Processamento Digital de Sinais

2018/I

Profa. Cristina

Outline:

- Sinais, sistemas e processamento – uma introdução ao tema
- Processamento Digital de Sinais – uma visão Histórica
- Aplicações do Processamento Digital de Sinais
- Áreas do Processamento Digital de Sinais
- Tipos de Sinais
- Tipos de Sistemas
- Interconexões entre sistemas
- Domínios para análise e representação de sinais e sistemas
- Sinais discretos no tempo
- Algumas operações básicas com sinais discretos no tempo
- Sistemas de tempo discreto
- Classes de sistemas de tempo discreto

Sinais são funções de uma ou mais variáveis independentes que carregam algum tipo de informação.

Sinais são usados para

Comunicação entre humanos.	Comunicação entre humanos e máquinas.	Descoberta de características não facilmente observáveis.	Controlar e utilizar energia e informação.

Sistemas são usados para processar sinais.

Processamento Digital de Sinais

Lida com a representação, a transformação e a manipulação de sinais em formato digital, e da informação que os sinais contêm.

Representação dos sinais de interesse

Em processamento digital de sinais, os sinais são representados por sequências de números com precisão finita, e o processamento é implementado usando processadores digitais (GPPs, DSPs, FPGAs, etc).

DSP – Uma Visão Histórica

- Século XVII: Técnicas Numéricas: Newton e o Método das Diferenças Finitas.
- Século XVIII: Euler, Bernoulli, Lagrange, Gauss (1805) base da FFT, Fourier (1822) representação em Série.
- Até 1950: Processamento analógico - executado com sistemas analógicos implementados com circuitos eletrônicos ou ainda com dispositivos mecânicos.
- Até final da década de 1960: computador digital era usado para aproximar ou simular um sistema de processamento analógico de sinais (não em tempo real).

DSP – Uma Visão Histórica

- Década de 1980: A invenção e subsequente proliferação do microprocessador preparou o caminho para as implementações de baixo custo dos sistemas de processamento em tempo discreto de sinais.

- A complexidade, a velocidade e a capacidade dos chips de DSP têm crescido exponencialmente desde o início da década de 1980. Processamento paralelo e distribuído se tornaram uma tendência significativa no desenvolvimento de algoritmos de processamento de sinais.

- E o futuro??? A chave para estar pronto para resolver novos problemas de processamento de sinais é, e sempre foi, um profundo conhecimento da matemática fundamental dos sinais e sistemas e dos projetos e algoritmos de processamento associados.

Aplicações do DSP

- Algoritmos sofisticados e hardware de processamento de sinais são prevalentes em uma grande variedade de sistemas, desde sistemas militares altamente especializados e complexos sistemas de telecomunicações, até aplicações industriais e eletrônica de consumo.

- Os principais padrões de comunicações de dados, áudio e vídeo baseiam-se em muitos dos princípios e das técnicas de processamento de sinais, assim como algoritmos para processamento de voz e imagem, filtragem de ruído, *enhancement*, codificação, reconhecimento de padrões, equalização, processamento multimídia, controle, robótica, visão de máquina, engenharia biomédica, acústica, sonar, radar, sismologia, exploração de petróleo, eletrônica de consumo...etc...

Áreas do DSP

- A interpretação de sinais é uma área importante do processamento de sinais, em que o objetivo do processamento é obter uma caracterização do sinal de entrada.
- A análise espectral, baseada no uso da DFT e no uso de modelos de sinais, é outro aspecto particularmente importante do processamento de sinais, em que são identificadas quais frequências representam o sinal.
- A modelagem de sinais desempenha um papel importante na compressão e codificação de dados, bem como em sistemas preditivos.
- Outro tópico avançado de importância considerável é o processamento adaptativo de sinais em que o sistema auto-ajusta seus parâmetros livres de acordo com o objetivo (goal) desejado.

O que é um sinal?

Sinal é um fluxo de informação, matematicamente representado como uma função de variáveis independentes, tais como tempo, posição, etc.

Tipos de Sinais

Sinais podem ser caracterizados como:

- Sinal de variável independente contínua
- Sinal de variável independente discreta
- Sinal unidimensional
- Sinal multidimensional
- Sinal de amplitude contínua
- Sinal de amplitude discreta

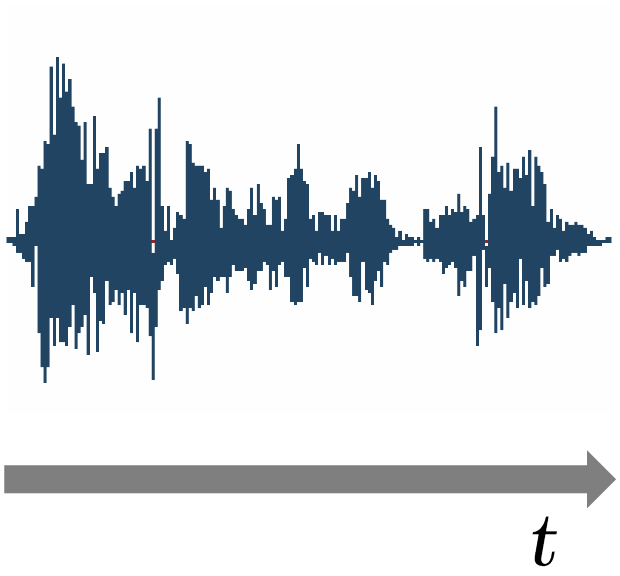
Sinal unidimensional,
de variável independente contínua

Sinal de voz

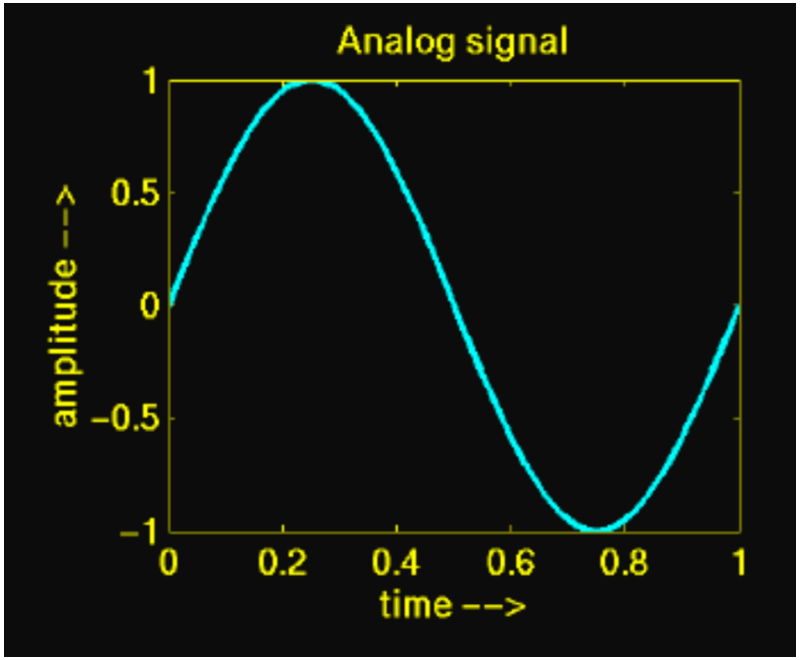
Sinal de tempo contínuo f(t), unidimensional (uma única variável independente, contínua).

A grandeza física pressão acústica movimenta o diafragma do microfone, o qual gera um sinal elétrico que corresponde à intensidade da pressão instantânea da onda sonora que chega ao microfone.

Speech:
Sinal 1-D, $f(t)$



Sinal unidimensional,
de variável independente contínua e amplitude contínua



Sinal Analógico

Tanto o tempo como a amplitude são contínuos.

Sinal multidimensional, de variável independente contínua

Nem sempre os sinais têm como variável independente o tempo.

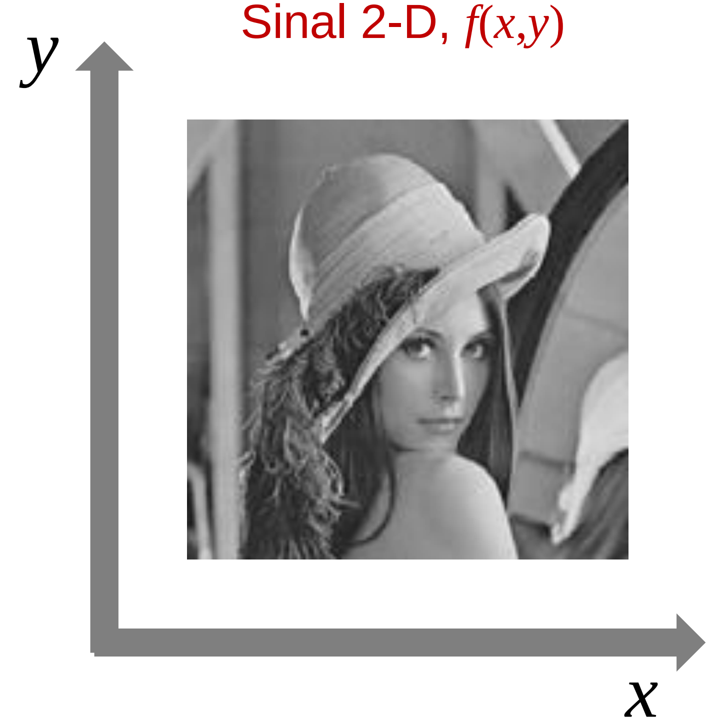
Uma imagem (foto analógica) é um sinal multidimensional $f(x,\ y)$ não dependente do tempo.

Intensidade luminosa (*brightness*) é função de duas variáveis espaciais, uma variável horizontal (x) e uma variável vertical (y).

As variáveis independentes x e y são variáveis espaciais e contínuas.

Basicamente estudaremos sinais unidimensionais, mas pode ser elucidativo utilizar alguns exemplos com sinais bidimensionais, especificamente imagens.

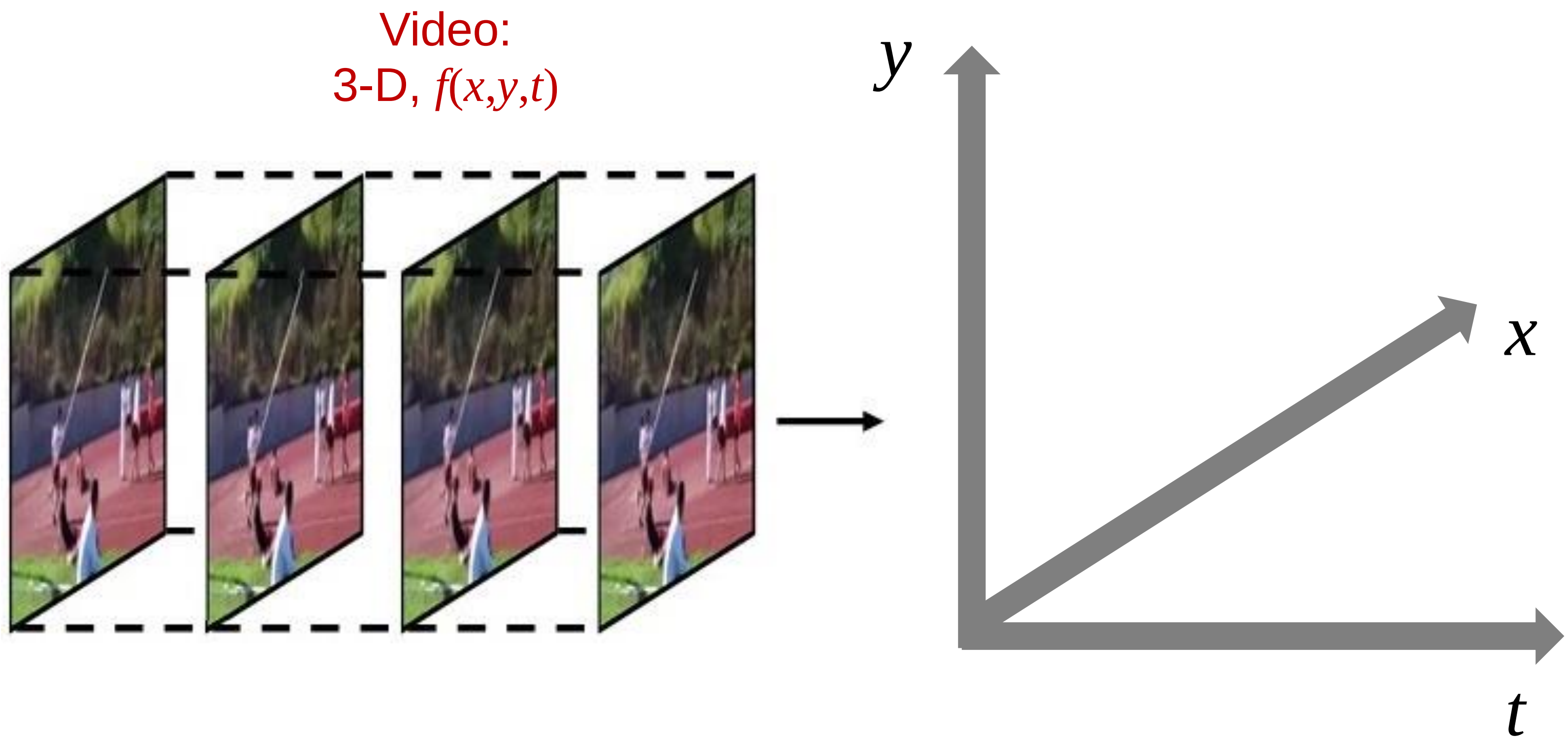
Grey-scale image:
Sinal 2-D, $f(x,y)$



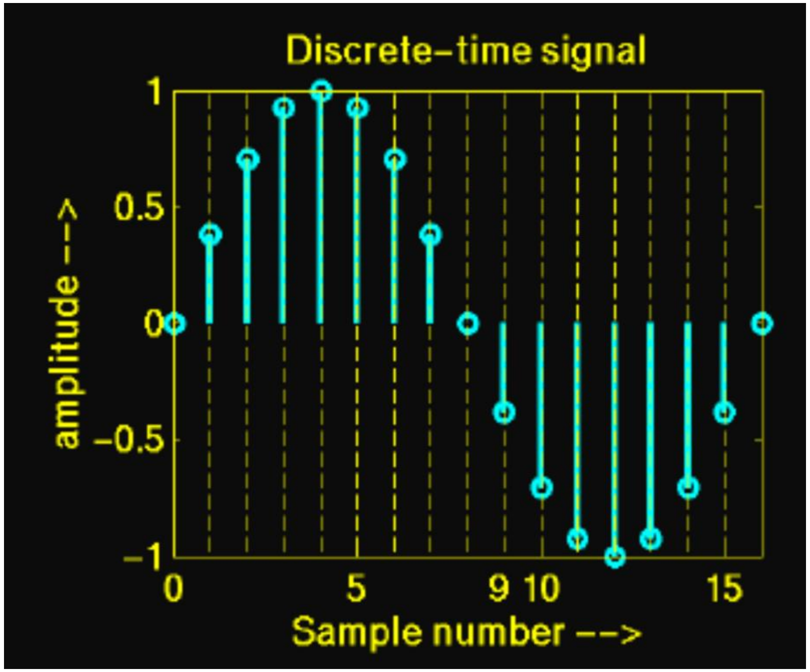
Sinal multidimensional,
de variável independente contínua

Um vídeo (filme analógico) é um sinal multidimensional dependente do tempo, $f(x, y, t)$.

As variáveis independentes x, y (espaciais) são variáveis contínuas e a variável independente t (tempo) é também contínua aos olhos do observador.



Sinal unidimensional,
de variável independente discreta



Discreto no tempo e contínuo em amplitude.

Variável independente é representada por sequência de números.

O sinal é uma função matemática de uma variável discreta, que é o argumento da função, função esta que somente assume valores a múltiplos inteiros do argumento.

Sinal unidimensional,
de variável independente discreta

Séries temporais econômicas, usadas em análise de mercado de ações.

Eixo vertical:
índice do mercado de ações

Eixo horizontal:
amostras tomadas a cada 10 dias.

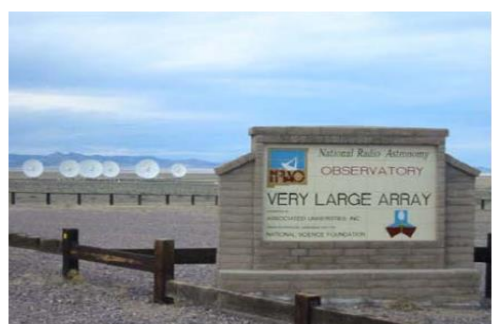
Sinal multidimensional, de variável independente discreta

Mais de uma variável independente discreta no tempo, representada por sequências de números.

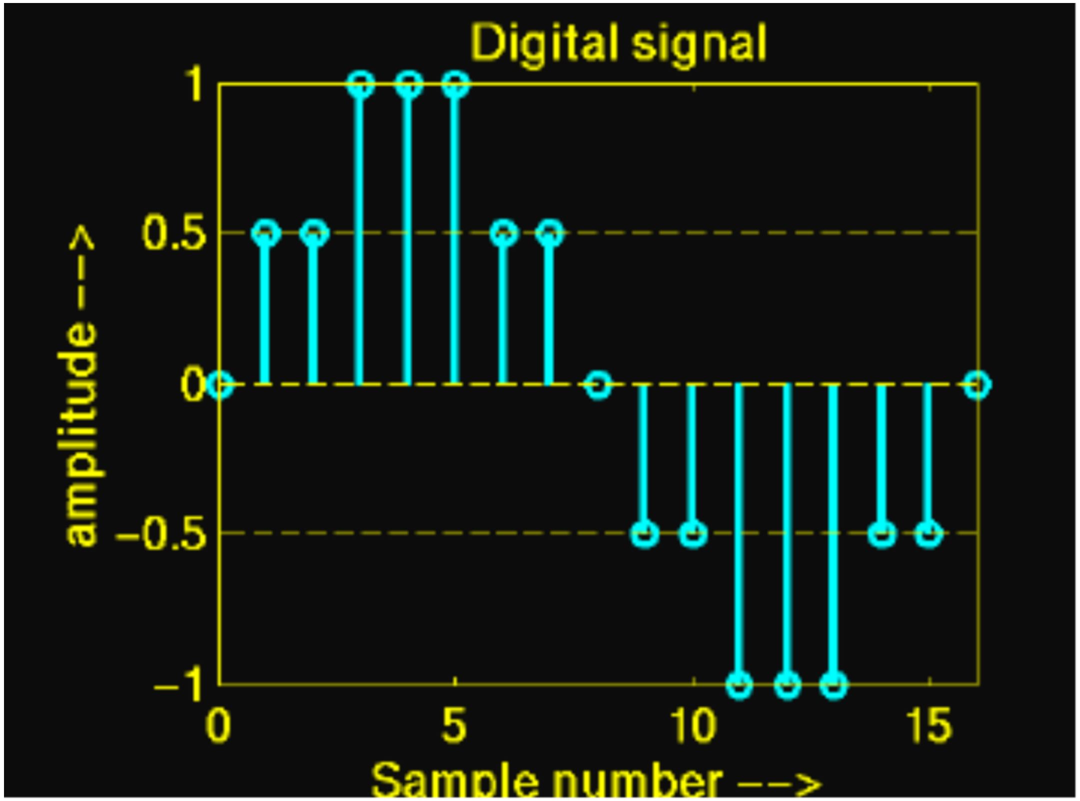
$$\underline{x}[n] = \left[s_0[n], s_1[n], \cdots s_{26}[n]\right]^T$$

$\underline{\mathrm{x}}[n]$ é um vetor de 27 elementos, sendo cada elemento a sequência no tempo discreto que representa o sinal de cada respectiva antena do arranjo espacial (*array*).

O Very Large Array (NM/USA), observatório de rádio astronomia, é composto por 27 antenas de rádio com ϕ=25m, em uma configuração espacial em Y. Os dados das 27 antenas são combinados digitalmente de modo a focalizar (como se fosse uma lente) um ponto localizado a anos-luz da Terra.



Sinal unidimensional,
de variável independente discreta e amplitude discreta

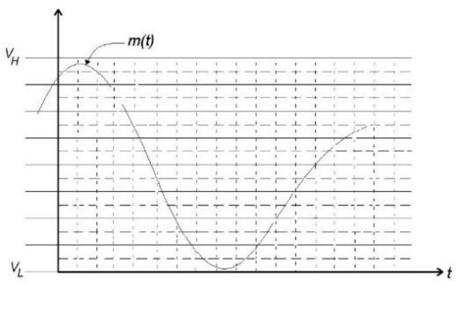


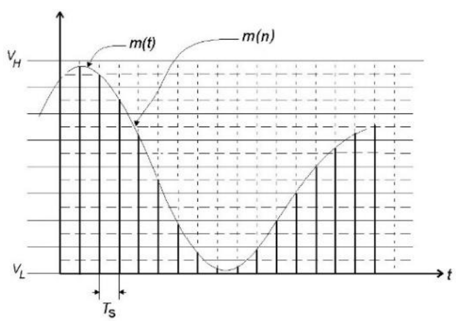
Sinal digital

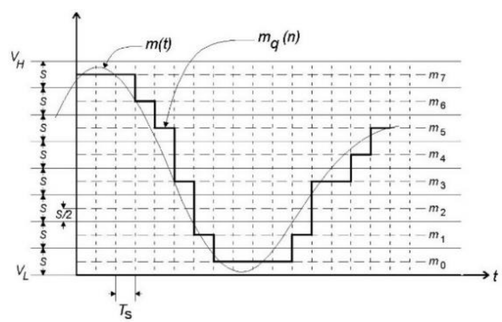
Discreto no tempo (amostrado) e
discreto em amplitude (quantizado).

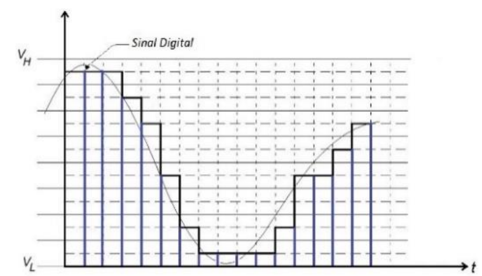
Digitalização de um Sinal

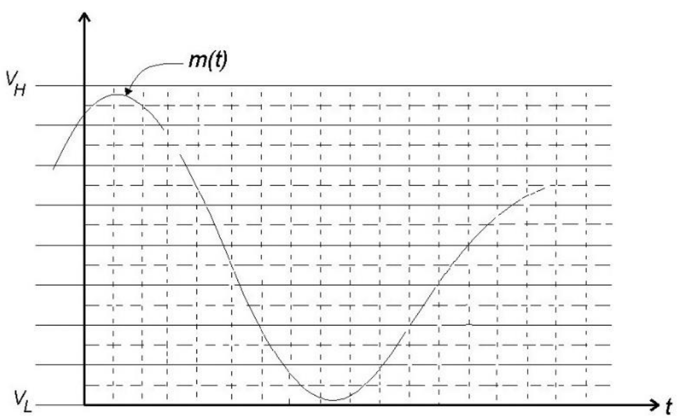
Sinal analógico → Processo de amostragem → Processo de quantização → Sinal digital

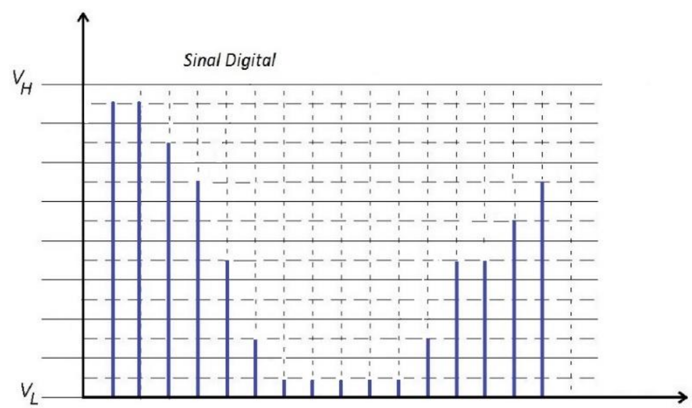










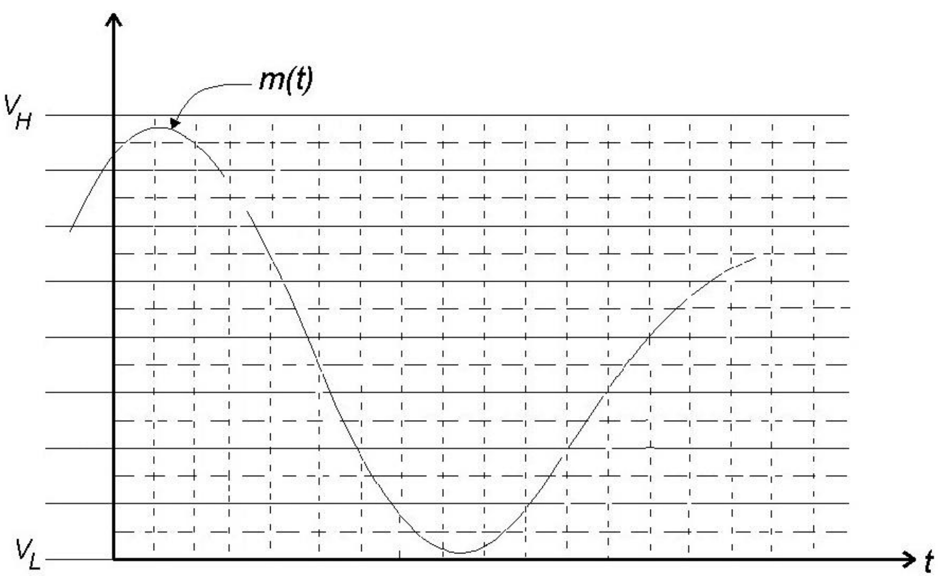


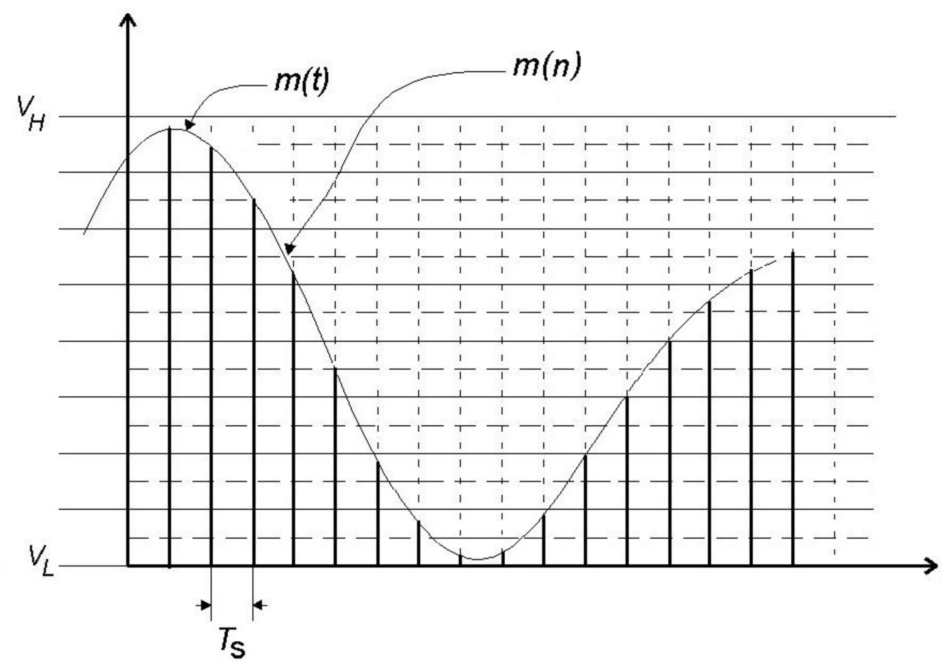
111	111	111	110	101	011	001	000	000	000	000	001	011	011	100	101

Representação binária de cada nível de quantização

Processo de amostragem

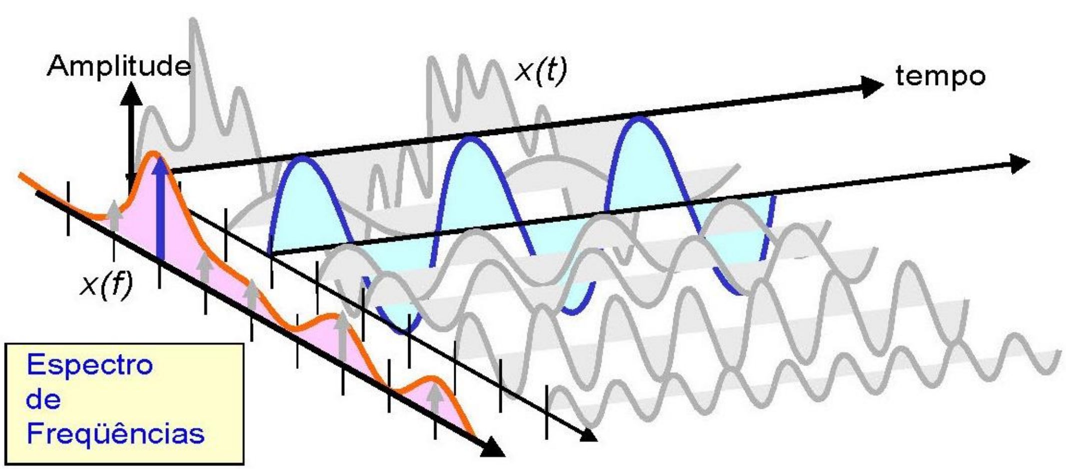
- Sinal $m(t)$ contínuo no tempo é transformado em um sinal discreto no tempo.
- Valores (ou amostras) do sinal $m(t)$ são seqüencialmente tomadas em instantes distintos, igualmente espaçados no tempo de um intervalo T_s, e são levados à saída do processo de amostragem.
- Especificamente, o sinal $m(t)$ é transformado no sinal $m(nT_s)$, onde T_s é denominado de intervalo de amostragem e $n = 0,1,\cdots$ é o índice do instante de amostragem.





Teorema da Amostragem

- “Seja $m(t)$ um sinal limitado em banda, tal que f_M seja a frequência mais alta de seu espectro, frequência a partir da qual as componentes espectrais de $m(t)$ podem ser consideradas de magnitude desprezível.
- Sejam os valores de $m(t)$ determinados a intervalos constantes de T_s segundos, tais que $T_s \leq 1/2f_M$, isto é, $m(t)$ é periodicamente <u>amostrado</u> a cada $T_s \leq 1/2f_M$ segundos.
- Desta forma, a frequência de amostragem será maior ou igual a 2 f_M ($f_s = 1/T_s \geq 2f_M$).
- Então as <u>amostras</u> $m(nT_s)$ de $m(t)$, $n = 0,1,\cdots$, univocamente determinam $m(t)$. Em decorrência deste fato, o sinal $m(t)$ pode ser reconstruído a partir do sinal amostrado $m(nT_s)$, através de um filtro adequado”.

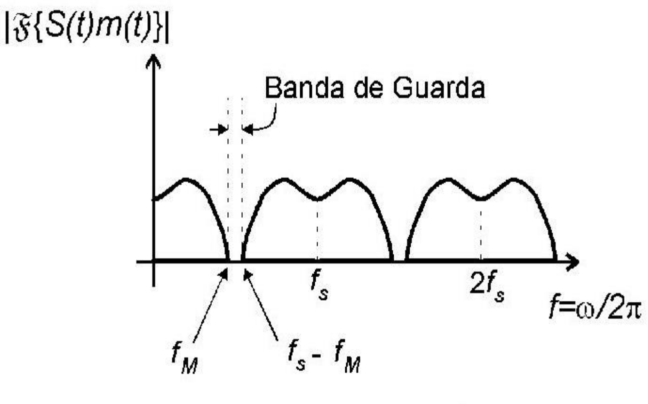


f_s = frequência de amostragem

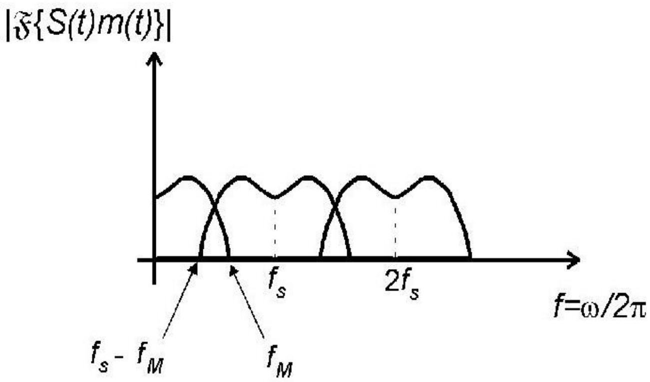
f_M = componente espectral de $m(t)$ de maior frequência

Se $f_s = 1/T_s \geq 2f_M$, após o processo de amostragem, o sinal $m(t)$ original pode ser recuperado sem distorção, na saída de um filtro passa-baixa com frequência de corte f_M , próximo do filtro ideal.

Teorema da Amostragem



(a) $f_s > 2f_M$



(b) $f_s < 2f_M$

A Figura (a) mostra a banda de guarda que é obtida quando $f_s > 2f_M$.

A banda de guarda sempre é utilizada na prática porque elimina a necessidade do filtro passa-baixa ser ideal (i.e., o filtro não necessita apresentar declividade infinita na frequência de corte). (sinal de voz $f_M = 3.3k\,\mathrm{Hz}$, $f_s = 8.0k\,\mathrm{Hz}$).

A Figura (b) mostra a superposição das réplicas do espectro $m(t)$ original, que ocorre quando $f_s < 2f_M$.

Para esta situação, não há forma de filtragem que consiga recuperar o sinal original $m(t)$ sem distorção. Tal distorção é denominada *aliasing* (*alias*: pseudônimo – em inglês), porque o espectro original sofre interferência de uma réplica dele mesmo com "outro nome", isto é, sofre interferência dele mesmo, só que transladado em frequência.

A frequência de amostragem mínima $f_s = 2f_M$ para que não haja ocorrência de *aliasing* é também denominada de Frequência de Nyquist.

Processo de quantização

- Sinal $m(n)$ contínuo em amplitude é transformado em um sinal $m_q(n)$ discreto em amplitude.
- Dado $m(n)$ no instante *n*, $m_q(n)$ assumirá um dos *M* possíveis valores, denominados níveis de quantização, do conjunto

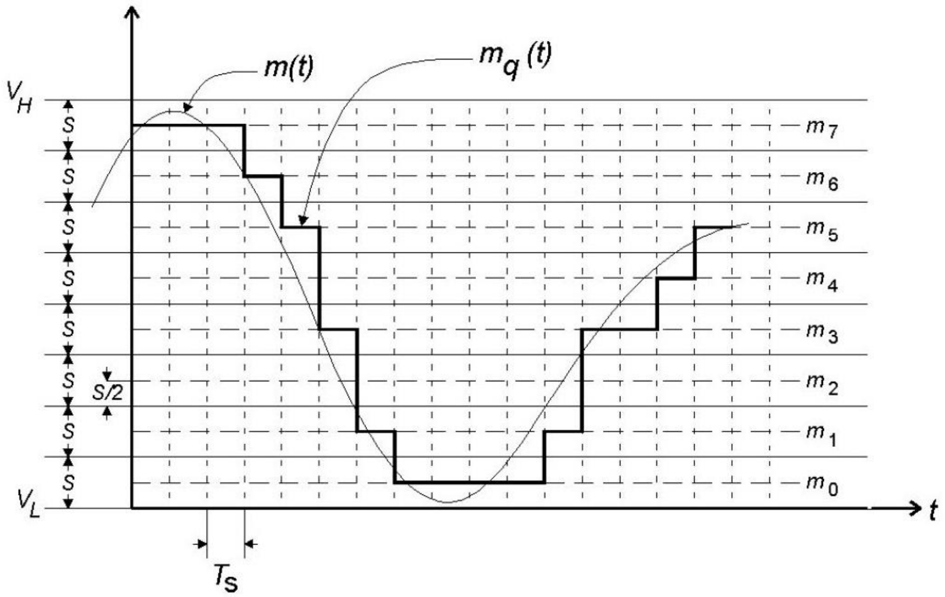
$$\Theta = \{m_0, m_1, \cdots, m_{M-1}\}, \text{ sendo } m_0 < m_1 < \cdots < m_{M-1}.$$

- Especificamente, $m_q(n) = Q\{m(n)\}$, onde $Q\{\cdot\}$ é o operador que representa a quantização do valor do argumento e é dado por

$$Q\{\cdot\} = \arg\min_{m_k} |(\cdot) - m_k|, \ m_k \in \Theta, \ k = 0,1,\cdots,M-1.$$

- O operador $Q\{\cdot\}$ testa todas as *M* possíveis distâncias $|x - m_k|$ e atribui a $Q\{x\}$ àquele elemento m_q do conjunto $\Theta = \{m_0, m_1, \cdots, m_{M-1}\}$ que resultou na menor distância $|x - m_q|$.
- Quanto menor o número *M* de níveis de quantização utilizados para representar $m(n)$, menos fiel será a representação e maior será o ruído de quantização.

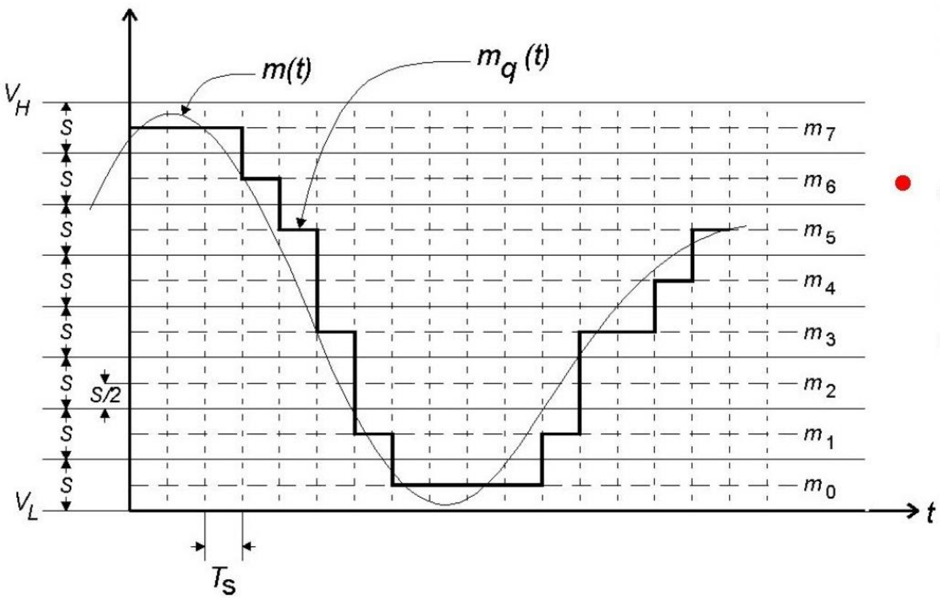
Processo de quantização



- $m_q(t) = Q\{m(t)\}$, ou $m_q(n) = Q\{m(n)\}$ se considerarmos que, antes de ser quantizado, $m(t)$ é amostrado a intervalos T_s.
- O sinal original $m(t)$ varia entre os limites V_L e V_H; $(V_H - V_L)$ = excursão do sinal.
- M é o número de valores que o sinal quantizado poderá assumir.
- $S = (V_H - V_L)/M$ é denominado <u>passo de quantização</u> ou *quantizer step*.

- A qualquer instante, o <u>erro de quantização</u> $e_q(t) = m(t) - m_q(t)$ é tal que $|e_q| \le S/2$.
- Quanto maior *M*, mais $m_q(t)$ assemelha-se a $m(t)$ e, portanto, menor será $e_q(t)$.

Processo de quantização



- O erro de quantização $e_q(t)$ pode ser considerado um ruído superposto ao sinal após a quantização, e é portanto denominado **ruído de quantização**.

- A **média quadrática do ruído de quantização** é uma medida da **potência do ruído de quantização** (potência do ruído aditivo gerado pelo processo de quantização).

Potência de ruído de quantização:

$$\overline{e_q{}^2} = \left[\frac{S^2}{12}\right]$$

SNR de quantização:

$$\mathrm{SNR}_Q = 6N \ [\mathrm{dB}]\,;\ \mathrm{N} = \log_2 M$$

Processo de Codificação

$$m_0 \leftarrow 000;\ m_1 \leftarrow 001;\ m_2 \leftarrow 010;\ m_3 \leftarrow 011;\ m_4 \leftarrow 100;\ m_5 \leftarrow 101;\ m_6 \leftarrow 110;\ m_7 \leftarrow 111.$$

Resumindo:

A variável independente pode ser contínua ou discreta

- Sinais contínuos no tempo.
- Sinais discretos no tempo (definidos em tempos discretos e representados como sequências de números).

A amplitude do sinal pode ser contínua ou discreta

- Sinais analógicos (tanto o tempo como a amplitude são contínuos).
- Sinais digitais (tanto o tempo como a amplitude são discretos).

– *Computadores e outros dispositivos digitais estão restritos a sinais de tempo discreto (devido ao clock), e também restritos a sinais de amplitude discreta (devido ao número de bits do registrador).*

– *A classificação dos sistemas de processamento de sinal segue os mesmo critérios.*

– *Sinais contínuos no tempo podem ser transformados em sinais discretos no tempo e processados em sistemas de tempo discreto e vice-versa (conversores A/D e D/A).*

– *É conveniente processar sinais de tempo contínuo em um processador digital, para o que é necessário convertê-los em sinais de tempo discreto.*

O que é um sistema?

Um sistema processa sinais, tem entradas e saídas, e pode ser de tempo discreto ou de tempo contínuo.

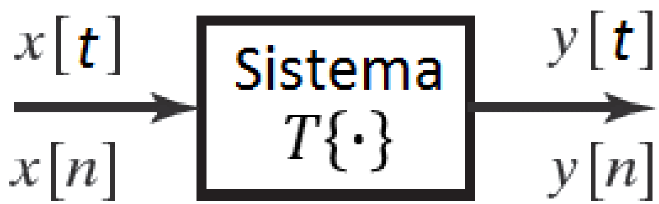
Tipos de Sistemas

Sistemas podem ser caracterizados como:

- Sistema de tempo contínuo
- Sistema de tempo discreto
- Sistema linear
- Sistema não-linear
- Sistema variante no tempo
- Sistema invariante no tempo

Sistema de tempo discreto e Sistema de tempo contínuo

Sistema de tempo contínuo → $y[t] = T\{x[t]\}$ processa variáveis de tempo contínuo



Sistema de tempo discreto → $y[n] = T\{x[n]\}$ processa variáveis de tempo discreto

Sistemas lineares e sistemas não-lineares

Sistemas variantes no tempo e invariantes no tempo

⇓

Sistema linear invariante no tempo (LIT)

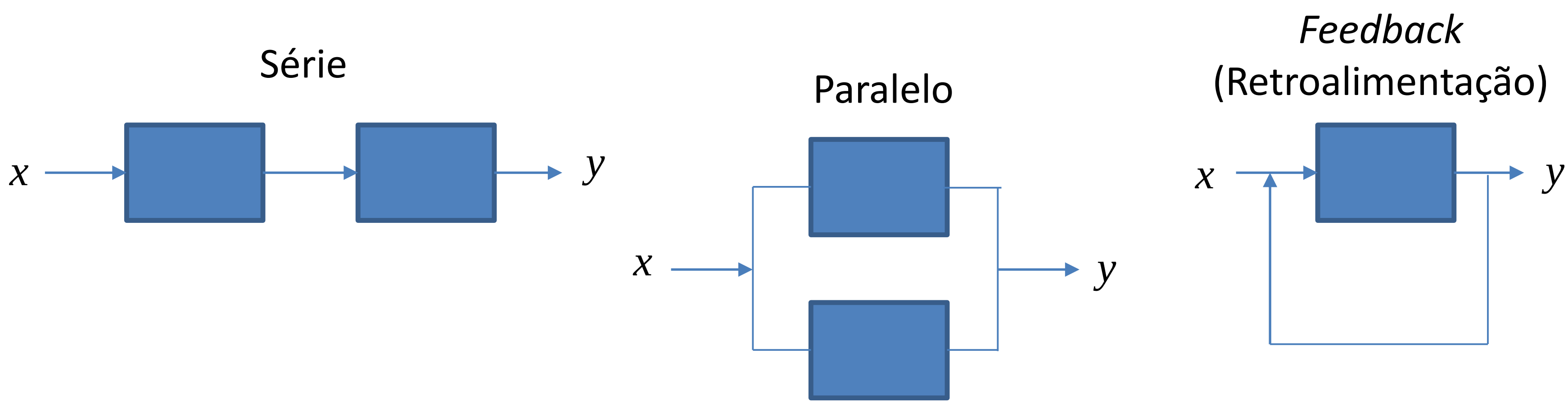
⇓

- Representação dos sinais e dos sistemas LIT no domínio do tempo e no domínio da frequência.
- Os domínios tempo e frequência são relacionados pela Transformada de Fourier.

Sistemas são interconectados para executar determinadas funções.

Tipos de interconexões entre sistemas

$$y[n] = T\{x[n]\}$$



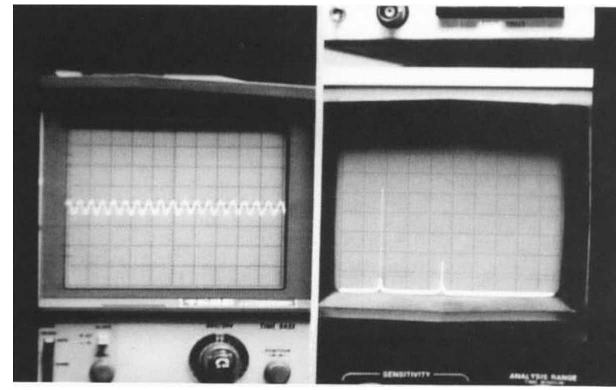
A operação que a transmitância conjunta T realiza é afetada pelo modo como os sistemas são interconectados.

Domínios para análise e representação de sinais e sistemas

- Domínio tempo

– $x(t)$
variável independente (domínio): tempo contínuo t

– $x[n]$
variável independente (domínio): tempo discreto n



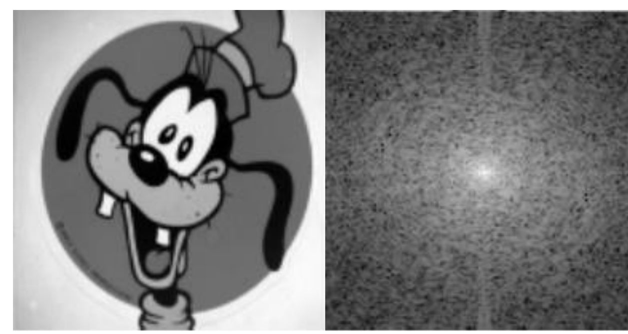
Representação de um tom no tempo e em frequência

- Domínio frequência

– Transformada de Fourier
variável independente (domínio): $\omega = 2\pi f$

– Transformada de Laplace
variável independente (domínio): $s =\propto +j\omega$

– Transformada-z
variável independente (domínio): $z = \rho e^{j\theta}$



Representação de uma imagem no espaço e em frequência

Sinais discretos no tempo

- Uma sequência de números x, em que o n-ésimo número na sequência é indicado por $x[n]$, é escrita formalmente como

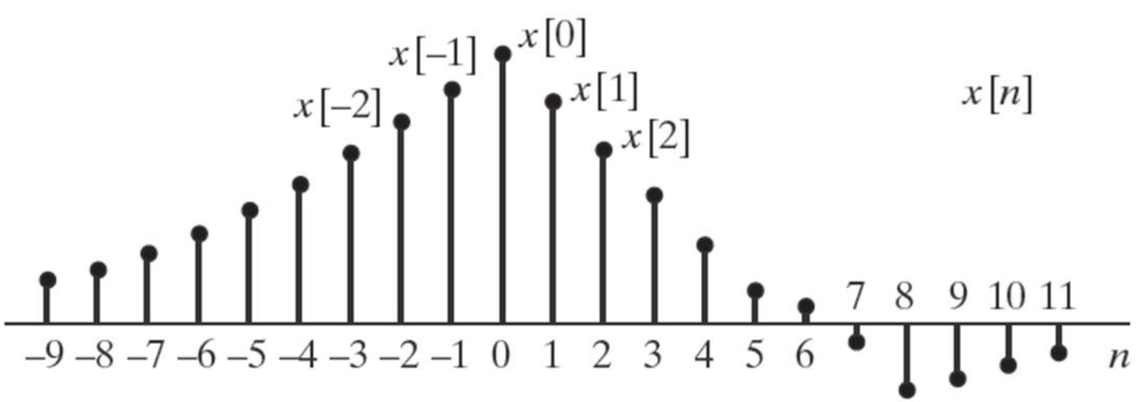
$$x = \{x[n]\}, \quad -\infty < n < \infty$$

- Na prática, tais sequências surgem frequentemente da amostragem periódica de um sinal analógico (ou seja, de tempo contínuo) $x_a(t)$.

$$x[n] = x_a(nT), \quad -\infty < n < \infty$$

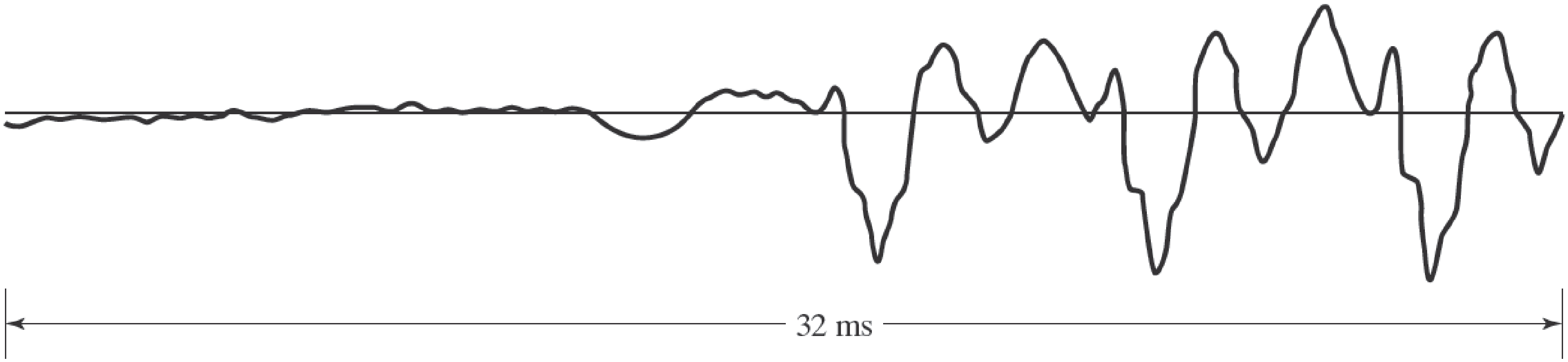
onde T é o intervalo entre amostras e $f = 1/T$ é a frequência de amostragem.

- Representação gráfica de um sinal discreto no tempo.

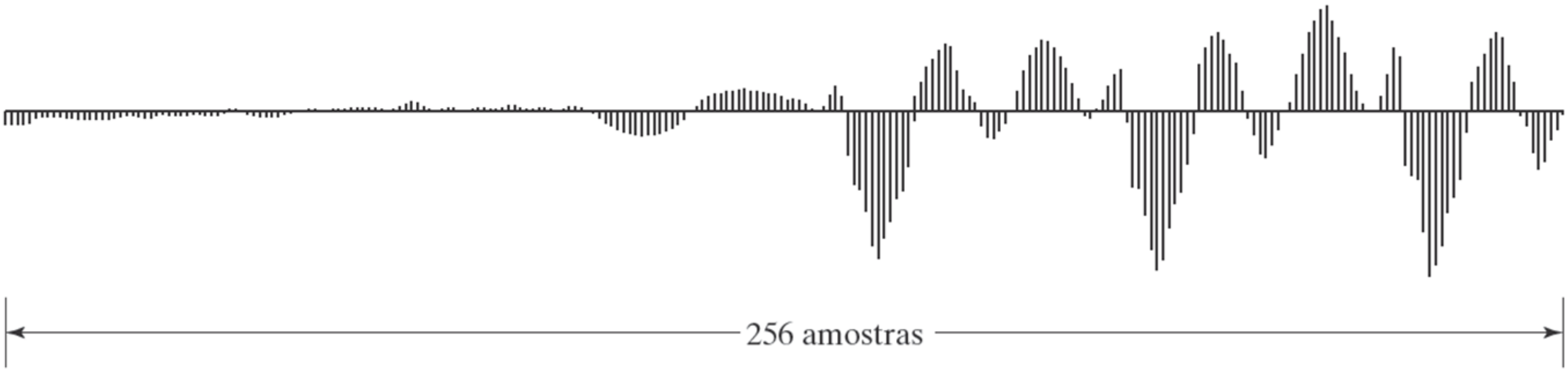


Sinais discretos no tempo

- Segmento de um sinal de voz em tempo contínuo $x_a(t)$.



- Sequência de amostras do sinal de voz $x[n] = x_a(nT)$.



Sinais discretos no tempo - Algumas operações básicas

Na análise de sistemas de processamento de sinais discretos no tempo, sequências são manipuladas de diversas formas básicas:

O produto $x[n]\mathrm{y}[n]$ e a soma $x[n] + \mathrm{y}[n]$ de duas sequências $x[n]$ e $y[n]$ são definidos como o produto e a soma amostra a amostra, respectivamente.

A multiplicação de uma sequência $x[n]$ por um número α, isto é, $\alpha x[n]$, é definida como a multiplicação de cada amostra de $x[n]$ por α .

Uma sequência $y[n]$ é dita ser uma versão atrasada de n_0 amostras em relação a uma sequência $x[n]$ se $y[n]$ tiver valores tais que

$y[n] = \mathrm{x}[n - n_0]$, onde n_0 é um inteiro positivo.

Se n_0 for um inteiro negativo, a sequência $y[n]$ é dita ser uma versão adiantada em relação à $x[n]$.

Sinais discretos no tempo - Algumas operações básicas

A convolução discreta é uma operação entre sinais discretos no tempo. A convolução entre dois sinais $x[n]$ e $h[n]$ é expressa por

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

O conceito de convolução é um dos mais importantes da Engenharia Elétrica, servindo de base para todo estudo envolvendo sistemas lineares invariantes no tempo.

Para determinar a saída $y[n]$ de um sistema LIT a um dado sinal de entrada $x[n]$, efetua-se a operação de convolução acima definida entre o sinal de entrada $x[n]$ e a resposta ao impulso $h[n]$ do sistema LIT.

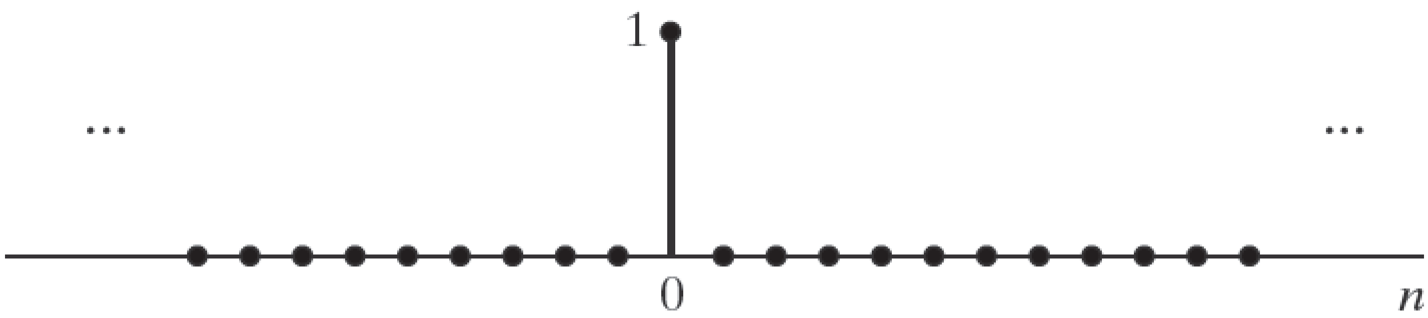
Obtém-se a resposta $h[n]$ de um sistema LIT colocando-se uma única amostra de valor unitário na entrada do sistema (um impulso) e registra-se a sequência resultante $h[n]$ na saída do sistema.

Os sistemas LIT são completamente caraterizados no domínio tempo discreto pela sua resposta ao impulso, $h[n]$.

Sinais discretos no tempo - Algumas sequências básicas

No estudo da teoria de sinais e sistemas discretos no tempo, algumas sequências básicas são de particular interesse:

Amostra Unitária



A sequência amostra unitária, também denominada impulso, é definida como a sequência

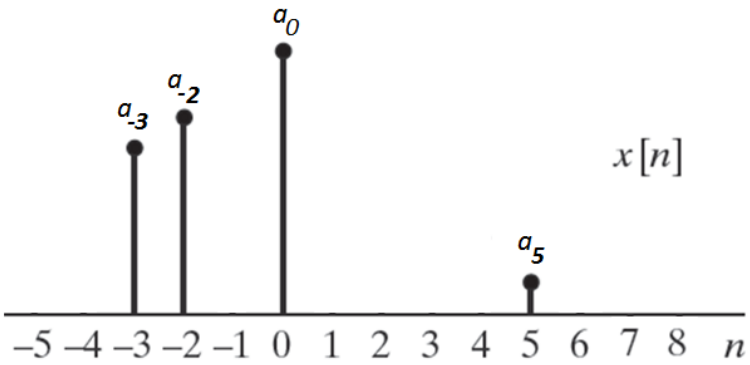
$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0, \\ 1, & n = 0. \end{cases}$$

Sinais discretos no tempo - Algumas sequências básicas

Qualquer sequência pode ser expressa como uma soma de impulsos atrasados e escalados.

Por exemplo,

$$x[n] = a_{-3}\delta[n+3] + a_{-2}\delta[n+2] + a_0\delta[n] + a_5\delta[n-5]$$

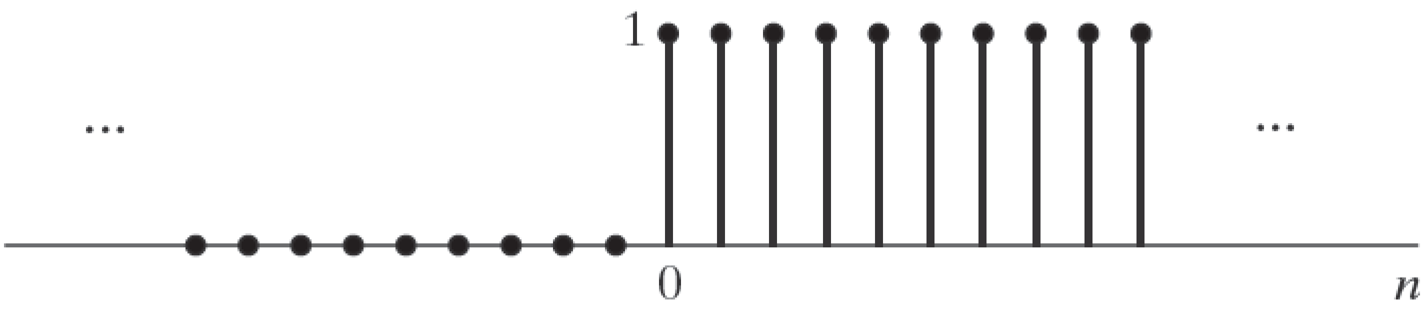


De modo geral, qualquer sequência pode ser expressa como

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

Sinais discretos no tempo - Algumas sequências básicas

Degrau Unitário



A sequência degrau unitário é definida como

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

Sinais discretos no tempo - Algumas sequências básicas

O degrau unitário está relacionado ao impulso unitário por $u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k]$

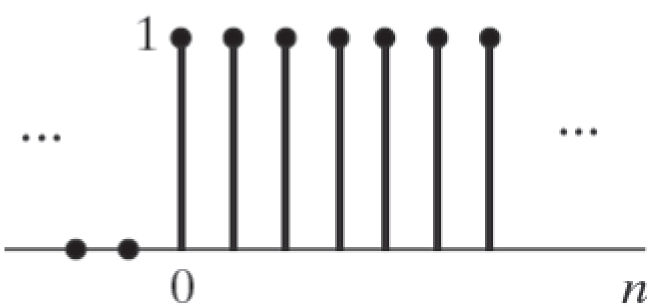
Ou seja, a sequência degrau unitário $u[n]$ resulta da soma acumulada dos valores da sequência $\delta[k]$ desde $k =$ -∞ até $k = n$.

Uma vez que $\delta[k]$ é não-nulo somente p/ $k = 0$, então o valor 1.0 de $\delta(k = 0)$ só será computado na soma acumulada a partir de $n = 0$, gerando assim um valor constante e unitário a partir de $n = 0$.

Outra representação do degrau unitário em termos do impulso é dada interpretando o degrau unitário como uma soma de impulsos deslocados, tais como

$$u[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \cdots$$

ou $$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$$

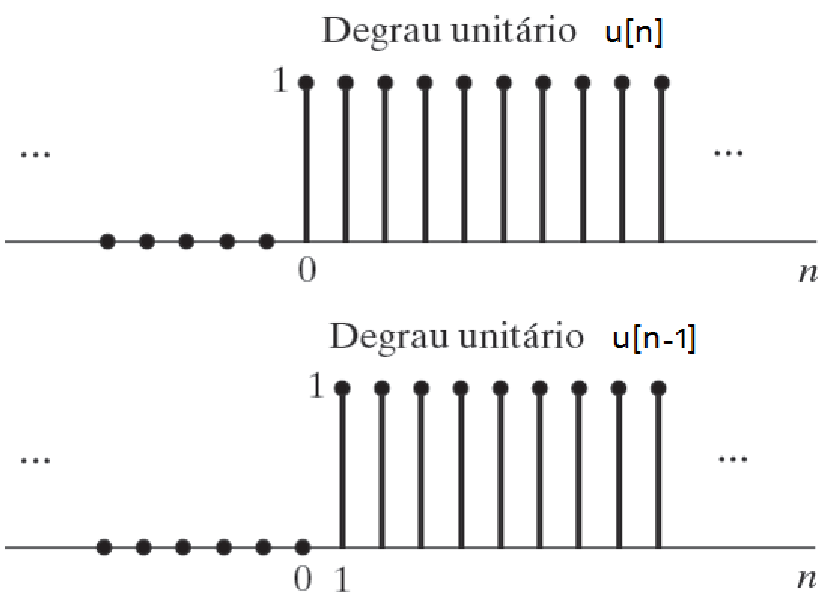


Sinais discretos no tempo - Algumas sequências básicas

O impulso também pode ser expresso a partir de degraus unitários, conforme

$$\delta[n-k] = u[n] - u[n-1]$$

(primeira diferença regressiva da sequência degrau unitário)



Sinais discretos no tempo - Algumas sequências básicas

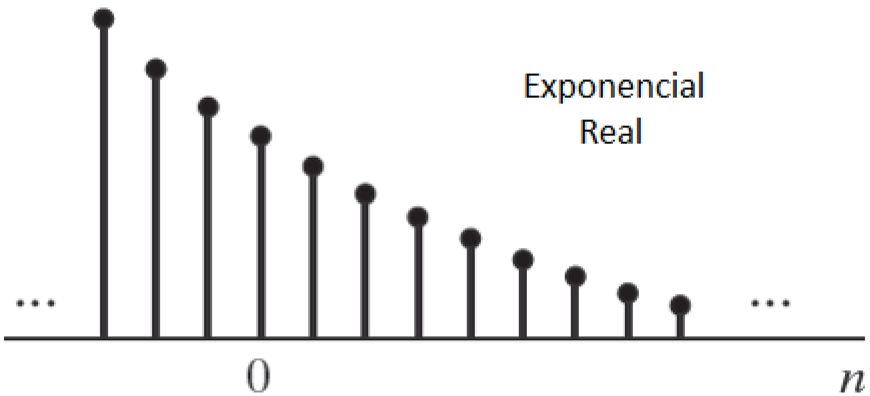
Sequências exponenciais e senoidais são extremamente importantes na representação e análise de sistemas discretos e invariantes no tempo.

Exponencial

A forma geral de uma sequência exponencial é

$$x[n] = A\,\alpha^n$$

Se A e α são números reais, a sequência é real.



Se $0 < \alpha < 1$ e A é positivo, os valores da sequência são positivos e decrescem em magnitude à medida que n cresce, conforme figura acima.

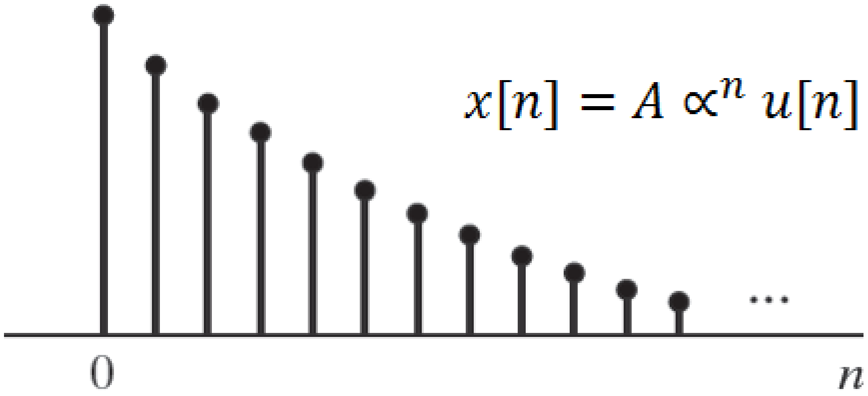
Se $-1 < \alpha < 0$, os valores da sequência alternam o sinal, mas decrescem em magnitude à medida que n cresce.

Se $|\alpha| > 1$, os valores da sequência aumentam em magnitude à medida que n cresce.

Sinais discretos no tempo - Algumas sequências básicas

Uma sequência exponencial cujos valores são zero para $n < 0$ pode ser obtida pela combinação com o degrau unitário discreto, conforme

$$x[n] = \begin{cases} A \propto^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad ; \quad x[n] = A \propto^n u[n]$$

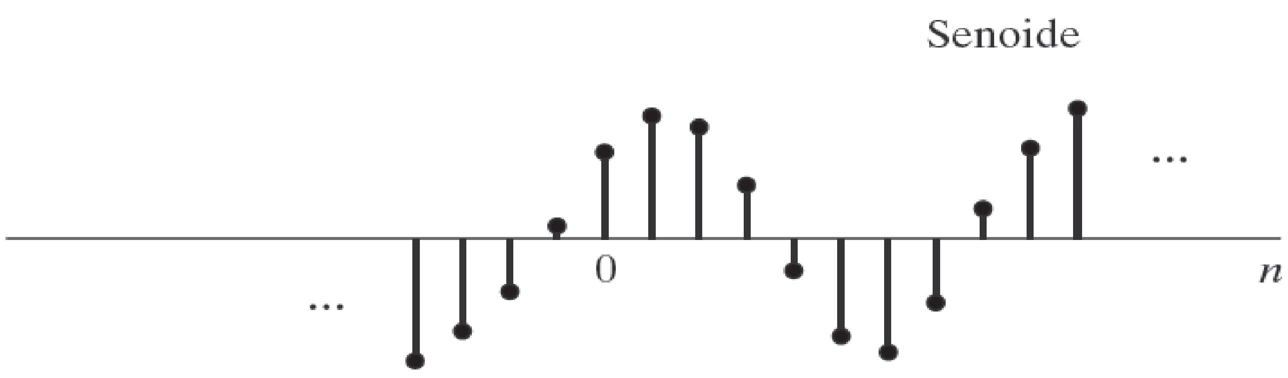


Sinais discretos no tempo - Algumas sequências básicas

Senoide

A forma geral de uma sequência senoidal é

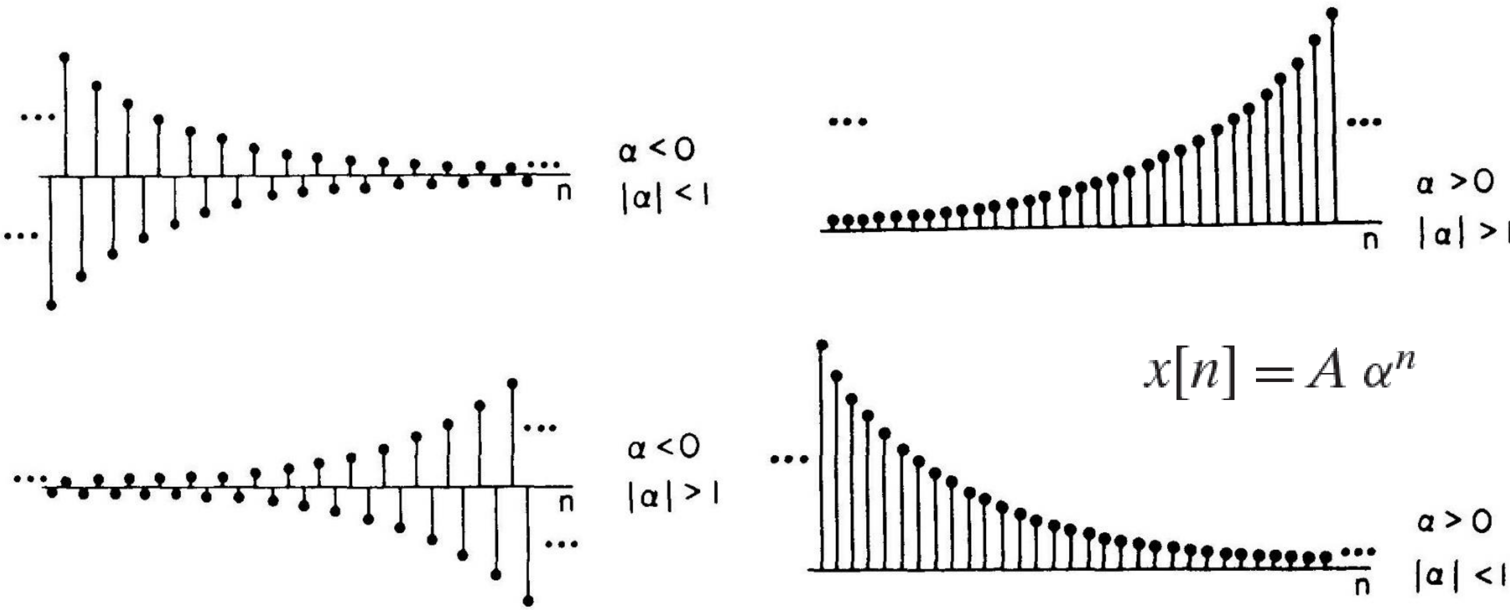
$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \emptyset)$, para todo n, sendo A uma constante real.



Sinais discretos no tempo - Algumas sequências básicas

Como vimos, a forma geral de uma sequência exponencial é $x[n] = A\,\alpha^n$

Se A e α são números reis, a sequência é real.



Com α complexo, $x[n] = A\,\alpha^n$ terá partes real e imaginária, que são senoides ponderadas exponencialmente.

Sinais discretos no tempo - Algumas sequências básicas

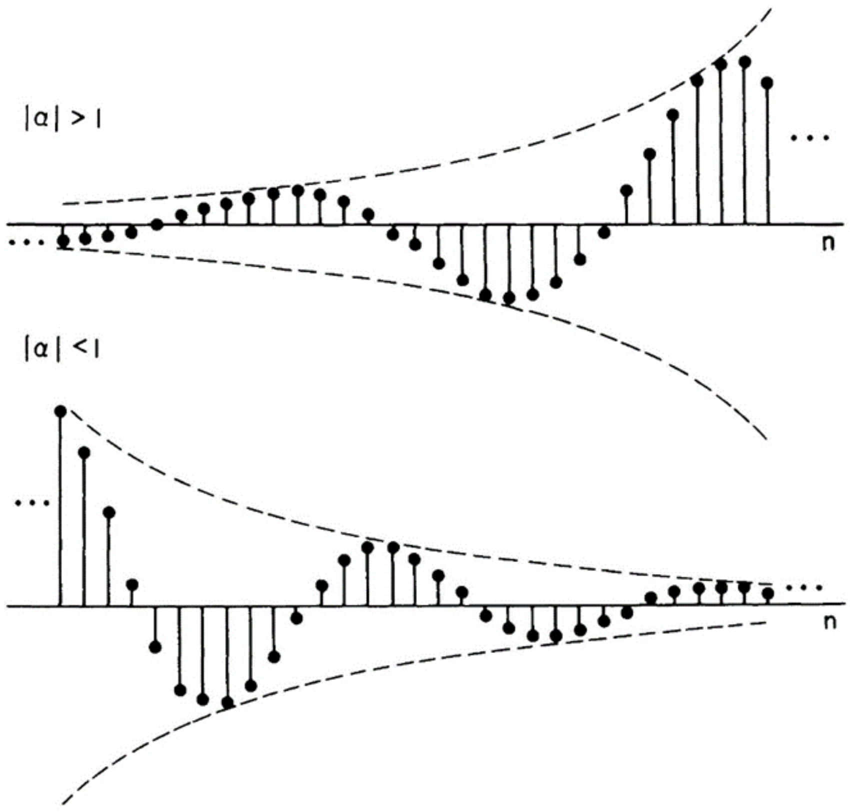
Com A e α complexos, ou seja, $\alpha = |\alpha|e^{j\omega_0}$ e $A = |A|e^{j\emptyset}$, teremos

$$x[n] = A\alpha^n = |A|e^{j\emptyset}\,|\alpha|^n e^{j\omega_0 n} = |A||\alpha|^n e^{j(\omega_0 n + \emptyset)} =$$

$$= |A||\alpha|^n \cos(\omega_0 n + \emptyset) + j|A||\alpha|^n \sin(\omega_0 n + \emptyset)$$

A sequência oscila com um envelope que cresce exponencialmente se $|\alpha|>1$,

ou com um envelope que cai exponencialmente se $|\alpha|<1$.



Sinais discretos no tempo - Algumas sequências básicas

Quando $|\alpha|$ = 1, a sequência

$$x[n] = |A||\alpha|^n e^{j(\omega_0 n + \emptyset)} = |A||\alpha|^n \cos(\omega_0 n + \emptyset) + j|A||\alpha|^n \sin(\omega_0 n + \emptyset)$$

é denominada sequência exponencial complexa e tem a forma

$$x[n] = |A|e^{j(\omega_0 n + \emptyset)} = |A| \cos(\omega_0 n + \emptyset) + j|A| \sin(\omega_0 n + \emptyset)$$

ou seja, as partes real e imaginária de $e^{j(\omega_0 n + \emptyset)}$ variam senoidalmente com n.

Sinais discretos no tempo - Algumas sequências básicas

$$x[n] = |A|e^{j(\omega_0 n+\emptyset)} = |A|\cos(\omega_0 n + \emptyset) + j|A|\sin(\omega_0 n + \emptyset)$$

- O fato de que n é sempre inteiro na equação acima, conduz a importantes diferenças entre as propriedades de sequências exponenciais complexas discretas no tempo e contínuas no tempo.

- Por analogia com senoides contínuas, a quantidade ω_0 = 2π/T é denominada frequência da senoide complexa, ou da exponencial complexa, e Ø é denominada fase, sendo T o período da senoide.

- n é sempre um inteiro, por tratar-se de sequencia discreta (o que não é sempre verdade no caso contínuo).

- n é um inteiro adimensional, então a dimensão de ω_0 deve ser radianos (ou, para manter analogia com o caso contínuo, a dimensão de n deve ser "amostras" e a dimensão de ω_0 deve ser "radianos/amostra").

Sinais discretos no tempo - Algumas sequências básicas

Uma diferença entre senoides complexas contínuas e discretas no tempo fica evidenciada quando consideramos a frequência $(\omega_0 + 2\pi)$. Para este caso,

$$x[n] = Ae^{j(\omega_0+2\pi)n} = Ae^{j\omega_0 n}e^{j2\pi n} = Ae^{j\omega_0 n}$$

Na verdade, sequências exponenciais complexas com frequências $(\omega_0 + 2\pi r)$, onde r é um inteiro, são indistintas entre si.

O mesmo vale para sequências senoidais, conforme pode ser verificado em

$$x[n] = A\cos[(\omega_0 + 2\pi r)n + \emptyset] = A\cos(\omega_0 n + \emptyset).$$

De onde se conclui que, para os casos em análise, devemos considerar apenas frequências em um intervalo de 2π, tais como

$$-\pi < \omega_0 \leq \pi \quad \text{ou} \quad 0 \leq \omega_0 < 2\pi$$

Sinais discretos no tempo - Algumas sequências básicas

Outra diferença a considerar diz respeito à periodicidade.

No caso contínuo, um sinal senoidal/cosenoidal ou uma exponencial complexa são ambos periódicos com período $T = 2\pi/\omega_0$.

No caso de tempo discreto, uma sequência periódica é uma sequência para a qual

$$x[n] = x[n + N], \text{ para todo } n$$

onde o período N é necessariamente um inteiro.

Se essa condição para periodicidade for testada para uma cosenoide de tempo discreto, então,

$$A \cos(\omega_0 n + \phi) = A \cos(\omega_0 n + \omega_0 N + \phi)$$

o que requer $\omega_0 N = 2\pi k$, ou $N = 2\pi k/\omega_0$, onde k é um inteiro.

Note que esta relação entre k e N implica que deve haver um número de amostras inteiro N contidas em um intervalo de tempo kT, sendo T o período da cosenoide contínua que envelopa as amplitudes das amostras da sequência.

Sinais discretos no tempo - Algumas sequências básicas

O mesmo vale para a sequência exponencial complexa $e^{j\omega_0 n}$, isto é, periodicidade com período N requer

$$e^{j\omega_0(n+N)} = e^{j\omega_0 n}$$

o que é verdade para $\omega_0 N = 2\pi k$.

Novamente, note que esta relação entre k e N implica que deve haver um número de amostras inteiro N contidas em um intervalo de tempo kT, sendo T o período da exponencial complexa contínua que envelopa as amplitudes das amostras da sequência.

Sinais discretos no tempo - Algumas sequências básicas

Consequentemente, sequências senoidais / cosenoidais / exponenciais complexas não são necessariamente periódicas com período $(2\pi/\omega_0)$ e, dependendo do valor de ω_0, podem nem ser periódicas.

A não periodicidade ocorre quando o número de amostras contidas em um intervalo kT da senóide / cosenóide / exponencial complexa contínua que envelopa as amplitudes das amostras da sequência não for um número inteiro.

Sinais discretos no tempo - Algumas sequências básicas

Exemplo:

Para $\omega_0 = \frac{3\pi}{4}$, o menor valor de N para o qual $\omega_0 N = 2\pi k$, com k inteiro é $N = 8$, correspondendo a $k = 3$.

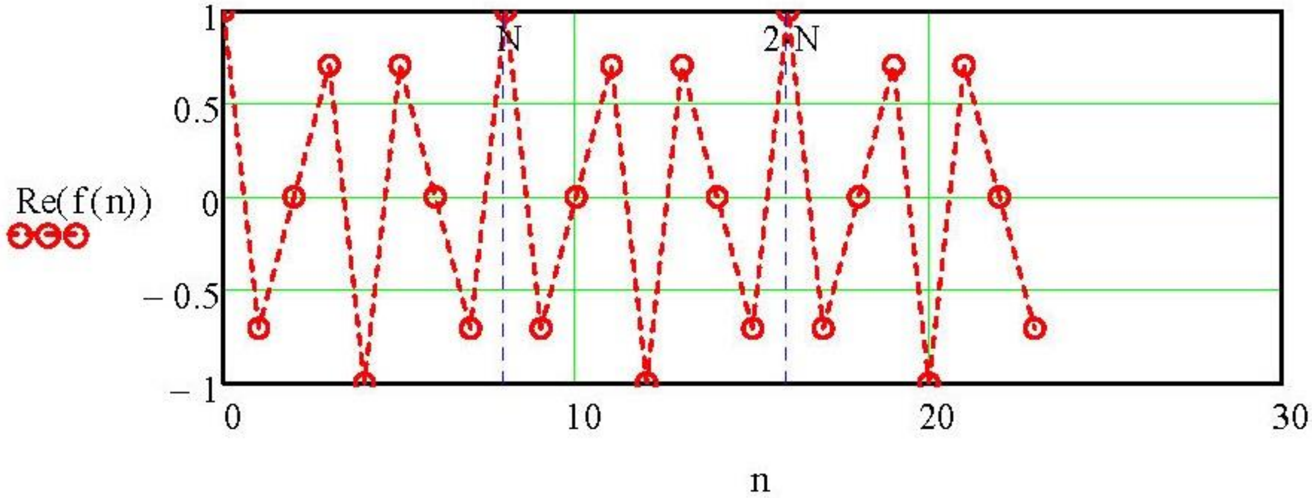
Ou seja, a sequencia possui uma periodicidade de N=8 amostras correspondente a 3 períodos da exponencial complexa contínua que envelopa as amplitudes das amostras da sequência.

Note que para $\omega_0 = 1$ não há valores inteiros de N ou k que satisfaçam $\omega_0 N = 2\pi k$.

Portanto, há um conjunto de N possíveis frequências distintas ω_k , com $k = 0, 1, \dots, N-1$, para as quais as sequências são periódicas, sendo cada uma das N frequências dada por $\omega_k = \frac{2\pi k}{N}$.

Sinais discretos no tempo - Algumas sequências básicas

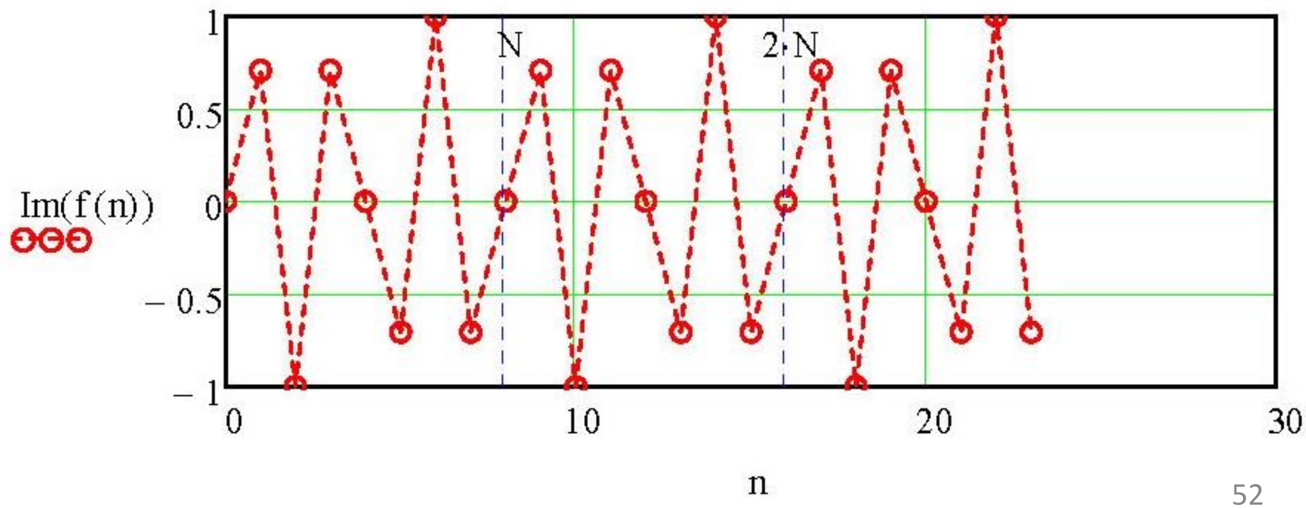
$$f(n) = e^{j(\omega_0 n)} = \cos(\omega_0 n) + j\sin(\omega_0 n)$$



$\omega o := \frac{3 \cdot \pi}{4}$ $N := 8$

$M := 3 \cdot N$ $n := 0, 1 .. M - 1$

$f(n) := e^{j \cdot \omega o \cdot n}$

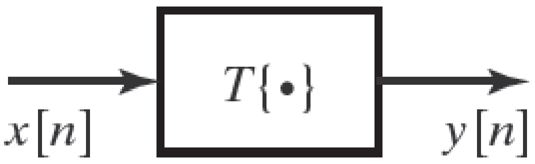


Sistema de tempo discreto

Um sistema de tempo discreto é definido matematicamente como uma transformação ou operador que mapeia uma sequência de entrada com valores $x[n]$ em uma sequência de saída com valores $y[n]$, conforme

$$y[n] = T\{x[n]\}$$

Representação analítica de um sistema de tempo discreto



Representação pictórica de um sistema de tempo discreto, onde $T\{\bullet\}$ é o operador que define a transmitância do sistema.

A equação $y[n] = T\{x[n]\}$ expressa como a sequência de saída é computada, a partir da sequência de entrada.

Note que o valor da sequência de saída, a cada valor do índice n, será uma função de $x[n]$, para todos os valores de n.

Sistema de tempo discreto

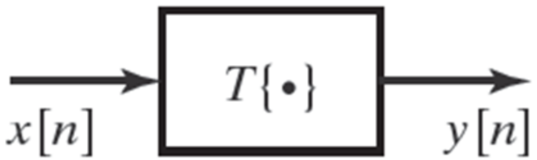
Um exemplo de sistema discreto é o sistema de atraso ideal, definido por

$$y[n] = x[n - n_d], \quad -\infty < n < \infty,$$

- Onde n_d é um inteiro fixo positivo denominado “atraso do sistema”.
- Este sistema desloca a sequência de entrada para a direita (atrasa) por n_d amostras para formar a saída.
- Se n_d é um inteiro fixo negativo, então os sistema deslocará a sequência para a esquerda por n_d amostras, correspondendo a um avanço no tempo.

Sistema de tempo discreto

Classes de sistemas são definidas a partir de restrições nas propriedades da transmitância $T\{\cdot\}$.



As classes de nosso interesse compreendem:

- Sistema sem memória
- Sistema lineares
- Sistema invariantes no tempo
- Sistema causais
- Sistema estáveis

Sistema de tempo discreto

Sistema sem memória

Um sistema é dito sem memória se a saída $y[n]$ para cada valor de n depender somente da entrada $x[n]$ para o mesmo valor de n.

Um exemplo de sistema sem memória é aquele em que

$$y[n] = (x[n])^2 \quad \text{para cada valor de } n.$$

O sistema discreto do exemplo anterior $y[n] = x[n - n_d]$ não será um sistema sem memória, a menos que $n_d = 0$.

Sistema de tempo discreto

Sistema linear

A classe dos sistemas lineares é definida pelo princípio da superposição.

Se $y_1[n]$ e $y_2[n]$ são as respostas de um sistema quando $x_1[n]$ e $x_2[n]$ são as respectivas entradas, então o sistema é linear, se e somente se

$$T\{x_1[n] + x_2[n]\} = T\{x_1[n]\} + T\{x_2[n]\} = y_1[n]+y_2[n]$$

propriedade da aditividade

e

$$T\{ax[n]\} = aT\{x[n]\} = ay[n]$$

propriedade da homogeneidade ou *mudança de escala*.

onde é uma constante arbitrária.

Sistema de tempo discreto

Sistema linear

A propriedade da aditividade e a propriedade da mudança de escala podem ser combinadas em um princípio, o princípio da superposição. Desta forma,

$$T\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = aT\{x_1[n]\} + bT\{x_2[n]\}$$

sendo a e b duas constantes arbitrárias.

O princípio da superposição pode ser generalizado para múltiplas entradas. Especificamente, se

$$x[n] = \sum_k a_k x_k[n] \quad \text{então} \quad y[n] = \sum_k a_k y_k[n]$$

onde $y_k[n]$ é a resposta do sistema à entrada $x_k[n]$.

Sistema de tempo discreto

Sistema linear

Um exemplo de sistema linear é aquele em que

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

A saída do sistema a cada instante amostral n é igual à soma cumulativa do valor no instante n e de todos os valores prévios da entrada.

Sistema de tempo discreto

Sistema invariante no tempo

Um sistema invariante no tempo é um sistema para o qual um deslocamento ou atraso no tempo da sequência de entrada causa um deslocamento correspondente na sequência de saída.

Especificamente, suponha que um sistema transforme a sequência de entrada com valores $x[n]$ em sequências de saída com valores $y[n]$.

O sistema será dito invariante no tempo se,

para todo n_0 , a sequência de entrada com valores $x_1[n] = x[n - n_0]$

produzir uma sequência de saída com valores $y_1[n] = y[n - n_0]$.

Sistema de tempo discreto

Sistema invariante no tempo

O sistema definido pela relação $y[n] = nx[n]$

não é invariante no tempo, porque

para $x_1[n] = x[n - n_0]$ temos $y_1[n] = n\,x[n - n_0]$,

que não é igual a $y[n - n_0]$.

Sistema de tempo discreto

Sistema Causal

Um sistema é causal se, para cada escolha de n_0, o valor da sequência de saída no índice $n = n_0$ depender somente dos valores da sequência de entrada para $n \leq n_0$.

Isto implica em que

se $x_1[n] = x_2[n]$ para $n \leq n_0$, então $y_1[n] = y_2[n]$ para $n \leq n_0$.

Ou seja, o sistema é não-antecipativo.

Por exemplo, o sistema $y[n] = x[n+1] - x[n]$, é não causal porque $y[n]$ depende de valor futuro da sequência, $x[n+1]$.

Entretanto, o sistema $y[n] = x[n] - x[n-1]$ é causal, pois $y[n]$ depende de valor passado da sequência, $x[n-1]$.

Sistema de tempo discreto

Sistema Estável

Um sistema é estável se e somente se, para cada sequência de entrada limitada em amplitude produzir uma sequência de saída também limitada em amplitude.

A sequência de entrada é limitada em amplitude se existe um valor fixo B_x finito e positivo, tal que $|x[n]| \leq B_x < \infty$ para todo n.

A estabilidade requer que, para cada entrada limitada em amplitude, exista um valor fixo B_y finito e positivo, tal que

$$|y[n]| \leq B_y < \infty \qquad \text{para todo } n.$$

Um exemplo de sistema estável é aquele em que

$$y[n] = (x[n])^2 \quad \text{para cada valor de } n.$$

Já o sistema $y[n] = y[n-1] + x[n]$ para cada valor de n não é estável.