Processamento Digital de Sinais

Outline:

- Sinais, sistemas de tempo discreto e sequências numéricas
- Operações básicas com sequências numéricas
- Convolução discreta
- Sistemas Lineares Invariantes no Tempo
- Sistemas LIT – caraterização pela resposta ao impulso
- Propriedades dos Sistemas Lineares Invariantes no Tempo
- Equações de diferença lineares e com coeficientes constantes
- Exercícios propostos

Sinais

Sinais são a representação matemática de um fluxo de informação, como uma função de variáveis independentes, tais como tempo, posição, etc.

Sinais podem ser caracterizados como:

- de variável independente contínua
- de variável independente discreta
- unidimensionais
- multidimensionais
- de amplitude contínua
- de amplitude discreta

Sistemas

Sistemas processam sinais, têm entradas e saídas, e podem ser de tempo discreto ou de tempo contínuo.

Sistemas podem ser caracterizados como:

- de tempo contínuo
- de tempo discreto
- lineares
- não-lineares
- variantes no tempo
- invariantes no tempo

Sinais

Sinais são a representação matemática de um fluxo de informação, como uma função de variáveis independentes, tais como tempo, posição, etc.

Sinais podem ser caracterizados como:

- de variável independente contínua
- de variável independente discreta
- unidimensionais
- multidimensionais
- de amplitude contínua
- de amplitude discreta

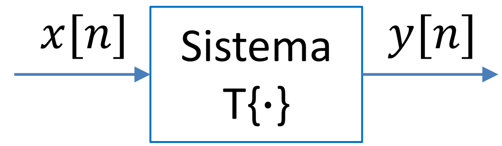
Sistemas

Sistemas processam sinais, têm entradas e saídas, e podem ser de tempo discreto ou de tempo contínuo.

Sistemas podem ser caracterizados como:

- de tempo contínuo
- de tempo discreto
- lineares
- não-lineares
- variantes no tempo
- invariantes no tempo

Sistema de tempo discreto processa sinais discretos no tempo



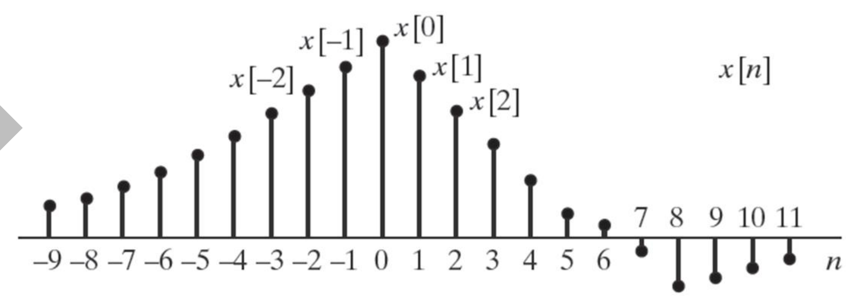
$$y[n] = T\{x[n]\}$$

Sinais discretos no tempo são representados como **sequências numéricas**

Uma sequência de números x, em que o n-ésimo número na sequência é indicado por $x[n]$, é escrita formalmente como

$$x = \{x[n]\}, \quad -\infty < n < \infty$$

Representação gráfica de um sinal discreto no tempo.



De modo geral, qualquer sequência pode ser expressa como

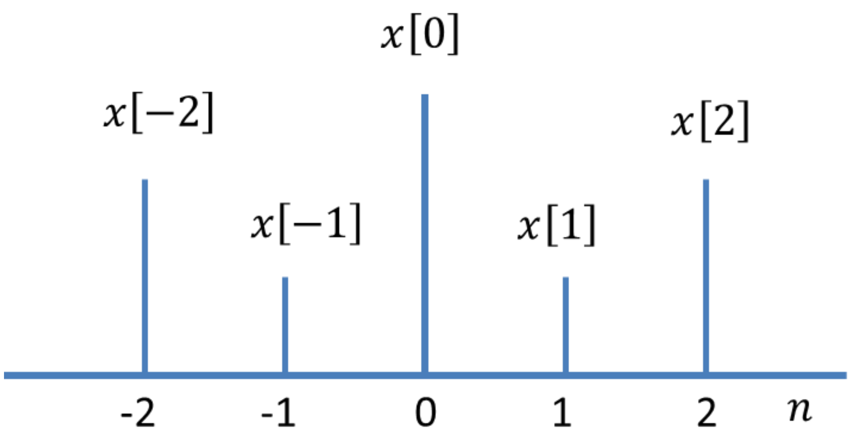
$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

onde $\delta[n]$ é o impulso unitário.

Sequências numéricas

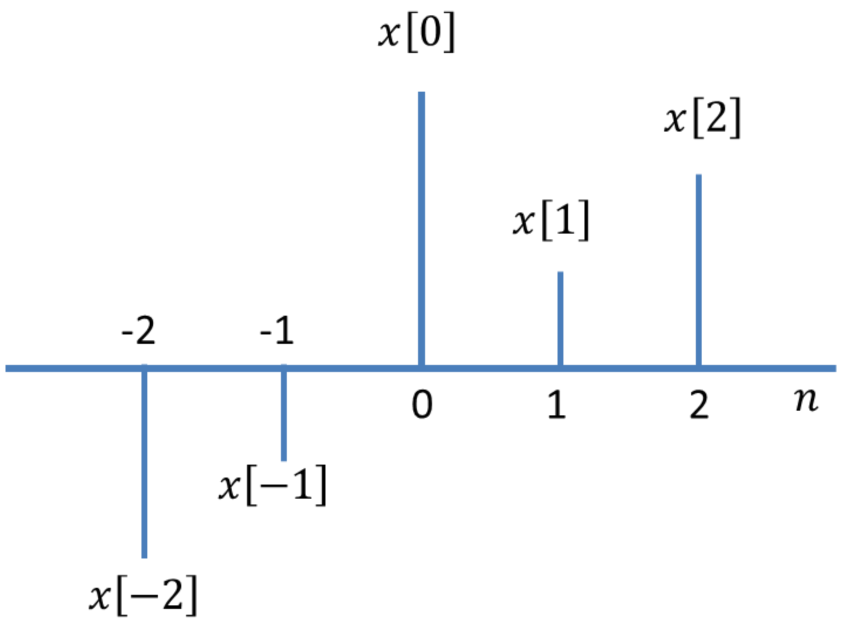
Sequência par:

$$x[n] = x[-n]$$



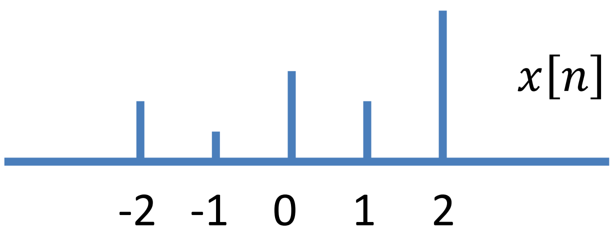
Sequência ímpar:

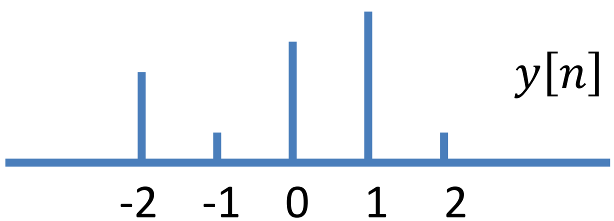
$$x[n] = -x[-n]$$

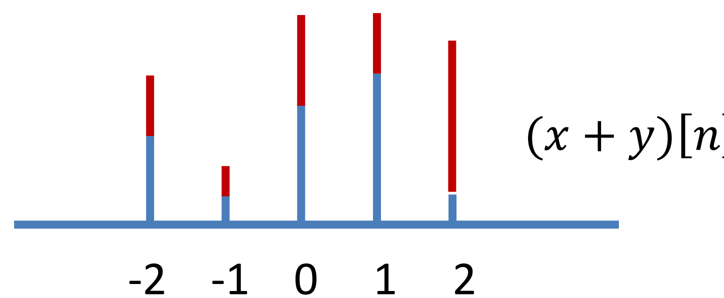


Operações básicas com sequências

1. Adição: $$(x + y)[n] = \{x[n] + y[n]\}$$

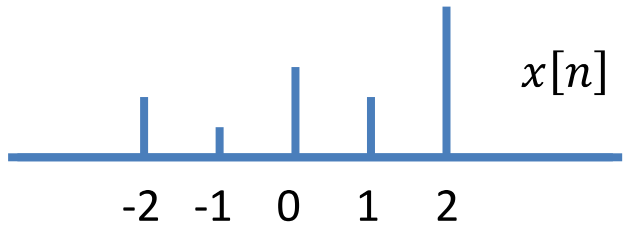


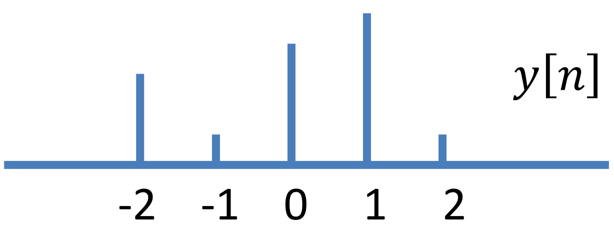


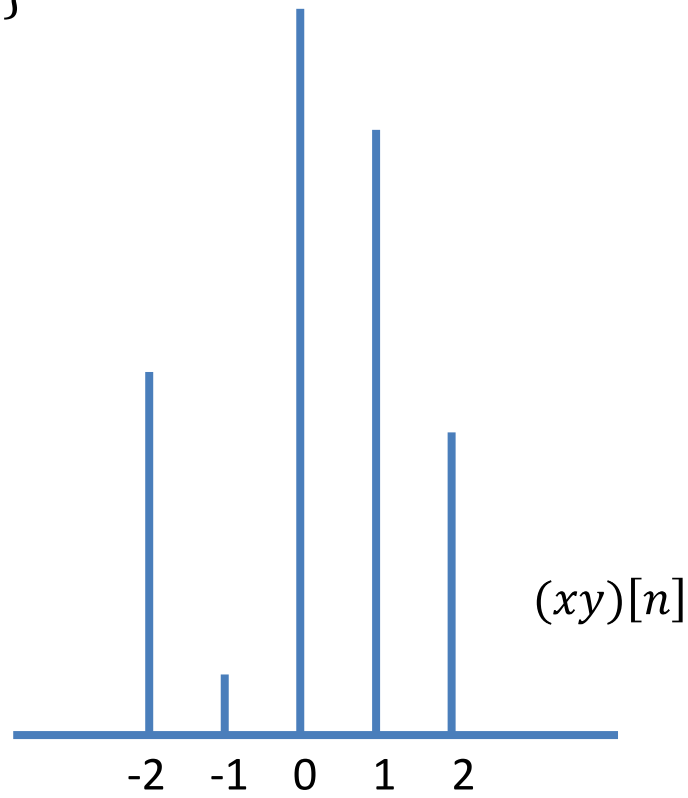


Operações básicas com sequências

2. Produto: $(xy)[n] = \{x[n]y[n]\}$

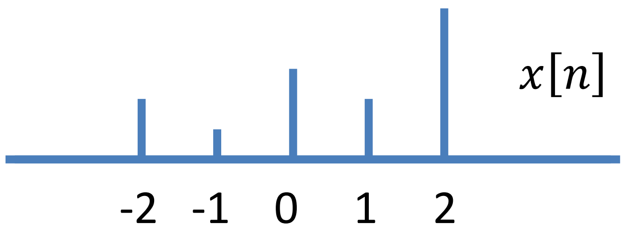


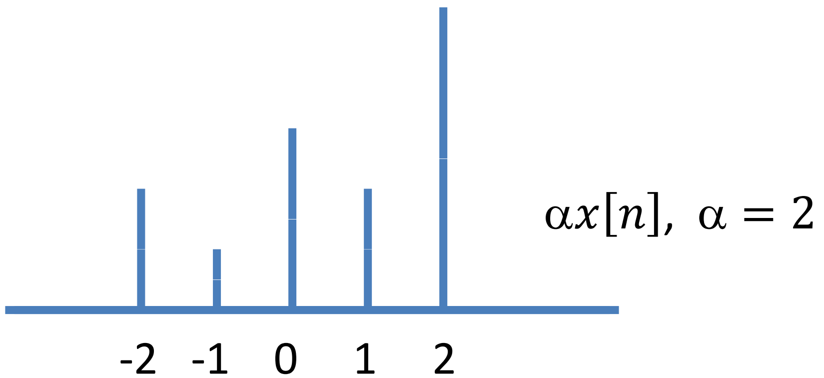




Operações básicas com sequências

3. Multiplicação Escalar: $\alpha x[n] = \{\alpha x[n]\}$

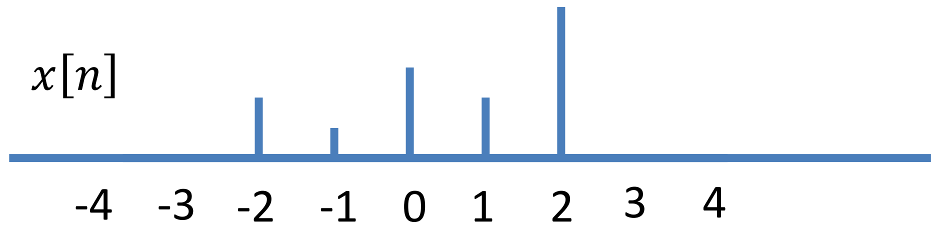




Operações básicas com sequências

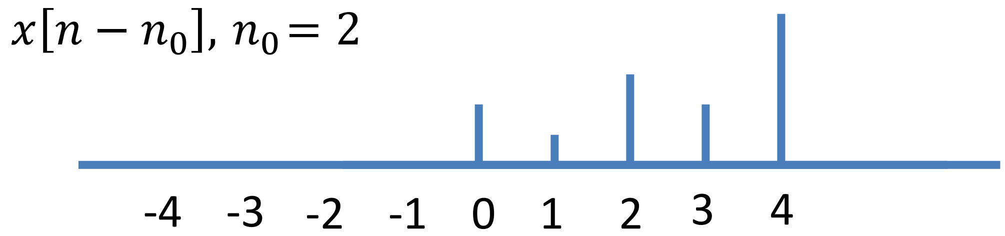
4. Translação (shift):

$$y[n] = x[n - n_0]$$



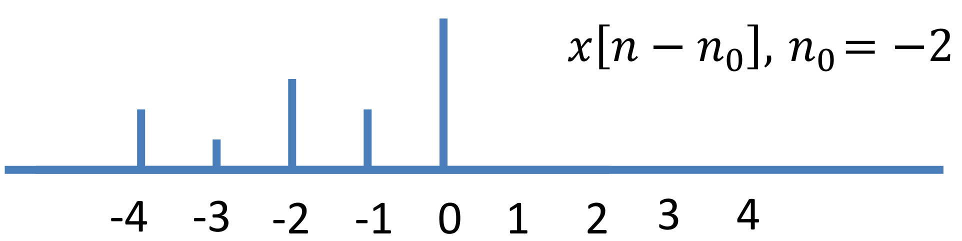
versão atrasada:

n_0 é um inteiro positivo
(shift para direita)



versão adiantada:

n_0 é um inteiro negativo
(shift para esquerda)



Operações básicas com sequências

5. Convolução: $$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

- Na operação de convolução, o n-ésimo valor da sequência de saída, $y[n]$ é obtido multiplicando a sequência de entrada, expressa como uma função de k ($x[k]$), pela sequência cujos valores são $h[n-k]$, $-\infty < k < \infty$.
- O primeiro passo é obter a sequência $h[n-k]$, $-\infty < k < \infty$ para todos os valores de n de interesse. Cabe notar que $h[n-k] = h[-(k-n)]$.
- A sequência $h[n-k]$, $-\infty < k < \infty$, é obtida refletindo $h[k]$ sobre a origem, para obter $h[-k]$, e deslocando a origem da sequência refletida para $k = n$.
- Para implementar a convolução discreta, as sequências $x[k]$ e $h[n-k]$ são multiplicadas para $-\infty < k < \infty$, e os produtos são somados para computar a amostra $y[n]$ da sequência de saída.
- Para obter a próxima amostra da sequência de saída, a origem da sequência $h[-k]$ é deslocada para a nova posição, e o processo é repetido.

Convolução Discreta - Exemplo

Execute a convolução entre as sequências $x[n]$ e $y[n]$ a seguir descritas.

$$x[n] = \begin{cases} 0.5, & n = 0 \\ 2.0, & n = 1 \\ 0, caso\ contrário. \end{cases}$$

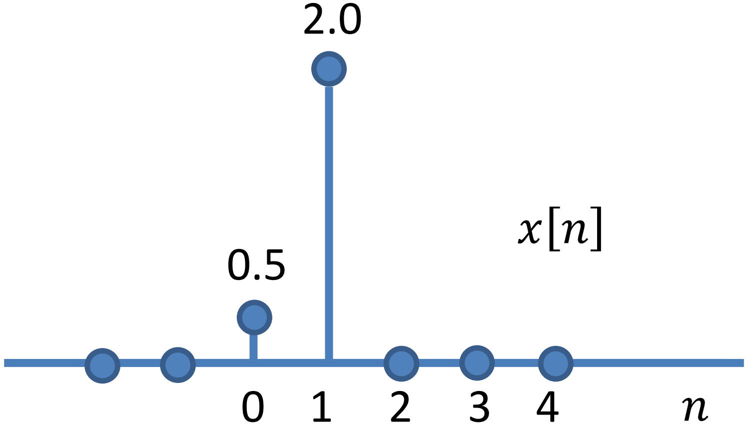
$$h[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, 1\ e\ 2 \\ 0, caso\ contrário. \end{cases}$$

Convolução Discreta - Exemplo

Execute a convolução entre as sequências $x[n]$ e $y[n]$ a seguir descritas.

$$x[n] = \begin{cases} 0.5, & n = 0 \\ 2.0, & n = 1 \\ 0, \mathit{caso\ contrário}. \end{cases}$$

$$h[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, 1\ e\ 2 \\ 0, \mathit{caso\ contrário}. \end{cases}$$

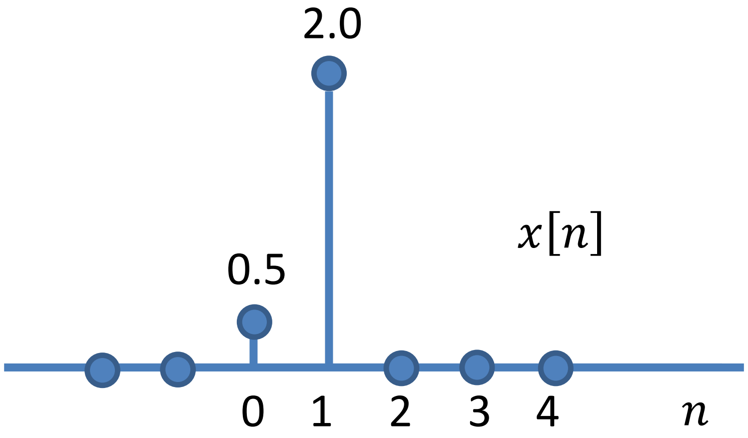


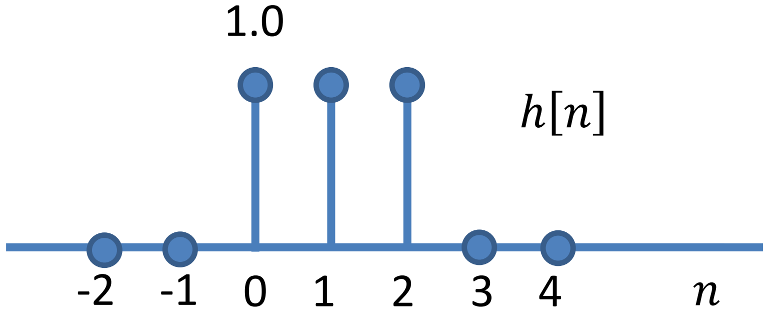
Convolução Discreta - Exemplo

Execute a convolução entre as sequências $x[n]$ e $y[n]$ a seguir descritas.

$$x[n] = \begin{cases} 0.5, & n = 0 \\ 2.0, & n = 1 \\ 0, caso\ contrário. \end{cases}$$

$$h[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, 1\ e\ 2 \\ 0, caso\ contrário. \end{cases}$$

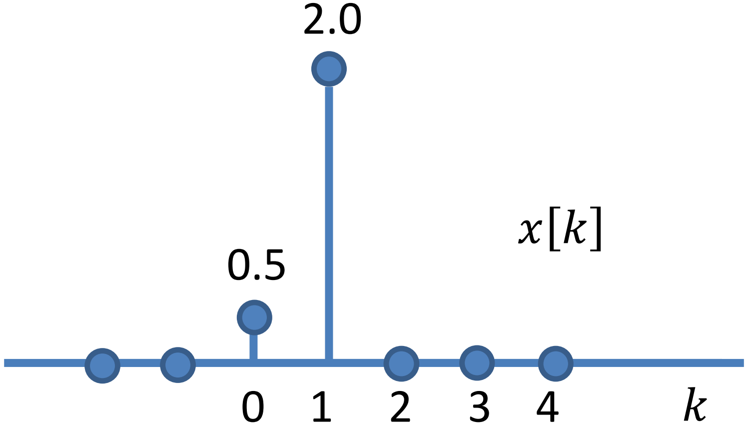


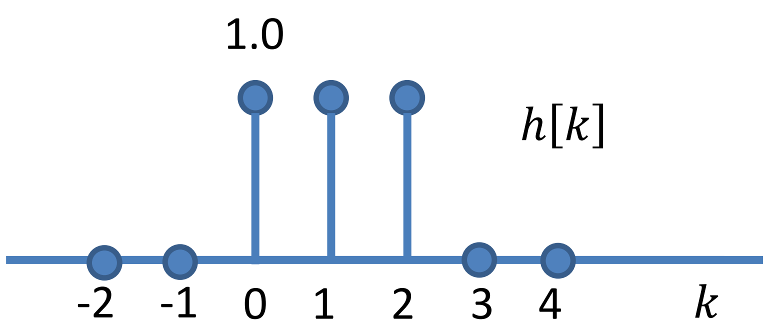


Convolução Discreta - Exemplo

Na operação de convolução $(x[n] * h[n])$, o n-ésimo valor da sequência de saída, $y[n]$ é obtido multiplicando a sequência de entrada, expressa como uma função de k $(x[k])$, pela sequência cujos valores são $h[n-k]$, $-\infty < k < \infty$.

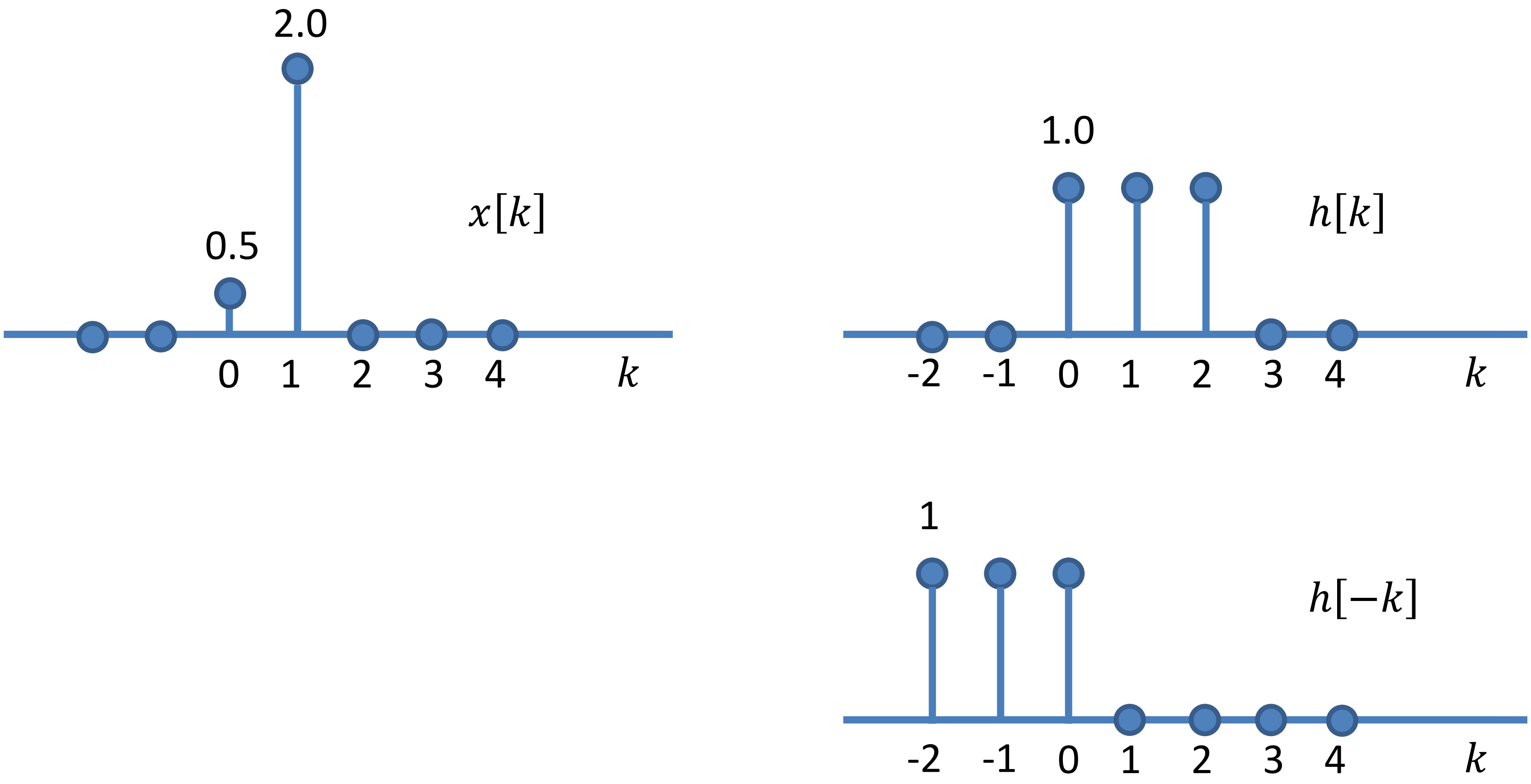
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$





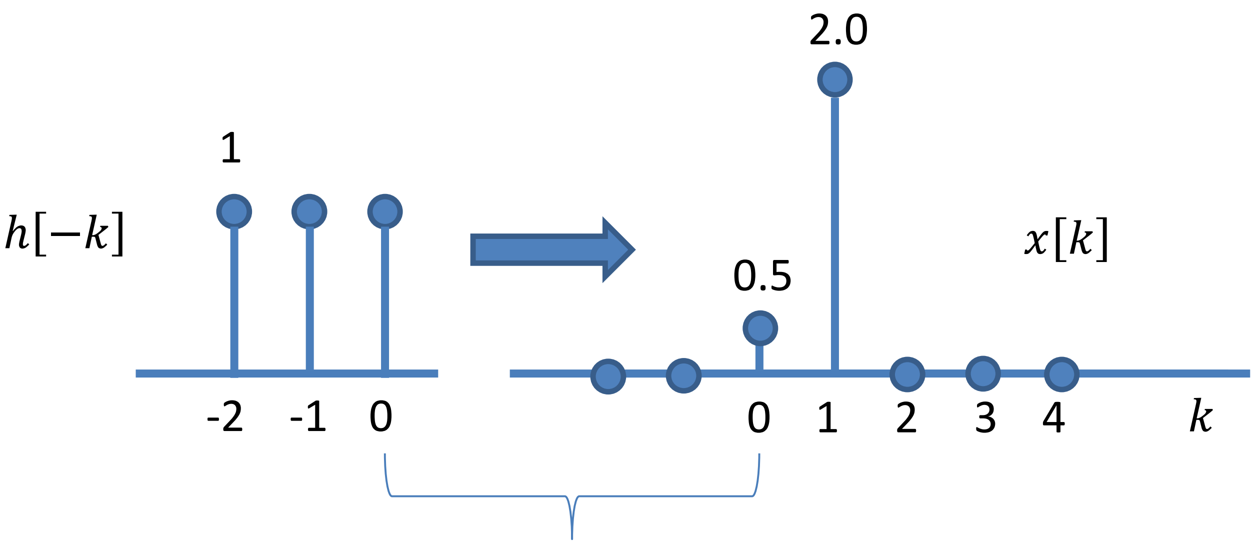
Convolução Discreta - Exemplo

A sequência $h[n-k]$, $-\infty < k < \infty$, é obtida refletindo $h[k]$ sobre a origem, para obter $h[-k]$, e deslocando a origem da sequência refletida para $k = n$.



Convolução Discreta - Exemplo

A sequência $h[n-k]$, $-\infty < k < \infty$, é obtida refletindo $h[k]$ sobre a origem, para obter $h[-k]$, e deslocando a origem da sequência refletida para $k = n$.

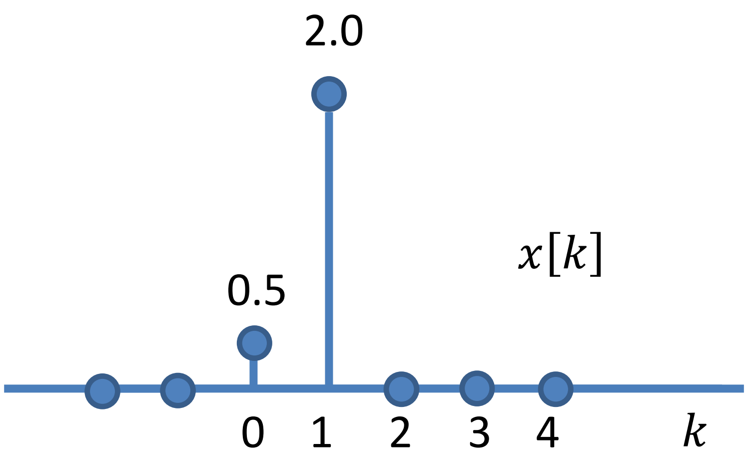


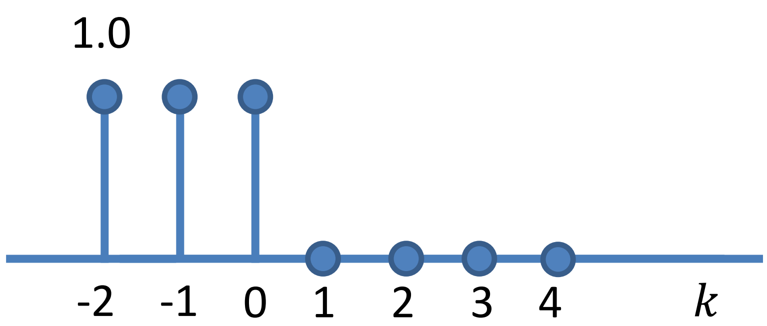
Primeiro produto não nulo = quando o elemento não nulo mais à direita de $h[-k]$ se sobrepuser ao elemento não nulo mais à esquerda de $x[k]$.

Convolução Discreta - Exemplo

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

$$h[n-k], n = 0 \;\longrightarrow\; h[0-k]$$





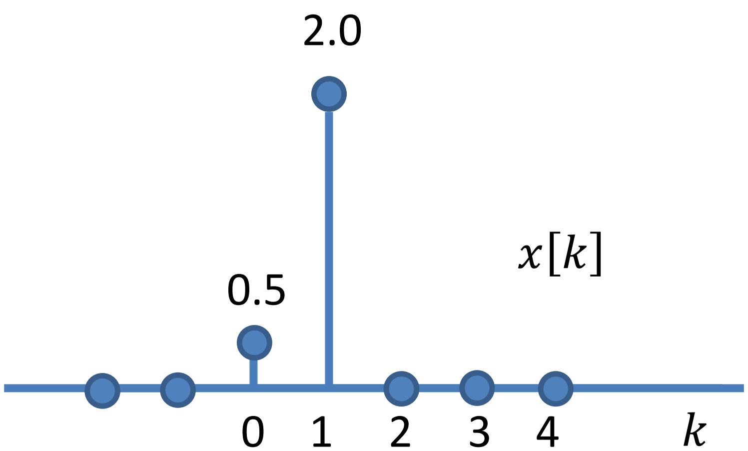
$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[0-k] = (0.5)(1.0) = 0.5$$

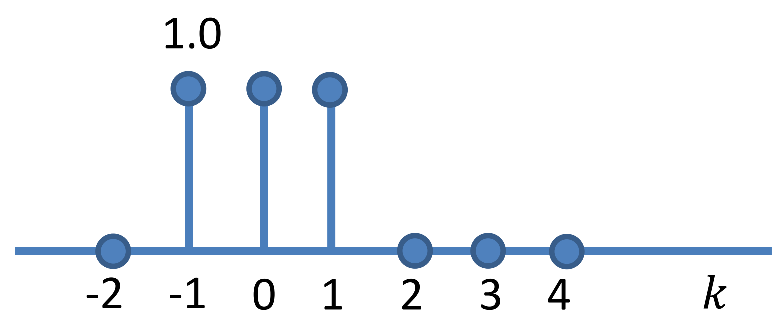
Convolução Discreta - Exemplo

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

$$h[n-k], n = 1$$

$$h[1-k]$$





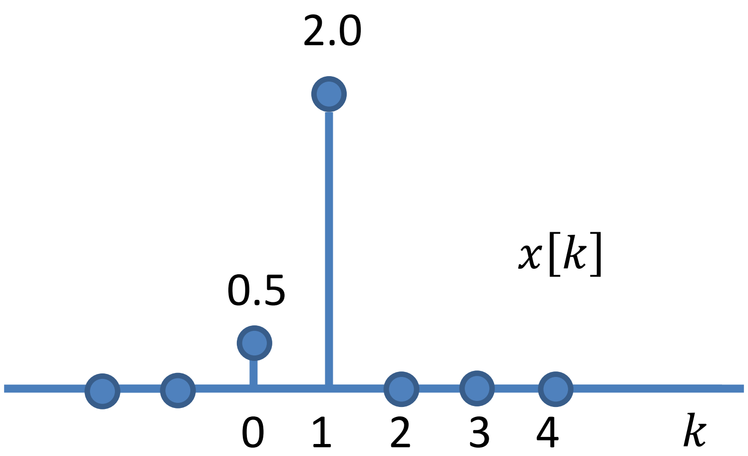
$$y[1] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[1-k] = (0.5)(1.0) + (2.0)(1.0) = 2.5$$

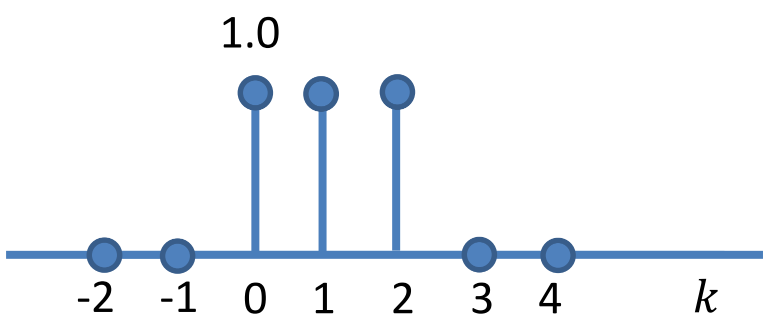
Convolução Discreta - Exemplo

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

$h[n-k], n = 2$

$h[2-k]$





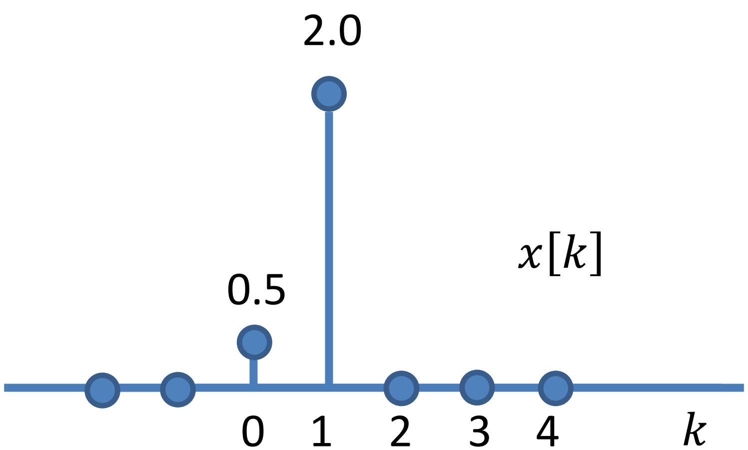
$$y[2] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[2-k] = (0.5)(1.0) + (2.0)(1.0) = 2.5$$

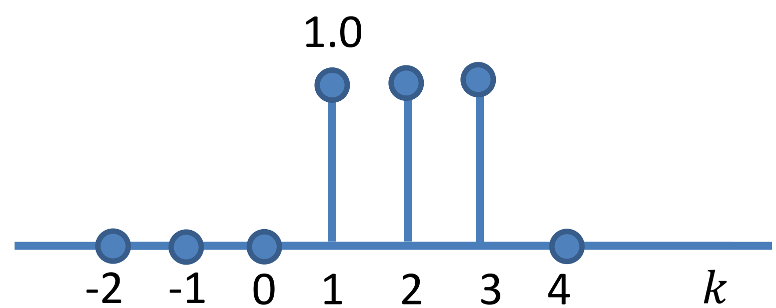
Convolução Discreta - Exemplo

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

$$h[n-k], n = 3$$

$$h[3-k]$$





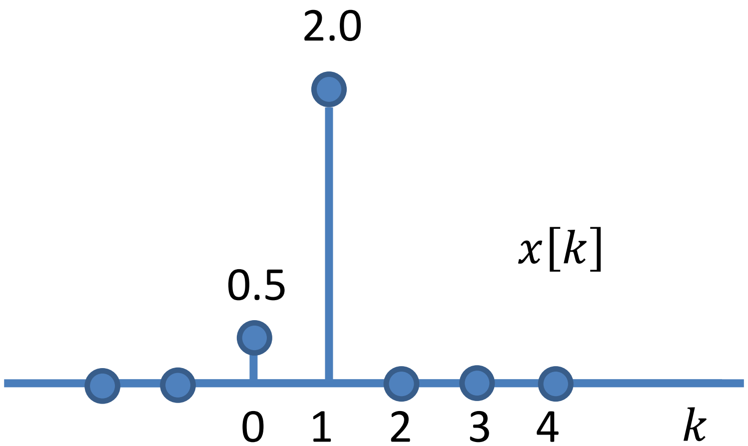
$$y[3] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[3-k] = (2.0)(1.0) = 2.0$$

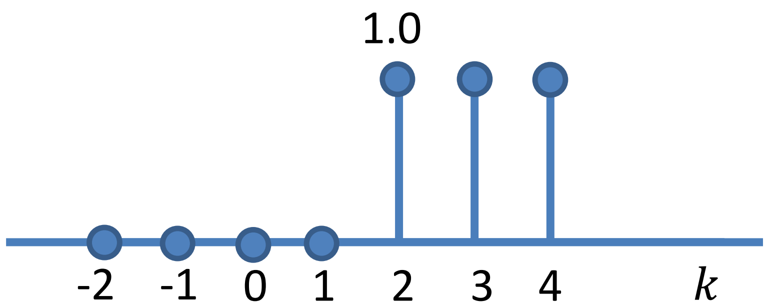
Convolução Discreta - Exemplo

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

$h[n-k], n = 4$

$h[4-k]$

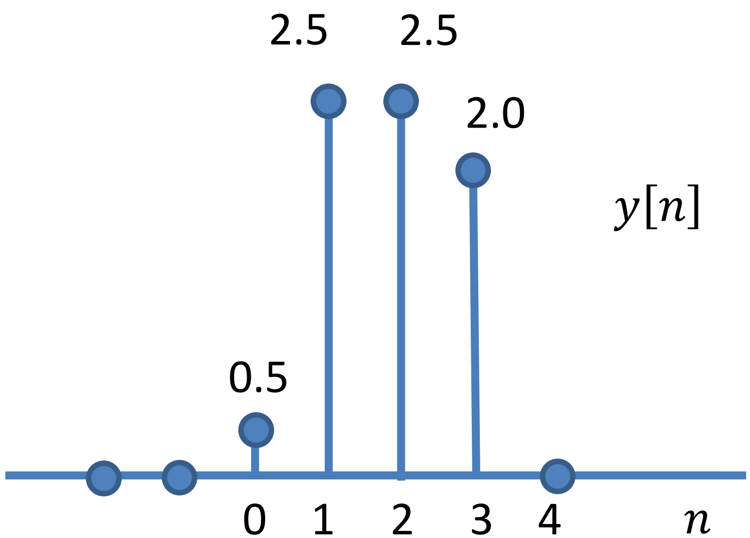




$$y[4] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[4-k] = 0$$

Convolução Discreta - Exemplo

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

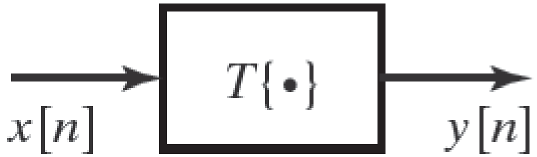


$$y[0] = 0.5\ ; \quad y[1] = 2.5\ ; \quad y[2] = 2.5\ ; \quad y[3] = 2.0\ ; \quad y[4] = 0$$

Sistemas Lineares Invariantes no Tempo

Conforme já vimos, um <u>sistema de tempo discreto</u> é definido matematicamente como uma transformação ou operador que mapeia uma sequência de entrada com valores $x[n]$ em uma sequência de saída com valores $y[n]$, conforme $y[n] = T\{x[n]\}$.

Um sistema de tempo discreto é representado por



onde $T\{\bullet\}$ é o operador que define a transmitância do sistema.

Sistemas Lineares Invariantes no Tempo

Se $y_1[n]$ e $y_2[n]$ são as respostas de um sistema quando $x_1[n]$ e $x_2[n]$ são as respectivas entradas, um sistema linear é aquele em que a propriedade da aditividade e a propriedade da mudança de escala podem ser combinadas em um princípio, o princípio da superposição, conforme

$$T\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = aT\{x_1[n]\} + bT\{x_2[n]\}$$

sendo a e b duas constantes arbitrárias.

Lembrando que o princípio da superposição é válido para múltiplas entradas, ou seja, quando tivermos

$x[n] = \sum_k a_k x_k[n]$, então a saída do sistema linear será $y[n] = \sum_k a_k y_k[n]$,

onde $y_k[n]$ é a resposta do sistema à entrada $x_k[n]$.

Sistemas Lineares Invariantes no Tempo

Um sistema invariante no tempo é um sistema para o qual um deslocamento ou atraso no tempo da sequência de entrada causa um deslocamento correspondente na sequência de saída.

Especificamente, suponha que um sistema transforme a sequência de entrada com valores $x[n]$ em sequências de saída com valores $y[n]$.

O sistema será dito invariante no tempo se,

para todo n_0, a sequência de entrada com valores $x_1[n] = x[n - n_0]$

produzir uma sequência de saída com valores $y_1[n] = y[n - n_0]$.

Sistemas Lineares Invariantes no Tempo

A combinação das propriedades de linearidade e de invariância no tempo permitem representações muito convenientes para tais sistemas, com aplicações importantes em DSP.

Sistemas lineares são definidos pelo princípio da superposição,

$$T\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = aT\{x_1[n]\} + bT\{x_2[n]\}$$

Se a linearidade é combinada com a representação de uma sequência como uma combinação linear de impulsos atrasados, conforme

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$

Então um sistema linear pode ser completamente caracterizado por sua resposta ao impulso $h[n]$.

Sistemas Lineares Invariantes no Tempo

Ao combinar o princípio da linearidade com a representação de uma sequência como uma combinação linear de impulsos atrasados, temos

$$y[n] = T\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]\right\}$$

A partir do princípio da superposição, podemos escrever que

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]T\{\delta[n-k]\}$$

Especificamente, se $h_k[n]$ é a resposta do sistema a $\delta[n-k]$ (um impulso ocorrendo em $n=k$), então,

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h_k[n]$$

[ ]

Sistemas Lineares Invariantes no Tempo

Se considerarmos, adicionalmente, a condição de invariância no tempo, podemos dizer que se $h[n]$ é a resposta do sistema a $\delta[n]$, então a resposta a $\delta[n-k]$ é $h[n-k]$, de tal forma que a equação

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h_k\,[n]$$

pode ser escrita como

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h\,[n-k] \quad \text{para todo } n.$$

Como consequência desta equação é possível afirmar que um sistema LIT é completamente caracterizado por sua resposta ao impulso $h[n]$, no sentido de que, dado $h[n]$, é possível usar a equação acima para calcular a saída y$[n]$ dada à qualquer entrada $x[n]$.

Sistemas Lineares Invariantes no Tempo

Para determinar a saída $y[n]$ de um sistema LIT a um dado sinal de entrada $x[n]$, efetua-se, então, a operação de convolução entre o sinal de entrada $x[n]$ e a resposta ao impulso $h[n]$ do sistema LIT.

$$y[n] = x[n] * h[n] \qquad y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

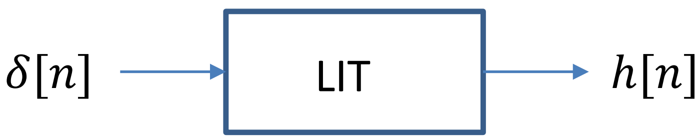
Obtém-se a resposta $h[n]$ de um sistema LIT colocando-se uma única amostra de valor unitário na entrada do sistema (um impulso) e registra-se a sequência resultante $h[n]$ na saída do sistema.

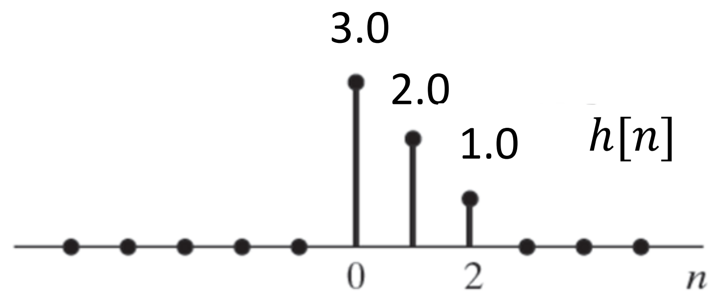
$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0, \\ 1, & n = 0. \end{cases}$$

Os sistemas LIT são completamente caraterizados no domínio tempo discreto pela sua resposta ao impulso, h[n].

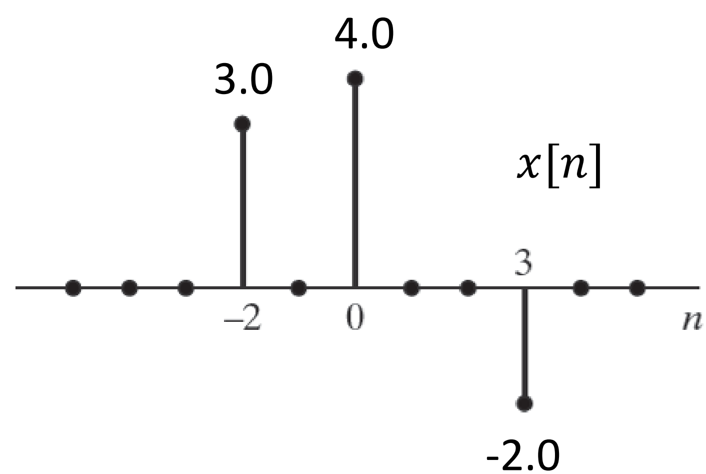
Sistemas Lineares Invariantes no Tempo - Exemplo

Sabe-se que a resposta ao impulso de um sistema LIT é dada por $h[n]$, conforme





Se for aplicada à entrada do sistema LIT a sequência $x[n]$, qual será a saída $y[n]$ do sistema?

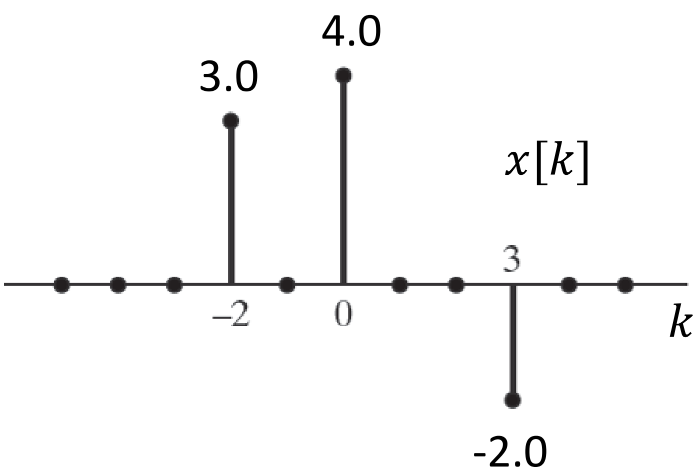


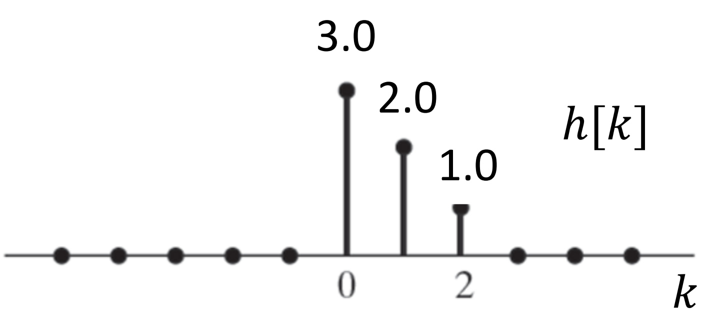
Sistemas Lineares Invariantes no Tempo - Exemplo

Para determinar a saída do sistema precisamos executar a convolução da sequência de entrada com a resposta ao impulso do sistema, ou seja,

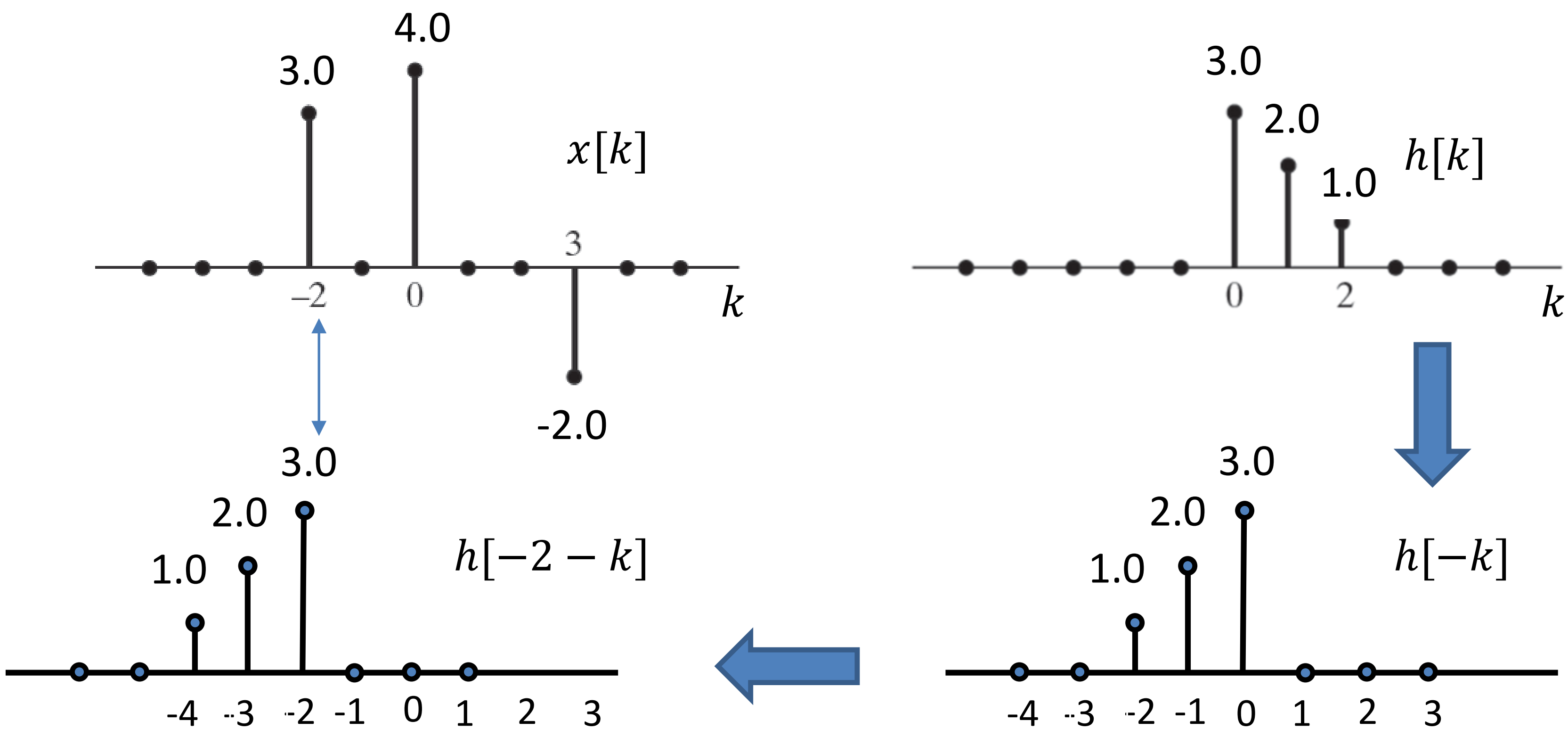
$$y[n] = x[n] * h[n] \qquad\qquad y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

Para tanto, iniciamos considerando a sequência de entrada e a resposta ao impulso expressas em função de k, $-\infty < k < \infty$.



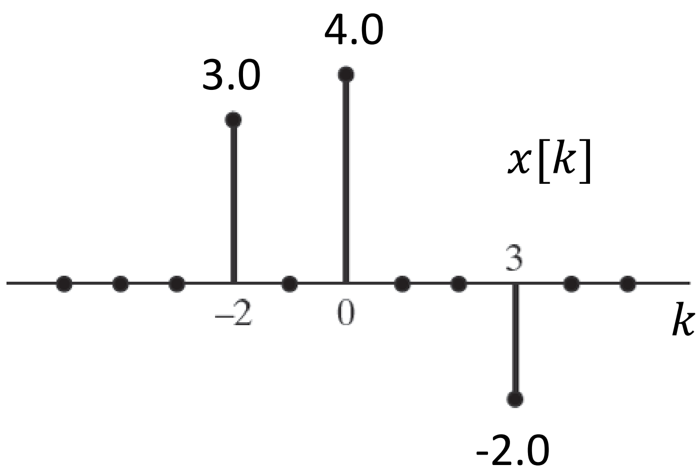


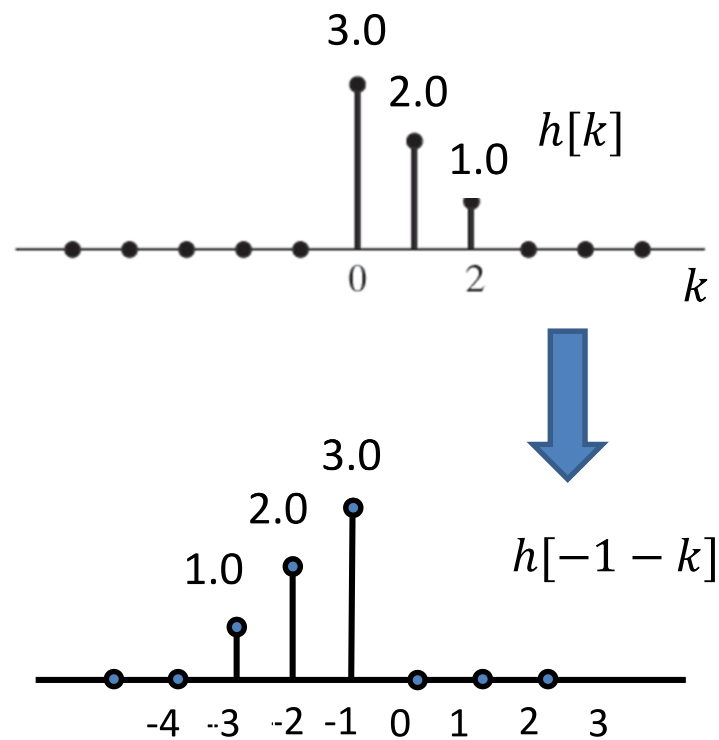
Sistemas Lineares Invariantes no Tempo - Exemplo



$$y[-2] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[-2-k] = (3.0)(3.0) = 9.0$$

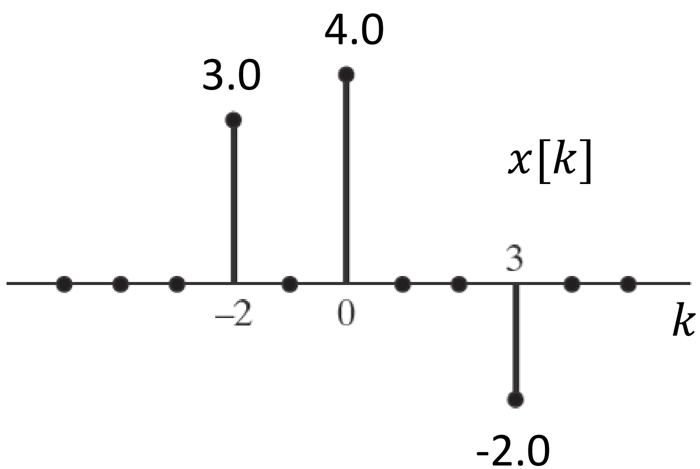
Sistemas Lineares Invariantes no Tempo - Exemplo

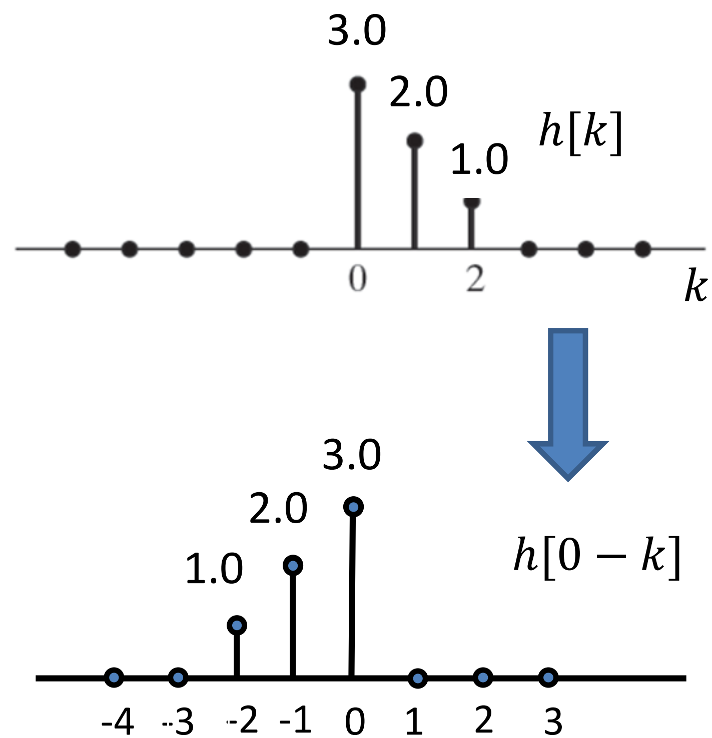




$$y[-1] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[-1-k] = (3.0)(2.0) = 6.0$$

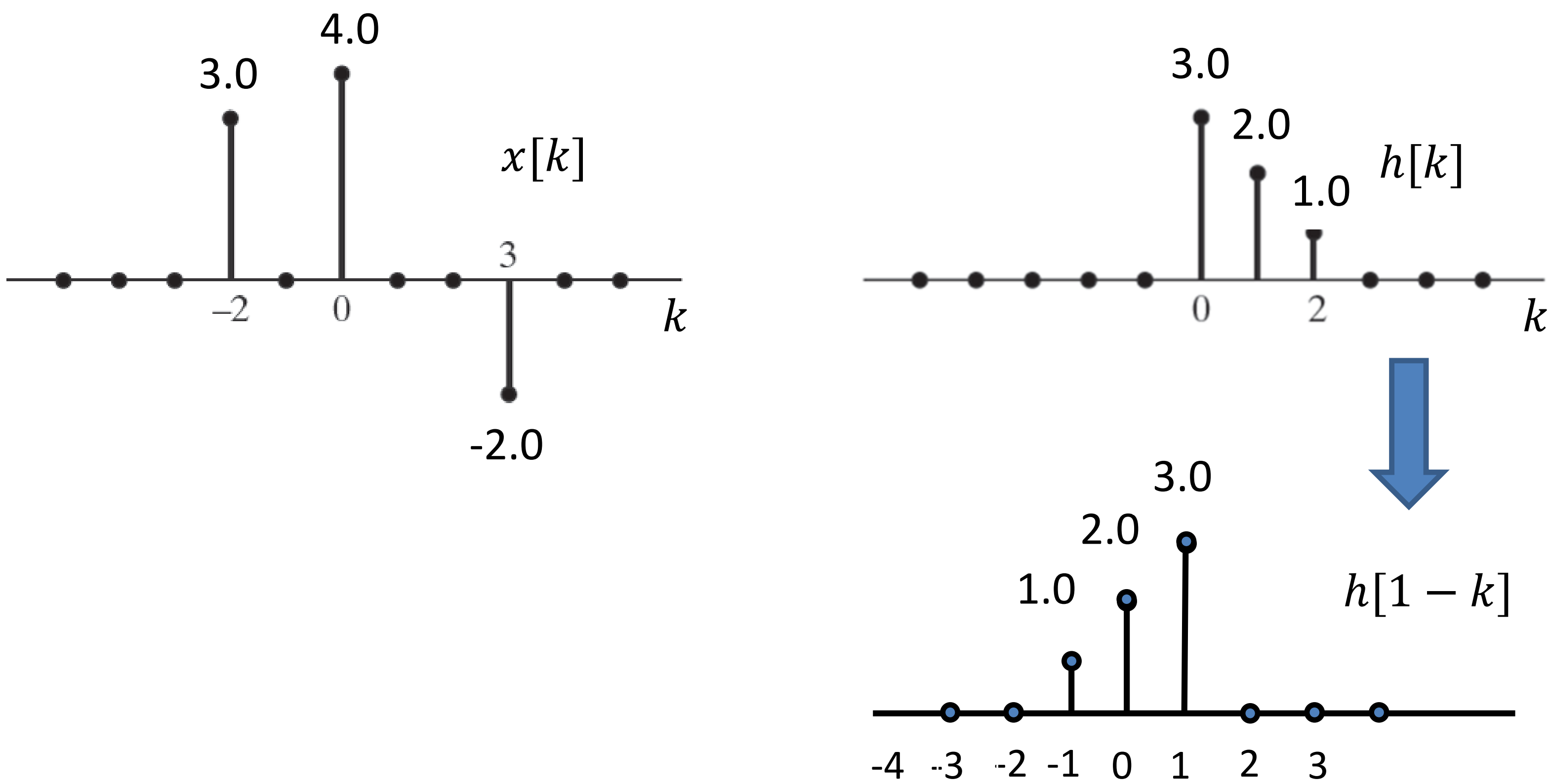
Sistemas Lineares Invariantes no Tempo - Exemplo





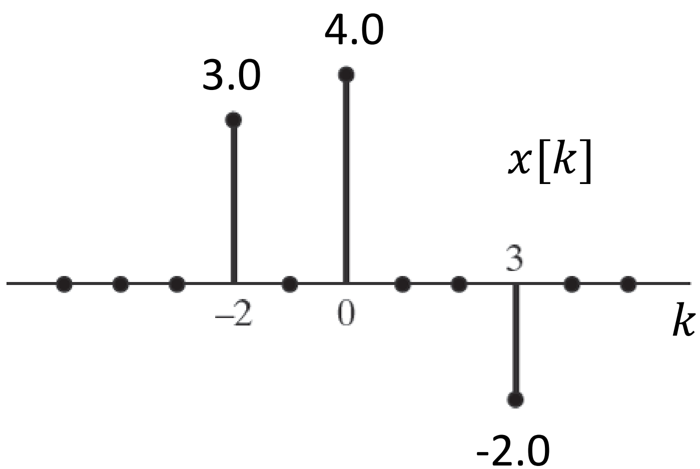
$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[0-k] = (3.0)(1.0) + (4.0)(3.0) = 15.0$$

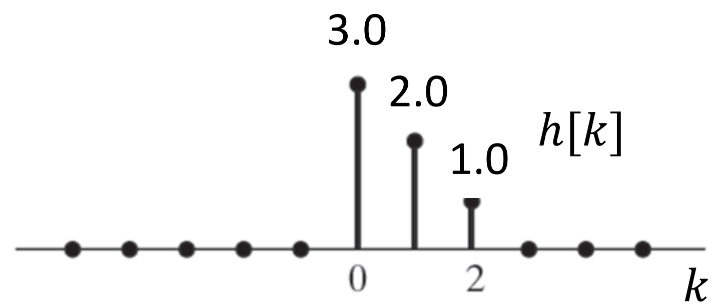
Sistemas Lineares Invariantes no Tempo - Exemplo

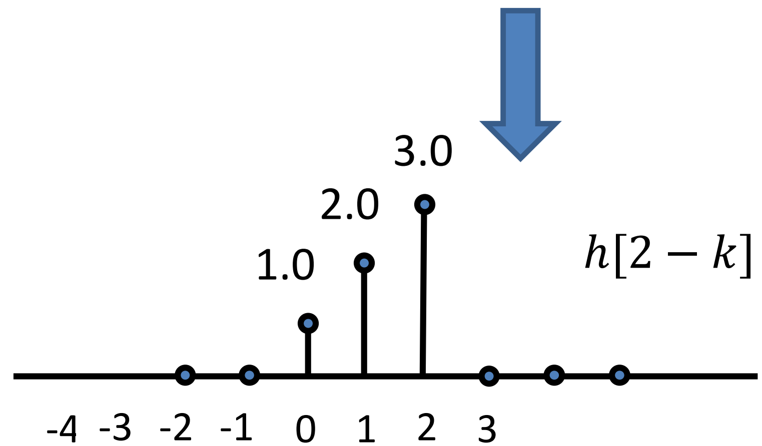


$$y[1] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[1-k] = (4.0)(2.0) = 8.0$$

Sistemas Lineares Invariantes no Tempo - Exemplo

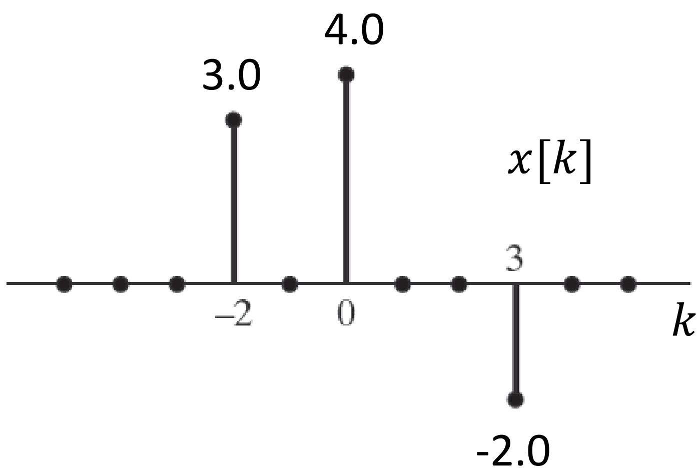


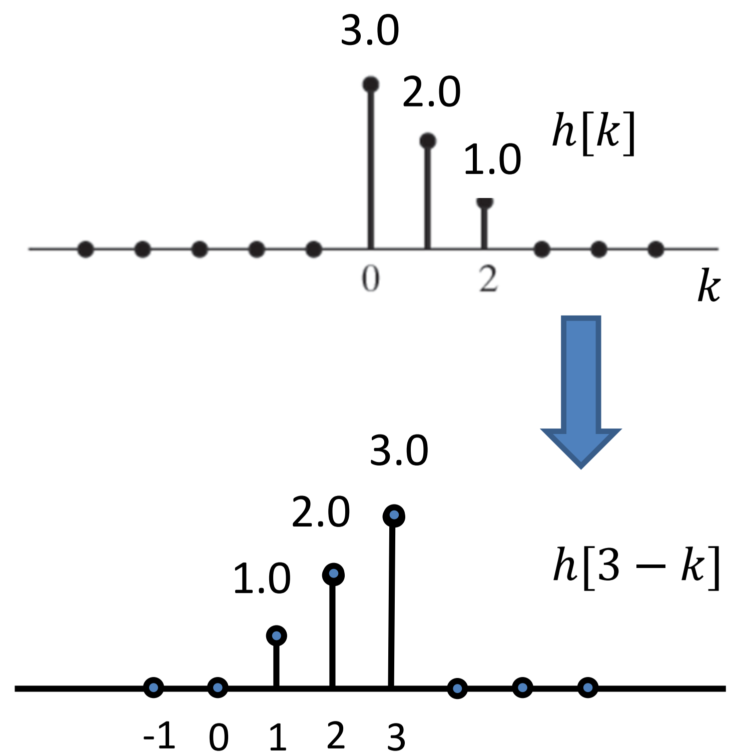




$$y[2] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[2-k] = (4.0)(1.0) = 4.0$$

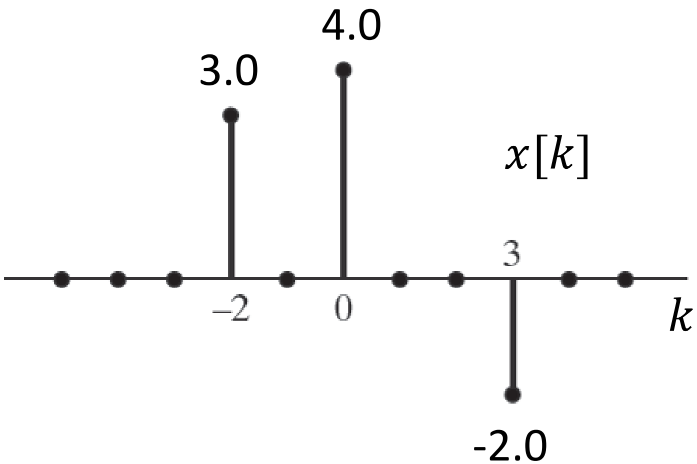
Sistemas Lineares Invariantes no Tempo - Exemplo

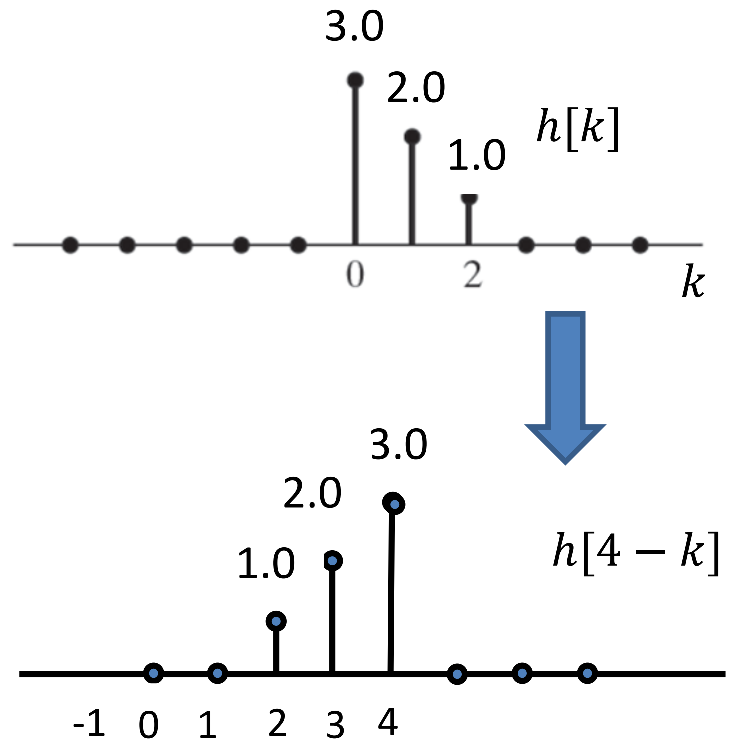




$$y[3] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[3-k] = (-2.0)(3.0) = -6.0$$

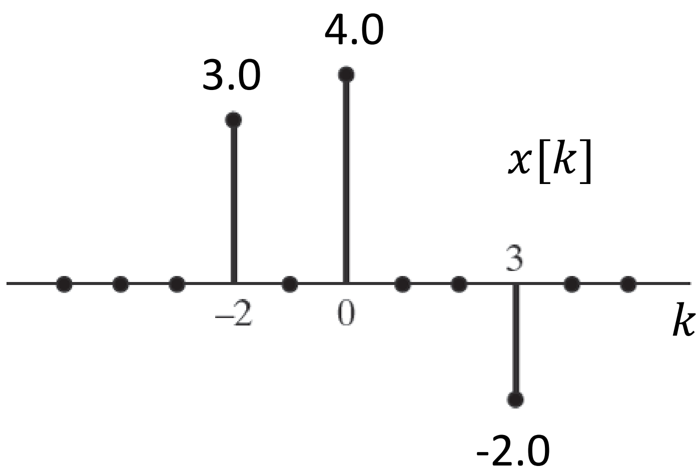
Sistemas Lineares Invariantes no Tempo - Exemplo

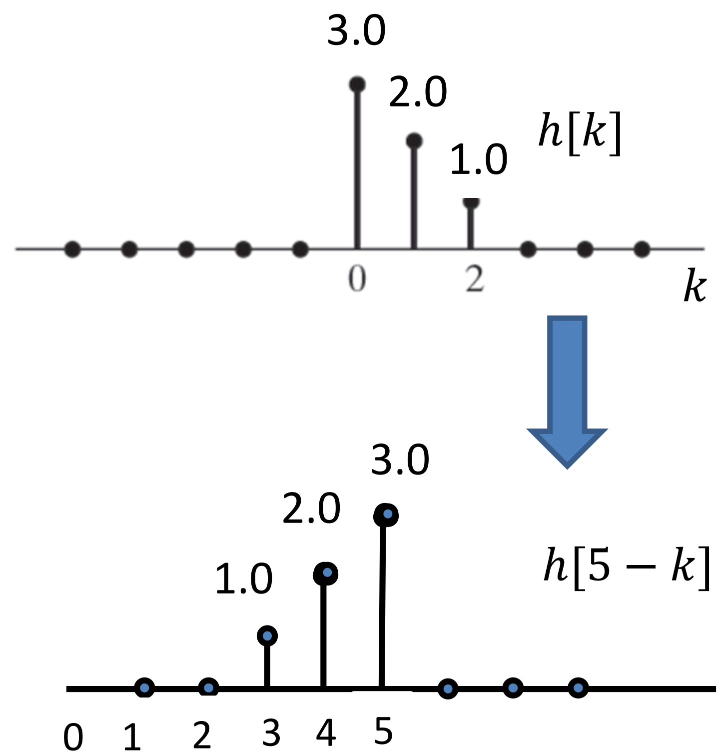




$$y[4] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[4-k] = (-2.0)(2.0) = -4.0$$

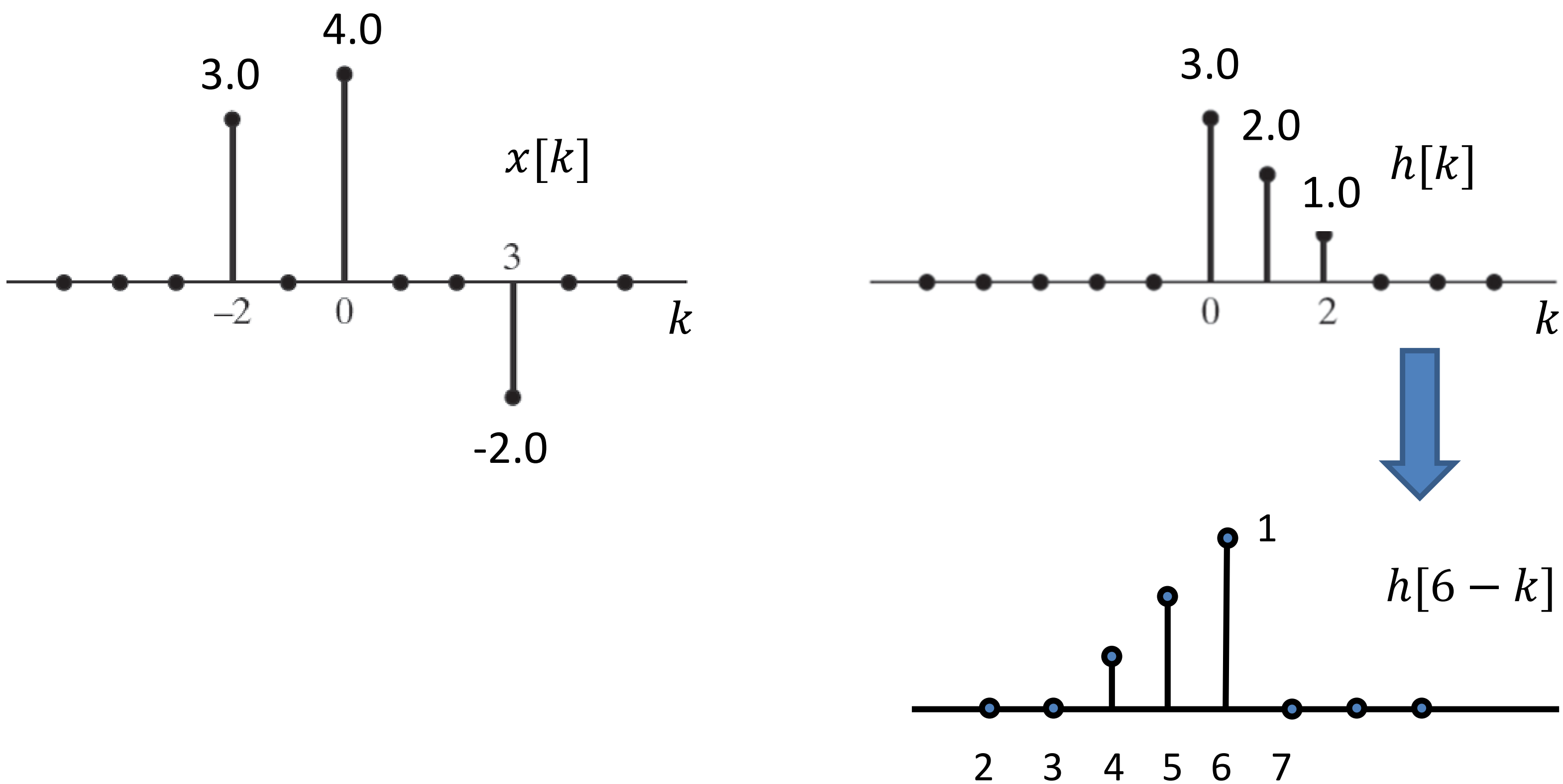
Sistemas Lineares Invariantes no Tempo - Exemplo





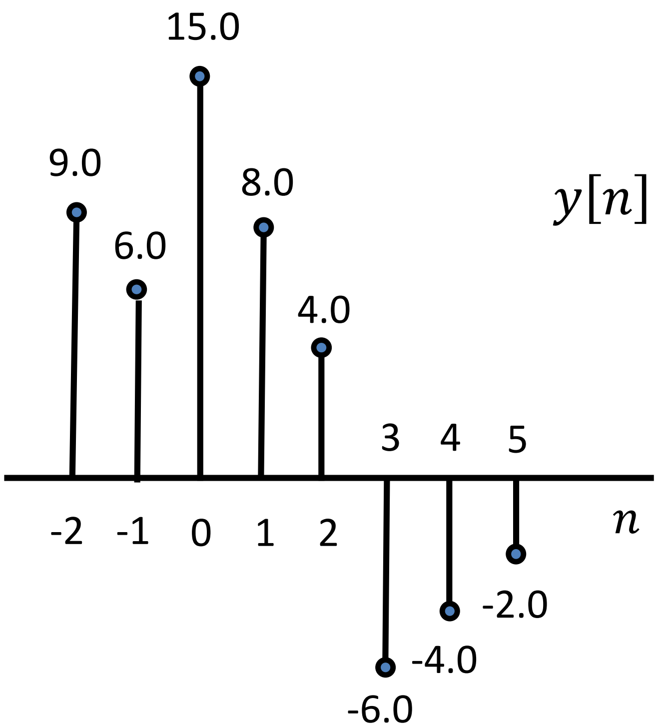
$$y[5] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[5-k] = (-2.0)(1.0) = -2.0$$

Sistemas Lineares Invariantes no Tempo - Exemplo



$$y[6] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[6-k] = 0.0$$

Sistemas Lineares Invariantes no Tempo - Exemplo



$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$y[-2] = 9.0$; $y[-1] = 6.0$; $y[0] = 15.0$; $y[1] = 8.0$;

$y[2] = 4.0$; $y[3] = -6.0$; $y[4] = -4.0$; $y[5] = -2.0$

Propriedades dos Sistemas LIT

Desde que todos os sistemas LIT são descritos por uma convolução, as propriedades desta classe de sistemas são definidas pelas propriedades da convolução discreta.

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

Comutatividade: $x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$

Distributividade: $x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$

Associatividade: $y[n] = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n] = x[n] * (h_1[n] * h_2[n])$

$$y[n] = x[n] * (h_2[n] * h_1[n]) = (x[n] * h_2[n]) * h_1[n]$$

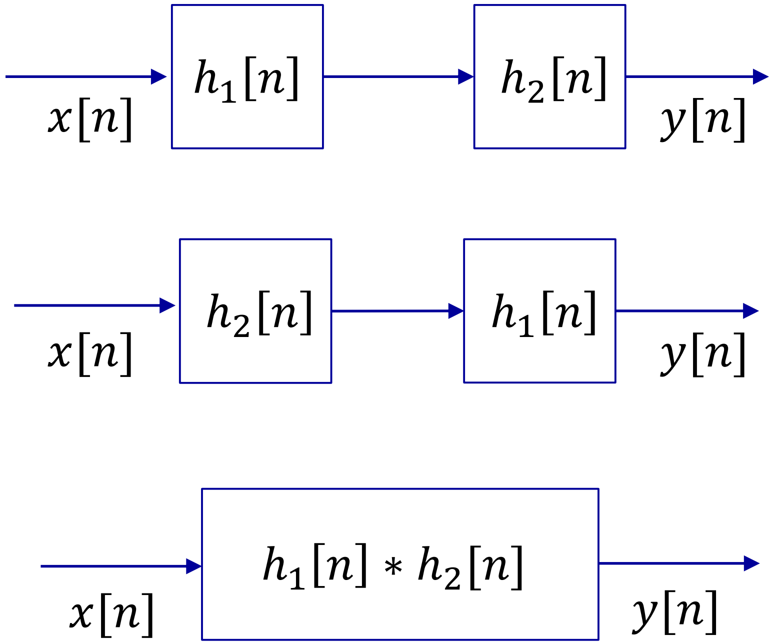
Propriedades dos Sistemas LIT

Em sistemas conectados em cascata, a saída do primeiro sistema é a entrada do segundo sistema, a saída do segundo sistema é a entrada do terceiro sistema, etc. A saída do último sistema é a saída global.

Dois sistemas LITs em cascata correspondem a um sistema LIT com resposta ao impulso dada pela convolução das respostas ao impulso de ambos os sistemas em cascata.

Como consequência da propriedade da comutatividade, a resposta ao impulso é independente da ordem dos sistemas em cascata e é dada por

$$h[n] = h_1[n] * h_2[n]$$



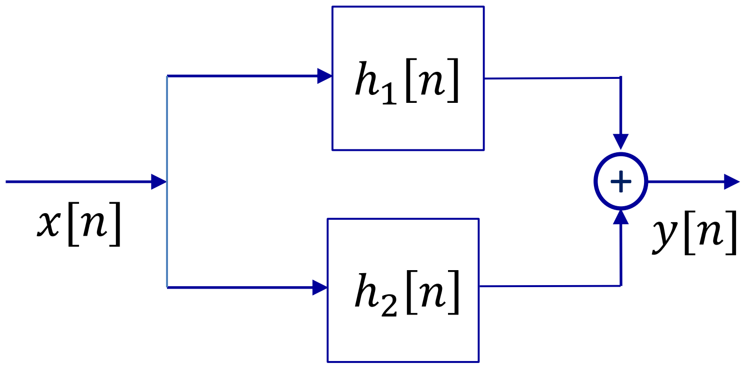
Os três sistemas LITs mostrados na figura ao lado têm idênticas respostas ao impulso.

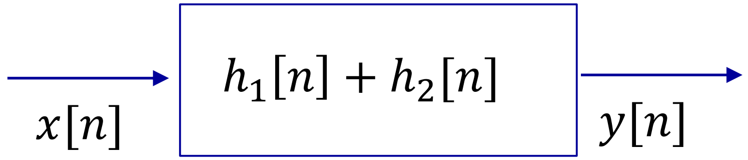
Propriedades dos Sistemas LIT

Sistemas conectados em paralelo têm a mesma entrada, e suas saídas são somadas para produzir a saída global.

A partir da propriedade distributiva da convolução, a conexão de dois sistemas LIT em paralelo é equivalente a um único sistema cuja resposta ao impulso é a soma das respostas ao impulso individuais, e é dada por

$$h[n] = h_1[n] + h_2[n]$$





Propriedades dos Sistemas LIT

Conforme já estudamos, um sistema é estável se e somente se, para cada sequência de entrada limitada em amplitude o sistema produzir uma sequência de saída também limitada em amplitude.

Pode ser demonstrado que sistemas LIT são estáveis se e somente se a resposta ao impulso for absolutamente somável, ou seja, se e somente se

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

Propriedades dos Sistemas LIT

Sabemos que um sistema é causal se, para cada escolha de n_0, o valor da sequência de saída no índice $n = n_0$, ou seja, $y[n_0]$, depender somente dos valores da sequência de entrada $x[n]$, para $n \leq n_0$.

Para sistemas LIT serem causais, esta condição implica em

$$h[n] = 0, \text{ para } n < 0.$$

De tal forma que sequências cujos valores são zero para $n < 0$ são denominadas sequências causais, significando que estas sequências podem ser respostas ao impulso de sistemas LIT causais.

Equações de diferença lineares com coeficientes constantes

Uma classe importante de sistemas LIT consiste daqueles sistemas para os quais a entrada $x[n]$ e a saída $y[n]$ satisfazem uma equação de diferenças linear de n-ésima ordem com coeficientes constantes na forma

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m]$$

Equações de diferença lineares com coeficientes constantes

Para exemplificar, consideremos o sistema definido por $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$ (1)

A saída deste sistema para $n-1$ pode ser escrita como

$$y[n-1] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k]. \qquad (2)$$

Separando o termo $x[n]$ na soma, podemos reescrever a equação (1) para $y[n]$ conforme

$$y[n] = x[n] + \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k]. \qquad (3)$$

Substituindo (2) em (3) obtemos

$$y[n] = x[n] + y[n-1], \quad \text{ou} \quad y[n] - y[n-1] = x[n]$$

que nada mais é do que

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m] \qquad \text{com } a_0 = 1, a_1 = -1, N = 1, M = 0, b_0 = 1$$

Equações de diferença lineares com coeficientes constantes

A equação $y[n] = x[n] + y[n-1]$ indica como este sistema pode ser implementado.

Para cada valor de n somamos o valor da entrada atual $x[n]$ ao valor da soma prévia acumulada $y[n-1]$.

Este sistema é denominado acumulador, e é representado em diagrama de blocos, conforme

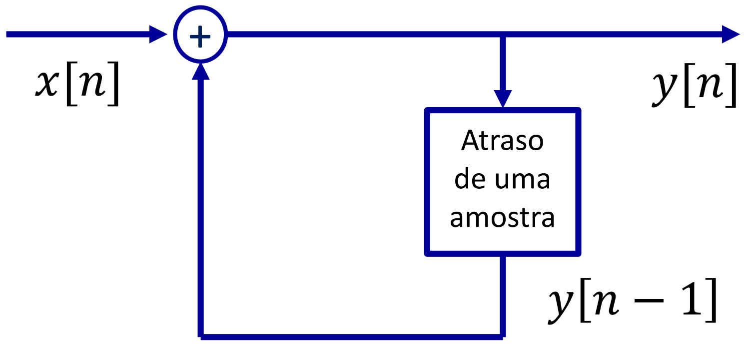


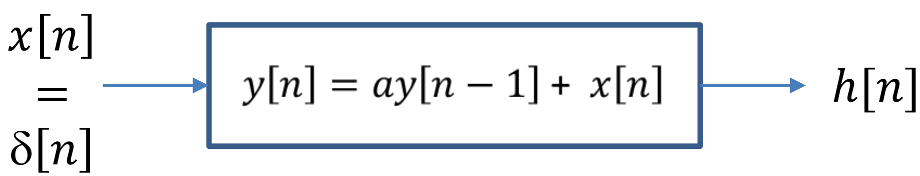
Diagrama de blocos de uma equação de diferenças recursivas representando um acumulador (representação recursiva do sistema).

Computando recursivamente equações de diferença

Para computar recursivamente uma equação de diferença consideremos o sistema causal discreto, descrito pela seguinte equação

$$y[n] = ay[n-1] + x[n],\ 0 < a < 1.$$

Nosso objetivo é determinar a resposta ao impulso deste sistema, ou seja,



$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}.$$

Dado que a entrada é um impulso, com valor unitário unicamente em $n = 0$, $y[n < 0] = 0$. De onde segue que

$$y[0] = ay[-1] + x[0] = 1$$
$$y[1] = ay[0] + x[1] = a$$
$$y[2] = ay[1] + x[2] = a^2$$
$$y[3] = ay[2] + x[3] = a^3$$
$$\dots$$

Logo, a resposta do sistema ao impulso é

$$h[n] = \begin{cases} a^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$