Processamento Digital de Sinais

Outline:

- Representação no domínio da frequência de sinais e sistemas discretos no tempo
- Funções Características para sistemas LIT
- Resposta Senoidal de sistemas LIT
- Considerações sobre a periodicidade da resposta em frequência de sistemas LIT
- Filtros ideais seletivos em frequência
- Resposta em frequência de um sistema média móvel (*moving-average*)
- Sequências exponenciais complexas aplicadas em $n = 0$
- Exercícios de referência
- Exercícios propostos

Representação no domínio da frequência de sinais e sistemas discretos no tempo

Vimos que, para sistemas LIT, uma representação da sequência de entrada como uma soma ponderada de impulsos atrasados conduz a uma representação da saída como uma soma ponderada das respostas ao impulso atrasadas.

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta\,[n-k] \quad \Longrightarrow \quad y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h\,[n-k]$$

No entanto, sistemas LIT podem ser representados de diferentes formas.

Representação no domínio da frequência de sinais e sistemas discretos no tempo

Sequências senoidais e sequências exponenciais complexas constituem uma importante representação de sistemas LIT.

- Sequências exponenciais complexas são funções características de sistemas LIT $\left(x[n] = e^{j\omega n}\right)$.

- A resposta a uma sequência senoidal de entrada é senoidal, com a mesma frequência da entrada e com amplitude e fase determinadas pelo sistema $(x[n] = A \cos \omega_0 n + \emptyset)$.

Representações por meio de senoides ou exponenciais complexas (via Transformada de Fourier) são extremamente úteis em sistemas LIT.

Representação no domínio da frequência de sinais e sistemas discretos no tempo

Sequências exponenciais complexas são funções características de sistemas LIT $\left(x[n] = e^{j\omega n}\right)$.

- A função $x(t) = e^{j\omega t}$ é considerada uma função característica de sistemas LIT contínuos, porque

(1) esses sistemas são descritos por uma equação diferencial linear e

(2) a função $e^{j\omega t}$ apresenta um comportamento matemático peculiar quando derivada no tempo nos vários termos da equação diferencial.

- Se a entrada de um sistema LIT for excitada pela função $x(t) = e^{j\omega t}$, todas as derivadas no tempo de $e^{j\omega t}$ efetuadas pelo sistema resultarão em $j\omega e^{j\omega t}$, ou seja,
- as diversas derivadas, ao serem ponderadas na equação diferencial que rege o sistema LIT contínuo, resultarão na saída $y(t)$ do sistema a própria função $e^{j\omega t}$ multiplicada por uma constante de valor complexo.

Representação no domínio da frequência de sinais e sistemas discretos no tempo

Sequências exponenciais complexas são funções características de sistemas LIT $\left(x[n] = e^{j\omega n}\right)$.

- O fato do sistema LIT manter a forma funcional da excitação em sua saída $y(t)$ é o que caracteriza a excitação $x(t) = e^{j\omega t}$ ser uma função característica do sistema, ou uma *eigenfunction* do sistema LIT.

- Conforme veremos a seguir, esta propriedade da *eigenfunction* $x(t) = e^{j\omega t}$ é preservada quando o sistema LIT contínuo é discretizado no tempo, ou seja,

- quando o sistema discreto é excitado pela função $x[n] = e^{j\omega n}$, a sua saída $y[n]$ resultará na própria função $e^{j\omega n}$ multiplicada por uma constante de valor complexo.

$\Rightarrow$ *Uma eigenfunction de um sistema é um sinal de entrada que aparece na saída do sistema, escalado por uma constante complexa.*

Representação no domínio da frequência de sinais e sistemas discretos no tempo

A resposta a uma entrada senoidal é senoidal, com a mesma frequência da entrada e com amplitude e fase determinadas pelo sistema $(x[n] = A\cos\omega_0 n + \emptyset)$.

Mas a função $x[n] = e^{j\omega n}$ pode ser descrita através da equação de Euler $x[n] = e^{j\omega n} = \cos(\omega n) + j\sin(\omega n)$.

Neste contexto, a excitação $x[n]$ é interpretada como uma superposição de uma excitação real $\cos(\omega n)$ com uma excitação imaginária $j\sin(\omega n)$.

Mas, pela propriedade da superposição, um sistema LIT processará independentemente a parte real $\mathrm{Re}\{x[n]\} = \cos(\omega n)$ e a parte imaginária $\mathrm{Im}\{x[n]\} = \sin(\omega n)$ da excitação $x[n]$.

Ou seja, a parte real da saída $\mathrm{Re}\{y[n]\}$ do sistema é unicamente resultante da parte real da excitação $\mathrm{Re}\{x[n]\} = \cos(\omega n)$ e a parte imaginária da saída $\mathrm{Im}\{y[n]\}$ do sistema é unicamente resultante da parte imaginária da excitação $\mathrm{Im}\{x[n]\} = \sin(\omega n)$.

Representação no domínio da frequência de sinais e sistemas discretos no tempo

A resposta a uma entrada senoidal é senoidal, com a mesma frequência da entrada e com amplitude e fase determinadas pelo sistema $(x[n] = A\cos\omega_0 n + \emptyset)$.

Isto permite uma significativa simplificação de procedimento se quisermos determinar a resposta de um sistema LIT à uma excitação $x[n] = \cos(\omega n)$:

Ao invés de excitarmos o sistema com $x[n] = \cos(\omega n)$, excitamos o sistema com $x[n] = e^{j\omega n}$.

A resposta do sistema à $x[n] = \cos(\omega n)$ será simplesmente obtida da parte real da saída $\mathrm{Re}\{y[n]\}$ em consequência da excitação complexa $x[n] = e^{j\omega n}$, facilitando assim, o processo de obtenção algébrica da resposta.

Representação no domínio da frequência de sinais e sistemas discretos no tempo

A resposta a uma entrada senoidal é senoidal, com a mesma frequência da entrada e com amplitude e fase determinadas pelo sistema $(x[n] = A\cos\omega_0 n + \emptyset)$.

Conforme veremos adiante em Séries De Fourier, as funções excitação $e^{j\omega n}, \cos(\omega n)$ e $\sin(\omega n)$ são as únicas funções matemáticas que contêm uma única componente espectral na frequência ω, sendo, portanto, passível de serem utilizadas para determinar a resposta $y[n]$ de sistemas LIT para uma determinada frequência $\omega = 2\pi f$ de interesse.

Por exemplo, a resposta em frequência de um filtro digital em uma faixa de frequências $[\omega_{min}, \omega_{max}]$ é obtida determinando-se a amplitude e o deslocamento no tempo (fase) da resposta $y[n]$ em relação à entrada $x[n] = \cos\omega n$, para ω variando no intervalo $\omega_{min} < \omega < \omega_{max}$.

A amplitude e o deslocamento no tempo (fase) da resposta $y[n]$ em relação à entrada $x[n]$ para cada frequência ω é representada por um valor complexo com módulo e fase dependente de ω, denotado for $H(e^{j\omega})$, e denominado de função de transferência ou também resposta em frequência do sistema operando sob regime permanente senoidal.

Funções características para sistemas LIT

Para demonstrar que exponenciais complexas são funções características de sistemas LIT, consideremos a sequência de entrada $x[n] = e^{j\omega n}$, para $-\infty < n < \infty$, ou seja, uma exponencial complexa de frequência angular ω.

Sabemos que um sistema LIT pode ser descrito por $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x\,[n-k]$, então

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]e^{j\omega(n-k)} = e^{j\omega n}\underbrace{\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega k}\right)}.$$

Se definirmos $H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega k}$ podemos reescrever a equação acima conforme

$$y[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega n}.$$

Funções características para sistemas LIT

Portanto, a saída do sistema é simplesmente um múltiplo escalar (complexo) da entrada:

$$y[n] = \underbrace{H\left(e^{j\omega}\right)}_{\substack{\text{Valor característico}\\ \text{do sistema}\\ (\textit{eigenvalue})}}\underbrace{e^{j\omega n}}_{\substack{\text{Função característica}\\ \text{do sistema}\\ (\textit{eigenfunction})}}$$

$H\left(e^{j\omega}\right)$ descreve a variação na amplitude complexa de um sinal de entrada (exponencial complexa $e^{j\omega n}$) como função da frequência ω, e é denominado <u>resposta em frequência do sistema</u>.

$H\left(e^{j\omega}\right)$ em geral é complexo, e pode ser expresso

- em notação retangular $H\left(e^{j\omega}\right) = H_R\left(e^{j\omega}\right) + jH_I\left(e^{j\omega}\right)$ ou
- em termos de magnitude e fase $H\left(e^{j\omega}\right) = \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|e^{j\sphericalangle H\left(e^{j\omega}\right)}$

Funções características para sistemas LIT

Resposta em frequência de um sistema LIT através da função característica

Para encontrar a resposta em frequência de um sistema LIT, como exemplo, consideremos o sistema de atraso ideal, definido por $y[n] = x[n - n_d]$, onde n_d é um inteiro fixo.

Se considerarmos $x[n] = e^{j\omega n}$ como a entrada do sistema, então podemos escrever que

$$y[n] = e^{j\omega(n-n_d)} = e^{j\omega n}e^{-j\omega n_d}.$$

Então, para qualquer valor de ω, teremos uma saída que será a entrada multiplicada por uma constante complexa, cujo valor depende da frequência ω e do atraso n_d .

A resposta em frequência do sistema de atraso ideal é, portanto,

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d}.$$

Método 1: Resposta em frequência usando a função característica

Funções características para sistemas LIT

Resposta em frequência de um sistema LIT através da resposta ao impulso

Como um método alternativo para obter a resposta em frequência do sistema, lembremos que $h[n] = \delta\,[n - n_d]$ para o sistema de atraso ideal.

A partir da definição $H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega k}$ obtemos

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n - n_d]e^{-j\omega n} = e^{-j\omega n_d}\,.$$

Método 2: Resposta em frequência usando a resposta ao impulso

De acordo com a relação de Euler, $e^{-j\omega n_d} = \cos\omega n_d - j\sin\omega n_d$, então

As partes real e imaginária da resposta em frequência são

$$H_R(e^{j\omega}) = \cos\omega n_d \quad \text{e} \quad H_I(e^{j\omega}) = -\sin\omega n_d.$$

A magnitude e a fase da resposta em frequência são, respectivamente

$$|H(e^{j\omega})| = 1 \quad \text{e} \quad \sphericalangle H(e^{j\omega}) = -\omega n_d.$$

Resposta senoidal de um sistema LIT

Diversos sinais podem ser representados como uma combinação linear de exponenciais complexas, conforme

$$x[n] = \sum_k \alpha_k \, e^{j\omega_k n}$$

Considerando o princípio da superposição, a saída do sistema LIT será

$$y[n] = \sum_k \alpha_k H\left(e^{j\omega_k}\right) e^{j\omega_k n}.$$

Ou seja, se for possível representar $x[n]$ como uma superposição de sequências exponenciais complexas, a saída poderá ser determinada a partir da resposta em frequência do sistema.

Resposta senoidal de um sistema LIT

Para ilustrar este princípio, consideremos a entrada senoidal $x[n] = \mathrm{A}\cos(\omega_0 n + \emptyset)$,

$$x[n] = \mathrm{A}\cos(\omega_0 n + \emptyset) = \underbrace{\frac{A}{2}e^{j\phi}e^{j\omega_0 n}}_{x_1[n]} + \underbrace{\frac{A}{2}e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 n}}_{x_2[n]}$$

A resposta a $x_1[n]$ é

$$y_1[n] = H\left(e^{j\omega_0}\right)\frac{A}{2}e^{j\phi}e^{j\omega_0 n}$$

A resposta a $x_2[n]$ é

$$y_2[n] = H\left(e^{-j\omega_0}\right)\frac{A}{2}e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 n}$$

Considerando o princípio da superposição, a resposta total será

$$y[n] = \frac{A}{2}\left[H\left(e^{j\omega_0}\right)e^{j\phi}e^{j\omega_0 n} + H\left(e^{-j\omega_0}\right)e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 n}\right].$$

Resposta senoidal de um sistema LIT

Das propriedades de funções complexas, se $h[n]$ é real, então $H\left(e^{-j\omega_0}\right) = H^*\left(e^{j\omega_0}\right)$, e a equação

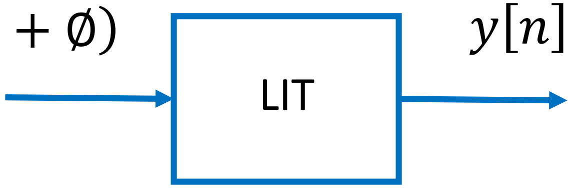
$$y[n] = \frac{A}{2}\left[H\left(e^{j\omega_0}\right)e^{j\phi}e^{j\omega_0 n} + H\left(e^{-j\omega_0}\right)e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 n}\right] = \frac{A}{2}\left[H\left(e^{j\omega_0}\right)e^{j\phi}e^{j\omega_0 n} + H^*\left(e^{j\omega_0}\right)e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 n}\right] =$$

$$= \frac{A}{2}\left[\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|e^{j\theta}e^{j\phi}e^{j\omega_0 n} + \left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|e^{-j\theta}e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 n}\right] = \frac{A}{2}\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|\left[e^{j\theta}e^{j\phi}e^{j\omega_0 n} + e^{-j\theta}e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 n}\right]$$

pode ser reescrita como $y[n] = A\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|\cos(\omega_0 n + \emptyset + \theta)$,

onde $\theta = \sphericalangle H\left(e^{j\omega_0}\right)$ é a fase da resposta em frequência do sistema, na frequência ω_0.

$x[n] = \mathrm{A}\cos(\omega_0 n + \emptyset)$



$y[n] = A\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|\cos(\omega_0 n + \emptyset + \theta)$,

$h[k]$

O conhecimento de $H\left(e^{j\omega}\right)$ é tudo que é necessário saber, para obter a saída do sistema.

$$H\left(e^{j\omega_0}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega_0 k} \qquad \theta = \sphericalangle H\left(e^{j\omega_0}\right)$$

Resposta senoidal de um sistema LIT

Para o sistema de atraso ideal, definido por $y[n] = x[n - n_d]$, onde n_d é um inteiro fixo,

$$H(e^{j\omega_0}) = e^{-j\omega_0 n_d}, \quad |H(e^{j\omega_0})| = 1 \quad \text{e} \quad \theta = -\omega_0 n_d.$$

Portanto,

$$y[n] = A|H(e^{j\omega_0})| \cos(\omega_0 n + \emptyset + \theta) = A\cos(\omega_0 n + \emptyset - \omega_0 n_d) = A\cos[\omega_0 (n - n_d) + \emptyset]$$

Resultado que é coerente com o que obteríamos diretamente usando a definição do sistema de atraso ideal para a entrada $x[n] = \mathrm{A}\cos(\omega_0 n + \emptyset)$.

Considerações sobre a periodicidade da resposta em frequência de sistemas LIT

O conceito de resposta em frequência de sistemas LIT é essencialmente o mesmo para sistemas contínuos no tempo e sistemas discretos o tempo.

No entanto, uma importante diferença é que a resposta em frequência de sistemas LIT de tempo discreto é sempre uma função periódica da frequência ω, com período 2π.

Consideremos

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

Considerações sobre a periodicidade da resposta em frequência de sistemas LIT

Se substituirmos (ω) por $(\omega + 2\pi)$ em $H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}$, teremos

$H(e^{j(\omega+2\pi)}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j(\omega+2\pi)n}$, considerando que $e^{\pm j2\pi n} = 1,$ para n inteiro, temos que

$e^{-j(\omega+2\pi)n} = e^{-j\omega n}e^{-j2\pi n} = e^{-j\omega n},$ portanto,

$H(e^{j(\omega+2\pi)}) = H(e^{j\omega})$ e, de forma mais geral, $H(e^{j(\omega+2\pi r)}) = H(e^{j\omega})$, para r inteiro.

A periodicidade decorre de que $\{e^{j\omega n}\}$ e $\{e^{j(\omega+2\pi)n}\}$, para $-\infty < n < \infty$ são indistinguíveis entre si.

Dado que as duas sequências têm idênticos valores para todo n, o sistema deve responder identicamente a ambas as sequências de entrada.

Considerações sobre a periodicidade da resposta em frequência de sistemas LIT

Dado que $H(e^{j\omega})$ é periódica, com período 2π, e desde que as frequências (ω) e $(\omega + 2\pi)$ são insdistinguíveis, é necessário apenas especificar $H(e^{j\omega})$ sobre um intervalo de tamanho 2π, ou seja, $0 \leq \omega \leq 2\pi$ ou $-\pi \leq \omega \leq \pi$.

A periodicidade define a resposta em frequência em todos os outros valores fora do intervalo escolhido.

Por simplicidade e por consistência com o caso contínuo, é geralmente conveniente especificar $H(e^{j\omega})$ sobre o intervalo $-\pi \leq \omega \leq \pi$.

Conforme veremos adiante, quando estudarmos a Transformada Z, $-\pi$ é uma frequência angular digital que corresponde a $\left(\frac{-f_s}{2}\right)$ no domínio analógico, e $+\pi$ é uma frequência angular digital que corresponde a $\left(\frac{+f_s}{2}\right)$ no domínio analógico, de modo a obedecer o Teorema da Amostragem de Nyquist, onde f_s é a frequência de amostragem.

Considerações sobre a periodicidade da resposta em frequência de sistemas LIT

Então, $H(e^{j\omega})$ será especificado sobre o intervalo $-\pi \leq \omega \leq \pi$.

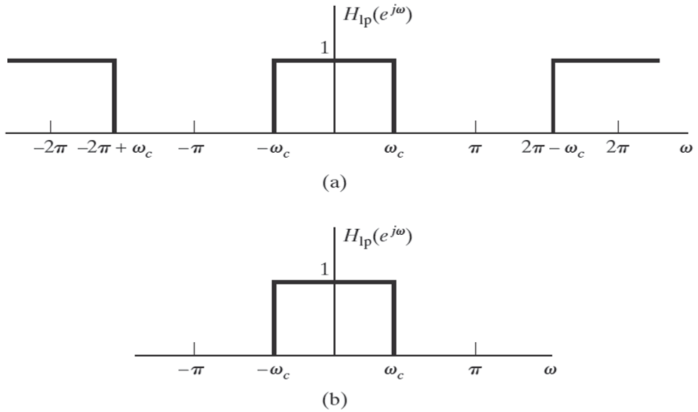
Com relação a este intervalo, baixas frequências são frequências próximas a zero, enquanto que altas frequências são frequências próximas a $\pm\pi$.

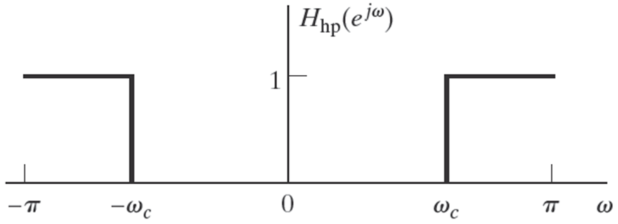
Dado que as frequências que diferem por um inteiro múltiplo de 2π são indistinguíveis, é possível generalizar esta definição, conforme:

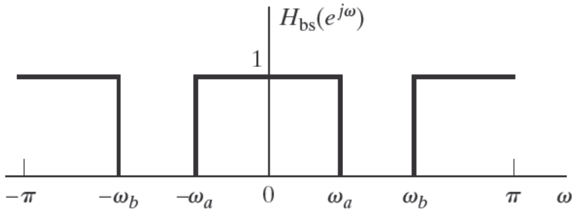
As baixas frequências são frequências próximas a um múltiplo par de π , enquanto que as altas frequências são aquelas frequências próximas a um múltiplo ímpar de π.

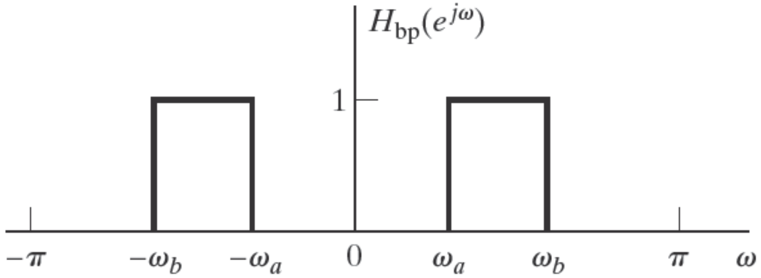
Filtros ideais seletivos em frequência

Uma classe importante de sistemas LIT inclui aqueles sistemas para os quais a resposta em frequência é unitária em uma certa faixa de frequências e é nula nas frequências restantes, correspondendo aos filtros ideais seletivos em frequência.





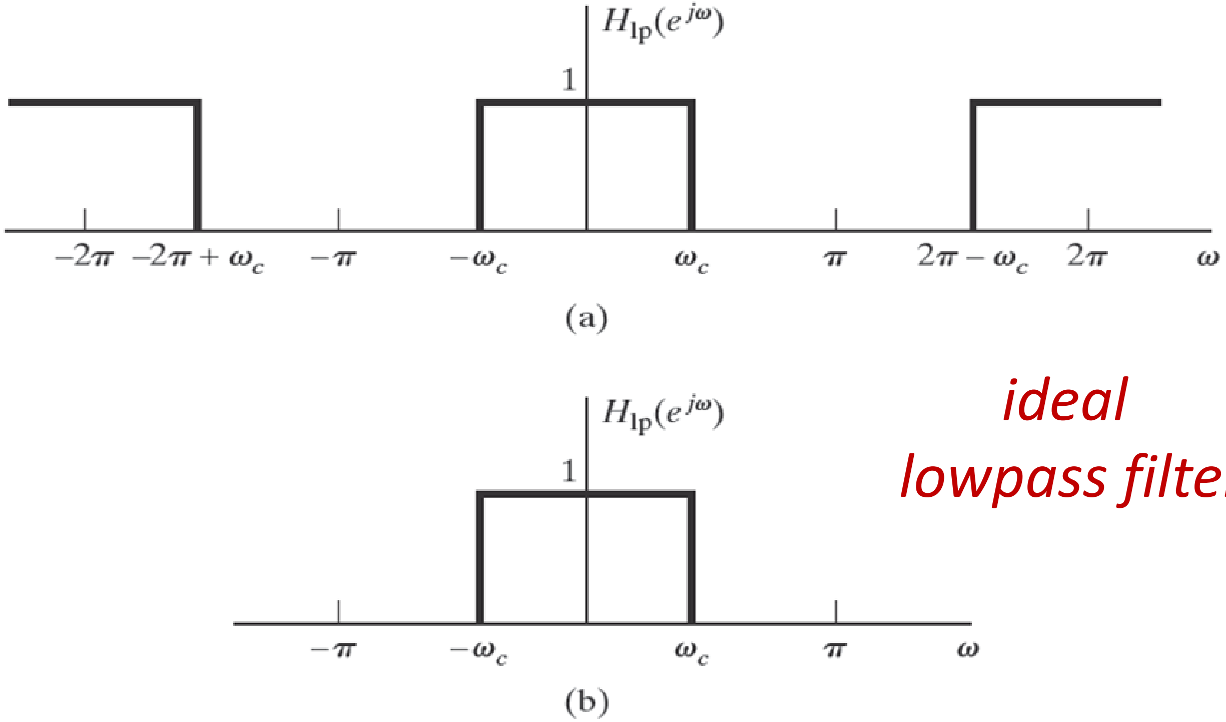




Filtros ideais seletivos em frequência
Resposta em frequência de um filtro ideal passa-baixas

Em função da periodicidade da resposta em frequência em tempo discreto, o filtro tem a aparência de um filtro multi-banda, desde que frequências ao redor de $\omega = 2\pi$ são indistinguíveis de frequências ao redor de $\omega = 0$.

Na verdade, a resposta em frequência permite passar apenas baixas frequências e rejeita altas frequências.



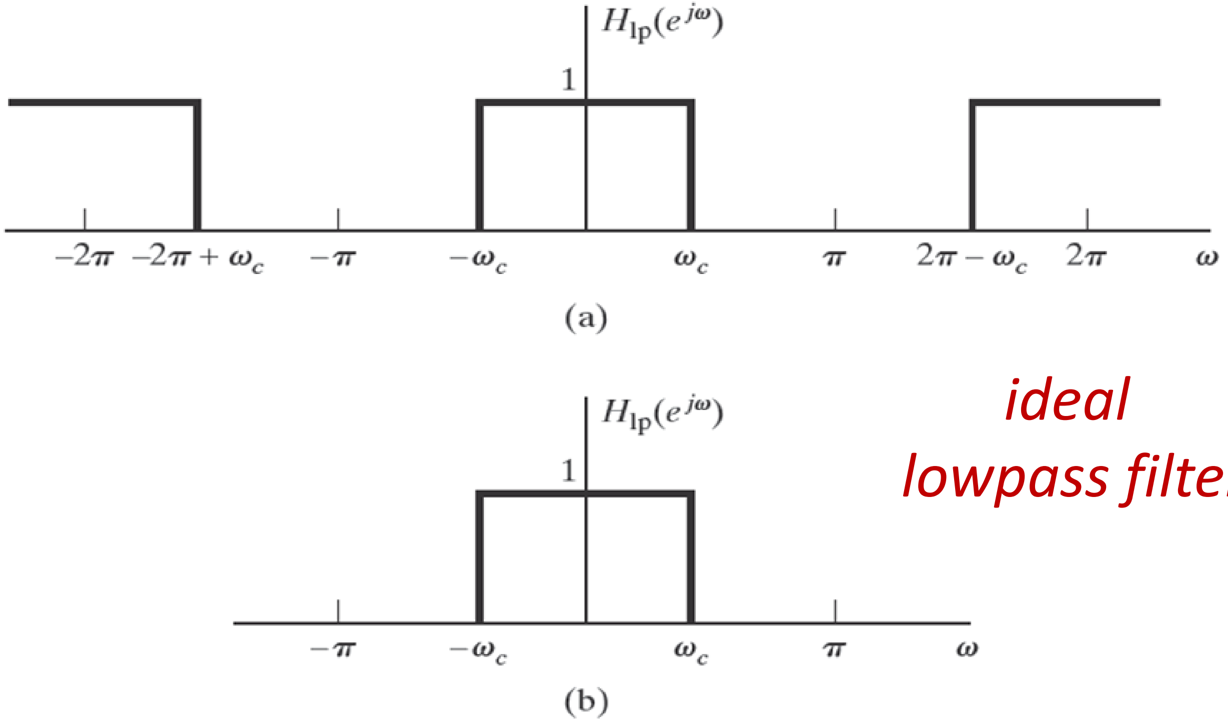
ideal lowpass filter

(a) periodicidade da resposta em frequência
(b) um período da resposta em frequência periódica

Filtros ideais seletivos em frequência
Resposta em frequência de um filtro ideal passa-baixas

Desde que a resposta em frequência é completamente especificada pelo comportamento no intervalo $-\pi < \omega \leq \pi$, a resposta em frequência do filtro ideal passa-baixas é mais tipicamente representada somente no intervalo $-\pi < \omega \leq \pi$.

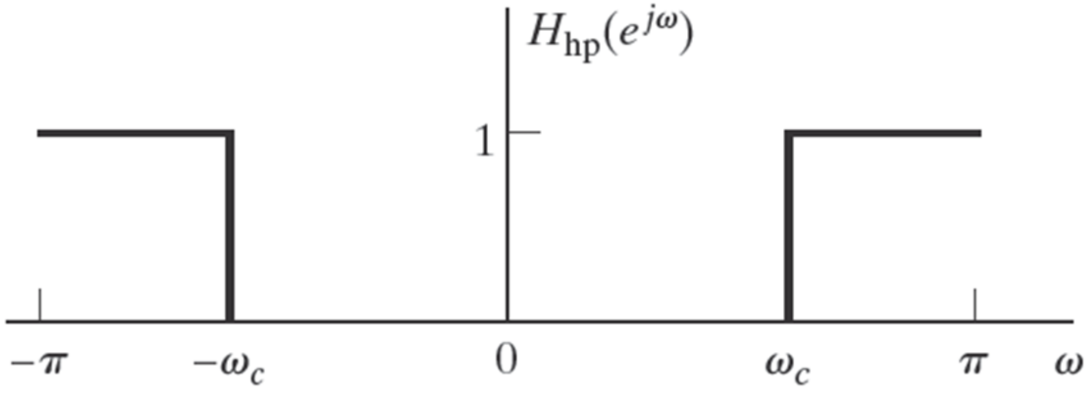
Na verdade, a resposta em frequência se repete periodicamente com período 2π, fora do intervalo apresentado na figura (b).



ideal lowpass filter

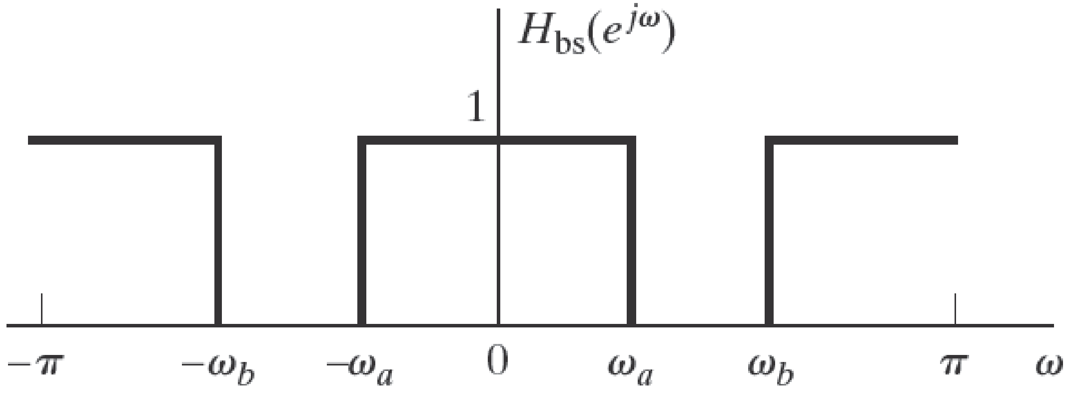
(a) periodicidade da resposta em frequência
(b) um período da resposta em frequência periódica

Filtros ideais seletivos em frequência
Resposta em frequência de um filtro ideal passa-altas



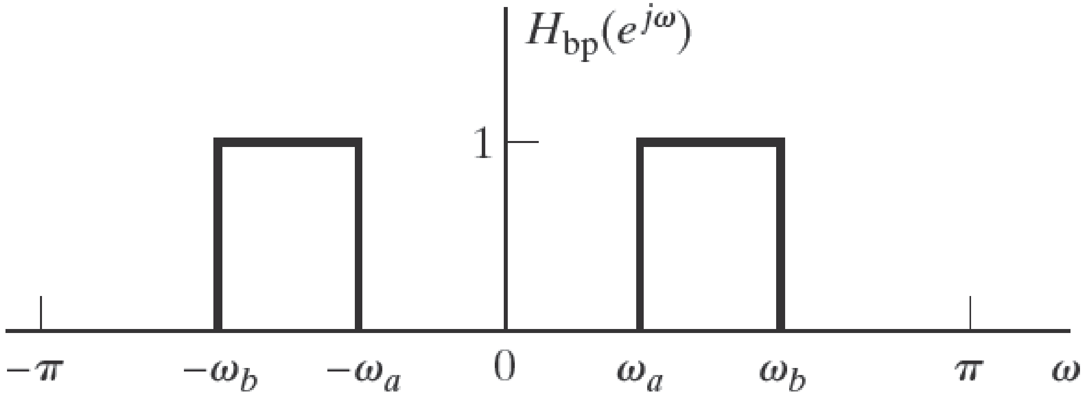
ideal
highpass filter

Filtros ideais seletivos em frequência
Resposta em frequência de um filtro ideal rejeita-banda



ideal
bandstop filter

Filtros ideais seletivos em frequência
Resposta em frequência de um filtro ideal passa-banda



ideal
bandpass filter

Resposta em frequência de um sistema média móvel (*moving-average*)

Considere que a resposta ao impulso de um sistema média móvel é dada por

$$h[n] = \begin{cases} \dfrac{1}{M_1 + M_2 + 1}, & -M_1 \leq n \leq M_2, \\ 0, & em\ caso\ contrário \end{cases}$$

Então, a resposta em frequência será

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{n=-M_1}^{M_2} e^{-j\omega n}$$

Considerando a série geométrica

$$\sum_{k=N_1}^{N_2} r^k = \frac{r^{N_1} - r^{N_2+1}}{1 - r} \quad , \qquad N_2 \geq N_1$$

Resposta em frequência de um sistema média móvel (*moving-average*)

A equação $H(e^{j\omega}) = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{n=-M_1}^{M_2} e^{-j\omega n}$ pode ser expressa na forma fechada por

$$
\begin{aligned}
H(e^{j\omega}) &= \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \frac{e^{j\omega M_1} - e^{-j\omega(M_2+1)}}{1 - e^{-j\omega}} \\
&= \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \frac{e^{j\omega(M_1+M_2+1)/2} - e^{-j\omega(M_1+M_2+1)/2}}{1 - e^{-j\omega}} e^{-j\omega(M_2-M_1+1)/2} \\
&= \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \frac{e^{j\omega(M_1+M_2+1)/2} - e^{-j\omega(M_1+M_2+1)/2}}{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}} e^{-j\omega(M_2-M_1)/2} \\
&= \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \frac{\sin[\omega(M_1 + M_2 + 1)/2]}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega(M_2-M_1)/2}.
\end{aligned}
$$

Resposta em frequência de um sistema média móvel (*moving-average*)

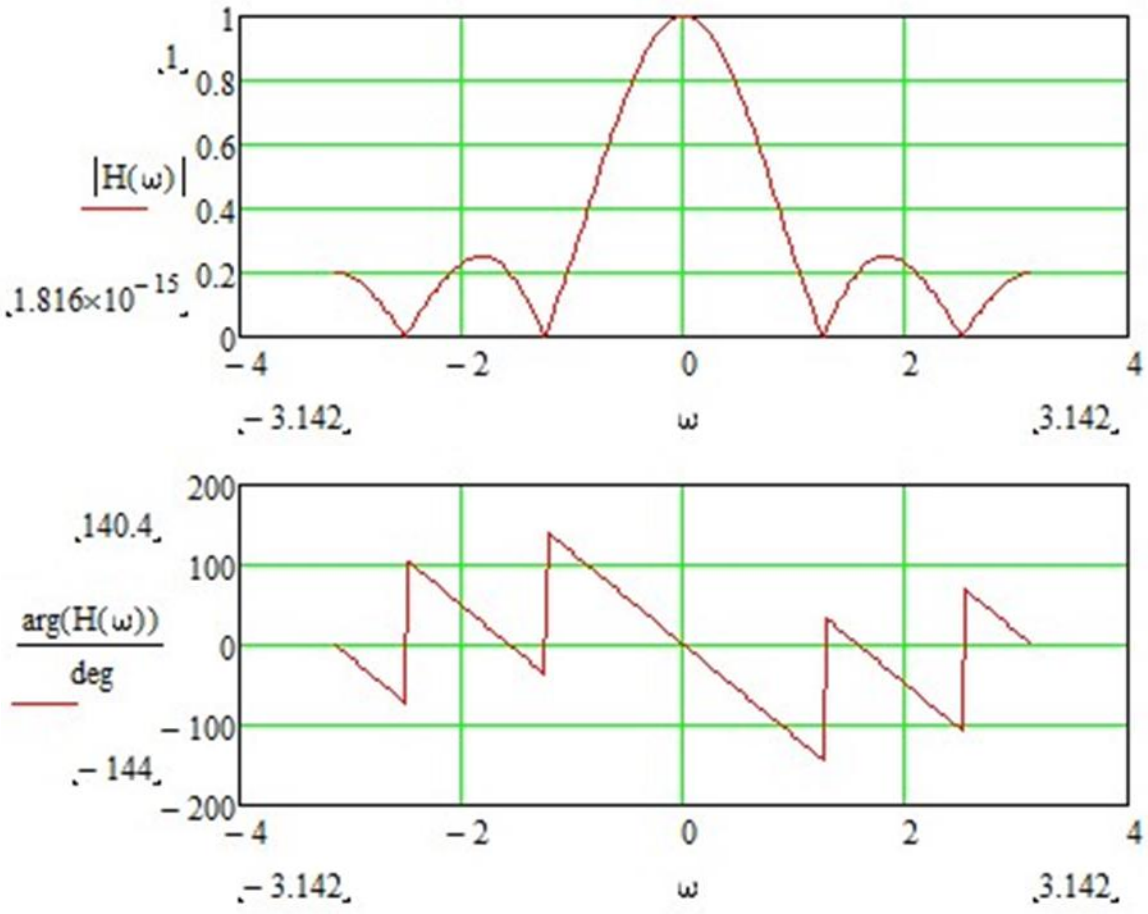
A magnitude e a fase de $H(e^{j\omega})$ são plotadas na figura abaixo para $M_1 = 0$ e $M_2 = 4$.

Note que $H(e^{j\omega})$ é periódica, como é requerido para a resposta em frequência de um sistema discreto.

Note também que o módulo de $H(e^{j\omega})$, $|H(e^{j\omega})|$, cai a altas frequências, e a fase de $H(e^{j\omega})$, $\sphericalangle H(e^{j\omega})$, varia linearmente com ω.

Esta atenuação das altas frequências sugere que o sistema irá suavizar variações rápidas na sequência de entrada.

Pode-se dizer que o sistema, grosseiramente, aproxima um filtro passa-baixa.



$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{5}\frac{\sin 5\omega/2}{\sin \omega/2}e^{-j\omega 2}$$

Sequências exponenciais complexas aplicadas em $n = 0$

Conforme vimos, entradas exponenciais complexas da forma $e^{j\omega n}$ para $-\infty < n < \infty$ produzem saídas da forma $H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$ para sistemas LIT.

No entanto, valores para n variando de $-\infty$ a $+\infty$ podem não ser de aplicação prática.

Neste contexto, convém analisarmos os sistemas LIT considerando entradas com valores não nulos a partir de algum instante n como, por exemplo, $n = 0$.

Assim, vamos considerar

$$x[n] = e^{j\omega n}u[n],$$

Por meio da operação de convolução, podemos determinar a saída $y[n]$ do sistema LIT cuja resposta ao impulso é $h[n]$. Assim,

$$y[n] = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ \left(\sum_{k=0}^{n} h[k]e^{-j\omega k} \right) e^{j\omega n}, & n \geq 0. \end{cases}$$

Sequências exponenciais complexas aplicadas em $n = 0$

Se considerarmos a saída para $n \geq 0$, podemos escrever

$$y[n] = \left(\sum_{k=0}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}\right)e^{j\omega n} - \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}\right)e^{j\omega n}$$

$$= \underbrace{H(e^{j\omega})e^{j\omega n}}_{y_{ss}[n]} - \underbrace{\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}\right)e^{j\omega n}}_{y_t[n]}.$$

Os dois termos da soma podem ser denominados conforme:

$y_{ss}[n]$: Resposta de regime permanente (*steady-state*). O termo é idêntico à resposta do sistema quando a entrada é $e^{j\omega n}$ para todo n.

$y_t[n]$: Resposta transiente. Se o sistema é estável, este termo se aproxima de zero, à medida que n aumenta.

Sequências exponenciais complexas aplicadas em $n = 0$

Para verificar as condições em que a resposta transiente, $y_t[n] = -\sum_{k=n+1}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}e^{j\omega n}$, se aproxima de zero,

vamos avaliar a magnitude de $y_t[n]$, de onde,

$$|y_t[n]| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}e^{j\omega n}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |h[k]|.$$

Desigualdade de Schwarz: o módulo da soma de um produto é menor ou igual do que a soma do produto dos módulos.

Se a resposta ao impulso tem duração finita, tal que $h[n] \neq 0$ somente no intervalo $0 \leq n \leq M$, então o termo $y_t[n] = 0$ para $n + 1 > M$ (ou $n > M - 1$). Neste caso,

$$y[n] = y_{ss}[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega n}, \qquad \text{for } n > M - 1.$$

Sequências exponenciais complexas aplicadas em $n = 0$

Se a resposta ao impulso $h[n]$ tem duração infinita, então a resposta transiente não desaparece abruptamente. Mas, se as amostras da resposta ao impulso se aproximam de zero à medida que n aumenta, então $y_t[n]$ se aproximará de zero.

Podemos, então, escrever que $$|y_t[n]| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}e^{j\omega n} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |h[k]| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |h[k]|.$$

O que equivale a dizer que a resposta transiente é limitada pela soma dos valores absolutos de todas as amostras da resposta ao impulso.

Se o termo à direita da igualdade na equação acima é limitado, de tal forma que

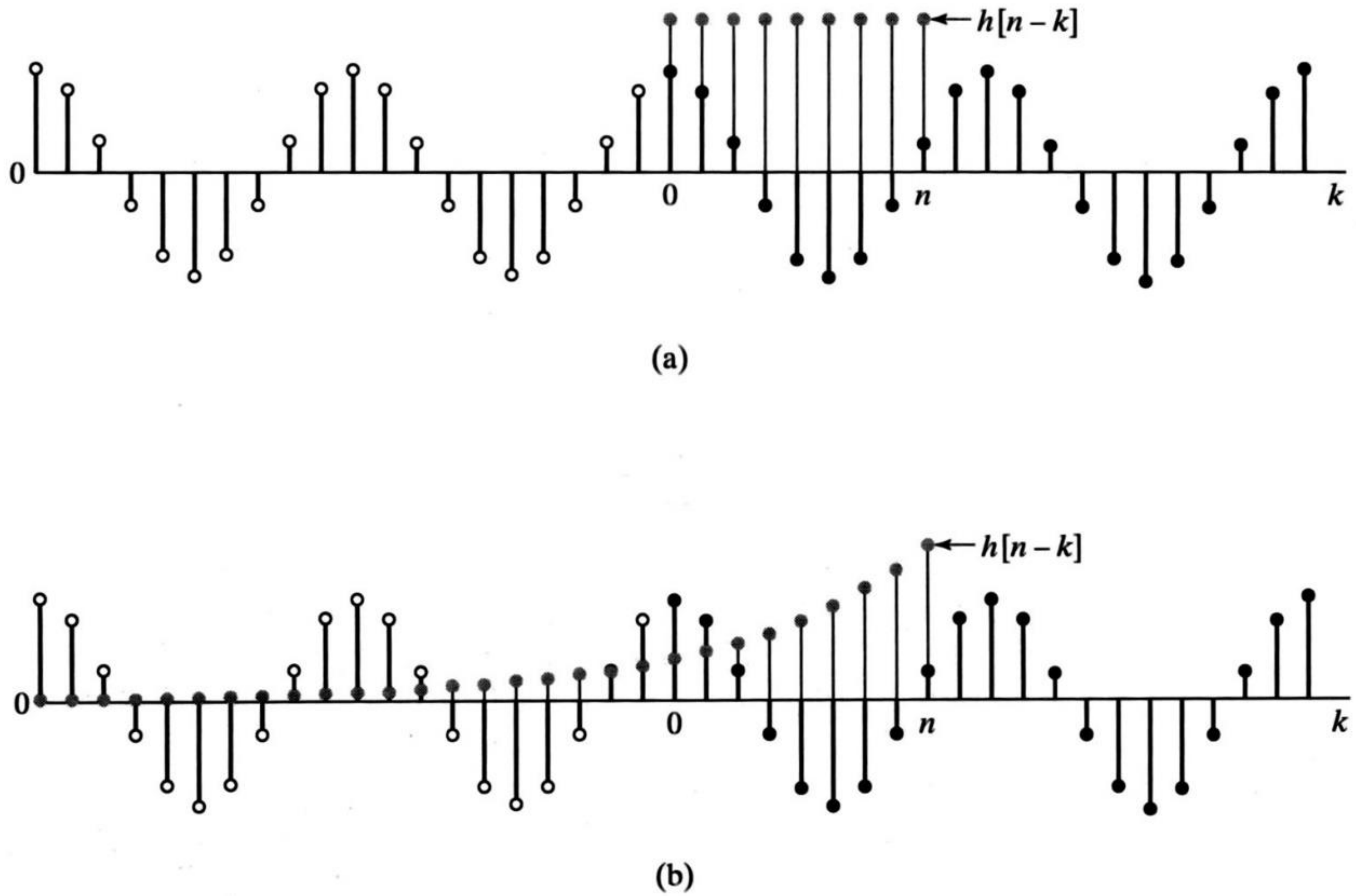
$$\sum_{k=0}^{\infty} |h[k]| < \infty,$$ então o sistema é estável, apesar de a resposta ao impulso ter duração infinita.

Ou seja, para sistemas estáveis, a resposta transiente deve diminuir à medida que $n \to \infty$.

De forma equivalente, para que a resposta transiente termine, é suficiente que o sistema seja estável.

Sequências exponenciais complexas aplicadas em $n = 0$

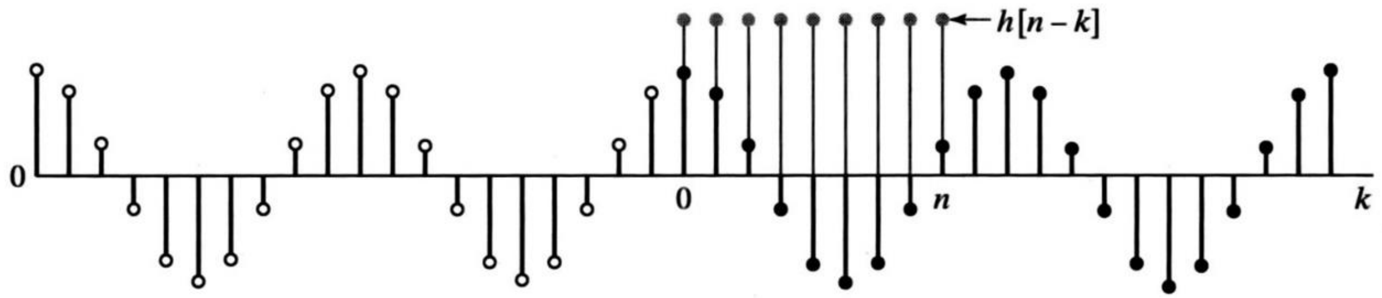
- A figura ao lado apresenta a parte real de uma exponencial complexa aplicada em $n = 0$, com frequência $\omega = 2\pi/10$.
- Os pontos sólidos indicam as amostras $x[k]$ da exponencial complexa aplicada em $n = 0$.
- Os pontos vazados indicam as amostras da exponencial complexa que "estão faltando".
- Um impulso $\delta[n]$ foi aplicado na entrada do sistema e os pontos sombreados indicam as amostras da resposta $h[n-k]$ a este impulso.



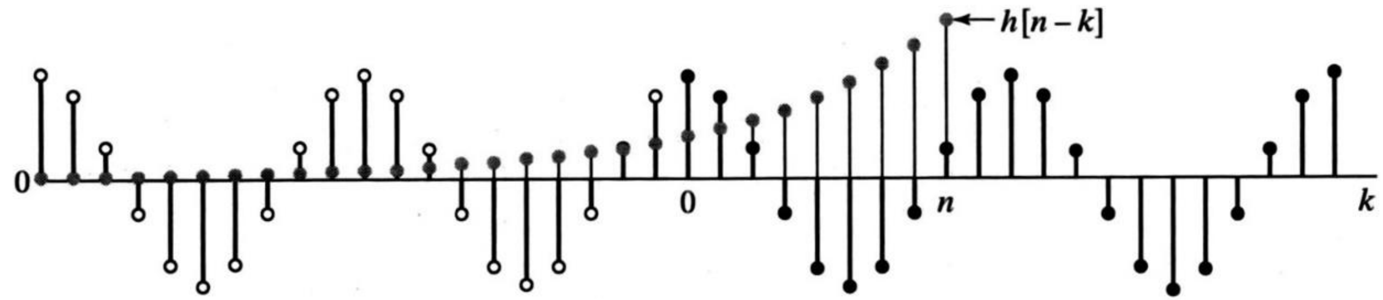
Sequências exponenciais complexas aplicadas em $n = 0$

- A resposta ao impulso $h[n-k]$ de duração finita (FIR) mostrada em (a), termina em $n = 8$. Portanto, a saída consiste apenas dos componentes de regime permanente após $n = 8$. Para $0 \leq n \leq 8$ a resposta do sistema inclui o termo transitório.

- No caso de resposta ao impulso $h[n-k]$ de duração infinita (IIR) mostrada em (b), as amostras faltantes têm cada vez menos efeito à medida que n aumenta, devido ao decaimento natural da resposta ao impulso. Neste caso, como a resposta ao impulso tem duração infinita, a saída sempre terá a componente transitória.



(a)



(b)

Sequências exponenciais complexas aplicadas em $n = 0$

A condição de estabilidade é também uma condição suficiente para a existência da resposta em frequência.

Note que, em geral, $|H(e^{j\omega})| = \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}\right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]e^{-j\omega k}| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|,$

então, a condição geral $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$ (é um valor finito) garante que $H(e^{j\omega})$ existe (é um valor finito).

Portanto, só existe resposta em frequência de um sistema LIT se o sistema for estável. Ou seja:

(1) A resposta transiente se extingue abruptamente (FIR) para n suficientemente grande;

(2) A resposta transiente tem duração infinita (IIR) mas decresce suficientemente rápido à medida que n aumenta.

Caso contrário o sistema não é estável, e não existe resposta em frequência determinável.

Avaliação da resposta em frequência – Exercício de referência 1

Considere o sistema LIT abaixo, cuja resposta ao impulso é dada por $h[n] = \left(\frac{j}{2}\right)^n u[n]$, onde $j = \sqrt{-1}$.

$$x[n] = \cos(\pi n)\, u[n] \longrightarrow \boxed{h[n] = \left(\frac{j}{2}\right)^n u[n]} \longrightarrow y[n]$$

Determine a saída do sistema quando a entrada é dada por $x[n] = \cos(\pi n)\, u[n]$.

Avaliação da resposta em frequência – Exercício de referência 1

Vimos que o conhecimento de $H(e^{j\omega})$ é tudo que é necessário saber para encontrar a saída do sistema.

Desta forma, precisamos determinar $\left|H(e^{j\omega_0})\right|$ e $\theta = \sphericalangle H(e^{j\omega_0})$, pois sabemos que

$$x[n] = \mathrm{A}\cos(\omega_0 n + \emptyset) \longrightarrow \boxed{\text{LIT}} \longrightarrow y[n] = A\left|H(e^{j\omega_0})\right|\cos(\omega_0 n + \emptyset + \theta)$$

$h[k]$

Assim,

$$\left.\begin{aligned} x[n] &= \cos(\pi n)\, u[n] \\ h[n] &= \left(\frac{j}{2}\right)^n u[n] \end{aligned}\right\} \quad H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega k} = \sum_{k=0}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega k}$$

Dado que $x[n] = 0$ para $n < 0$,
$h[k] = 0$ para $k < 0$.

Avaliação da resposta em frequência – Exercício de referência 1

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega k}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$$

$$\omega_0 = \pi$$

$$x[n] = \cos(\pi n)\, u[n]$$

$$h[n] = \left(\frac{j}{2}\right)^n u[n]$$

$$H(e^{j\pi}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{j}{2}\right)^k e^{-j\pi k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{j}{2}\right)^k (-1)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{-j}{2}\right)^k = \frac{1}{1+\left(\frac{j}{2}\right)} = \frac{2}{2+j}$$

De onde, $\left|H(e^{j\pi})\right| = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\theta = \sphericalangle H(e^{j\pi}) = -26.565°$ e, assim, a saída do sistema será

$$y[n] = A\left|H(e^{j\omega_0})\right| \cos(\omega_0 n + \emptyset + \theta) \;\; = \frac{2}{\sqrt{5}}\cos(\pi n - 26.565°\,), \qquad n \geq 0.$$

Avaliação da resposta em frequência – Exercício de referência 2

Considere o sistema LIT cuja resposta ao impulso é dada por $h[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & em\ caso\ contrário \end{cases}$

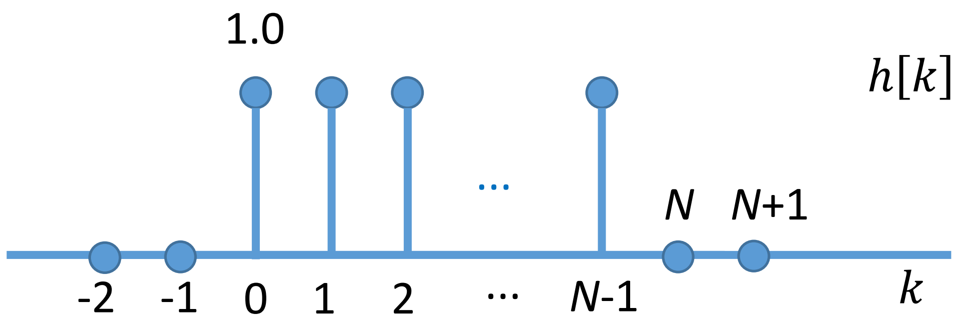
(a) Determine a resposta em frequência do sistema para $N = 5$.

(b) Plote o módulo e a fase da resposta em frequência do sistema para $20\text{Hz} \leq f \leq f_{max}$, sendo f_{max} a máxima frequência analógica digitalizável por este sistema. Lembre que a máxima frequência analógica utilizável por este sistema será função da frequência de amostragem do sinal analógico de entrada do sistema. Considere que o sistema opera a uma frequência de amostragem de 44kHz, respeitando o Teorema da Amostragem de Nyquist.

(c) Plote o módulo e a fase da resposta em frequência do sistema para $\omega_{min} \leq \omega \leq \omega_{max}$.

Avaliação da resposta em frequência – Exercício de referência 2

$$h[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & em\ caso\ contrário \end{cases}$$



(a) A resposta em frequência $H(e^{j\omega})$ é obtida por

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega k} = \sum_{k=0}^{N-1} (1)e^{-j\omega k} = \frac{e^{-j\omega(0)} - e^{-j\omega(N_1-1+1)}}{1-e^{-j\omega}} = \frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\omega}}$$

$$\sum_{k=n_1}^{n_2} r^k = \frac{r^{n_1} - r^{n_2+1}}{1-r} \quad , \qquad n_2 \ge n_1$$

Avaliação da resposta em frequência – Exercício de referência 2

$$H(e^{j\omega}) = \left(\frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\omega}}\right)\left(\frac{e^{j\omega\frac{N}{2}}}{e^{j\omega\frac{N}{2}}}\right)\left(\frac{e^{j\frac{\omega}{2}}}{e^{j\frac{\omega}{2}}}\right) = \frac{e^{\frac{j\omega}{2}(N+1)} - e^{\frac{j\omega}{2}(1-N)}}{e^{\frac{j\omega}{2}(N+1)} - e^{\frac{j\omega}{2}(N-1)}} = \frac{e^{\frac{j\omega}{2}(N+1)} - e^{\frac{-j\omega}{2}(N-1)}}{e^{\frac{j\omega}{2}(N+1)} - e^{\frac{-j\omega}{2}(1-N)}} =$$

$$= \frac{e^{j\frac{\omega N}{2}}e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega N}{2}}e^{j\frac{\omega}{2}}}{e^{j\frac{\omega N}{2}}e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}}e^{j\frac{\omega N}{2}}} = \frac{e^{j\frac{\omega}{2}}\left(e^{j\frac{\omega N}{2}} - e^{-j\frac{\omega N}{2}}\right)}{e^{j\frac{\omega N}{2}}\left(e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}}\right)} = \frac{\left(e^{j\frac{\omega}{2}}\right)(2j)(\sin(\omega N/2))}{\left(e^{j\frac{\omega N}{2}}\right)(2j)(\sin(\omega/2))} = e^{j\frac{\omega}{2}(1-N)}\frac{(\sin(\omega N/2))}{(\sin(\omega/2))}$$

Então, $$H(e^{j\omega}) = \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}e^{-j\frac{\omega}{2}(N-1)}$$

Para $N = 5,$ temos $$H(e^{j\omega}) = \frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)}e^{-j\omega 2}$$

Avaliação da resposta em frequência – Exercício de referência 2

(b) Plote o módulo e a fase da resposta em frequência do sistema para $20\text{Hz} \leq f \leq f_{max}$.

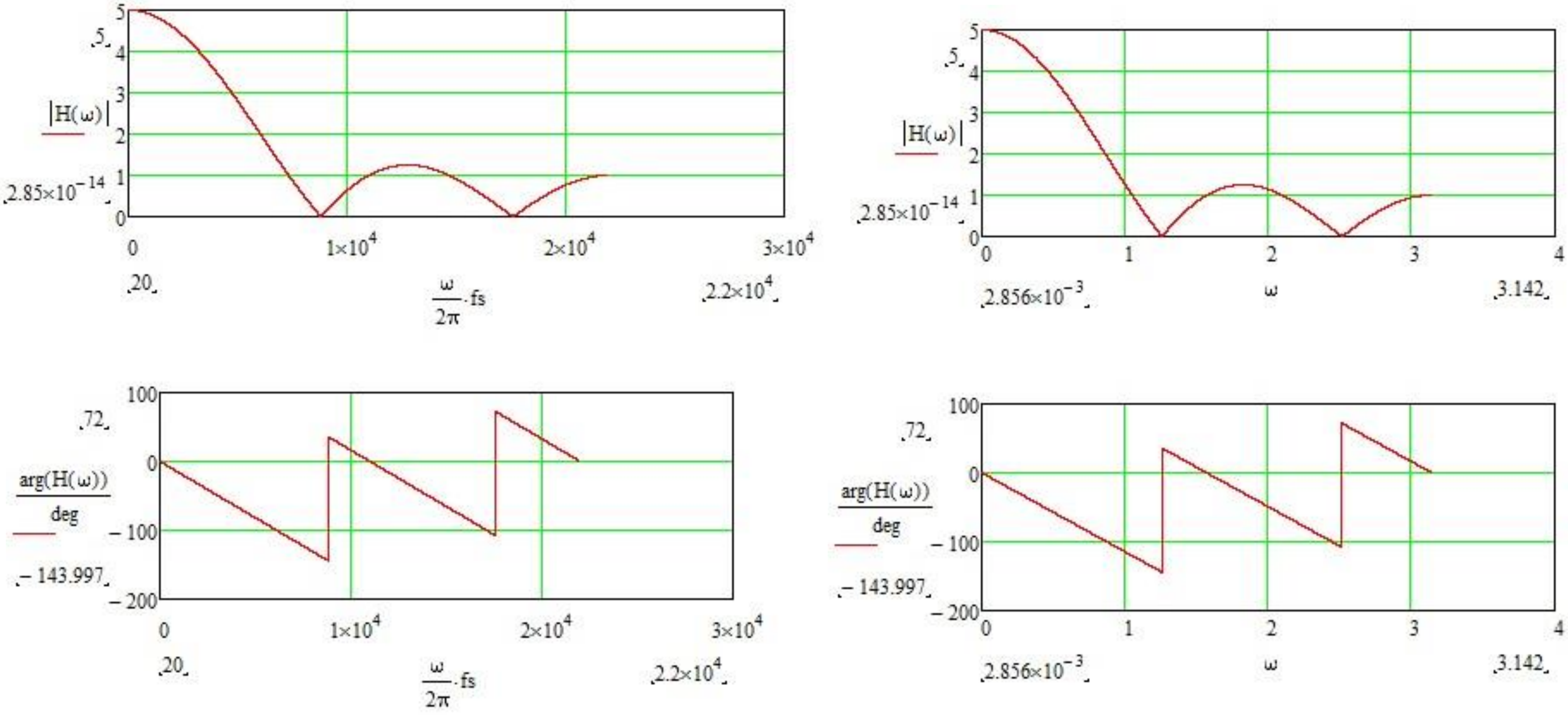
(c) Plote o módulo e a fase da resposta em frequência do sistema para $\omega_{min} \leq \omega \leq \omega_{max}$.

Se $f_s = 44\text{kHz}$, pelo Teorema da Amostragem de Nyquist, $f_{max} = \dfrac{f_s}{2} = 22\text{kHz}$.

Então, vamos plotar a resposta em frequência do sistema para $20\text{Hz} \leq f \leq 22\text{kHz}$.

Ainda, lembrando que $+\pi$ é uma frequência angular digital que corresponde a $\left(\frac{+f_s}{2}\right)$ no domínio analógico, o intervalo de variação de ω será expresso por $2.856 \times 10^{-3} rad \leq \omega \leq \pi\, rad$.

Avaliação da resposta em frequência – Exercício de referência 2



Anexo I - Séries Binomiais

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

$$\sqrt{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{1/2}{n} x^n$$

$$\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} x^n$$

$$\sum_{k=N_1}^{N_2} r^k = \frac{r^{N_1} - r^{N_2+1}}{1-r}$$

$$\sum_{k=n_1}^{n_2} r^k = \sum_{k=0}^{n_2} r^k - \sum_{k=0}^{n_1-1} r^k = \frac{r^{n_1} - r^{n_2+1}}{1-r} \quad , \qquad n_2 \geq n_1$$