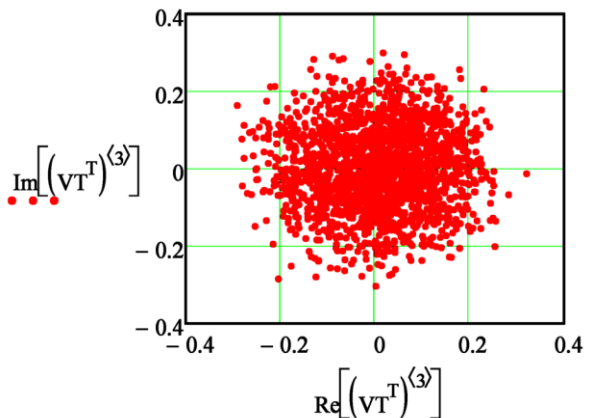
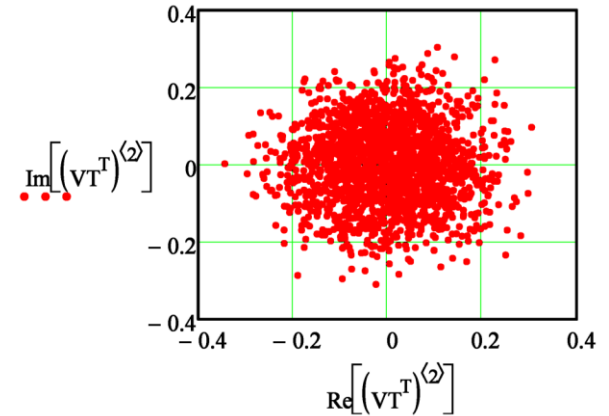
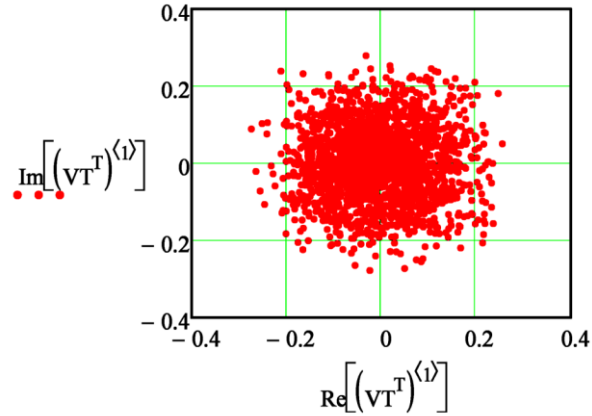
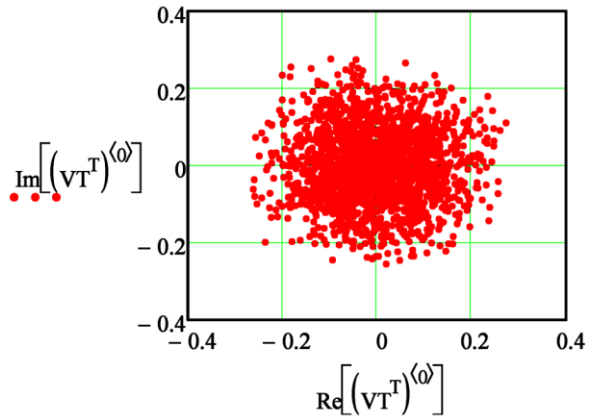


## A determinação do DOA através do MUSIC:

**(b)** Adicionando às tensões do vetor  $\mathbf{V}_T$  o ruído gaussiano do canal de modo que a relação sina-ruído seja  $\text{SNR} = 15$  [dB]:

$\mathbf{V}_T := \text{AWGN}(\mathbf{V}_T, \text{SNR}) \rightarrow$  equação (20) do slide 13 do Cap II.6

Plotando a constelação de símbolos IQ recebidas nos terminais  $\mathbf{V}_T$  de cada um dos  $K = 6$  dipolos após a adição do ruído gaussiano do canal:



## A determinação do DOA através do MUSIC:

**(C) Construindo a matriz de covariância Cov da sequência de vetores  $V_T^{(n)}$ :**

$$V_m := \frac{1}{NSmpl} \cdot \sum_{n=0}^{NSmpl-1} V_T^{(n)} = \begin{pmatrix} -1.156 - 0.111i \\ -3.252 + 0.121i \\ -2.015 - 0.629i \\ 5.342 + 1.16i \\ 0.716 + 1.211i \\ -1.824 - 0.57i \end{pmatrix} \cdot mV \quad \rightarrow \text{Vetor média } V_m \text{ da sequência de vetores } V_T^{(n)} \text{ - equação (21) do slide 14 do Cap II.6}$$

**Extraindo o vetor média  $V_m$  da sequência de vetores  $V_T^{(n)}$ :**

$$V_T^{(n)} := V_T^{(n)} - V_m$$

**Matriz de covariância Cov da sequência de vetores  $V_T^{(n)}$ :**

$$Cov := \frac{1}{NSmpl} \cdot \sum_{n=0}^{NSmpl-1} \left[ (V_T^{(n)}) \cdot (\overline{V_T^{(n)}})^T \right] \quad \rightarrow \text{equação (22) do slide 14 do Cap II.6}$$

$$10^3 \cdot Cov = \begin{pmatrix} 18.66 & 5.11 + 4.12i & -14.26 + 6.87i & -10.7 - 3.28i & 11.97 - 7.69i & 11.12 - 4.2i \\ 5.11 - 4.12i & 17.84 & 1 + 2.97i & -16.43 + 4.87i & -5.67 - 2.85i & 13.89 - 4.71i \\ -14.26 - 6.87i & 1 - 2.97i & 21.27 & 0.19 + 3.84i & -16.08 + 3.87i & -9.32 - 8.6i \times 10^{-3} \\ -10.7 + 3.28i & -16.43 - 4.87i & 0.19 - 3.84i & 21.81 & 1.18 + 4.24i & -14.69 + 2.58i \\ 11.97 + 7.69i & -5.67 + 2.85i & -16.08 - 3.87i & 1.18 - 4.24i & 17.76 & 3.49 + 1.96i \\ 11.12 + 4.2i & 13.89 + 4.71i & -9.32 + 8.6i \times 10^{-3} & -14.69 - 2.58i & 3.49 - 1.96i & 18.39 \end{pmatrix} \cdot V^2$$

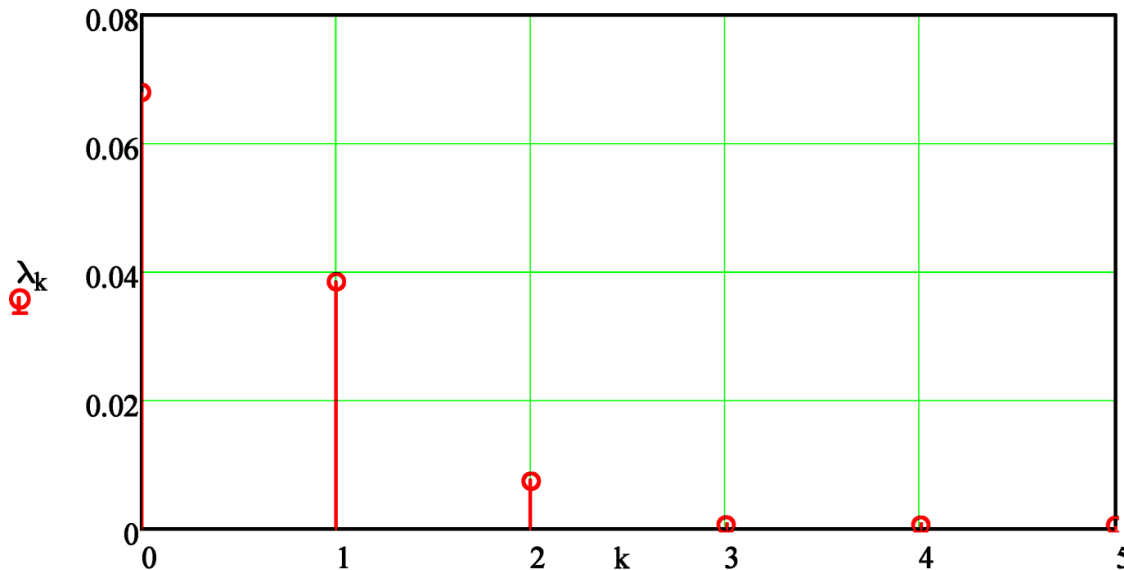
## A determinação do DOA através do MUSIC:

Autovalores  $\lambda_k$  da matriz Cov:

$$k := 0..K - 1 \quad ka := 0..K - 1$$

$$\lambda_k := \text{eigenvals}(\text{Cov})_k \rightarrow 10^3 \cdot \lambda = \begin{pmatrix} 67.962 \\ 38.496 \\ 7.461 \\ 0.628 \\ 0.601 \\ 0.586 \end{pmatrix} \cdot V^2 \rightarrow \text{equação (23) do slide 14 do Cap II.6}$$

Gráfico do espectro de autovalores  $\lambda_k$ . Note os últimos  $\text{NnoiseEigV} := 3$  valores de  $\lambda_k$  insignificantes aproximadamente iguais, o que indica haver  $\text{NnoiseEigV} = 3$  *noise eigenvectors* e portanto  $K - \text{NnoiseEigV} = 3$  sinais incidentes (ajustar manualmente o valor de  $\text{NnoiseEigV}$  no início do parágrafo acima a partir da inspeção visual do gráfico do espectro de autovalores  $\lambda_k$  abaixo - ver discussão no slide 16 do Cap II.6 ).



## A determinação do DOA através do MUSIC:

Autovetores  $U^{(k)}$  da matriz Cov (equação (24) do slide 14 do Cap II.6):

$$U_{k,ka} := \text{eigenvec}(\text{Cov}, \lambda_{ka})_k \rightarrow$$

$$U = \begin{pmatrix} -0.14 - 0.447i & 0.24 - 0.059i & 0.284 + 0.251i & 0.15 + 0.166i & -0.456 - 0.36i & 0.297 + 0.316i \\ -0.303 - 0.199i & -0.24 + 0.39i & -0.218 - 0.143i & 0.102 + 0.508i & 0.187 - 0.212i & 0.283 - 0.403i \\ -0.087 + 0.393i & -0.465 + 0.071i & 0.365 + 0.252i & 0.389 - 0.141i & 0.308 - 0.204i & 0.217 + 0.254i \\ 0.271 + 0.34i & 0.28 - 0.315i & -0.485 - 0.13i & 0.236 + 0.107i & 0.029 - 0.111i & 0.536 + 0.11i \\ 0.183 - 0.289i & 0.455 - 0.078i & 0.407 - 0.076i & 0.322 + 0.038i & 0.562 + 0.183i & 0.057 - 0.2i \\ -0.104 - 0.413i & -0.069 + 0.334i & -0.404 - 0.066i & 0.317 - 0.487i & 0.069 + 0.28i & 0.113 + 0.318i \end{pmatrix}$$

(d) Verificando a ortogonalidade entre autovetores e o módulo unitário de cada um:

$$SS_{k,ka} := \overline{(U^{(k)})^T} \cdot U^{(ka)} \rightarrow SS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## A determinação do DOA através do MUSIC:

**(e)** Sequência de projeções Proj da sequência de NSmpl = 2000 vetores  $V T^{(n)}$  sobre cada um dos  $K = 6$  eixos cartesianos da base ortonormal formada pelos  $K = 6$  autovetores, cada autovetor sendo o vetor unitário que dá a direção do respectivo eixo cartesiano da base ortonormal, onde  $n = 0 .. NSmpl - 1$  :

$$\text{Proj}_{k,n} := \overline{\left( U^{(k)T} \right)} \cdot V T^{(n)} \rightarrow$$

Proj =

	0	1	2	
0	131.423-80.01i	7.471-11.315i	251.277-30.38i	·mV
1	-60.441-85.669i	120.266+169.715i	126.427+280.533i	
2	-61.092+82.762i	17.778+106.915i	50.374-12.853i	
3	25.532-7.711i	-10.124+30.2i	7.432-9.36i	
4	10.222+15.756i	-21.847+20.591i	-18.598+11.547i	
5	24.773+0.719i	-17.832-29.336i	...	

(equação (25) do slide 15 do Cap II.6)

Determinando a potência  $Pot_k$  da sequência de NSmpl = 2000 projeções em cada respectivo  $k$ -ésimo eixo cartesiano dentre os  $K = 6$  eixos cartesianos da base ortonormal formada pelos  $K = 6$  autovetores. Comparando a potência de cada uma das  $K = 6$  seqüências de projeções com os respectivos autovalores:

$$Pot_k := \frac{1}{NSmpl} \cdot \sum_n \left( |Proj_{k,n}| \right)^2 \rightarrow 10^3 \cdot Pot = \begin{pmatrix} 67.962 \\ 38.496 \\ 7.461 \\ 0.628 \\ 0.601 \\ 0.586 \end{pmatrix} \cdot V^2 \Leftrightarrow 10^3 \cdot \lambda = \begin{pmatrix} 67.962 \\ 38.496 \\ 7.461 \\ 0.628 \\ 0.601 \\ 0.586 \end{pmatrix} \cdot V^2$$

(equação (26) do slide 15 do Cap II.6)

## A determinação do DOA através do MUSIC:

(f) Obtendo os *noise eigenvectors*  $E_n$  (autovetores com autovalor associado insignificante):

$startcol := K - NnoiseEigV = 3 \rightarrow$  índice das colunas de  $U$  onde começam os *noise eigenvectors*

$$E_n := \text{submatrix}(U, 0, \text{rows}(U) - 1, startcol, \text{cols}(U) - 1) \rightarrow E_n = \begin{pmatrix} 0.15 + 0.166i & -0.456 - 0.36i & 0.297 + 0.316i \\ 0.102 + 0.508i & 0.187 - 0.212i & 0.283 - 0.403i \\ 0.389 - 0.141i & 0.308 - 0.204i & 0.217 + 0.254i \\ 0.236 + 0.107i & 0.029 - 0.111i & 0.536 + 0.11i \\ 0.322 + 0.038i & 0.562 + 0.183i & 0.057 - 0.2i \\ 0.317 - 0.487i & 0.069 + 0.28i & 0.113 + 0.318i \end{pmatrix}$$

(g) O MUSIC spectrum PMU é determinado através de:

$$PMU(\theta, \phi) = \frac{1}{(|\rho(\theta, \phi)|)^2} \rightarrow \text{equação (29) do slide 17 do Cap II.6}$$

onde  $\rho(\theta, \phi) := \left[ \overline{[(Cpl \cdot Sv(\theta, \phi))^T] \cdot E_n \cdot \text{identity}(NnoiseEigV)} \right]^T \cdot m^{-1}$  é a equação (30) do slide 17 (foi inserida a unidade  $m^{-1}$  para tornar  $\rho(\theta, \phi)$  adimensional e foi multiplicado pela matriz identidade para manter  $\rho(\theta, \phi)$  como matriz na situação em que  $NnoiseEigV = 1$ ).

Tratando numericamente a divisão por zero em  $PMU(\theta, \phi)$  e limitando seu valor máximo em  $Max$ , o espectro  $PMU(\theta, \phi)$  é determinado como:

$$PMU(\theta, \phi) := \text{if} \left[ |\rho(\theta, \phi)| = 0, 10^{37}, \text{if} \left[ \frac{1}{(|\rho(\theta, \phi)|)^2} > Max, Max, \frac{1}{(|\rho(\theta, \phi)|)^2} \right] \right]$$

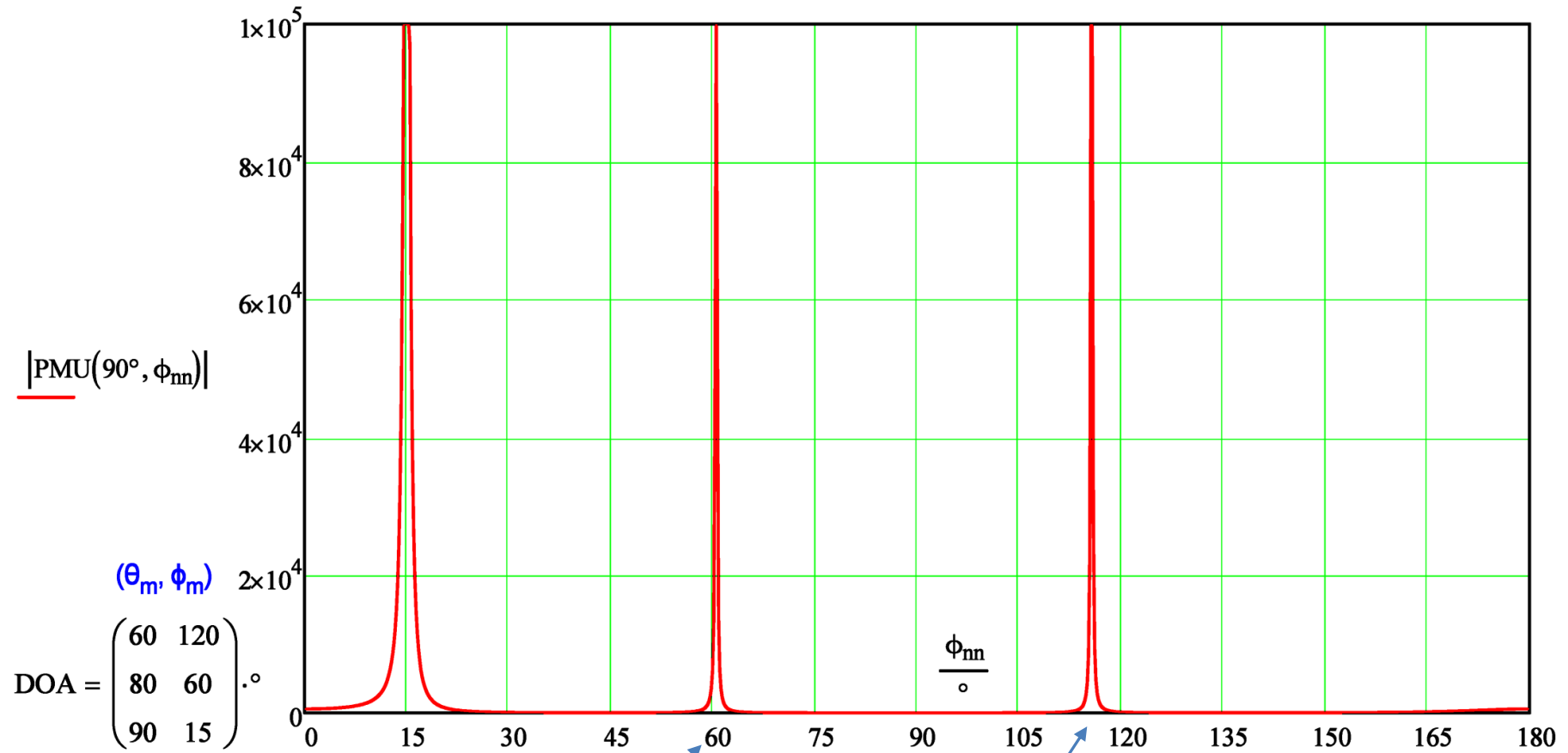
onde

$Max := 1 \cdot 10^5 \rightarrow$  ajustar  $Max$  para os máximos locais da curva  $PMU(\theta = 90^\circ, \phi)$  terem a mesma amplitude no gráfico cartesiano de  $PMU(\theta = 90^\circ, \phi)$  para cada DOA  $(\theta_m, \phi_m)$  das ondas EM incidentes.

## A determinação do DOA através do MUSIC:

Nptos := 1000

$$nn := 0 .. Nptos - 1 \quad \phi_{nn} := \pi \cdot \frac{nn}{Nptos}$$



$$DOA = \begin{pmatrix} 60 & 120 \\ 80 & 60 \\ 90 & 15 \end{pmatrix} \cdot ^\circ$$

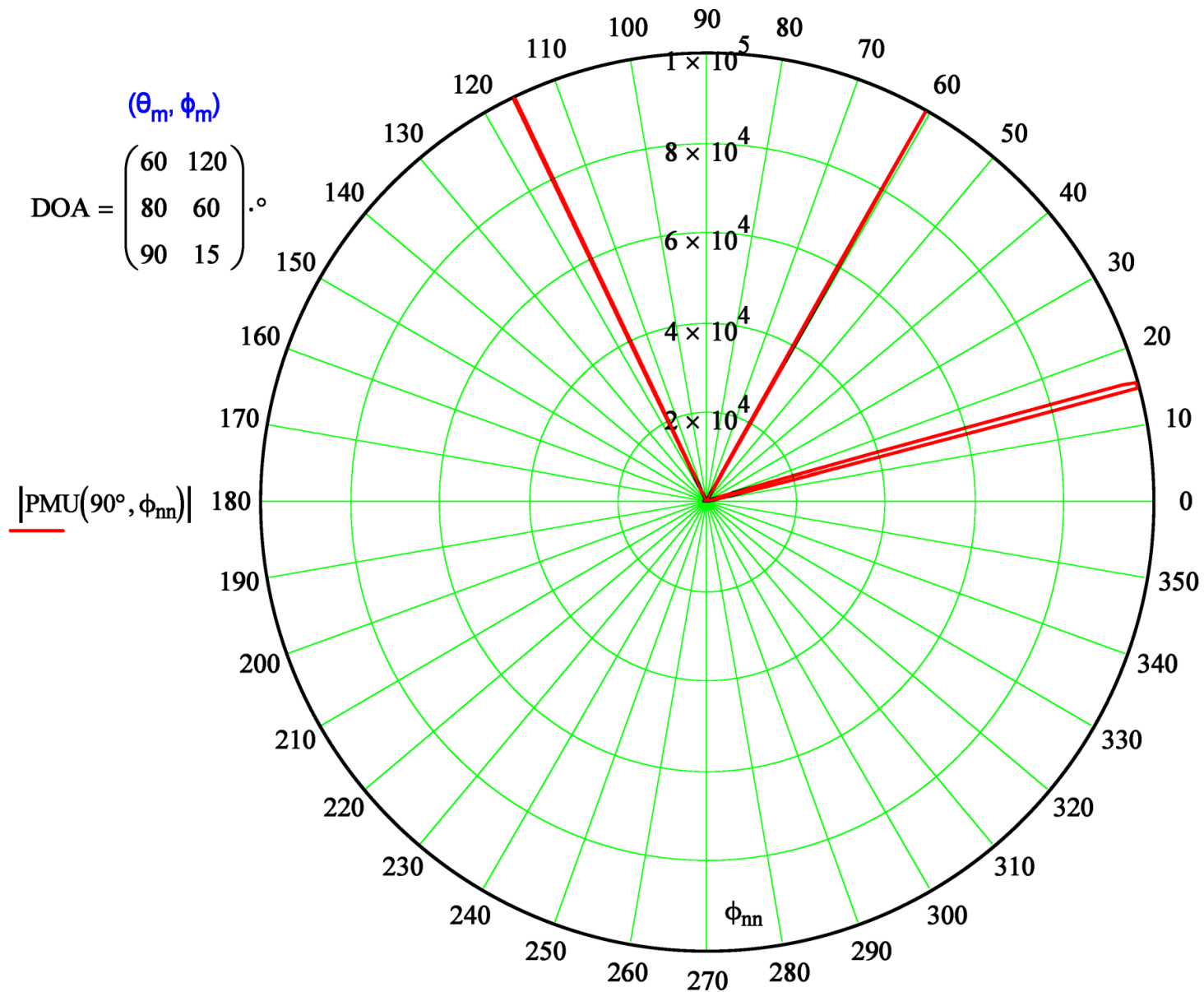
DOA  $\phi$  identificado com boa precisão mas com menor resolução devido ao DOA  $\phi = 15^\circ$  estar próximo do ângulo  $0^\circ$  do eixo do ULA (eixo  $x$ ) em que os dipolos estão alinhados e a discriminação angular fica comprometida. Mesmo problema acontecerá para um DOA  $\phi$  próximo de  $180^\circ$ .

DOA  $\phi$  identificado com boa precisão e resolução.

DOA  $\phi$  identificado com boa resolução mas com precisão comprometida porque o DOA  $\theta = 60^\circ$  se afasta de  $\theta = 90^\circ$ , que é o ângulo de incidência que identifica o plano  $xy$ , plano de incidência em que ocorre o máximo ganho dos dipolos. Note que o ULA não é distribuído em duas dimensões como o UCA do Exemplo 1 do slide 18, portanto, o MUSIC não somente não consegue identificar um DOA  $\theta$  como também perde precisão para um DOA  $\theta$  próximo de  $0^\circ$  ou  $180^\circ$ , em que o ganho dos dipolos é nulo.

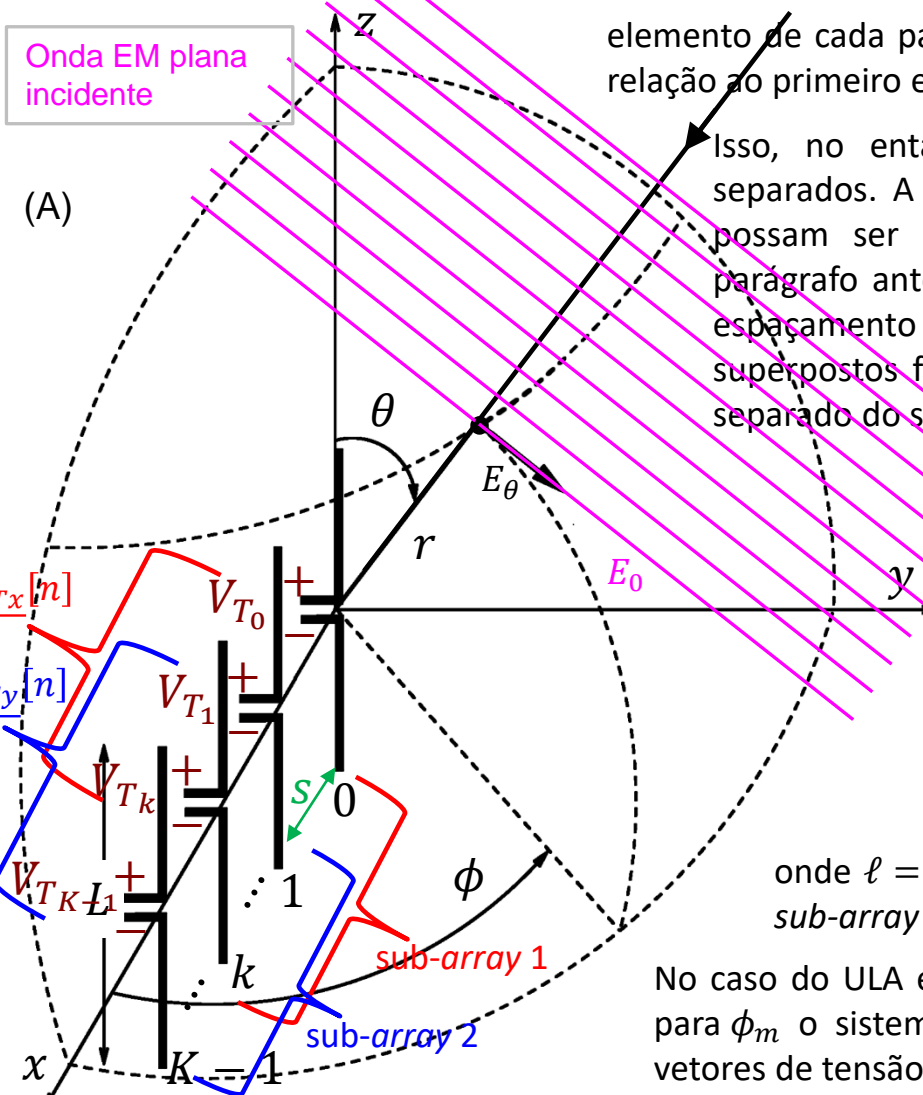


## A determinação do DOA através do MUSIC:



# ESPRIT - Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques

O algoritmo ESPRIT (*Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques*) difere do MUSIC na medida em que o ESPRIT efetua a eigendecomposição de uma matriz de covariância formada a partir dos vetores de tensões  $V_{Tx}[n]$  e  $V_{Ty}[n]$  respectivos a dois sub-arrays idênticos – ver (A) abaixo. Os sub-arrays são idênticos no sentido de que os elementos dos dois sub-arrays formam pares casados com um vetor de deslocamento idêntico, de tal forma que o segundo



elemento de cada par é deslocado da mesma distância e na mesma direção em relação ao primeiro elemento do par.

Isso, no entanto, não significa que seja necessário ter dois arrays separados. A geometria do array apenas deve ser tal que os elementos possam ser selecionados de modo a ter a propriedade referida no parágrafo anterior. Por exemplo, um ULA de  $K$  dipolos idênticos com um espaçamento  $s$  entre dipolos pode ser pensado como dois sub-arrays 1 e 2 superpostos formados cada um por  $K - 1$  dipolos estando o sub-array 1 separado do sub-array 2 de uma distância  $s$ , conforme mostrados em (A).

A onda EM em magenta em (A) incide no ULA sob um DOA  $(\theta_m, \phi_m)$ . Portanto, o  $\ell$ -ésimo par de tensões casadas entre o sub-array 1 e o sub-array 2, cada uma delas proveniente respectivamente dos vetores  $V_{Tx}[n]$  e  $V_{Ty}[n]$ , mantém a seguinte relação baseada no steering vector da onda EM incidente:

$$V_{Tx_\ell}[n] = V_{Ty_\ell}[n] e^{j\frac{2\pi}{\lambda}(s \sin \theta_m \cos \phi_m)} \quad (31)$$

onde  $\ell = 0, 1, \dots, K - 2$  (lembre que o ULA tem  $K$  dipolos, mas cada sub-array tem  $K - 1$  dipolos).

No caso do ULA em (A), basicamente o que o algoritmo ESPRIT faz é resolver para  $\phi_m$  o sistema de equações (31) a partir dos  $K - 1$  pares casados nos vetores de tensão  $V_{Tx}[n]$  e  $V_{Ty}[n]$ .

## ESPRIT - Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques

O procedimento a seguir resolve (31) para  $\phi_m$  através de dois métodos: O TLS-ESPRIT (*Total Least Squares* ESPRIT) e o LS-ESPRIT (*Least Squares* ESPRIT). O TLS-ESPRIT apresenta uma precisão um pouco melhor do que o LS-ESPRIT, às custas de uma maior complexidade computacional.

O vetor das tensões nos terminais dos  $K$  dipolos do ULA é dado pela equação (20) do slide 13, abaixo reproduzida:

$$\underline{V_T}[n] = \begin{bmatrix} V_{T_0}[n] \\ V_{T_1}[n] \\ \vdots \\ V_{T_{K-1}}[n] \end{bmatrix} = \frac{Z_T}{(Z_T + Z_A)} \mathbf{Cpl SvM} \begin{bmatrix} E_{0_0}[n] \\ E_{0_1}[n] \\ \vdots \\ E_{0_{M-1}}[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_0[n] \\ \eta_1[n] \\ \vdots \\ \eta_{K-1}[n] \end{bmatrix} \quad (20)$$

Primeiramente, a partir da geometria do *array*, o processamento digital do RX compensa o acoplamento mútuo entre os dipolos através de:

$$\underline{V_T}[n] = \mathbf{Cpl}^{-1} \underline{V_T}[n] \quad (32)$$

As sequências de tensões  $\underline{V_{Tx}}[n]$  e  $\underline{V_{Ty}}[n]$  nos terminais dos dipolos respectivamente dos sub-*arrays* 1 e 2 são obtidas de (20) conforme abaixo:

$$\underline{V_{Tx}}[n] = \begin{bmatrix} V_{T_0}[n] \\ V_{T_1}[n] \\ \vdots \\ V_{T_{K-2}}[n] \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$\underline{V_{Ty}}[n] = \begin{bmatrix} V_{T_1}[n] \\ V_{T_2}[n] \\ \vdots \\ V_{T_{K-1}}[n] \end{bmatrix} \quad (34)$$

Daí o RX forma a sequência de vetores  $\underline{V_{Tz}}[n]$  a partir de (33) e (34), “empilhando”  $\underline{V_{Tx}}[n]$  e  $\underline{V_{Ty}}[n]$ :

$$\underline{V_{Tz}}[n] = \begin{bmatrix} \underline{V_{Tx}}[n] \\ \underline{V_{Ty}}[n] \end{bmatrix} \quad (35)$$

## ESPRIT - Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques

Para uma sequência de  $NSmpl$  vetores  $\underline{V}_{TZ}[n]$ , com  $n = 0, 1 \dots NSmpl - 1$ , a matriz de covariância  $\mathbf{CovZ}$  [ $2(K - 1) \times 2(K - 1)$ ] da sequência  $\underline{V}_{TZ}[n]$  é obtida através de :

$$\underline{V}_{mz} = \frac{1}{NSmpl} \sum_{n=0}^{NSmpl-1} \underline{V}_{TZ}[n] \quad (36)$$

$$\mathbf{CovZ} = \frac{1}{NSmpl} \sum_{n=0}^{NSmpl-1} (\underline{V}_{TZ}[n] - \underline{V}_{mz})(\underline{V}_{TZ}[n] - \underline{V}_{mz})^H \quad (37)$$

Os  $2(K - 1)$  *eigenvalues* (autovalores) e os  $2(K - 1)$  respectivos *eigenvectors* (autovetores) da matriz de covariância  $\mathbf{CovZ}$  são determinados, resultando:

$$\begin{bmatrix} \lambda_{z_0} \\ \lambda_{z_1} \\ \vdots \\ \lambda_{z_{2(K-1)-1}} \end{bmatrix} = \text{eigenvals}(\mathbf{CovZ}) \quad (38)$$

$$\mathbf{UZ} = \begin{bmatrix} \underline{UZ}_{00} & \underline{UZ}_{01} & \dots & \underline{UZ}_{0(2(K-1)-1)} \\ \underline{UZ}_{10} & \underline{UZ}_{11} & \dots & \underline{UZ}_{1(2(K-1)-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{UZ}_{(2(K-1)-1)0} & \underline{UZ}_{(2(K-1)-1)1} & \dots & \underline{UZ}_{(2(K-1)-1)(2(K-1)-1)} \end{bmatrix} = [\underline{UZ}_0 \quad \underline{UZ}_1 \quad \dots \quad \underline{UZ}_{(2(K-1)-1)}] = \text{eigenvec}(\mathbf{CovZ}) \quad (39)$$

onde a  $k$ -ésima coluna  $\underline{U}_k$  da matriz  $\mathbf{UZ}$  [ $2(K - 1) \times 2(K - 1)$ ] é o autovetor  $\underline{UZ}_k = \begin{bmatrix} U_{0k} \\ U_{1k} \\ \vdots \\ U_{(2(K-1)-1)k} \end{bmatrix}$  associado ao autovalor  $\lambda_k$ , sendo  $k = 0, 1 \dots 2(K - 1) - 1$ .

O próximo passo consiste em selecionar as  $M$  colunas na matriz  $\mathbf{UZ}$  correspondentes aos  $M$  *signal eigenvectors* da matriz  $\mathbf{CovZ}$ , formando a matriz  $\mathbf{Es}$  [ $2(K - 1) \times M$ ] cujas  $M$  colunas são os  $M$  *signal eigenvectors* selecionados. A seleção dos  $M$  *signal eigenvectors* é feita a partir do espectro de autovalores da matriz  $\mathbf{CovZ}$ : O  $m$ -ésimo *signal eigenvector* de  $\mathbf{CovZ}$  é identificado pelo autovalor  $\lambda_m$  associado, de valor significativo dentre os demais autovalores presentes no espectro de autovalores da matriz  $\mathbf{CovZ}$ . Já um *noise eigenvector* de  $\mathbf{CovZ}$  é identificado pelo autovalor  $\lambda_\ell$  associado que é muito menor que os autovalores  $\lambda_m$  associados aos *signal eigenvectors*, sendo  $m = 0, 1 \dots M - 1$  e  $\ell = M, M + 1 \dots 2(K - 1) - 1$ , onde  $M$  o número de ondas EM que incidem no ULA (rever discussão nos slides 15 e 16).

A partir de  $\mathbf{Es}$ , formar as submatrizes  $\mathbf{Ux}$  e  $\mathbf{Uy}$  através de:

$$\mathbf{Ux} = \text{submatrix} \left( \mathbf{Es}, 0, \text{floor} \left( \frac{\text{rows}(\mathbf{Es})}{2} \right) - 1, 0, \text{cols}(\mathbf{Es}) - 1 \right) \quad (40)$$

$$\mathbf{Uy} = \text{submatrix} \left( \mathbf{Es}, \text{floor} \left( \frac{\text{rows}(\mathbf{Es})}{2} \right), \text{rows}(\mathbf{Es}) - 1, 0, \text{cols}(\mathbf{Es}) - 1 \right) \quad (41)$$

onde

$\text{submatrix}(\mathbf{A}, ir, jr, ic, jc)$  é o operador que retorna a submatriz formada pelas linhas de  $ir$  à  $jr$  e pelas colunas de  $ic$  à  $jc$  da matriz  $\mathbf{A}$ .

$\text{floor}(\cdot)$  é o operador que retorna o maior inteiro que é menor ou igual ao argumento  $(\cdot)$ .

$\text{rows}(\mathbf{A})$  é o operador que retorna o número de linhas na matriz  $\mathbf{A}$ .

$\text{cols}(\mathbf{A})$  é o operador que retorna o número de colunas na matriz  $\mathbf{A}$ .

**LS-ESPRIT:**

Formar a matriz  $\Psi[M \times M]$  dada por:

$$\Psi = (\mathbf{U}_x^H \mathbf{U}_x)^{-1} \mathbf{U}_x^H \mathbf{U}_y \quad (42)$$

Determinar os  $M$  autovalores de valor complexo da matriz  $\Psi$  :

$$\begin{bmatrix} \lambda\psi_0 \\ \lambda\psi_1 \\ \vdots \\ \lambda\psi_{M-1} \end{bmatrix} = \text{eigenvals}(\Psi) \quad (43)$$

Determinar os  $M$  DOAs  $\phi_m$ , com  $m = 0, 1 \dots M - 1$ , através de:

$$\phi_m = \text{acos} \left( c \frac{\angle \lambda\psi_m}{2\pi fs} \right) \quad (44)$$

onde  $c = 2.997925 \times 10^8$  [m/s],  $f$  é a frequência de operação do ULA e  $s$  é o espaçamento entre os  $K$  dipolos do ULA.

**TLS-ESPRIT:**

A partir das submatrizes  $\mathbf{U}_x$  e  $\mathbf{U}_y$  dadas por (40) e (41), formar a matriz  $\mathbf{V}_s[2M \times 2M]$  dada por:

$$\mathbf{V}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_x^H \\ \mathbf{U}_y^H \end{bmatrix} [\mathbf{U}_x \quad \mathbf{U}_y] \quad (45)$$

Determinar a matriz  $\mathbf{V}_v[2M \times 2M]$  cujas colunas são os  $2M$  autovetores de  $\mathbf{V}_s$ :

$$\mathbf{V}_v = \begin{bmatrix} Vv_{00} & Vv_{01} & \cdots & Vv_{0(2M-1)} \\ Vv_{10} & Vv_{11} & \cdots & Vv_{1(2M-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Vv_{(2M-1)0} & Vv_{(2M-1)1} & \cdots & Vv_{(2M-1)(2M-1)} \end{bmatrix} = [Vv_0 \quad Vv_1 \quad \cdots \quad Vv_{(2M-1)}] = \text{eigenvec}(\mathbf{V}_v) \quad (46)$$

A partir de  $\mathbf{Vv}$ , formar as submatrizes  $\mathbf{V12}[M \times M]$  e  $\mathbf{V22}[M \times M]$  através de:

$$\mathbf{V12} = \text{submatrix} \left( \mathbf{Vv}, 0, \frac{\text{rows}(\mathbf{Vv})}{2} - 1, \frac{\text{cols}(\mathbf{Vv})}{2}, \text{cols}(\mathbf{Vv}) - 1 \right) \quad (47)$$

$$\mathbf{V22} = \text{submatrix} \left( \mathbf{Vv}, \frac{\text{rows}(\mathbf{Vv})}{2}, \text{rows}(\mathbf{Vv}) - 1, \frac{\text{cols}(\mathbf{Vv})}{2}, \text{cols}(\mathbf{Vv}) - 1 \right) \quad (48)$$

Formar a matriz  $\mathbf{\Psi}[M \times M]$  dada por:

$$\mathbf{\Psi} = -\mathbf{V12} \mathbf{V22}^{-1} \quad (49)$$

Determinar os  $M$  autovalores de valor complexo da matriz  $\mathbf{\Psi}$ :

$$\begin{bmatrix} \lambda\psi_0 \\ \lambda\psi_1 \\ \vdots \\ \lambda\psi_{M-1} \end{bmatrix} = \text{eigenvals}(\mathbf{\Psi}) \quad (50)$$

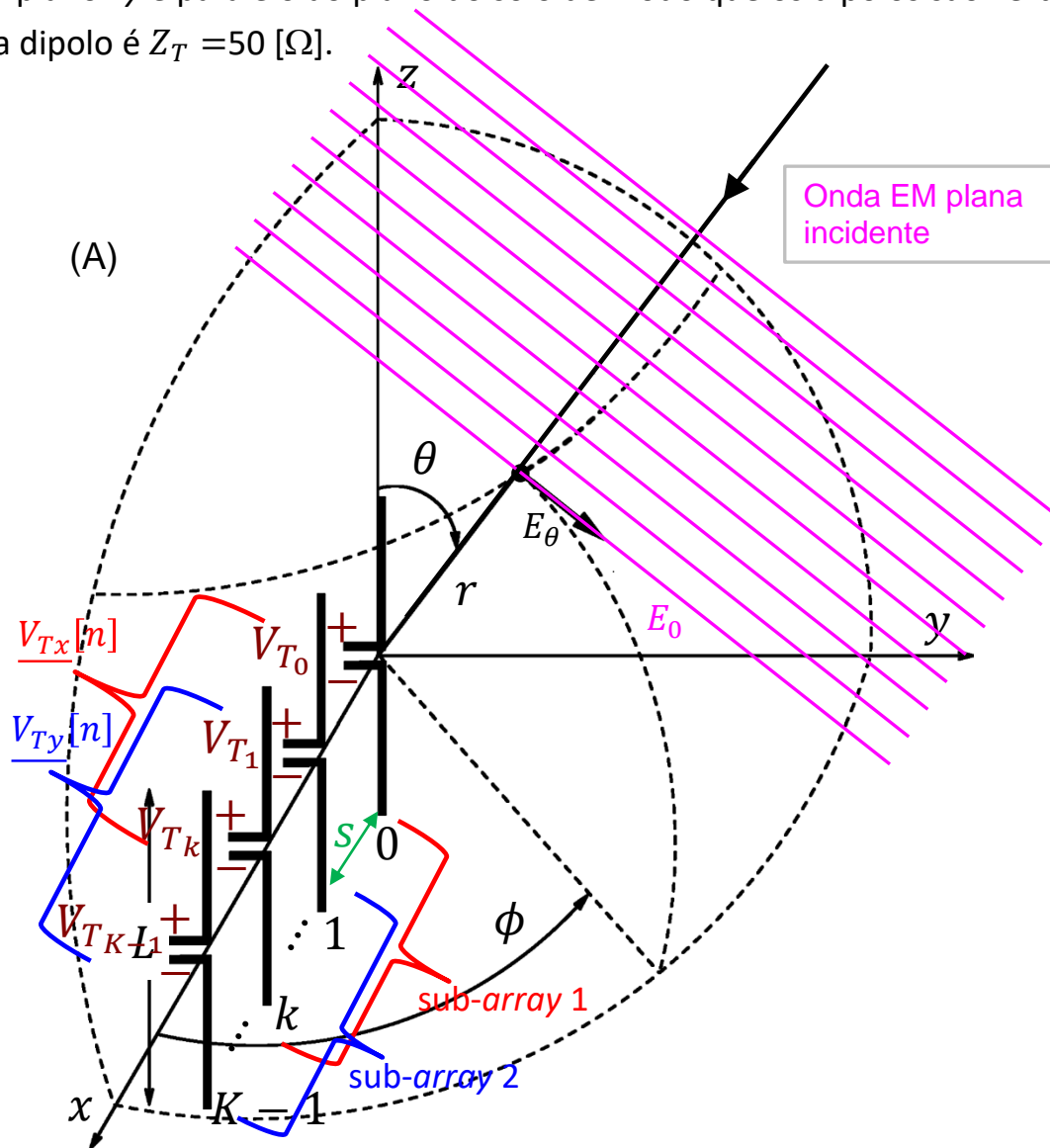
Determinar os  $M$  DOAs  $\phi_m$ , com  $m = 0, 1 \dots M - 1$ , através de:

$$\phi_m = \text{acos} \left( c \frac{\angle \lambda\psi_m}{2\pi f s} \right) \quad (51)$$

onde  $c = 2.997925 \times 10^8$  [m/s],  $f$  é a frequência de operação do ULA e  $s$  é o espaçamento entre os  $K$  dipolos do ULA.

## ESPRIT - Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques

**Exemplo 3:** Consideremos o *phased-array* do tipo *Uniform Linear Array* (ULA) mostrado em (A), operando em  $f_0 = 850\text{MHz}$  e constituído por 6 dipolos cilíndricos de tamanho  $L = 0.5\lambda$  e de raio  $a=5\text{mm}$ , separados entre si de  $s=0.5\lambda$ , sendo  $\lambda$  o comprimento de onda em  $f_0$ . O plano  $xy$  é paralelo ao plano do solo de modo que os dipolos são verticalmente polarizados. A impedância de carga de cada dipolo é  $Z_T = 50 [\Omega]$ .





## ESPRIT - Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques

Um conjunto de ondas EM originadas em transmissores localizados em coordenadas distintas incidem no ULA com amplitudes Mag relativas e DOAs  $(\theta, \phi)$  conforme tabela em (A). Os transmissores utilizam modulação 16-QAM com um alfabeto da modulação dado pelo mapa IQSymbolMap em (B), sendo cada um dos 16 símbolos IQ em IQSymbolMap mapeado em uma palavra de 4 bits (ver [http://www.fccdecastro.com.br/pdf/T2\\_Aula10&11\\_22042020.pdf](http://www.fccdecastro.com.br/pdf/T2_Aula10&11_22042020.pdf)).

(A)	Mag:	DOA $\theta$ :	DOA $\phi$ :
	1.0	80°	150°
	0.7	85°	70°
	0.5	90°	20°

$$(B) \quad \text{IQSymbolMap} = \begin{pmatrix} -3 + 3i & -1 + 3i & 1 + 3i & 3 + 3i \\ -3 + i & -1 + i & 1 + i & 3 + i \\ -3 - i & -1 - i & 1 - i & 3 - i \\ -3 - 3i & -1 - 3i & 1 - 3i & 3 - 3i \end{pmatrix}$$

Para efeito de eficiência espectral, como é usual em qualquer sistema digital, os transmissores adotam um *scrambler* na entrada do modulador (*energy dispersal scrambler* - ver <https://en.wikipedia.org/wiki/Scrambler>) que torna aleatória e uniforme a distribuição dos símbolos IQ na sequência de símbolos IQ extraídos do mapa IQSymbolMap em função da sequência de palavras binárias de 4 bits na entrada do *scrambler*, sequência que corresponde à informação digital a ser transmitida pelo transmissor.

As tensões nos terminais dos 6 dipolos resultantes da incidência das ondas EM são digitalizadas e convertidas para banda-

base pelos respectivos receptores (RX) do *array* de dipolos e são armazenadas no vetor  $\underline{V}_T[n] = \begin{bmatrix} V_{T_0}[n] \\ V_{T_1}[n] \\ \vdots \\ V_{T_5}[n] \end{bmatrix}$ .

Uma sequência de  $NSmpl = 2000$  vetores  $\underline{V}_T[n]$ ,  $n = 0, 1 \dots NSmpl - 1$ , é processada pelo algoritmo ESPRIT para efeito de determinar o DOA  $\phi$  das ondas EM incidentes.

**Pede-se:** (a) Determine as sequências de vetores  $\underline{V_{Tx}}[n]$  e  $\underline{V_{Ty}}[n]$  geradas respectivamente nos terminais dos dipolos do **sub-array 1** e nos terminais dos dipolos do **sub-array 2**, conforme mostrado em (A) no slide 56. (b) Forme a sequência  $\underline{V_{Tz}}[n] = \begin{bmatrix} \underline{V_{Tx}}[n] \\ \underline{V_{Ty}}[n] \end{bmatrix}$ , determine a matriz de covariância  $\mathbf{CovZ}$  da sequência  $\underline{V_{Tz}}[n]$ , efetue a sua *eigen*-decomposição e determine os autovetores de sinal. (c) Utilizando o algoritmo **LS-ESPRIT** determine os DOAs  $(\theta_m, \phi_m)$  das  $M$  ondas EM que incidem no *array*, com  $m = 0, 1 \dots M - 1$ . (d) Utilizando o algoritmo **TLS-ESPRIT** determine os DOAs  $(\theta_m, \phi_m)$  das  $M$  ondas EM que incidem no *array* e compare com os resultados obtidos em (c).

O *script* do software MathCad utilizado na solução deste exemplo está disponível em <http://www.fccdecastro.com.br/ZIP/E3S56.zip>.

# ESPRIT - Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques

Solução:

$f := 850 \text{ MHz}$  → frequência de operação       $\lambda := \frac{c}{f}$      $\lambda = 0.353 \text{ m}$  → comprimento de onda da onda eletromagnética

$Z_T := 50 \cdot \Omega$  → impedância de carga de cada um dos 6 dipolos do array

$\text{SNR} := 15 \text{ [dB]}$  → Relação sinal-ruído no canal de transmissão

$\text{NSmpl} := 2000$  → Número de amostras em banda-base (símbolos IQ) recebidas por dipolo

DOAs ( $\theta, \phi$ ) e magnitude relativa Mag das ondas EM planas que incidem no ULA moduladas em 16-QAM:

$$\text{DOA} := \begin{pmatrix} 80^\circ & 150^\circ \\ 85^\circ & 70^\circ \\ 90^\circ & 20^\circ \end{pmatrix} \quad \text{Mag} := \begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.7 \\ 0.5 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \text{amplitudes das ondas EM são distintas em razão das condições de propagação distintas no canal de transmissão}$$

$M := \text{rows}(\text{DOA}) = 3$  → Número de ondas EM planas que incidem no ULA.

$L := 0.5 \cdot \lambda$  → tamanho dos dipolos

$R := 5 \cdot \text{mm}$  → raio do dipolo cilíndrico

$s := 0.5 \cdot \lambda$  → espaçamento entre dipolos

$$\beta := \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} = 17.815 \frac{\text{rad}}{\text{m}} \quad \rightarrow \text{constante de propagação da onda EM}$$

$$\underset{\text{mm}}{C} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ s & 0 & 0 \\ 2 \cdot s & 0 & 0 \\ 3 \cdot s & 0 & 0 \\ 4 \cdot s & 0 & 0 \\ 5 \cdot s & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.176 & 0 & 0 \\ 0.353 & 0 & 0 \\ 0.529 & 0 & 0 \\ 0.705 & 0 & 0 \\ 0.882 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ m} \quad \rightarrow \text{coordenadas do centro de cada um dos 6 dipolos do ULA .}$$

$K := \text{rows}(C) = 6$  → número de dipolos do array

(a) Matriz impedância entre os dipolos do array.

$$aa := 0..K - 1 \quad bb := 0..K - 1 \quad D_{aa,bb} := \sqrt{\left[ (C^{(0)})_{aa} - (C^{(0)})_{bb} \right]^2 + \left[ (C^{(1)})_{aa} - (C^{(1)})_{bb} \right]^2 + \left[ (C^{(2)})_{aa} - (C^{(2)})_{bb} \right]^2}$$

$$Z_{aa,bb} := \text{if} \left( aa = bb, Zin\_Schelkunoff \left( \frac{R}{mm}, \frac{\lambda}{m}, \frac{L}{m} \right), ZMutual\_Schelkunoff \left( \frac{L}{m}, \frac{L}{m}, \frac{R}{mm}, \frac{R}{mm}, \frac{D_{aa,bb}}{m}, \frac{\lambda}{m} \right) \right)$$

$$Z = \begin{pmatrix} 78.517 + 45.679i & -14.447 - 34.501i & 4.624 + 20.452i & -2.176 - 14.184i & 1.25 + 10.795i & -0.808 - 8.696i \\ -14.447 - 34.501i & 78.517 + 45.679i & -14.447 - 34.501i & 4.624 + 20.452i & -2.176 - 14.184i & 1.25 + 10.795i \\ 4.624 + 20.452i & -14.447 - 34.501i & 78.517 + 45.679i & -14.447 - 34.501i & 4.624 + 20.452i & -2.176 - 14.184i \\ -2.176 - 14.184i & 4.624 + 20.452i & -14.447 - 34.501i & 78.517 + 45.679i & -14.447 - 34.501i & 4.624 + 20.452i \\ 1.25 + 10.795i & -2.176 - 14.184i & 4.624 + 20.452i & -14.447 - 34.501i & 78.517 + 45.679i & -14.447 - 34.501i \\ -0.808 - 8.696i & 1.25 + 10.795i & -2.176 - 14.184i & 4.624 + 20.452i & -14.447 - 34.501i & 78.517 + 45.679i \end{pmatrix} \cdot \Omega$$

Steering vector  $Sv(\theta, \phi)$  - equação (16) do slide 12 do Cap II.6:

$$Sv(\theta, \phi) := \frac{\lambda}{\pi \cdot \sin\left(\frac{\beta \cdot L}{2}\right)} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\beta \cdot L}{2} \cdot \cos(\theta)\right) - \cos\left(\frac{\beta \cdot L}{2}\right)}{\sin(\theta)} \cdot \begin{bmatrix} e^{j \cdot [\beta \cdot (\sin(\theta) \cdot \cos(\phi) \cdot C_{0,0} + \sin(\theta) \cdot \sin(\phi) \cdot C_{0,1} + \cos(\theta) \cdot C_{0,2})]} \\ e^{j \cdot [\beta \cdot (\sin(\theta) \cdot \cos(\phi) \cdot C_{1,0} + \sin(\theta) \cdot \sin(\phi) \cdot C_{1,1} + \cos(\theta) \cdot C_{1,2})]} \\ e^{j \cdot [\beta \cdot (\sin(\theta) \cdot \cos(\phi) \cdot C_{2,0} + \sin(\theta) \cdot \sin(\phi) \cdot C_{2,1} + \cos(\theta) \cdot C_{2,2})]} \\ e^{j \cdot [\beta \cdot (\sin(\theta) \cdot \cos(\phi) \cdot C_{3,0} + \sin(\theta) \cdot \sin(\phi) \cdot C_{3,1} + \cos(\theta) \cdot C_{3,2})]} \\ e^{j \cdot [\beta \cdot (\sin(\theta) \cdot \cos(\phi) \cdot C_{4,0} + \sin(\theta) \cdot \sin(\phi) \cdot C_{4,1} + \cos(\theta) \cdot C_{4,2})]} \\ e^{j \cdot [\beta \cdot (\sin(\theta) \cdot \cos(\phi) \cdot C_{5,0} + \sin(\theta) \cdot \sin(\phi) \cdot C_{5,1} + \cos(\theta) \cdot C_{5,2})]} \end{bmatrix}$$

Matriz do acoplamento Cpl - equação (15) do slide 12 do Cap II.6:

$Z_A := Z_{0,0} \rightarrow$  impedância própria dos  $K = 6$  dipolos do ULA

$$Cpl := (Z_T + Z_A) \cdot (Z + Z_T \cdot \text{identity}(K))^{-1}$$

$$Cpl = \begin{pmatrix} 0.993 + 0.089i & 0.161 + 0.18i & -0.073 - 0.048i & 0.045 + 0.023i & -0.032 - 0.015i & 0.026 + 0.016i \\ 0.161 + 0.18i & 0.991 + 0.147i & 0.157 + 0.161i & -0.07 - 0.038i & 0.043 + 0.017i & -0.032 - 0.015i \\ -0.073 - 0.048i & 0.157 + 0.161i & 0.993 + 0.153i & 0.155 + 0.158i & -0.07 - 0.038i & 0.045 + 0.023i \\ 0.045 + 0.023i & -0.07 - 0.038i & 0.155 + 0.158i & 0.993 + 0.153i & 0.157 + 0.161i & -0.073 - 0.048i \\ -0.032 - 0.015i & 0.043 + 0.017i & -0.07 - 0.038i & 0.157 + 0.161i & 0.991 + 0.147i & 0.161 + 0.18i \\ 0.026 + 0.016i & -0.032 - 0.015i & 0.045 + 0.023i & -0.073 - 0.048i & 0.161 + 0.18i & 0.993 + 0.089i \end{pmatrix}$$

Constelação 16-QAM do sinal transportado por cada onda EM:

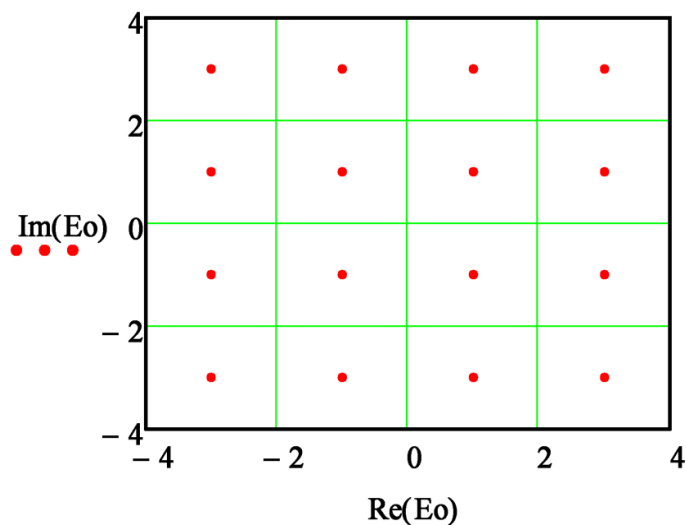
$$\underline{A} := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad ii := 0..3 \quad jj := 0..3 \quad IQSymbolMap_{ii,jj} := A_{3-jj} + j \cdot A_{ii}$$

$$IQSymbolMap = \begin{pmatrix} -3 + 3i & -1 + 3i & 1 + 3i & 3 + 3i \\ -3 + i & -1 + i & 1 + i & 3 + i \\ -3 - i & -1 - i & 1 - i & 3 - i \\ -3 - 3i & -1 - 3i & 1 - 3i & 3 - 3i \end{pmatrix}$$

# ESPRIT - Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques

Geração da sequência de amostras em banda-base transportadas pelas  $M = 3$  ondas EM planas que incidem no ULA moduladas pela sequência de  $NSmpl = 2000$  símbolos IQ 16-QAM:

$$n := 0 .. NSmpl - 1 \quad \_m := 0 .. M - 1 \quad Eo_{\_m,n} := IQSymbolMap_{\text{round}(\text{rnd}(3)), \text{round}(\text{rnd}(3))} \cdot \frac{V}{m}$$



→ constelação de símbolos IQ 16-QAM gerada nos  $M = 3$  TXs que dão origem às respectivas ondas EM moduladas pelas respectivas sequências de símbolos IQ.

Amplitude de cada onda EM:  $Eo_{\_m,n} := Mag_{\_m} \cdot Eo_{\_m,n}$

Sequência de amostras em banda-base transportadas por cada uma das  $M = 3$  ondas EM planas que incidem no ULA:

	0	1	2	3	4	5	
$Eo =$	$-1+i$	$3-3i$	$-1-i$	$-1+i$	$-1+i$	$1-i$	$\cdot \frac{V}{m}$
1	$-2.1+0.7i$	$0.7-0.7i$	$-2.1+0.7i$	$0.7-0.7i$	$0.7-0.7i$	$2.1-0.7i$	
2	$1.5+0.5i$	$0.5-0.5i$	$0.5-0.5i$	$-0.5+0.5i$	$-0.5+0.5i$	...	

$$SvM^{\langle m \rangle} := Sv(DOA_{-m,0}, DOA_{-m,1}) \quad \rightarrow \text{matriz de steering vectors - equação (18) do slide 13 do Cap II.6}$$

$$VT := \frac{ZT}{ZT + ZA} \cdot Cpl \cdot SvM \cdot Eo \quad \rightarrow VT \text{ é o vetor em que cada componente é a sequência de amostras da tensão digitalizada em banda-base nos terminais do respectivo dipolo - equação (17) do slide 13 do Cap II.6.}$$

Adicionando às tensões do vetor VT o ruído gaussiano do canal de modo que a relação sina-ruído seja SNR = 15 [dB]:

$$\underline{VT} := AWGN(VT, SNR) \quad \rightarrow \text{equação (20) do slide 13 do Cap II.6}$$

Compensando o acoplamento mútuo entre os dipolos no processamento digital do RX:

$$VT_{-} := Cpl^{-1} \cdot VT \quad VT := VT_{-} \quad \rightarrow \text{equação (32) do slide 51 do Cap II.7}$$

Determinando as sequências de vetores  $VTx^{\langle n \rangle}$  e  $VTy^{\langle n \rangle}$  respectivas ao sub-array 1 e ao sub-array 2:

$$VTx := submatrix(VT, 0, rows(VT) - 2, 0, cols(VT) - 1) \quad \rightarrow \text{equação (33) do slide 51 do Cap II.7}$$

	0	1	2	
0	-31.895+90.884i	105.723-259.786i	-132.252+1.776i	·mV
1	-78.371-20.116i	-146.311+147.776i	-17.164+28.672i	
2	-19.265-119.697i	218.349-50.058i	-44.008-155.886i	
3	85.713+11.374i	-192.581+29.796i	55.661+17.014i	
4	63.505-38.114i	103.082+69.376i	...	

## ESPRIT - Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques

$VTy := \text{submatrix}(VT, 1, \text{rows}(VT) - 1, 0, \text{cols}(VT) - 1) \rightarrow$  equação (34) do slide 51 do Cap II.7

$VTy =$

	0	1	2
0	-78.371-20.116i	-146.311+147.776i	-17.164+28.672i
1	-19.265-119.697i	218.349-50.058i	-44.008-155.886i
2	85.713+11.374i	-192.581+29.796i	55.661+17.014i
3	63.505-38.114i	103.082+69.376i	135.843-27.572i
4	17.399+197.295i	-68.036-170.907i	...

·mV

**(b)** Formando a sequência de vetores  $VTz^{(n)}$ :

$VTz := \text{stack}(VTx, VTy) \rightarrow$  equação (35) do slide 51 do Cap II.7

$VTz =$

	0	1	2
0	-0.032+0.091i	0.106-0.26i	-0.132+1.776i·10 <sup>-3</sup>
1	-0.078-0.02i	-0.146+0.148i	-0.017+0.029i
2	-0.019-0.12i	0.218-0.05i	-0.044-0.156i
3	0.086+0.011i	-0.193+0.03i	0.056+0.017i
4	0.064-0.038i	0.103+0.069i	0.136-0.028i
5	-0.078-0.02i	-0.146+0.148i	-0.017+0.029i
6	-0.019-0.12i	0.218-0.05i	-0.044-0.156i
7	0.086+0.011i	-0.193+0.03i	0.056+0.017i
8	0.064-0.038i	0.103+0.069i	0.136-0.028i
9	0.017+0.197i	-0.068-0.171i	...

V



Construindo a matriz de covariância  $\text{CovZ}$  da sequência de vetores  $\text{VTz}^{\langle n \rangle}$  :

$$\text{Vmz} := \frac{1}{\text{NSmpl}} \cdot \sum_{n=0}^{\text{NSmpl}-1} \text{VTz}^{\langle n \rangle} =$$

	0
0	0.778-1.331i
1	0.636+1.925i
2	-0.955-0.626i
3	-1.258+1.737i
4	-0.25-2.893i
5	0.636+1.925i
6	-0.955-0.626i
7	-1.258+1.737i
8	-0.25-2.893i
9	-0.084+0.242i

·mV → **Vetor média  $\text{Vmz}$  da sequência de vetores  $\text{VTz}^{\langle n \rangle}$  - equação (36) do slide 52 do Cap II.7**

Extraindo o vetor média  $\text{Vmz}$  da sequência de vetores  $\text{VTz}^{\langle n \rangle}$  :

$$\text{VTz}^{\langle n \rangle} := \text{VTz}^{\langle n \rangle} - \text{Vmz}$$

Matriz de covariância  $\text{CovZ}$  da sequência de vetores  $\text{VTz}^{\langle n \rangle}$  :

$$\text{CovZ} := \frac{1}{\text{NSmpl}} \cdot \sum_{n=0}^{\text{NSmpl}-1} \left[ (\text{VTz}^{\langle n \rangle}) \cdot (\overline{\text{VTz}^{\langle n \rangle}})^T \right] \rightarrow \text{equação (37) do slide 52 do Cap II.7}$$

## ESPRIT - Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques

$$10^3 \cdot \text{CovZ} = \begin{pmatrix} 21.33 & -10.8 - 0.56i & 6.78 - 13.32i & -10.82 + 10.44i & -3.43 - 3.83i & -10.8 - 0.56i & 6.78 - 13.32i & -10.82 + 10.44i & -3.43 - 3.83i & 9.61 + 10.92i \\ -10.8 + 0.56i & 20.8 & -10.58 - 0.35i & 6.63 - 13.06i & -10.38 + 9.99i & 20.8 & -10.58 - 0.35i & 6.63 - 13.06i & -10.38 + 9.99i & -3.53 - 3.72i \\ 6.78 + 13.32i & -10.58 + 0.35i & 21.22 & -11.1 - 0.91i & 6.91 - 12.95i & -10.58 + 0.35i & 21.22 & -11.1 - 0.91i & 6.91 - 12.95i & -10.89 + 10.24i \\ -10.82 - 10.44i & 6.63 + 13.06i & -11.1 + 0.91i & 21.59 & -10.71 - 0.33i & 6.63 + 13.06i & -11.1 + 0.91i & 21.59 & -10.71 - 0.33i & 7.06 - 13.59i \\ -3.43 + 3.83i & -10.38 - 9.99i & 6.91 + 12.95i & -10.71 + 0.33i & 20.93 & -10.38 - 9.99i & 6.91 + 12.95i & -10.71 + 0.33i & 20.93 & -10.96 - 0.43i \\ -10.8 + 0.56i & 20.8 & -10.58 - 0.35i & 6.63 - 13.06i & -10.38 + 9.99i & 20.8 & -10.58 - 0.35i & 6.63 - 13.06i & -10.38 + 9.99i & -3.53 - 3.72i \\ 6.78 + 13.32i & -10.58 + 0.35i & 21.22 & -11.1 - 0.91i & 6.91 - 12.95i & -10.58 + 0.35i & 21.22 & -11.1 - 0.91i & 6.91 - 12.95i & -10.89 + 10.24i \\ -10.82 - 10.44i & 6.63 + 13.06i & -11.1 + 0.91i & 21.59 & -10.71 - 0.33i & 6.63 + 13.06i & -11.1 + 0.91i & 21.59 & -10.71 - 0.33i & 7.06 - 13.59i \\ -3.43 + 3.83i & -10.38 - 9.99i & 6.91 + 12.95i & -10.71 + 0.33i & 20.93 & -10.38 - 9.99i & 6.91 + 12.95i & -10.71 + 0.33i & 20.93 & -10.96 - 0.43i \\ 9.61 - 10.92i & -3.53 + 3.72i & -10.89 - 10.24i & 7.06 + 13.59i & -10.96 + 0.43i & -3.53 + 3.72i & -10.89 - 10.24i & 7.06 + 13.59i & -10.96 + 0.43i & 21.62 \end{pmatrix} \cdot V^2$$

Autovalores  $\lambda_{z_k}$  da matriz CovZ:

$k := 0 \dots \text{rows}(\text{CovZ}) - 1$

$ka := 0 \dots \text{cols}(\text{CovZ}) - 1$

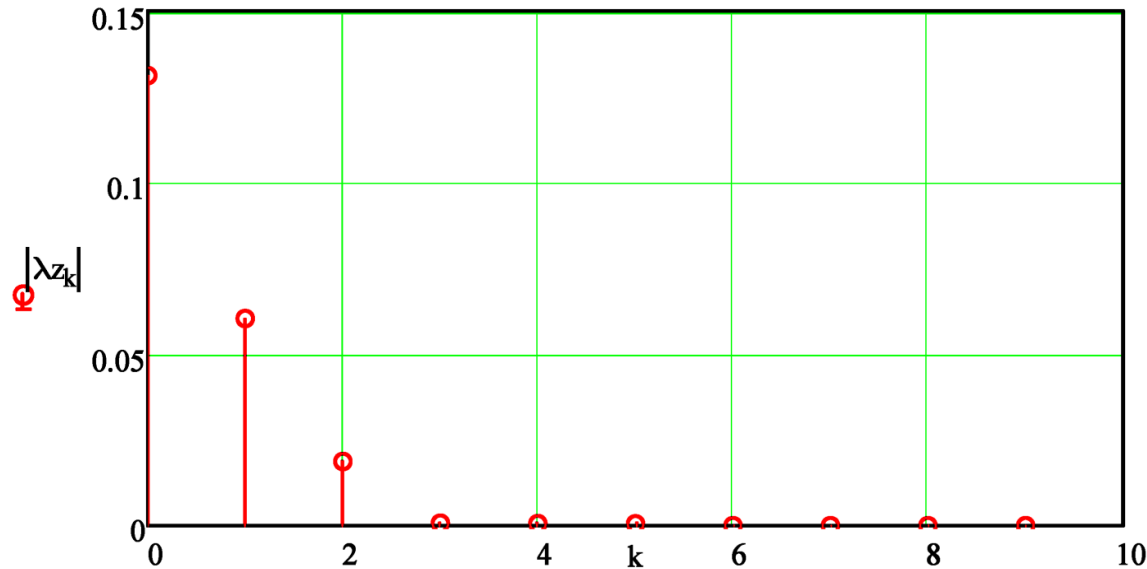
$\lambda_{z_k} := \text{eigenvals}(\text{CovZ})_{k_k} \rightarrow$

$10^3 \cdot \lambda_{z_k} =$

	0
0	131.148
1	60.306
2	18.724
3	0.721
4	0.582
5	0.538
6	$-3.14 \cdot 10^{-15}$
7	$-1.274i \cdot 10^{-15}$
8	0
9	0

$\cdot V^2 \rightarrow$  equação (38) do slide 52 do Cap II.7

Gráfico do espectro de autovalores  $\lambda_{z_k}$ . Note os primeiros  $N_{\text{signalEigV}} := 3$  valores de  $\lambda_{z_k}$  significativos, o que indica haver  $N_{\text{signalEigV}} = 3$  *signal eigenvectors* e portanto  $N_{\text{signalEigV}} = 3$  sinais incidentes (ajustar manualmente o valor de  $N_{\text{signalEigV}}$  no início do parágrafo acima a partir da inspeção visual do gráfico do espectro de autovalores  $\lambda_k$  abaixo - ver discussão nos slides 15 e 16 do Cap II.6).



Autovetores  $UZ^{(k)}$  da matriz CovZ (equação (39) do slide 52 do Cap II.7):

$$UZ_{k,ka} := \text{eigenvec}(\text{CovZ}, \lambda_{z_{ka}})_k \rightarrow$$

$$UZ = \begin{pmatrix} 0.113 - 0.26i & -0.327 - 0.057i & 0.327 + 0.31i & -0.227 - 0.217i & 0.104 - 0.533i & 0.2 + 0.416i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.227 + 0.213i & -0.053 - 0.317i & -0.132 - 0.274i & 0.067 + 0.204i & 0.213 - 0.244i & 0.22 + 0.089i & 0.018 + 1.672i \times 10^{-7} & 0.018 - 2.558i \times 10^{-7} & 0.018 - 2.794i \times 10^{-9} & 0.018 + 8.97i \times 10^{-10} \\ 0.31 - 0.118i & 0.226 - 0.202i & 0.187 + 0.149i & 0.294 + 0.246i & -0.039 + 0.059i & 0.296 - 0.034i & -0.119 - 1.058i \times 10^{-6} & -0.119 + 1.641i \times 10^{-6} & -0.119 + 5.783i \times 10^{-8} & -0.119 - 2.537i \times 10^{-8} \\ -0.336 + 5.702i \times 10^{-3} & 0.284 + 0.104i & -0.14 + 0.193i & 0.233 - 0.319i & -0.084 - 0.032i & 0.243 + 0.123i & 0.044 + 6.275i \times 10^{-7} & 0.044 - 6.105i \times 10^{-7} & 0.044 - 1.313i \times 10^{-8} & 0.044 - 2.073i \times 10^{-7} \\ 0.294 + 0.11i & 0.08 + 0.309i & 0.04 - 0.302i & 0.015 - 0.239i & 0.307 - 6.234i \times 10^{-3} & 0.233 - 0.026i & 0.695 + 6.634i \times 10^{-6} & 0.695 - 1.037i \times 10^{-5} & 0.695 + 2.073i \times 10^{-7} & 0.695 - 2.073i \times 10^{-7} \\ -0.227 + 0.213i & -0.053 - 0.317i & -0.132 - 0.274i & 0.067 + 0.204i & 0.213 - 0.244i & 0.22 + 0.089i & -0.018 - 1.672i \times 10^{-7} & -0.018 + 2.558i \times 10^{-7} & -0.018 + 2.794i \times 10^{-9} & -0.018 - 8.97i \times 10^{-10} \\ 0.31 - 0.118i & 0.226 - 0.202i & 0.187 + 0.149i & 0.294 + 0.246i & -0.039 + 0.059i & 0.296 - 0.034i & 0.119 + 1.058i \times 10^{-6} & 0.119 - 1.641i \times 10^{-6} & 0.119 - 5.783i \times 10^{-8} & 0.119 + 2.537i \times 10^{-8} \\ -0.336 + 5.702i \times 10^{-3} & 0.284 + 0.104i & -0.14 + 0.193i & 0.233 - 0.319i & -0.084 - 0.032i & 0.243 + 0.123i & -0.044 - 6.275i \times 10^{-7} & -0.044 + 6.105i \times 10^{-7} & -0.044 + 1.313i \times 10^{-8} & -0.044 + 2.073i \times 10^{-7} \\ 0.294 + 0.11i & 0.08 + 0.309i & 0.04 - 0.302i & 0.015 - 0.239i & 0.307 - 6.234i \times 10^{-3} & 0.233 - 0.026i & -0.695 - 6.634i \times 10^{-6} & -0.695 + 1.037i \times 10^{-5} & -0.695 - 2.073i \times 10^{-7} & -0.695 + 2.073i \times 10^{-7} \\ -0.204 - 0.2i & -0.282 + 0.184i & -0.212 + 0.391i & -0.186 + 0.231i & 0.452 + 0.275i & 0.375 - 0.313i & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtendo os *signal eigenvectors*  $E_s$  (autovetores com autovalor associado de valor significativo):

$endcol := N_{signalEigV} - 1 = 2$  → índice das colunas de  $UZ$  onde terminam os *signal eigenvectors*

$$E_s := \text{submatrix}(UZ, 0, \text{rows}(UZ) - 1, 0, endcol) = \begin{pmatrix} 0.113 - 0.26i & -0.327 - 0.057i & 0.327 + 0.31i \\ -0.227 + 0.213i & -0.053 - 0.317i & -0.132 - 0.274i \\ 0.31 - 0.118i & 0.226 - 0.202i & 0.187 + 0.149i \\ -0.336 + 5.702i \times 10^{-3} & 0.284 + 0.104i & -0.14 + 0.193i \\ 0.294 + 0.11i & 0.08 + 0.309i & 0.04 - 0.302i \\ -0.227 + 0.213i & -0.053 - 0.317i & -0.132 - 0.274i \\ 0.31 - 0.118i & 0.226 - 0.202i & 0.187 + 0.149i \\ -0.336 + 5.702i \times 10^{-3} & 0.284 + 0.104i & -0.14 + 0.193i \\ 0.294 + 0.11i & 0.08 + 0.309i & 0.04 - 0.302i \\ -0.204 - 0.2i & -0.282 + 0.184i & -0.212 + 0.391i \end{pmatrix}$$

(c) LS-ESPRIT:

$$U_x := \text{submatrix}\left(E_s, 0, \text{floor}\left(\frac{\text{rows}(E_s)}{2}\right) - 1, 0, \text{cols}(E_s) - 1\right) = \begin{pmatrix} 0.113 - 0.26i & -0.327 - 0.057i & 0.327 + 0.31i \\ -0.227 + 0.213i & -0.053 - 0.317i & -0.132 - 0.274i \\ 0.31 - 0.118i & 0.226 - 0.202i & 0.187 + 0.149i \\ -0.336 + 5.702i \times 10^{-3} & 0.284 + 0.104i & -0.14 + 0.193i \\ 0.294 + 0.11i & 0.08 + 0.309i & 0.04 - 0.302i \end{pmatrix}$$

(equação (40) do slide 53 do Cap II.7)

$$U_y := \text{submatrix}\left(E_s, \text{floor}\left(\frac{\text{rows}(E_s)}{2}\right), \text{rows}(E_s) - 1, 0, \text{cols}(E_s) - 1\right) = \begin{pmatrix} -0.227 + 0.213i & -0.053 - 0.317i & -0.132 - 0.274i \\ 0.31 - 0.118i & 0.226 - 0.202i & 0.187 + 0.149i \\ -0.336 + 5.702i \times 10^{-3} & 0.284 + 0.104i & -0.14 + 0.193i \\ 0.294 + 0.11i & 0.08 + 0.309i & 0.04 - 0.302i \\ -0.204 - 0.2i & -0.282 + 0.184i & -0.212 + 0.391i \end{pmatrix}$$

(equação (41) do slide 53 do Cap II.7)

$$\psi := \left[ (\overline{U_x})^T \cdot U_x \right]^{-1} \cdot \left[ (\overline{U_x})^T \cdot U_y \right] = \begin{pmatrix} -0.906 - 0.372i & -0.065 + 0.015i & -0.097 + 0.534i \\ 4.54 \times 10^{-3} + 7.872i \times 10^{-3} & 0.45 + 0.864i & -0.219 + 0.356i \\ -0.01 + 0.079i & 0.041 - 0.114i & -0.941 + 0.127i \end{pmatrix} \rightarrow \text{equação (42) do slide 54 do Cap II.7}$$

$$\psi := \text{if}(\text{cols}(\psi) = 0, \text{identity}(1) \cdot \psi, \psi) \quad m := 0 \dots \text{rows}(\psi) - 1$$

$$\lambda_{\psi_m} := \text{eigenvals}(\psi)_m \rightarrow \lambda_{\psi} = \begin{pmatrix} -0.893 - 0.447i \\ -0.983 + 0.191i \\ 0.479 + 0.877i \end{pmatrix} \rightarrow \text{equação (43) do slide 54 do Cap II.7}$$

$$\text{LS\_DOA}\phi_m := \text{acos}\left( c \cdot \frac{\arg(\lambda_{\psi_m})}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot s} \right) \rightarrow \text{LS\_DOA}\phi = \begin{pmatrix} 148.453 \\ 20.104 \\ 70.066 \end{pmatrix} \cdot \Leftrightarrow \text{DOA} = \begin{pmatrix} 80 & 150 \\ 85 & 70 \\ 90 & 20 \end{pmatrix} \cdot ^\circ$$

(equação (44) do slide 54 do Cap II.7)

(d) TLS-ESPRIT:

$$V_s := \text{stack}\left[\left(\overline{U_x}\right)^T, \left(\overline{U_y}\right)^T\right] \cdot \text{augment}(U_x, U_y) \rightarrow \text{equação (45) do slide 54 do Cap II.7}$$

$$10^3 \cdot V_s = \begin{pmatrix} 499.241 & -21.45 + 1.376i & -4.276 + 121.105i & -462.076 - 187.226i & -29.805 - 5.101i & -55.768 + 144.214i \\ -21.45 - 1.376i & 498.352 & -128.181 - 5.926i & 22.98 + 3.126i & 219.692 + 444.922i & 14.914 + 155.159i \\ -4.276 - 121.105i & -128.181 + 5.926i & 502.59 & -46.928 + 149.87i & -40.307 - 157.499i & -381.955 + 26.476i \\ -462.076 + 187.226i & 22.98 - 3.126i & -46.928 - 149.87i & 500.759 & 21.45 - 1.376i & 4.276 - 121.105i \\ -29.805 + 5.101i & 219.692 - 444.922i & -40.307 + 157.499i & 21.45 + 1.376i & 501.648 & 128.181 + 5.926i \\ -55.768 - 144.214i & 14.914 - 155.159i & -381.955 - 26.476i & 4.276 + 121.105i & 128.181 - 5.926i & 497.41 \end{pmatrix}$$

$$k := 0 \dots \text{rows}(V_s) - 1 \quad k_a := 0 \dots \text{rows}(V_s) - 1$$

$$\lambda V_{s_k} := \text{eigenvals}(V_s)_k \rightarrow \lambda V_s = \begin{pmatrix} 1.079 \\ 1.186 \\ 0.735 \\ 8.421 \times 10^{-5} \\ 0 \\ 1.501 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$



## ESPRIT - Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques

$V_{v_{k,ka}} := \text{eigenvec}(V_s, \lambda V_{s_{ka}})_k \rightarrow$  equação (46) do slide 54 do Cap II.7

$$V_v = \begin{pmatrix} -0.415 + 0.502i & -0.125 - 0.097i & -0.098 - 0.082i & 0.1 - 0.207i & 0.495 + 0.477i & 0.073 + 0.063i \\ -0.15 + 0.071i & 0.22 + 0.5i & 0.288 + 0.269i & 0.016 - 0.442i & -0.08 + 0.049i & -0.219 - 0.515i \\ 0.198 + 0.093i & -0.338 - 0.249i & 0.57 + 0.061i & 0.549 + 0.069i & 0.062 - 0.034i & -0.368 + 0.021i \\ 0.195 - 0.624i & 0.138 + 0.072i & 0.122 - 8.91i \times 10^{-3} & 2.628 \times 10^{-3} + 0.101i & 0.651 + 0.277i & 0.059 - 0.138i \\ 0.026 + 0.161i & 0.553 - 5.903i \times 10^{-3} & 0.383 - 0.054i & 0.31 - 0.012i & -0.012 - 0.109i & 0.614 + 0.182i \\ 0.193 + 0.098i & 0.377 + 0.165i & -0.531 - 0.231i & 0.571 + 0.111i & 0.02 + 0.015i & -0.321 - 0.081i \end{pmatrix}$$

$$V_{12} := \text{submatrix}\left(V_v, 0, \frac{\text{rows}(V_v)}{2} - 1, \frac{\text{cols}(V_v)}{2}, \text{cols}(V_v) - 1\right) = \begin{pmatrix} 0.1 - 0.207i & 0.495 + 0.477i & 0.073 + 0.063i \\ 0.016 - 0.442i & -0.08 + 0.049i & -0.219 - 0.515i \\ 0.549 + 0.069i & 0.062 - 0.034i & -0.368 + 0.021i \end{pmatrix}$$

(equação (47) do slide 55 do Cap II.7)

$$V_{22} := \text{submatrix}\left(V_v, \frac{\text{rows}(V_v)}{2}, \text{rows}(V_v) - 1, \frac{\text{cols}(V_v)}{2}, \text{cols}(V_v) - 1\right) = \begin{pmatrix} 0 + 0.101i & 0.651 + 0.277i & 0.059 - 0.138i \\ 0.31 - 0.012i & -0.012 - 0.109i & 0.614 + 0.182i \\ 0.571 + 0.111i & 0.02 + 0.015i & -0.321 - 0.081i \end{pmatrix}$$

(equação (48) do slide 55 do Cap II.7)

$$\underline{\psi} := -V_{12} \cdot V_{22}^{-1} = \begin{pmatrix} -0.906 - 0.372i & -0.065 + 0.015i & -0.097 + 0.534i \\ 4.532 \times 10^{-3} + 7.875i \times 10^{-3} & 0.45 + 0.865i & -0.219 + 0.356i \\ -0.01 + 0.079i & 0.041 - 0.114i & -0.941 + 0.127i \end{pmatrix} \rightarrow \text{equação (49) do slide 55 do Cap II.7}$$

$$\psi := \text{if}(\text{cols}(\psi) = 0, \text{identity}(1) \cdot \psi, \psi) \quad m := 0 \dots \text{rows}(\psi) - 1$$

$$\lambda\psi_m := \text{eigenvals}(\psi)_m \rightarrow \lambda\psi = \begin{pmatrix} -0.893 - 0.447i \\ -0.983 + 0.191i \\ 0.479 + 0.877i \end{pmatrix} \rightarrow \text{equação (50) do slide 55 do Cap II.7}$$

$$\text{TLS\_DOA}\phi_m := \text{acos}\left(c \cdot \frac{\arg(\lambda\psi_m)}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot s}\right) \rightarrow \text{TLS\_DOA}\phi = \begin{pmatrix} 148.453 \\ 20.105 \\ 70.065 \end{pmatrix} \cdot ^\circ \Leftrightarrow \text{DOA} = \begin{pmatrix} 80 & 150 \\ 85 & 70 \\ 90 & 20 \end{pmatrix} \cdot ^\circ$$

$(\theta_m, \phi_m)$

(equação (51) do slide 55 do Cap II.7)



$$\text{LS\_DOA}\phi = \begin{pmatrix} 148.453 \\ 20.104 \\ 70.066 \end{pmatrix} \cdot ^\circ$$

Note a menor precisão para a onda EM que incide sob  $\theta = 80^\circ$ . De fato, quanto mais a incidência se aproximar da direção do zênite do ULA ( $\theta = 0^\circ$ ), menor será a precisão devido ao ganho nulo dos dipolos para  $\theta = 0^\circ$ .

## Homework 1

Refazer o Exemplo 1 no slide 18 utilizando apenas 2 autovetores de ruído. Analise e interprete o resultado obtido em comparação ao resultado do Exemplo 1.

## Homework 2

Refazer o Exemplo 2 no slide 34 para

Mag:	DOA $\theta$ :	DOA $\phi$ :
1.0	10°	120°
0.5	90°	60°
0.5	90°	170°

Analise e interprete o resultado.

## Homework 3

Refazer o Exemplo 3 no slide 56 para a situação em que o processamento digital do RX não efetua a compensação do acoplamento mútuo entre os dipolos do *array*. Analise e interprete o resultado.

## Apêndice A – Bibliografia

1. Direction Finding in the Presence of Mutual Coupling - Svantesson - Chalmers - 1999
2. Antennas and Propagation from a Signal Processing Perspective - Svantesson - Chalmers - 2001
3. Comparison of MUSIC and ESPRIT for Direction of Arrival Estimation of Jamming Signal - Hong - 2012 IEEE International Instrumentation and Measurement Technology Conference Proceedings
4. ESPRIT-Estimation of Signal Parameters Via Rotational Invariance Techniques - R. Roy & T. Kailath - IEEE TRANSACTIONS ON ACOUSTICS, SPEECH AND SIGNAL PROCESSING. VOL 37. NO 7. JULY 1989
5. Direction-of-Arrival Estimation for Wide-Band Signals Using the ESPRIT Algorithm - B. Ottersten & T. Kailath - IEEE TRANSACTIONS ON ACOUSTICS, SPEECH, AND SIGNAL PROCESSING, VOL. 38, NO. 2, FEBRUARY 1990 317