

Processamento Digital de Sinais

Outline:

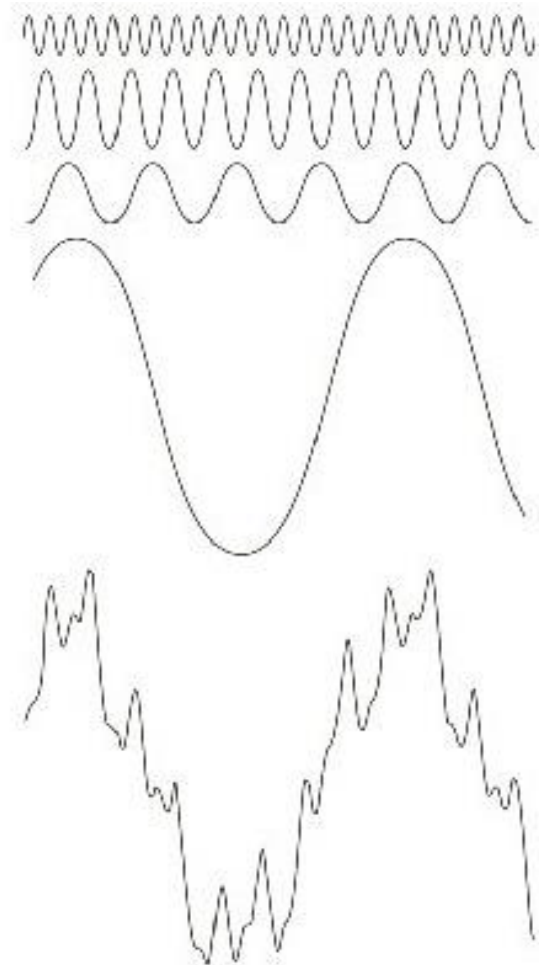
- Representação de Sequências por Transformadas de Fourier de Tempo Discreto
- Propriedades de Simetria da Transformada de Fourier de Tempo Discreto
- Teoremas de Transformada de Fourier de Tempo Discreto
- Linearidade da Transformada de Fourier de Tempo Discreto
- Deslocamento no Tempo e em Frequência
- Reversão Temporal
- Diferenciação em Frequência
- Teorema de Parseval
- Teorema da Convolução
- Teorema da Modulação ou Janelamento
- Exemplos
- Exercícios propostos

Representação de Sequências por Transformadas de Fourier de Tempo Discreto



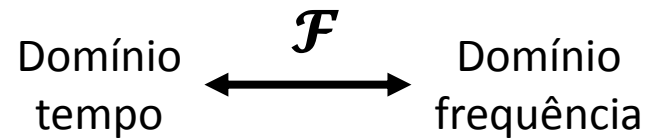
Jean-Baptiste Joseph Fourier
(1768-1830)

Estabeleceu, em 1807, que funções periódicas podem ser representadas por somas ponderadas de senos e cossenos, com amplitudes, fases e períodos escolhidos convenientemente.

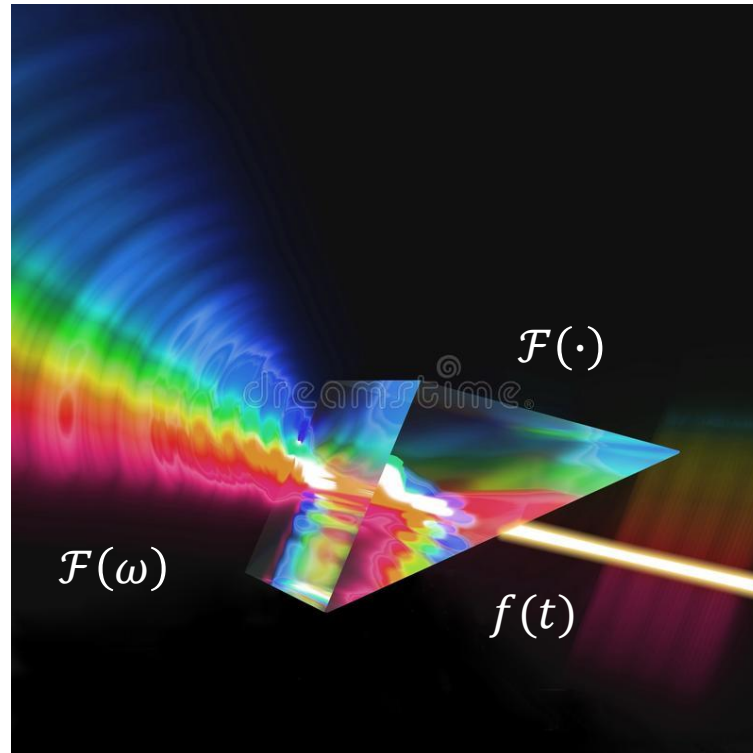


Representação de Sequências por Transformadas de Fourier de Tempo Discreto

Muitos problemas em engenharia, em particular engenharia elétrica e engenharia mecânica, caracterizados no domínio espaço/tempo, podem ter solução simplificada se resolvidos no domínio frequência.



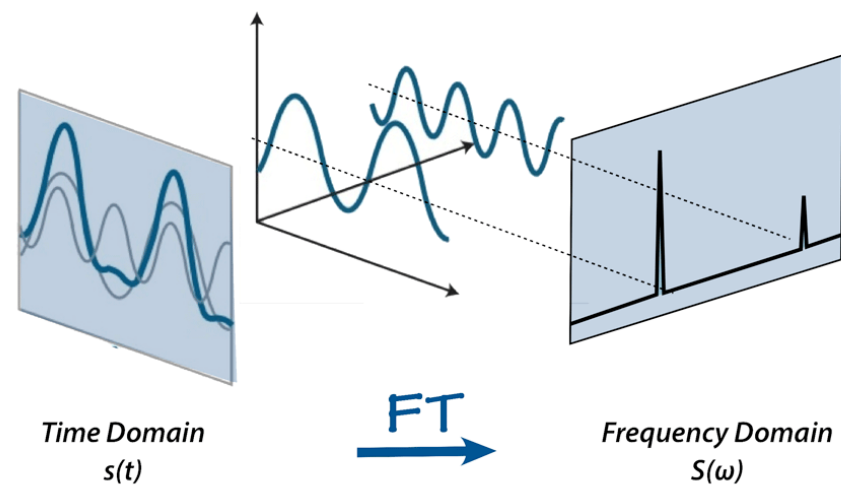
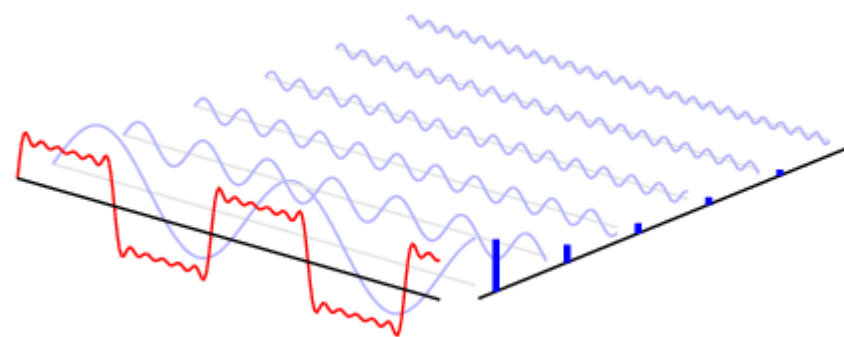
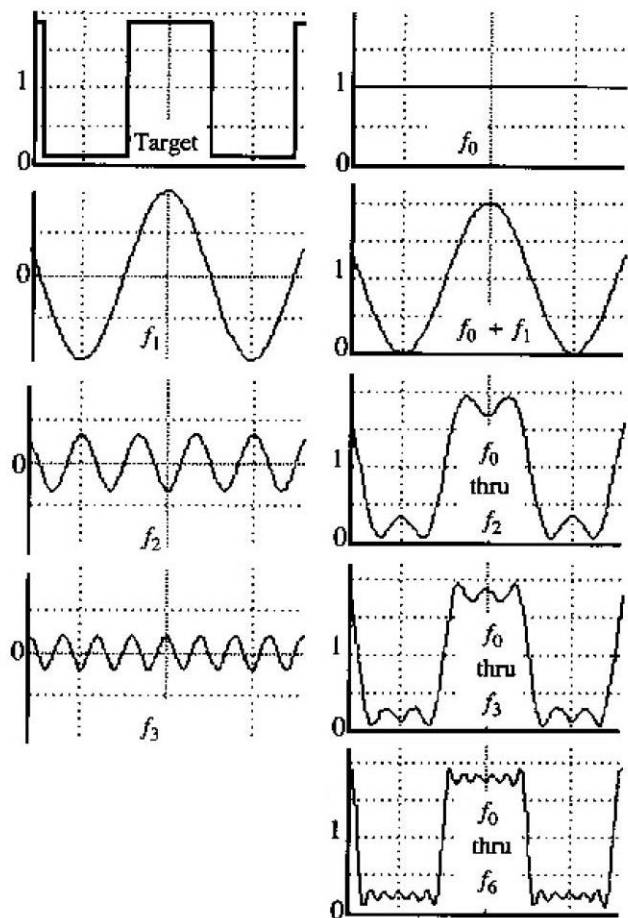
Se imaginarmos uma função $f(t)$ como um feixe de luz, então a transformada de Fourier, que pode ser interpretada como sendo implementada por um prisma, decompõe a função $f(t)$ nos diversos componentes de frequência ω que a compõem, cada um de intensidade $\mathcal{F}(\omega)$.



As várias frequências são chamadas cores e, dessa forma, a transformada de Fourier fornece o espectro de cores do sinal.

Fazendo o caminho contrário, a transformada inversa de Fourier combina o espectro, ou seja, combina todas as cores, para retornar à função original.

Representação de Sequências por Transformadas de Fourier de Tempo Discreto



Representação de Sequências por Transformadas de Fourier de Tempo Discreto

Vimos, anteriormente, que diversos sinais podem ser representados como uma combinação linear de exponenciais complexas, conforme

$$x[n] = \sum_k \alpha_k e^{j\omega_k n}$$

Alternativamente, uma sequência $x[n]$ pode, também, ser representada através de uma integral contínua, ao invés de um somatório discreto. Esta representação integral recebe o nome de representação de Fourier, conforme,

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad , \quad \text{onde} \quad X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

Na realidade, as duas equações acima definem a representação de Fourier da sequência $x[n]$.

Representação de Sequências por Transformadas de Fourier de Tempo Discreto

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

A primeira equação (acima reproduzida) é a [Transformada de Fourier Inversa](#), uma equação de síntese, porque sintetiza $x[n]$ através de uma soma ponderada de exponenciais complexas restritas a intervalos de frequências $d\omega$ infinitesimalmente pequenos, da forma

$$\frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega,$$

com ω variando em um intervalo de tamanho 2π , e $X(e^{j\omega})$ ponderando cada exponencial complexa componente da soma, onde $|X(e^{j\omega})|$ representa a magnitude (amplitude) da exponencial complexa na frequência ω e onde $\angle X(e^{j\omega})$ representa a fase da exponencial complexa na frequência ω .

Lembre que $e^{j\omega n} = \cos \omega n + j \sin \omega n$ e, portanto, o comportamento cossenoidal/senoidal está implícito na exponencial complexa.

Representação de Sequências por Transformadas de Fourier de Tempo Discreto

Fisicamente, a fase representa o deslocamento no tempo da senoide dentro de seu período.

Por exemplo:

- um ângulo de fase de -180° significa um atraso no tempo correspondente à metade do período da senoide de frequência ω ,
- um ângulo de fase de $+90^\circ$ significa um avanço no tempo correspondente a $\frac{1}{4}$ do período da senoide de frequência ω .

Embora tenhamos considerado o intervalo de integração para ω , de $-\pi$ a $+\pi$, na equação de síntese, podemos integrar em qualquer intervalo de tamanho 2π .

Representação de Sequências por Transformadas de Fourier de Tempo Discreto

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

A segunda equação (acima reproduzida) é a **Transformada de Fourier**, que é uma expressão para computar $X(e^{j\omega})$, ou seja, o módulo e a fase de cada senoide que constrói a sequência $x[n]$ no tempo.

$X(e^{j\omega})$ é, portanto, uma expressão de análise da sequência $x[n]$ para determinar quanto de cada componente de frequência é requerido para sintetizar $x[n]$ por meio da primeira equação (Transformada de Fourier Inversa).

Pelo fato de $X(e^{j\omega})$ representar módulo (intensidade) e fase (deslocamento) de cada senoide que constrói a sequência $x[n]$ no tempo, diz-se que $X(e^{j\omega})$ representa o **espectro de frequências angulares** que constroem a sequência $x[n]$ no tempo.

Representação de Sequências por Transformadas de Fourier de Tempo Discreto

Transformada de Fourier
Inversa (síntese de $x[n]$)

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$



Transformada de Fourier de Tempo
Discreto (análise de $x[n]$)

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

A equação de análise é referida como a [Transformada de Fourier de Tempo Discreto \(DTFT\)](#).

- Note que, na DTFT, o domínio tempo " n " é discreto, mas o domínio frequência " ω " é contínuo.
- Mais à frente estudaremos a Transformada Discreta de Fourier (DFT), em que tanto o domínio tempo " n " quanto o domínio frequência " k " são discretos.
- A DFT é adotada quando a sequência $x[n]$ não é definida para todo n mas, sim, para um número limitado de amostras n .
- A DTFT é adotada quando a sequência $x[n]$ é definida para todo n .
- Se o sinal existe em todo o tempo, a separação das componentes espectrais no domínio frequência é infinitesimal e, portanto, o espectro é contínuo.

Representação de Sequências por Transformadas de Fourier de Tempo Discreto

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

A Transformada de Fourier é uma função complexa de ω .

Assim como representamos a resposta em frequência, podemos expressar a Transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ na forma retangular, conforme

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega})$$

ou na forma polar,

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|e^{j\angle X(e^{j\omega})}.$$

Representação de Sequências por Transformadas de Fourier de Tempo Discreto

$$X(e^{j\omega}) = \underbrace{|X(e^{j\omega})|}_{\text{Magnitude da Transformada de Fourier}} e^{j\underbrace{\angle X(e^{j\omega})}_{\text{Fase da Transformada de Fourier}}}$$

Magnitude da
Transformada
de Fourier

Fase da
Transformada
de Fourier

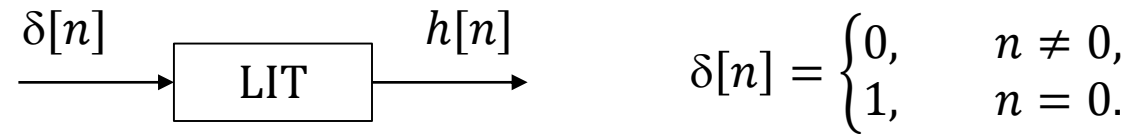
A Transformada de Fourier é muitas vezes referida como Espectro de Fourier ou, simplesmente, Espectro.

$|X(e^{j\omega})|$ A magnitude da Transformada de Fourier é muitas vezes referida como [Espectro de Magnitude](#), ou [Espectro de Amplitude](#).

$\angle X(e^{j\omega})$ A fase ou ângulo é muitas vezes referida como [Espectro de Fase](#).

Representação de Sequências por Transformadas de Fourier de Tempo Discreto

Consideremos um sistema LIT em que aplicamos um impulso $\delta[n]$ à sua entrada $x[n]$, de modo que a saída $y[n]$ do sistema represente a resposta ao impulso $h[n]$ do sistema.



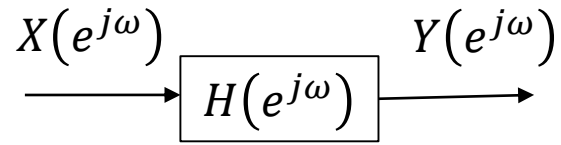
Como vimos anteriormente, podemos determinar a saída $y[n]$ deste sistema, para uma entrada $x[n]$, através da convolução de $x[n]$ com a resposta ao impulso $h[n]$ do sistema.



No domínio frequência, teremos



Representação de Sequências por Transformadas de Fourier de Tempo Discreto



$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

➔ A DTFT da saída $y[n]$ do sistema é

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]e^{-j\omega n}$$

➔ Conforme vimos anteriormente, a resposta em frequência $H(e^{j\omega})$ do sistema é dada por

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega k}$$

➔ Quando $x[n] = \delta[n]$, $X(e^{j\omega}) = 1$, e $Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})$.

Portanto, a Transformada de Fourier $Y(e^{j\omega})$ da saída $y[n]$ deste sistema, quando é aplicado um impulso $\delta[n]$ à entrada $x[n]$, é equivalente à resposta em frequência $H(e^{j\omega})$ do sistema LIT.

Representação de Sequências por Transformadas de Fourier de Tempo Discreto

Conseqüentemente, a resposta ao impulso $h[n]$ de um sistema LIT pode ser obtida a partir da sua resposta em frequência $H(e^{j\omega})$, aplicando a integral da Transformada de Fourier Inversa à função $H(e^{j\omega})$, ou seja,

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

Conforme vimos anteriormente, a resposta em frequência $H(e^{j\omega})$ é uma função periódica. Da mesma forma, a Transformada de Fourier é periódica, com período 2π .

Representação de Sequências por Transformadas de Fourier de Tempo Discreto

⇒ A expressão
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

é a Transformada de Fourier direta de $x[n]$ e pode ser interpretada como uma Série de Fourier que representa o espectro de frequências angulares de $x[n]$ dado pela função periódica $X(e^{j\omega})$ de variável ω contínua.

⇒ A expressão
$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega$$

é a Transformada de Fourier inversa de $X(e^{j\omega})$ que define os valores da sequência $x[n]$ em termos do espectro $X(e^{j\omega})$ e pode ser interpretada como a integral que determina os coeficientes da Série de Fourier correspondente.

Representação de Sequências por Transformadas de Fourier de Tempo Discreto

A Transformada de Fourier de uma sequência só existe se a sequência for somável em valor absoluto,

ou seja, se $x[n]$ em $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$ for absolutamente somável, então $X(e^{j\omega})$ existe.

Isto é equivalente a considerar a convergência da soma infinita na equação da Transformada de Fourier, ou seja,

$$|X(e^{j\omega})| < \infty \quad \text{para todo } \omega.$$

Neste caso, a série convergirá uniformemente para uma função contínua de ω .

Dado que uma sequência estável é, por definição, absolutamente somável, todas as sequências estáveis terão Transformadas de Fourier e, portanto, pode-se afirmar que qualquer sistema estável terá uma resposta finita e contínua em frequência.

Representação de Sequências por Transformadas de Fourier de Tempo Discreto

A Transformada de Fourier de uma sequência só existe se a sequência for somável em valor absoluto. No entanto, há casos em que a sequência não converge, mas é possível e útil determinar a Transformada de Fourier.

	Sequência $x[n]$	Transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$
Caso 1: Transformada de Fourier de uma Constante	$x[n] = 1$, para todo n	$X(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega + 2\pi r).$
Caso 2: Transformada de Fourier de Sequências Exponenciais Complexas	$x[n] = e^{j\omega_0 n}$, para todo n	$X(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi r)$
Caso 3: Transformada de Fourier de sequências que podem ser expressas como a soma de componentes discretas de frequência	$x[n] = \sum_k a_k e^{j\omega_k n}$, $-\infty < n < \infty$	$X(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_k 2\pi a_k \delta(\omega - \omega_k + 2\pi r)$
Caso 4: Transformada de Fourier da Sequência Degrau Unitário	$x[n] = u[n]$, para $n \geq 0$	$U(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{r=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega + 2\pi r)$

Propriedades de Simetria da Transformada de Fourier de Tempo Discreto

Ao utilizar Transformadas de Fourier, é útil conhecer a maneira como as propriedades das sequências se manifestam na Transformada, e vice-versa.

As propriedades de simetria da Transformada de Fourier são úteis por, muitas vezes, simplificarem a solução de problemas.

Uma sequência conjugada simétrica $x_e[n]$ é definida como uma sequência para a qual

$$x_e[n] = x_e^*[-n], \text{ e}$$

uma sequência conjugada antissimétrica $x_o[n]$ é definida como uma sequência para a qual

$$x_o[n] = -x_o^*[-n],$$

onde (*) denota a operação complexo conjugado.

Propriedades de Simetria da Transformada de Fourier de Tempo Discreto

Qualquer sequência $x[n]$ pode ser expressa como a soma de uma sequência conjugada simétrica a uma sequência conjugada antissimétrica. Especificamente,

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n] \quad \text{onde}$$

$$x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[-n]) = x_e^*[-n] \quad \text{e}$$

$$x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x^*[-n]) = -x_o^*[-n]$$

Uma sequência real que é conjugada simétrica, tal que $x_e[n] = x_e[-n]$, é denominada sequência par (*even*), e uma sequência real que é conjugada antissimétrica, tal que $x_o[n] = -x_o[-n]$, é denominada sequência ímpar (*odd*).

Propriedades de Simetria da Transformada de Fourier de Tempo Discreto

A Transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ pode ser decomposta em uma soma de funções, uma função conjugada simétrica e uma função conjugada antissimétrica. Especificamente,

$$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{j\omega}) \quad \text{onde} \quad X_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} [X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})] \quad \text{e}$$
$$X_o(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} [X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})]$$

Substituindo $-\omega$ por $+\omega$ em $X_e(e^{j\omega})$ e $X_o(e^{j\omega})$ temos que

$X_e(e^{j\omega})$ é conjugado simétrico e $X_o(e^{j\omega})$ é conjugado antissimétrico, isto é,

$$X_e(e^{j\omega}) = X_e^*(e^{-j\omega}) \quad \text{e} \quad X_o(e^{j\omega}) = -X_o^*(e^{-j\omega}).$$

Uma função real de variável contínua que é conjugada simétrica é denominada função par (*even*), e uma função real de variável contínua que é conjugada antissimétrica é denominada função ímpar (*odd*).

As propriedades de simetria da Transformada de Fourier são sumariadas na Tabela a seguir.

Propriedades de Simetria da Transformada de Fourier de Tempo Discreto

Sequência $x[n]$	Transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$
1. $x^*[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$
2. $x^*[-n]$	$X^*(e^{j\omega})$
3. $\mathcal{Re}\{x[n]\}$	$X_e(e^{j\omega})$ (componente simétrica conjugada de $X(e^{j\omega})$)
4. $j \mathcal{Im}\{x[n]\}$	$X_o(e^{j\omega})$ (componente antissimétrica conjugada de $X(e^{j\omega})$)
5. $x_e[n]$ (componente simétrica conjugada de $x[n]$)	$X_R(e^{j\omega}) = \mathcal{Re}\{X(e^{j\omega})\}$
6. $x_o[n]$ (componente antissimétrica conjugada de $x[n]$)	$jX_I(e^{j\omega}) = j \mathcal{Im}\{X(e^{j\omega})\}$
<i>As propriedades a seguir se aplicam somente quando $x[n]$ é real:</i>	
7. Qualquer $x[n]$ real	$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$ (a transformada de Fourier é simétrica conjugada)
8. Qualquer $x[n]$ real	$X_R(e^{j\omega}) = X_R(e^{-j\omega})$ (a parte real é par)
9. Qualquer $x[n]$ real	$X_I(e^{j\omega}) = -X_I(e^{-j\omega})$ (a parte imaginária é ímpar)
10. Qualquer $x[n]$ real	$ X(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega}) $ (a magnitude é par)
11. Qualquer $x[n]$ real	$\angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega})$ (a fase é ímpar)
12. $x_e[n]$ (componente par de $x[n]$)	$X_R(e^{j\omega})$
13. $x_o[n]$ (componente ímpar de $x[n]$)	$jX_I(e^{j\omega})$

Exemplo e Ilustração das Propriedades de Simetria da DTFT

Consideremos a sequência $x[n] = a^n u[n]$, com $a \in \mathbb{R}$.

A Transformada de Fourier da sequência é obtida por $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$, desta forma

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \quad \text{se } |ae^{-j\omega}| < 1 \quad \text{ou} \quad |a| < 1.$$

Condição para o somatório convergir

Então, a partir das propriedades de simetria, segue que

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} = X^*(e^{-j\omega})$$

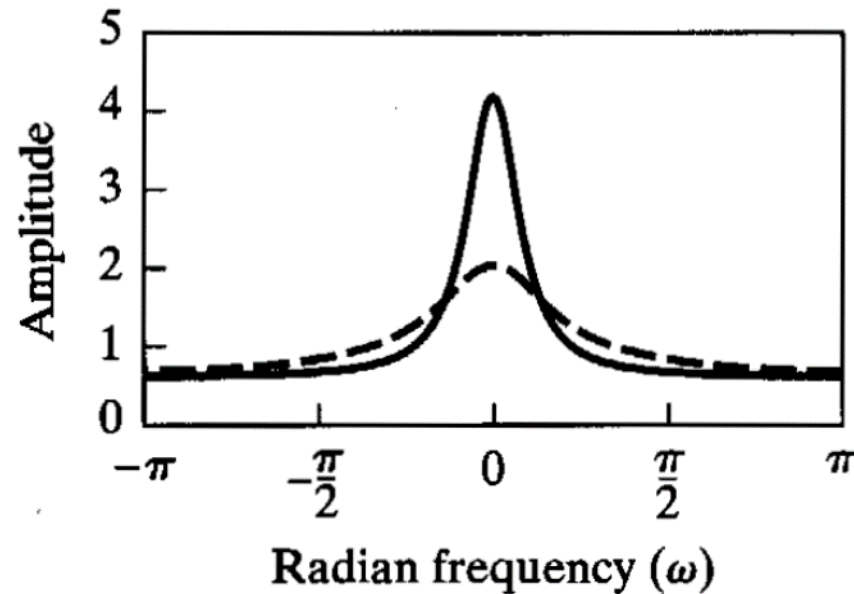
(propriedade 7)

A DTFT é simétrica conjugada.

Exemplo e Ilustração das Propriedades de Simetria da DTFT

$$X_R(e^{j\omega}) = \frac{1 - a \cos \omega}{1 + a^2 - 2a \cos \omega} = X_R(e^{-j\omega})$$

(propriedade 8)



Resposta em frequência do sistema.

Parte real, $a > 0$;

Curva sólida, $a = 0.9$;

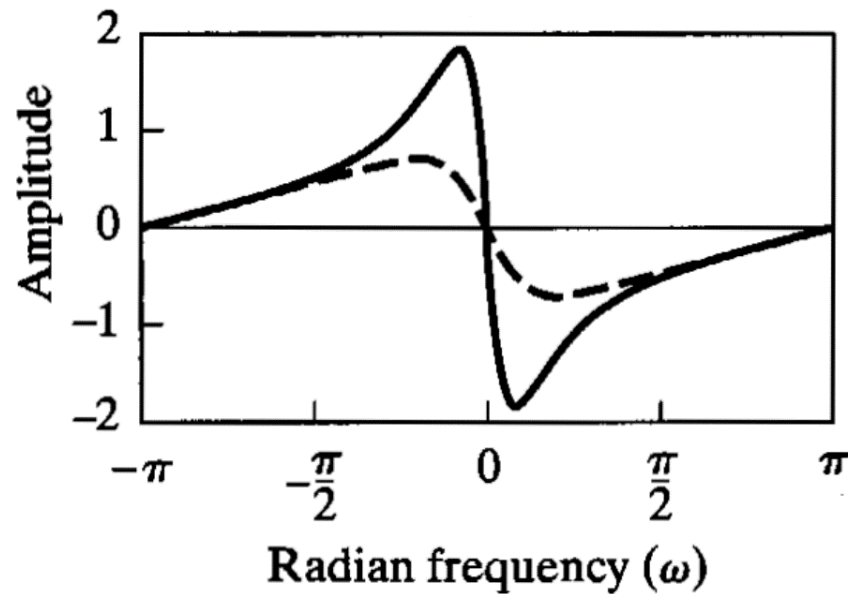
Curva tracejada, $a = 0.5$.

Parte real é par.

Exemplo e Ilustração das Propriedades de Simetria da DTFT

$$X_I(e^{j\omega}) = \frac{-a \sin \omega}{1 + a^2 - 2a \cos \omega} = -X_I(e^{-j\omega})$$

(propriedade 9)



Resposta em frequência do sistema.

Parte imaginária, $a > 0$;

Curva sólida, $a = 0.9$;

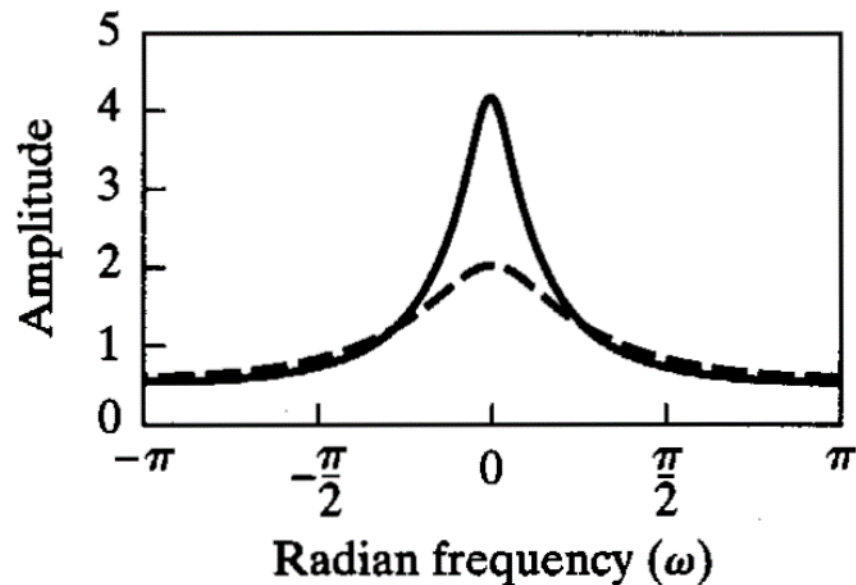
Curva tracejada, $a = 0.5$.

Parte imaginária é ímpar.

Exemplo e Ilustração das Propriedades de Simetria da DTFT

$$|X(e^{j\omega})| = \frac{1}{(1 + a^2 - 2a \cos \omega)^{1/2}} = |X(e^{-j\omega})|$$

(propriedade 10)



Resposta em frequência do sistema .

Magnitude, $a > 0$;

Curva sólida, $a = 0.9$;

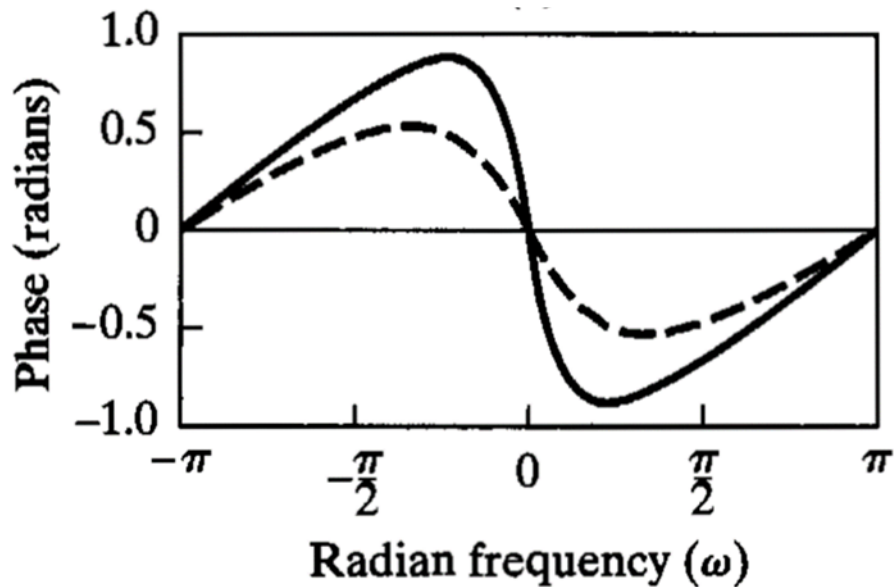
Curva tracejada, $a = 0.5$.

Magnitude é par.

Exemplo e Ilustração das Propriedades de Simetria da DTFT

$$\angle X(e^{j\omega}) = \tan^{-1} \left(\frac{-a \sin \omega}{1 - a \cos \omega} \right) = -\angle X(e^{-j\omega})$$

(propriedade 11)



Resposta em frequência do sistema .

Fase, $a > 0$;

Curva sólida, $a = 0.9$;

Curva tracejada, $a = 0.5$.

Fase é ímpar.

Teoremas de Transformada de Fourier de Tempo Discreto

Em adição às propriedades de simetria, uma variedade de Teoremas relacionam operações entre sequências discretas $x[n]$ no domínio tempo discreto n com espectros de Fourier $X(e^{j\omega})$ no domínio frequência angular ω .

Para introduzir o estudo dos Teoremas, vamos considerar as seguintes notações para os operadores:

$$\begin{aligned}X(e^{j\omega}) &= \mathcal{F}\{x[n]\}, \\x[n] &= \mathcal{F}^{-1}\{X(e^{j\omega})\}, \\x[n] &\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega}).\end{aligned}$$

O operador $\mathcal{F}\{\cdot\}$ denota “determinar a Transformada de Fourier do argumento (sequência $x[n]$)”.

O operador $\mathcal{F}^{-1}\{\cdot\}$ denota “determinar a Inversa da Transformada de Fourier do argumento ($X(e^{j\omega})$)”.

Os Teoremas da Transformada de Fourier e alguns pares de Transformadas de Fourier são sumariados nas Tabelas a seguir.

Teoremas de Transformada de Fourier de Tempo Discreto

Domínio
tempo
discreto n
(sequência)



Domínio
frequência
contínuo ω
(espectro)

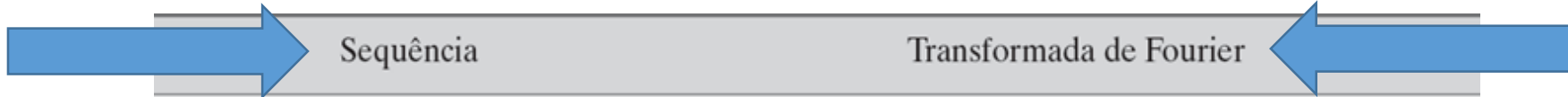
- | | |
|-------------------------------------|---|
| 1. $ax[n] + by[n]$ | $aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$ |
| 2. $x[n - n_d]$ (n_d um inteiro) | $e^{-j\omega n_d} X(e^{j\omega})$ |
| 3. $e^{j\omega_0 n} x[n]$ | $X(e^{j(\omega - \omega_0)})$ |
| 4. $x[-n]$ | $X(e^{-j\omega})$
$X^*(e^{j\omega})$ se $x[n]$ real. |
| 5. $nx[n]$ | $j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$ |
| 6. $x[n] * y[n]$ | $X(e^{j\omega}) Y(e^{j\omega})$ |
| 7. $x[n]y[n]$ | $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) Y(e^{j(\omega - \theta)}) d\theta$ |

Teorema de Parseval:

8. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$
9. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})d\omega$

Pares de Transformadas de Fourier de Tempo Discreto

Domínio
tempo
discreto n
(sequência)



Domínio
frequência
contínuo ω
(espectro)

1. $\delta[n]$	1
2. $\delta[n - n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$
3. 1 $(-\infty < n < \infty)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega + 2\pi k)$
4. $a^n u[n]$ $(a < 1)$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$
5. $u[n]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi \delta(\omega + 2\pi k)$
6. $(n + 1)a^n u[n]$ $(a < 1)$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^2}$
7. $\frac{r^n \text{sen } \omega_p (n + 1)}{\text{sen } \omega_p} u[n]$ $(r < 1)$	$\frac{1}{1 - 2r \cos \omega_p e^{-j\omega} + r^2 e^{-j2\omega}}$
8. $\frac{\text{sen } \omega_c n}{\pi n}$	$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \omega < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < \omega \leq \pi \end{cases}$
9. $x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	$\frac{\text{sen}[\omega(M + 1)/2]}{\text{sen}(\omega/2)} e^{-j\omega M/2}$
10. $e^{j\omega_0 n}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k)$
11. $\cos(\omega_0 n + \phi)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} [\pi e^{j\phi} \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k) + \pi e^{-j\phi} \delta(\omega + \omega_0 + 2\pi k)]$

Teoremas da DTFT: Linearidade

$$\text{Se } x_1[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_1(e^{j\omega}) \quad \text{e} \quad x_2[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_2(e^{j\omega}),$$

então, pela substituição na definição da Transformada de Fourier de Tempo Discreto, segue que

$$ax_1[n] + bx_2[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega}).$$

Teoremas da DTFT: Deslocamento no Tempo e em Frequência

Se $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega})$, então:

Para a sequência deslocada no tempo $x[n - n_d]$,

uma simples transformação do índice da soma na Transformada de Fourier de Tempo Discreto leva a

$$x[n - n_d] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega n_d} X(e^{j\omega}).$$

Para a sequência deslocada em frequência, $e^{j\omega_0 n} x[n]$,

uma substituição direta leva à Transformada de Fourier deslocada em frequência

$$e^{j\omega_0 n} x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j(\omega - \omega_0)}).$$

Teoremas da DTFT: Reversão Temporal

$$\text{Se } x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}),$$

então, se a sequência for reversa no tempo,

$$x[-n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{-j\omega}).$$

Se a sequência $x[n]$ for real, o Teorema se torna,

$$x[-n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X^*(e^{j\omega}).$$

Teoremas da DTFT: Diferenciação em frequência

$$\text{Se } x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}),$$

derivando a Transformada de Fourier de Tempo Discreto, temos

$$nx[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}.$$

Teoremas da DTFT: Teorema de Parseval

$$\text{Se } x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}),$$

$$\text{então, } E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega.$$

A função $|X(e^{j\omega})|^2$ é denominada **Densidade Espectral de Energia**, pois determina como a energia é distribuída no domínio frequência.

O Teorema de Parseval nos diz que determinar a energia da sequência $x[n]$ no domínio tempo equivale a determinar a energia do espectro $X(e^{j\omega})$ de $x[n]$ no domínio frequência. Ou seja, a energia do sinal se conserva ao passarmos o sinal do domínio tempo para o domínio frequência e vice-versa.

Necessariamente, a Densidade Espectral de Energia é definida unicamente para sinais cuja energia é finita.

Teoremas da DTFT: Teorema da Convolução

Seja $x[n]$ o sinal de entrada de um sistema LIT, e seja $h[n]$ a resposta ao impulso do sistema. Então, temos que a relação domínio tempo/domínio frequência é dada por

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}), \quad \text{e} \quad h[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} H(e^{j\omega}),$$

A saída $y[n]$ no domínio tempo do sistema é $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n]$,

e a saída $Y(e^{j\omega})$ no domínio frequência do sistema é $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$.

Portanto, a convolução entre a entrada $x[n]$ do sistema e a sua resposta ao impulso $h[n]$ é equivalente à multiplicação das suas respectivas Transformadas de Fourier, $X(e^{j\omega})$ e $H(e^{j\omega})$.

Note que $H(e^{j\omega})$ é a resposta em frequência do sistema, também conhecida como a função de transferência do sistema.

Teoremas da DTFT: Teorema da Convolução

Generalizando, o Teorema da Convolução estabelece que a convolução entre duas sequências $x[n]$ e $y[n]$ no domínio tempo é equivalente à multiplicação das correspondentes Transformadas de Fourier de Tempo Discreto $X(e^{j\omega})$ e $Y(e^{j\omega})$ no domínio frequência (respectivos espectros de $x[n]$ e $y[n]$).

$$x[n] * y[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$$

Teoremas da DTFT: Teorema da Modulação ou Janelamento

$$\text{Se } x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}), \quad \text{e } w[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} W(e^{j\omega}),$$

$$\text{e se } y[n] = x[n]w[n], \quad \text{então } Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})W(e^{j(\omega-\theta)})d\theta.$$

A equação acima é uma convolução periódica, isto é, uma convolução de duas funções periódicas, com os limites de integração se estendendo somente sobre um período.

Comparando o Teoremas da Convolução com o Teorema da Modulação, nota-se que:

- a convolução no tempo discreto de duas sequências é equivalente à multiplicação das correspondentes Transformadas de Fourier das sequências no domínio frequência,
- a multiplicação no tempo discreto de duas sequências é equivalente à convolução periódica das correspondentes Transformadas de Fourier das sequências no domínio frequência.

DTFT - Exemplo 1

Consideremos o filtro passa baixa ideal com frequência de corte ω_c cuja resposta ao impulso é

$$h_{lp}[n] = \frac{\sin \omega_c n}{\pi n}$$

A resposta em frequência $H_{lp}(e^{j\omega})$ deste filtro é obtida quando se aplica a DTFT à sequência $h_{lp}[n]$. Na prática, para efeito de implementação de $h_{lp}[n]$, o número de amostras é limitado a um intervalo finito $-M \leq n \leq M$. Avalie o efeito de $M = \{1, 3, 7, 19\}$ na fidelidade de $H_{lp}(e^{j\omega})$ em representar a resposta em frequência deste filtro passa baixa ideal.

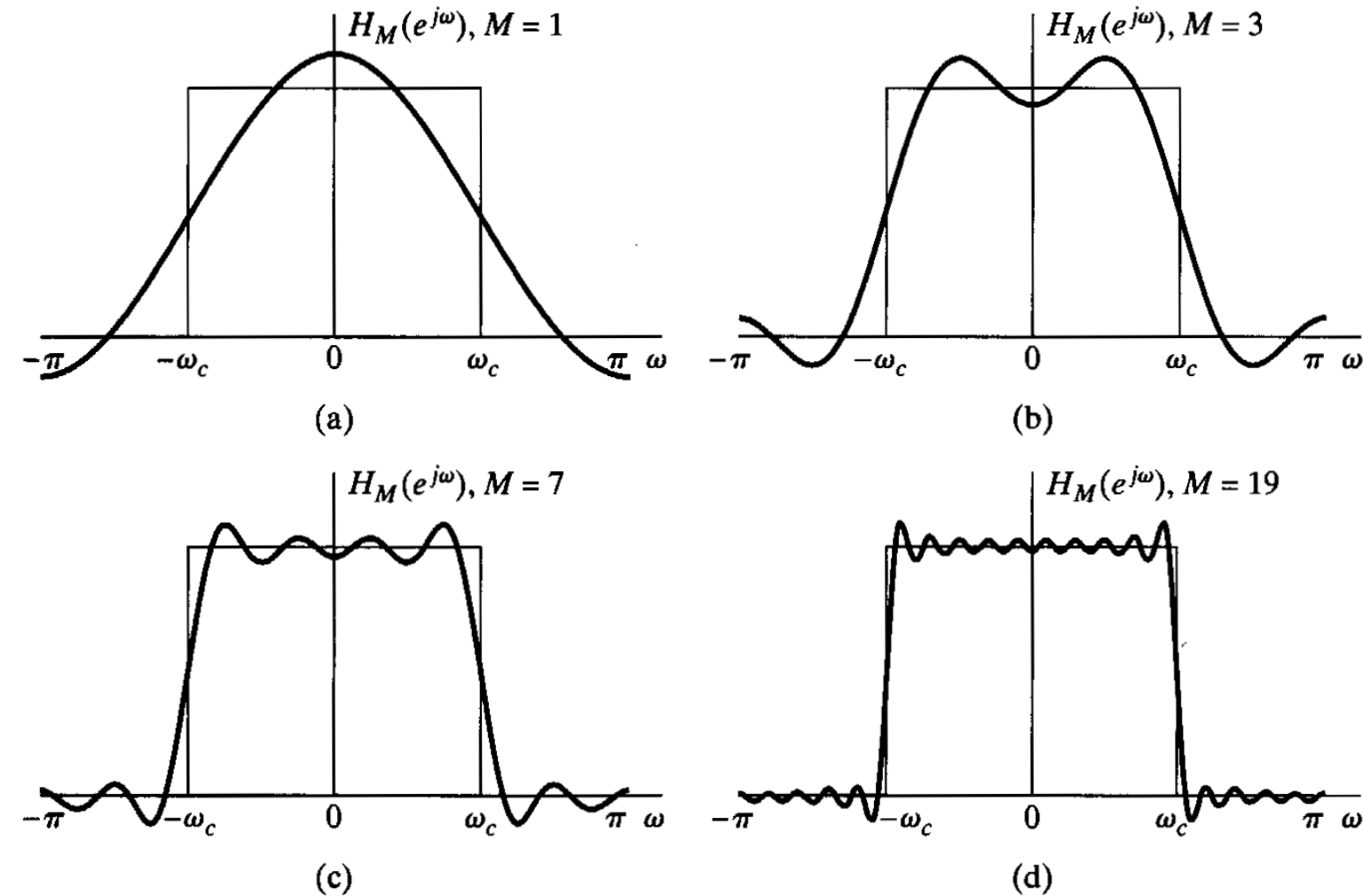
Solução: Aplicando a DTFT a $h_{lp}[n]$ obtemos a resposta em frequência $H_{lp}(e^{j\omega})$ do filtro, conforme

$$H_{lp}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega_c n}{\pi n} e^{-j\omega n}$$

Delimitando $h_{lp}[n]$ ao intervalo $-M \leq n \leq M$ obtemos

$$H_M(e^{j\omega}) = \sum_{n=-M}^M \frac{\sin \omega_c n}{\pi n} e^{-j\omega n}$$

Plotando $H_M(e^{j\omega}) = \sum_{n=-M}^M \frac{\sin \omega_c n}{\pi n} e^{-j\omega n}$ para $M = \{1, 3, 7, 19\}$, temos



Note que, à medida que M aumenta, o comportamento oscilatório na banda de passagem e na banda de rejeição do filtro (denominado Fenômeno de Gibbs) é mais rápido, mas a amplitude da oscilação não diminui em $\omega = \omega_c$.

Na verdade, à medida que $M \rightarrow \infty$, $H_M(e^{j\omega})$ se aproxima da resposta em frequência de um filtro passa baixa ideal com frequência de corte ω_c .

DTFT - Exemplo 2

Um conversor A/D com frequência de amostragem $f_s = 64\text{kHz}$ digitaliza um sinal analógico de áudio dado por $x[t] = a_1 \cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + a_2 \cos(2\pi f_2 t + \phi_2)$, sendo $a_1 = 3$, $f_1 = 4\text{kHz}$, $\phi_1 = 30^\circ$, $a_2 = 1$, $f_2 = 8\text{kHz}$, $\phi_2 = -60^\circ$.

Seja $x[n]$ a sequência na saída do conversor A/D resultante da digitalização de $x[t]$.

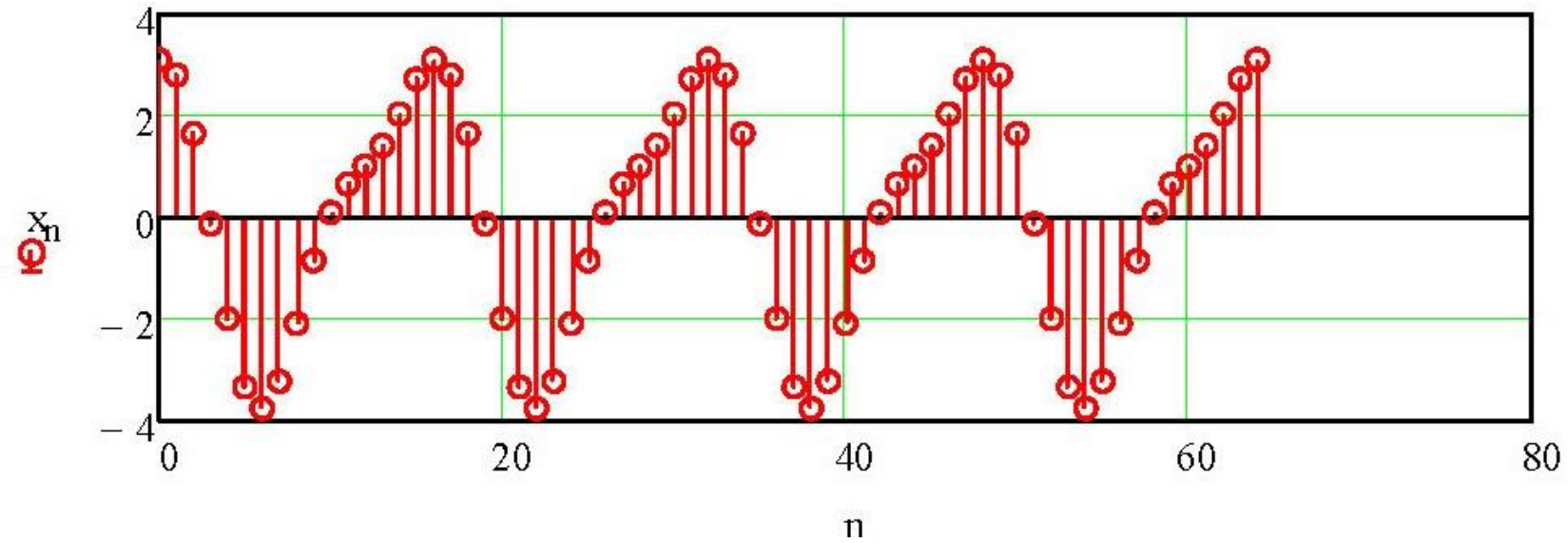
Pede-se:

- (a) Plote o gráfico da sequência $x[n]$ no intervalo $0 \leq n \leq 64$.
- (b) Plote o gráfico do módulo e da fase do espectro de frequências angulares digitais de $x[n]$ no intervalo $-\pi \leq \omega \leq \pi$, assumindo que o conversor A/D esteja ligado desde $t = -\infty$, isto é, assumo que a componente do regime transitório já se extinguiu e que só haja a componente do regime permanente.
- (c) Plote os gráficos obtidos em (b) com o eixo da abscissa representando o intervalo de frequências analógicas $-f_s/2 \leq f \leq f_s/2$.

(a) Plote o gráfico da sequência $x[n]$ no intervalo $0 \leq n \leq 64$.

$n := 0, 1..64$

$$x_n := a_1 \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{f_1}{f_s} \cdot n + \phi_1\right) + a_2 \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{f_2}{f_s} \cdot n + \phi_2\right)$$



(b) Plote o gráfico do módulo e da fase do espectro de frequências angulares digitais de $x[n]$ no intervalo $-\pi \leq \omega \leq \pi$, assumindo que o conversor A/D esteja ligado desde $t = -\infty$, isto é, assumo que a componente do regime transitório já se extinguiu e que só haja a componente do regime permanente.

Do par 11 da tabela de Pares de Transformadas de Fourier, temos:

$$F(\cos(\omega_0 \cdot n + \phi)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\pi \cdot e^{j \cdot \phi} \cdot \delta(\omega - \omega_0 + 2 \cdot \pi \cdot k) + \pi \cdot e^{-j \cdot \phi} \cdot \delta(\omega + \omega_0 + 2 \cdot \pi \cdot k) \right)$$

Mas, do enunciado, o intervalo solicitado é $-\pi \leq \omega \leq \pi$, então $k=0$ na equação acima, resultando em:

$$F(\cos(\omega_0 \cdot n + \phi)) = \pi \cdot e^{j \cdot \phi} \cdot \delta(\omega - \omega_0) + \pi \cdot e^{-j \cdot \phi} \cdot \delta(\omega + \omega_0)$$

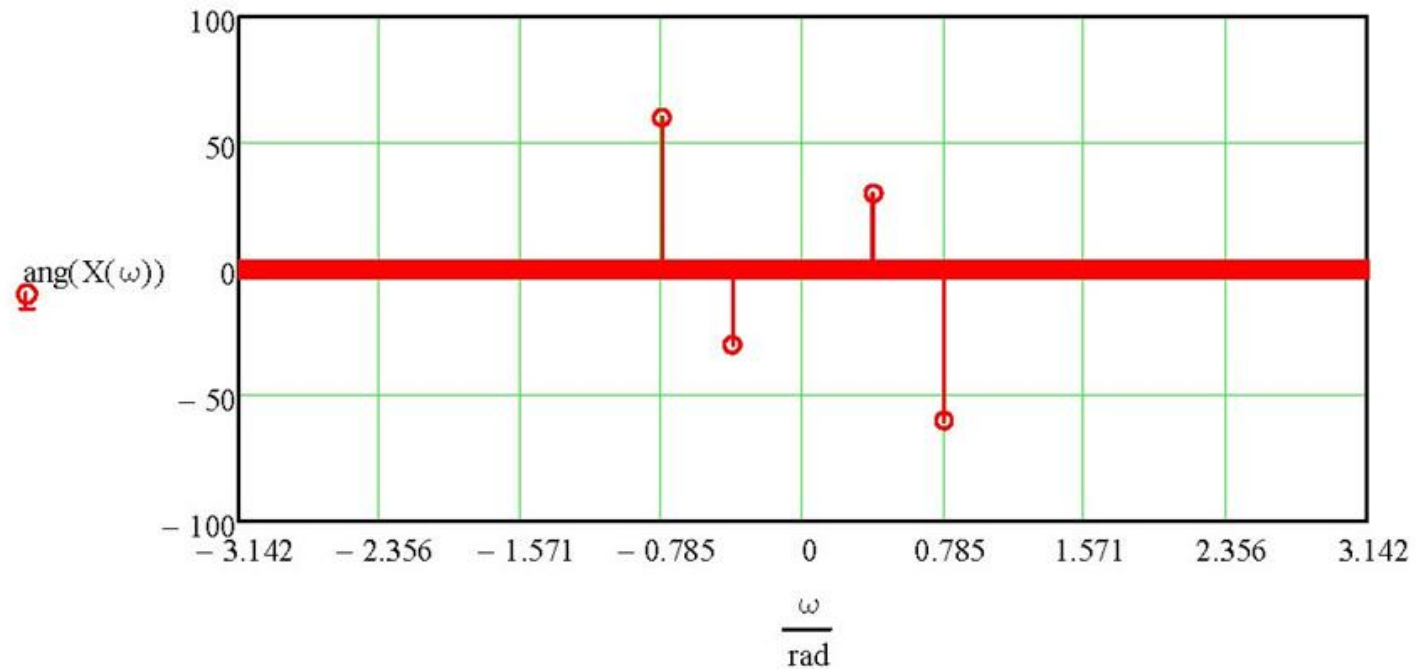
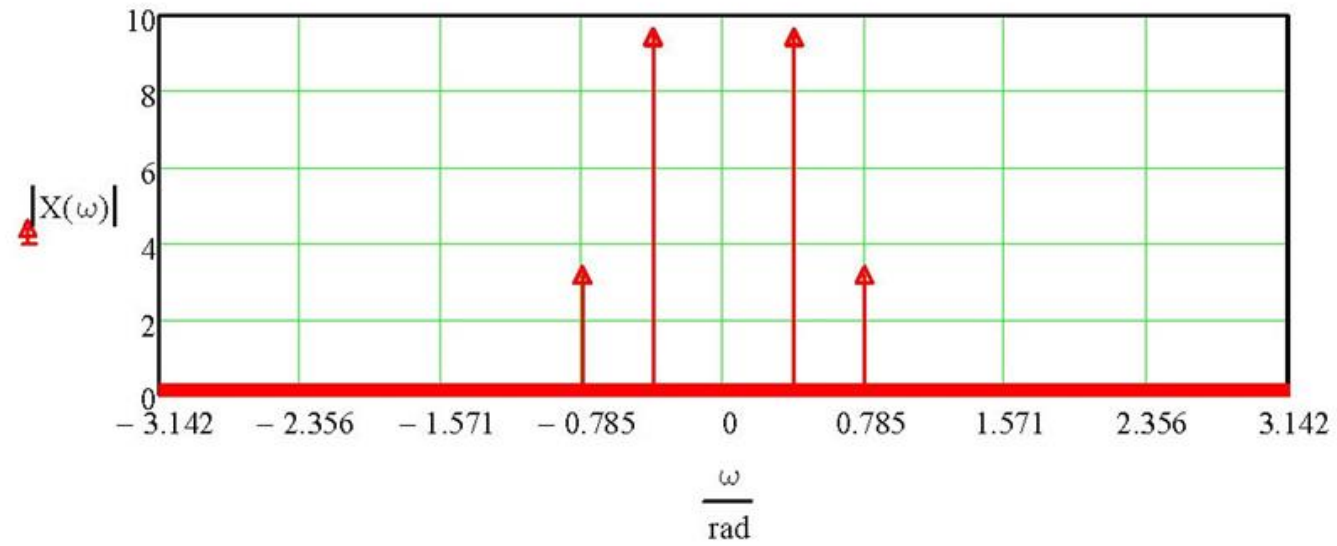
As frequências digitais em $x[n]$ acima são:

$$\omega_1 := 2 \cdot \pi \cdot \frac{f_1}{f_s} \rightarrow \omega_1 = 0.393 \cdot \text{rad} \quad \omega_2 := 2 \cdot \pi \cdot \frac{f_2}{f_s} \rightarrow \omega_2 = 0.785 \cdot \text{rad}$$

Portanto, a Transformada de Fourier $X(\omega) = F\{X[n]\}$ é:

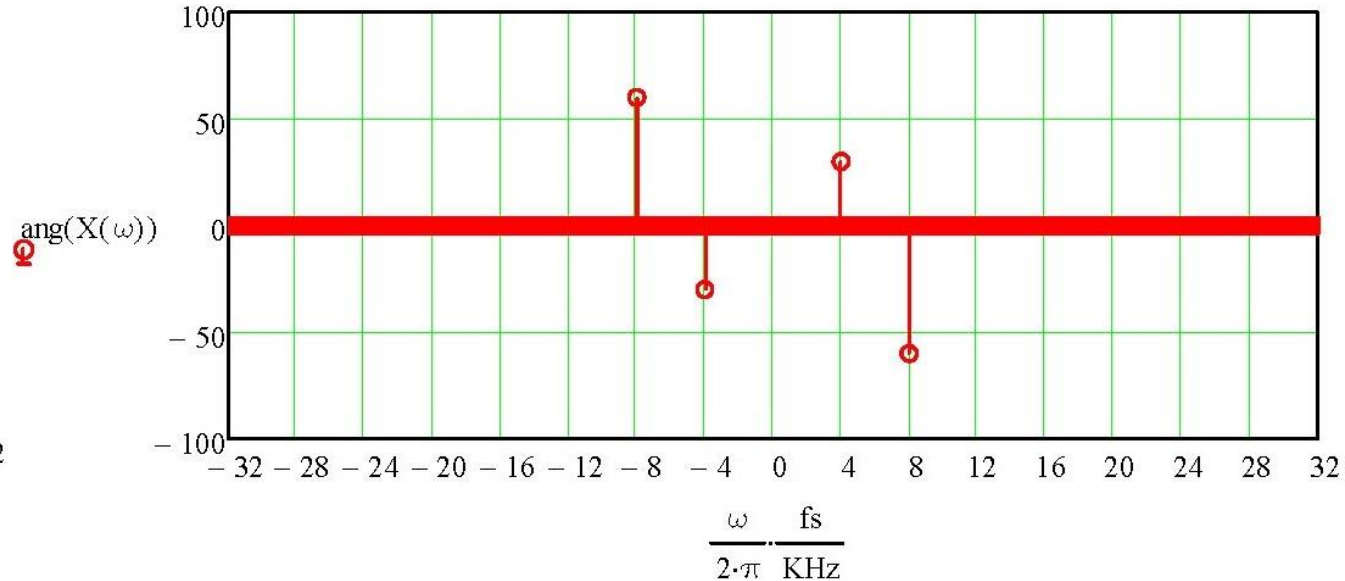
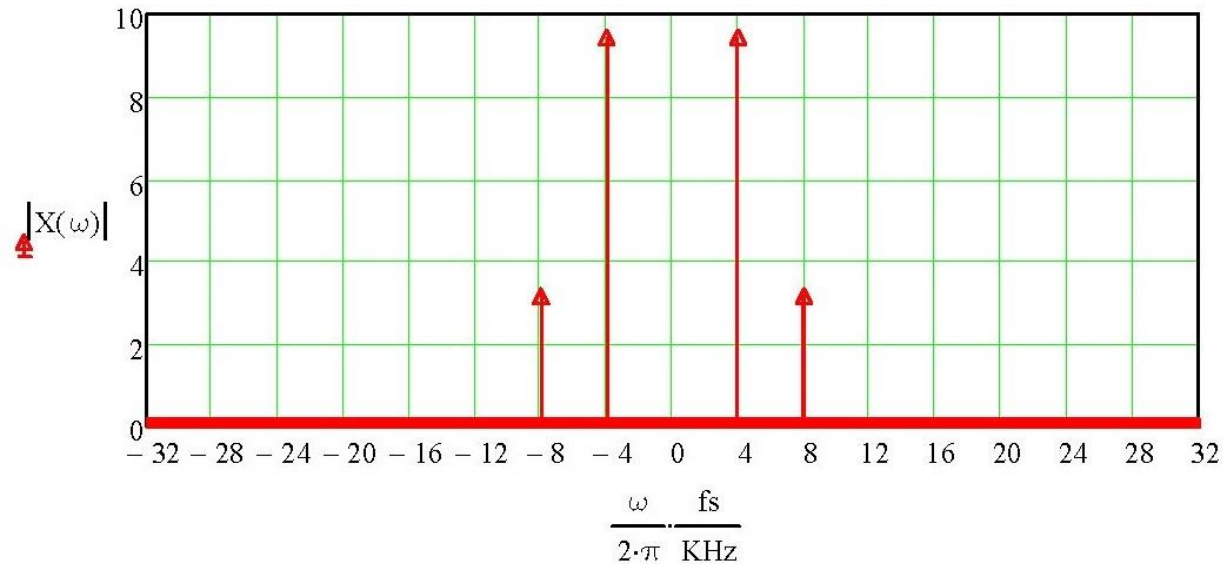
$$X(\omega) := a_1 \cdot \left(\pi \cdot e^{j \cdot \phi_1} \cdot \delta(\omega - \omega_1) + \pi \cdot e^{-j \cdot \phi_1} \cdot \delta(\omega + \omega_1) \right) + a_2 \cdot \left(\pi \cdot e^{j \cdot \phi_2} \cdot \delta(\omega - \omega_2) + \pi \cdot e^{-j \cdot \phi_2} \cdot \delta(\omega + \omega_2) \right)$$

E os gráficos de módulo e fase de $X(\omega)=F\{X[n]\}$ são:



(c) Plote os gráficos obtidos em (b) com o eixo da abscissa representando o intervalo de frequências analógicas $-f_s/2 \leq f \leq f_s/2$.

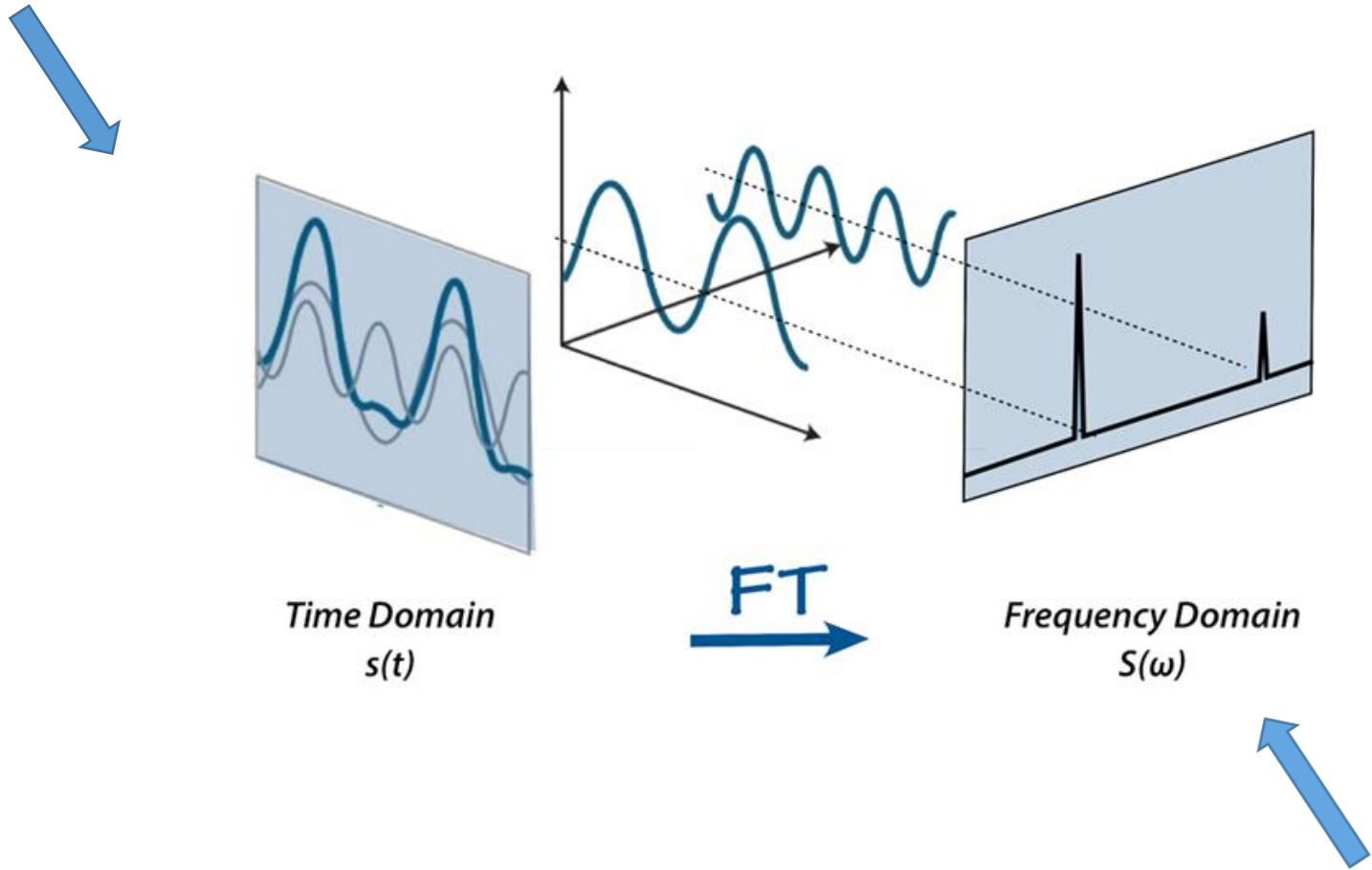
Os gráficos obtidos em (b) com o eixo da abscissa representando o intervalo de frequências analógicas $-f_s/2 \leq f \leq f_s/2$ são conforme segue:



Portanto, o espectro de um sinal cosenoidal analógico de amplitude A , fase ϕ e frequência f_0 são dois impulsos complexos de amplitude $A\pi$ no domínio frequência, ambos respectivamente ocorrendo em $-f_0$ e $+f_0$, com fase de cada impulso respectivamente sendo $-\phi$ e $+\phi$.

$$x[t] = a_1 \cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + a_2 \cos(2\pi f_2 t + \phi_2)$$

(Lembrando o slide da introdução.)



$$X(\omega) := a_1 \cdot (\pi \cdot e^{j \cdot \phi_1} \cdot \delta(\omega - \omega_1) + \pi \cdot e^{-j \cdot \phi_1} \cdot \delta(\omega + \omega_1)) + a_2 \cdot (\pi \cdot e^{j \cdot \phi_2} \cdot \delta(\omega - \omega_2) + \pi \cdot e^{-j \cdot \phi_2} \cdot \delta(\omega + \omega_2))$$

DTFT - Exemplo 3

Um conversor A/D com frequência de amostragem $f_s = 64\text{kHz}$ digitaliza um sinal analógico $x[t]$ que é um pulso retangular de amplitude $A = 1$, iniciando em $t = 0$, e de duração Δt .

Seja $x[n]$ a sequência na saída do conversor A/D resultante da digitalização de $x[t]$.

Pede-se:

- (a) Plote o gráfico da sequência $x[n]$ para $\Delta t = 10/f_s$ no intervalo $0 \leq n \leq 20$;
- (b) Plote o gráfico do módulo e da fase do espectro de frequências angulares digitais de $x[n]$ no intervalo $-\pi \leq \omega \leq \pi$;
- (c) Plote os gráficos obtidos em (b) com o eixo da abscissa representando o intervalo de frequências analógicas $-f_s/2 \leq f \leq f_s/2$;
- (d) Repita (a), (b) e (c) para $\Delta t = 5/f_s$;
- (e) Repita (a), (b) e (c) para $\Delta t = 2/f_s$;
- (f) Repita (a), (b) e (c) para $\Delta t = 1/f_s$;
- (g) Estabeleça conclusões a partir dos resultados encontrados de (a)-(f).

(a) Plote o gráfico da sequência $x[n]$ para $\Delta t = 10/f_s$ no intervalo $0 \leq n \leq 20$.

$x[t]$ é um pulso retangular de amplitude $A = 1$, iniciando em $t = 0$, e de duração $\Delta t = 10/f_s$, $f_s = 64kHz$.

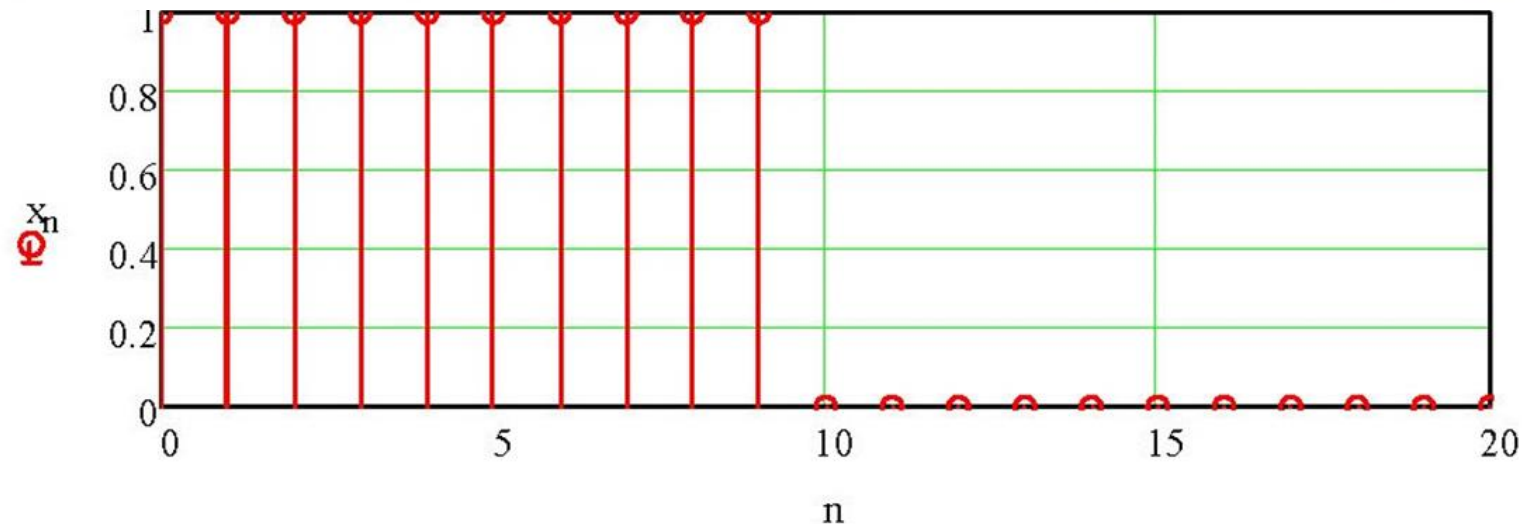
$$\Delta t := \frac{10}{f_s} \rightarrow \Delta t = 0.156\text{ms} \rightarrow \text{duração do pulso } x(t)$$

$$T_s := \frac{1}{f_s} \rightarrow T_s = 0.016\text{ms} \rightarrow \text{intervalo entre as amostras da sequencia } x[n]$$

$$N := \text{round}\left(\frac{\Delta t}{T_s}\right) \rightarrow N = 10 \rightarrow \text{número de amostras do pulso representado por } x[n]$$

Portanto, para $n := 0, 1 \dots 20$, a sequência $x[n]$ na saída do A/D é representada por:

$x_n := \text{if}[(n \geq 0) \cdot (n < N), A, 0]$ sendo $A = 1$ e $N = 10$, o que resulta no gráfico:



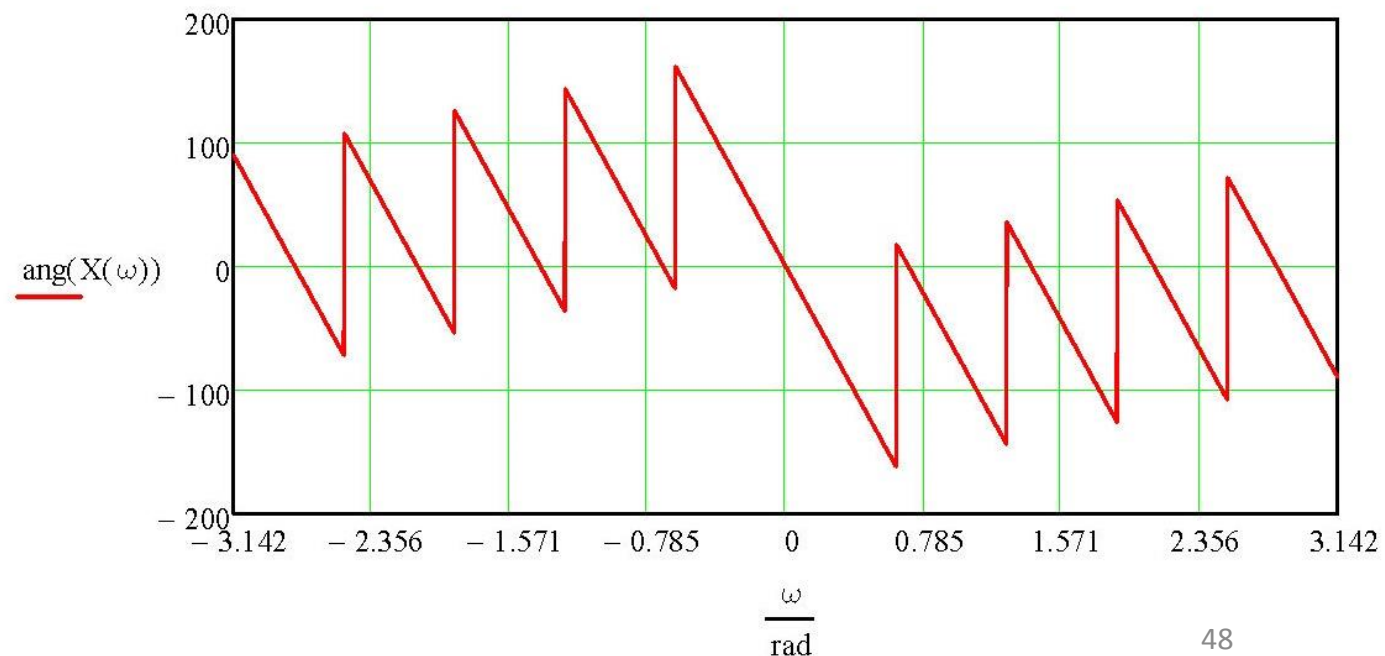
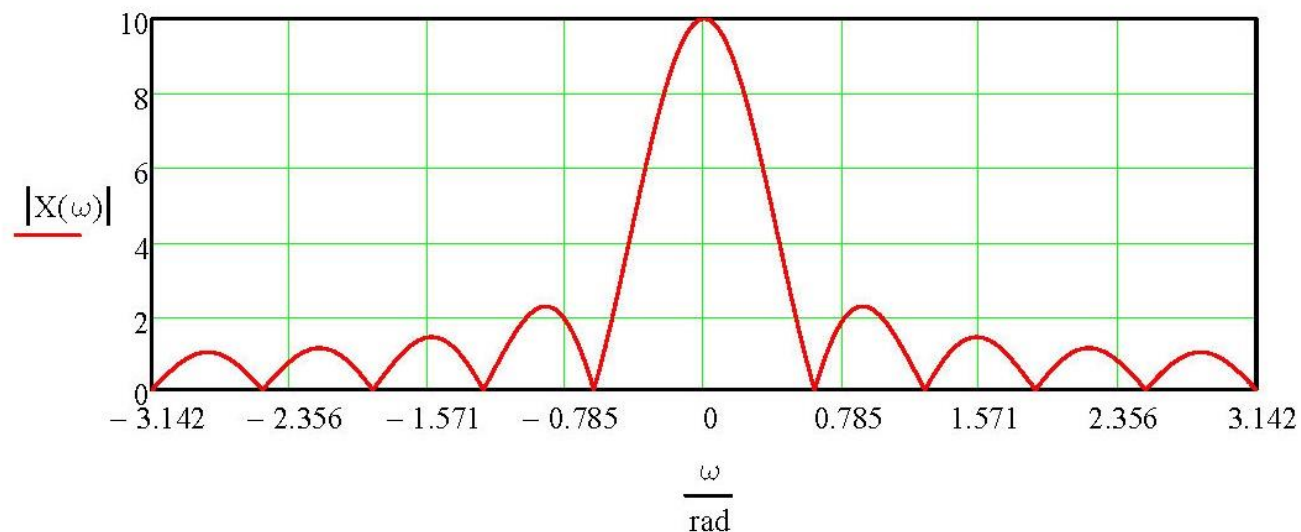
(b) Plote o gráfico do módulo e da fase do espectro de frequências angulares digitais de $x[n]$ no intervalo $-\pi \leq \omega \leq \pi$.

Do par 9 da tabela de Pares de Transformadas de Fourier, com $M := N - 1$, temos que a Transformada de Fourier da sequência $x[n]$ acima definida, isto é, $X(\omega) = F\{x[n]\}$, é dada por:

$$X(\omega) := \frac{A \cdot \sin\left[\omega \cdot \left(\frac{M+1}{2}\right)\right] \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot \frac{M}{2}}}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

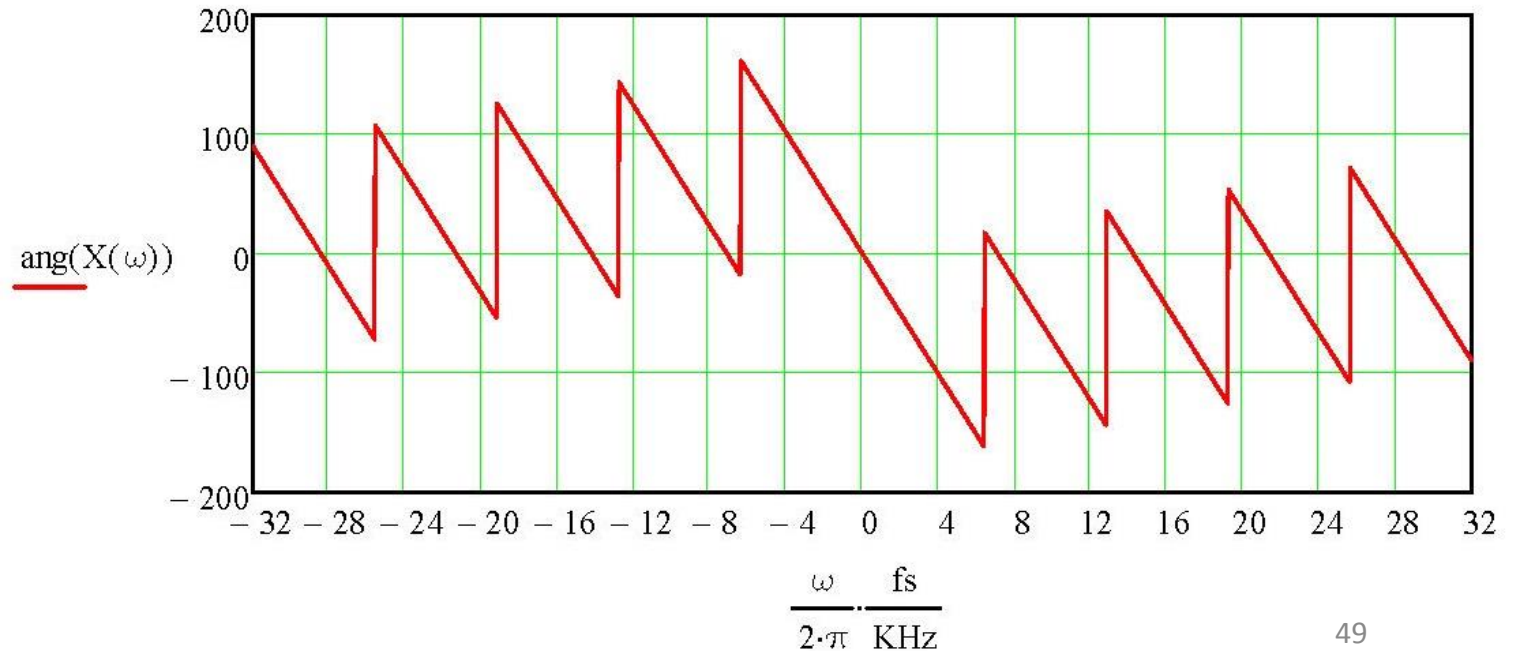
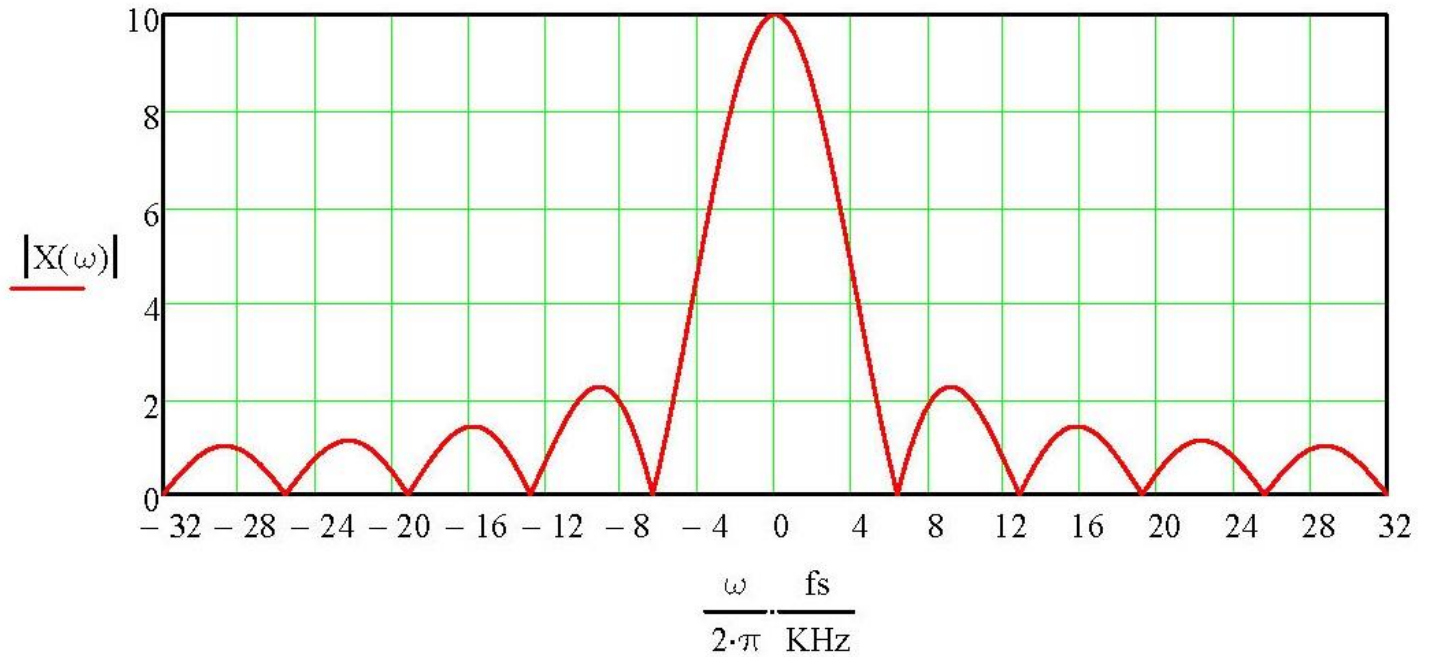
Note que a magnitude do espectro $X(\omega)$ de um pulso retangular é uma função $\text{sinc}(\omega)$.

Os gráficos de módulo e fase de $X(\omega) = F\{x[n]\}$ no intervalo $-\pi \leq \omega \leq \pi$ são:



(c) Plote os gráficos obtidos em (b) com o eixo da abscissa representando o intervalo de frequências analógicas $-f_s/2 \leq f \leq f_s/2$.

Os gráficos obtidos em (b), com o eixo da abscissa representando o intervalo de frequências analógicas $-f_s/2 \leq f \leq f_s/2$, são conforme apresentados ao lado:



(d) Repita (a), (b) e (c) para $\Delta t = 5/f_s$.

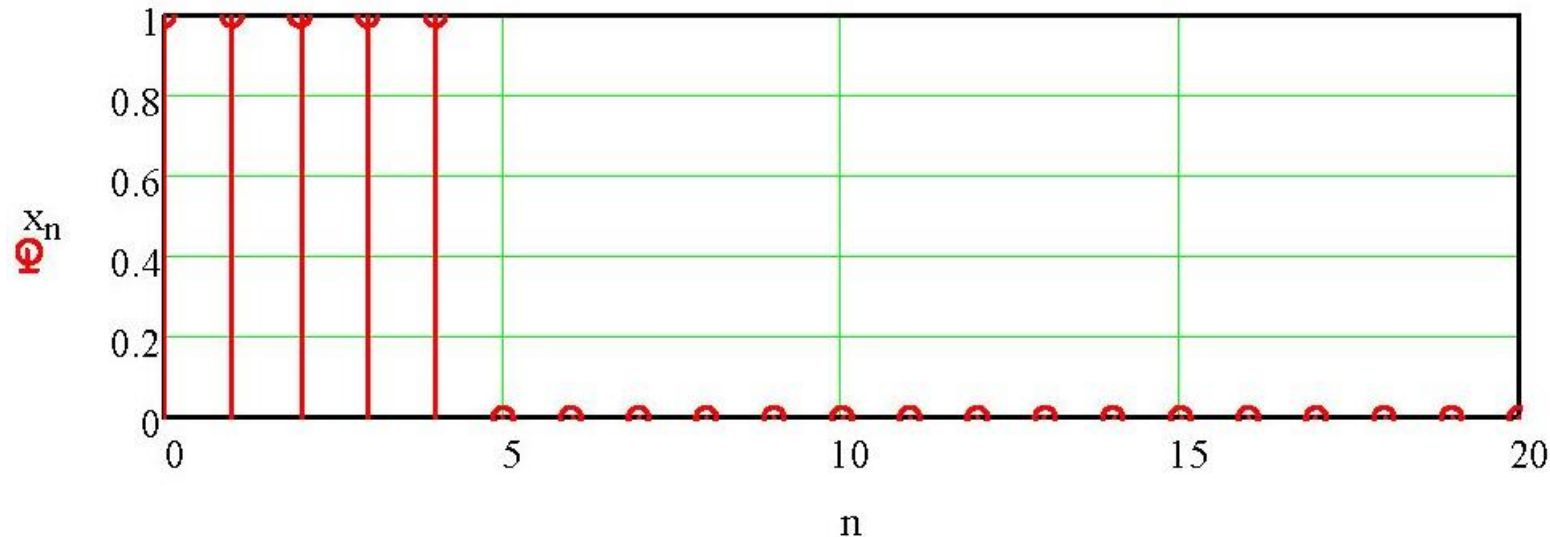
$$\Delta t := \frac{5}{f_s} \rightarrow \Delta t = 0.078 \cdot \text{ms} \rightarrow \text{duração do pulso } x(t)$$

$$T_s := \frac{1}{f_s} \rightarrow T_s = 0.016 \cdot \text{ms} \rightarrow \text{intervalo entre as amostras da sequência } x[n]$$

$$N := \text{round}\left(\frac{\Delta t}{T_s}\right) \rightarrow N = 5 \rightarrow \text{número de amostras do pulso representado por } x[n]$$

Portanto, para $n := 0, 1 \dots 20$, a sequência $x[n]$ na saída do A/D é representada por:

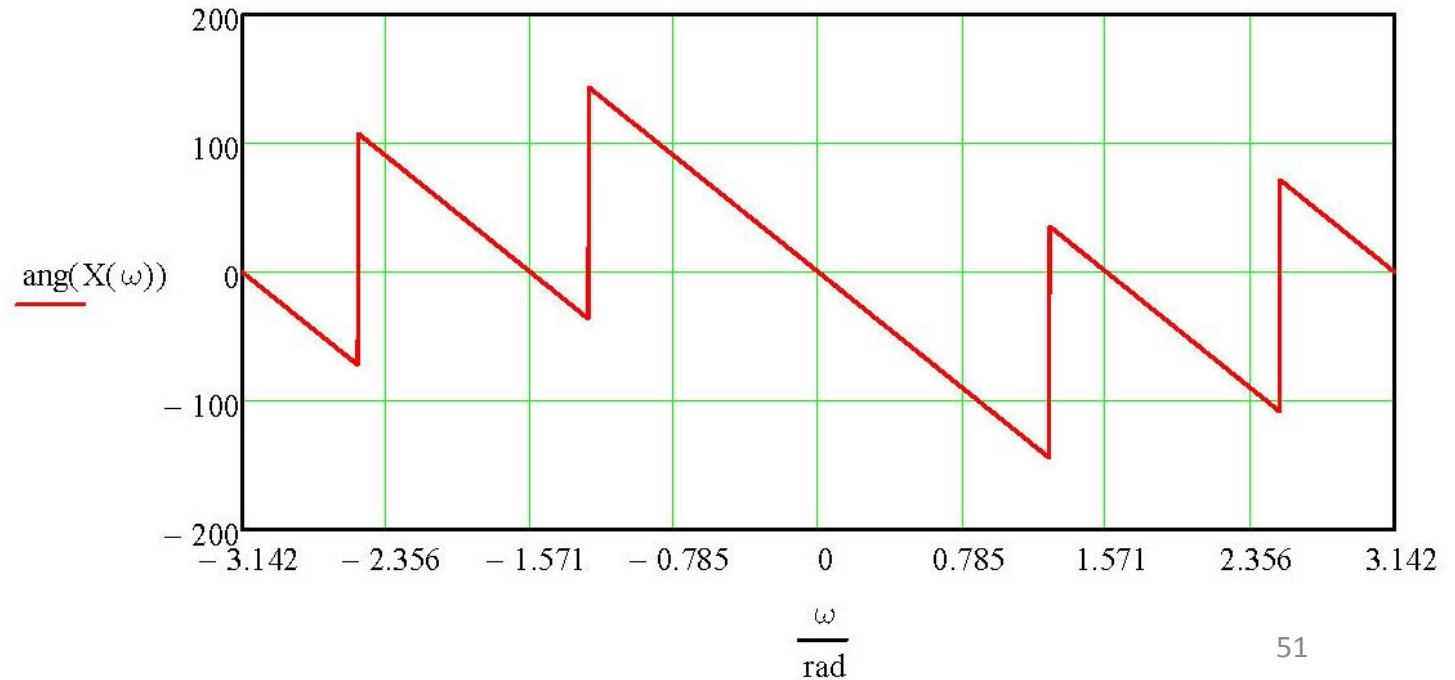
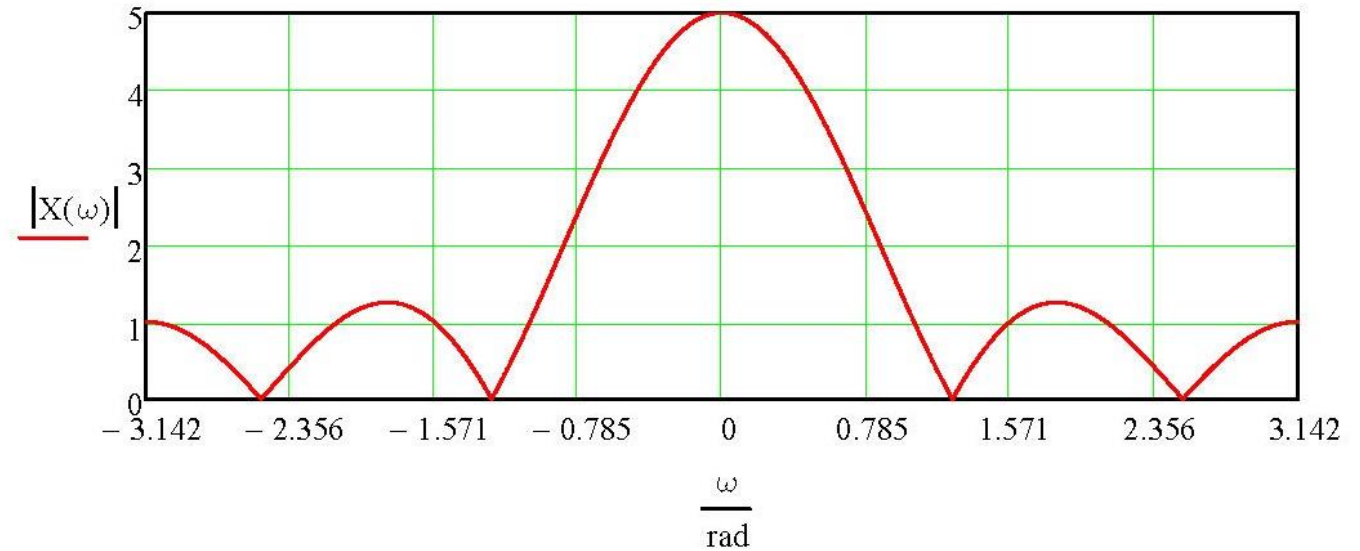
$x_n := \text{if}[(n \geq 0) \cdot (n < N), A, 0]$ sendo $A = 1$ e $N = 5$, o que resulta no gráfico:



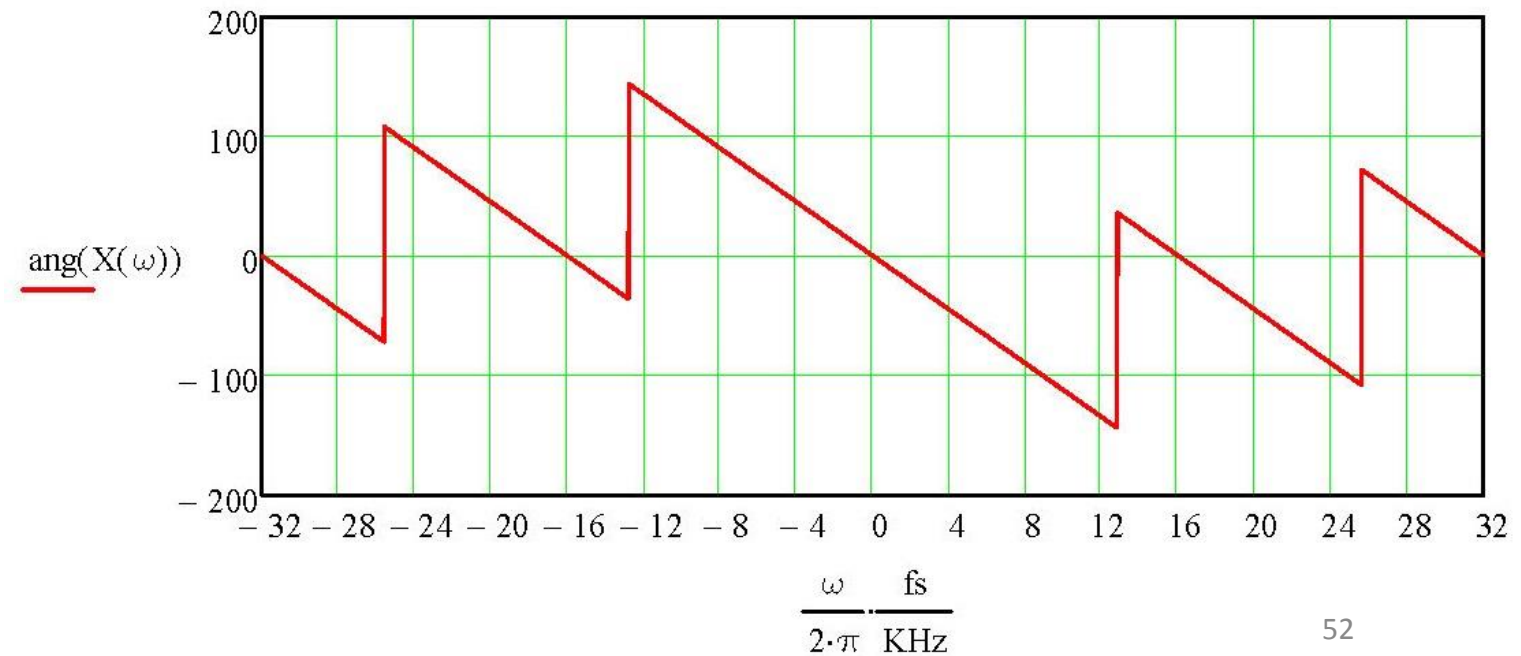
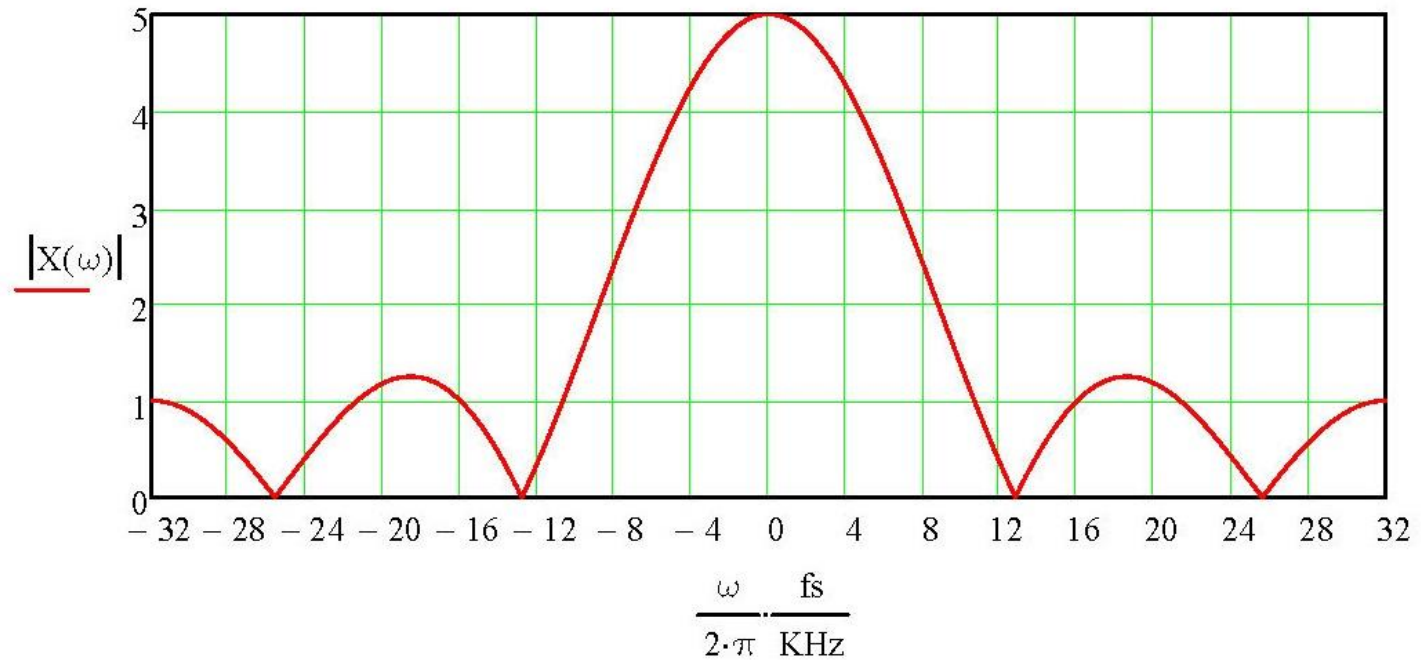
Do par 9 da tabela de Pares de Transformadas de Fourier, com $M := N - 1$, temos que a Transformada de Fourier da sequência $x[n]$ acima definida, isto é, $X(\omega) = F\{x[n]\}$, é dada por:

$$X(\omega) := \frac{A \cdot \sin\left[\omega \cdot \left(\frac{M+1}{2}\right)\right] \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot \frac{M}{2}}}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

Os gráficos de módulo e fase de $X(\omega) = F\{x[n]\}$ no intervalo $-\pi \leq \omega \leq \pi$ são:



Os gráficos de módulo e fase de $X(\omega) = \mathcal{F}\{x[n]\}$ com o eixo da abscissa representando o intervalo de frequências analógicas $-f_s/2 \leq f \leq f_s/2$, são conforme apresentados ao lado:



(e) Repita (a), (b) e (c) para $\Delta t = 2/f_s$.

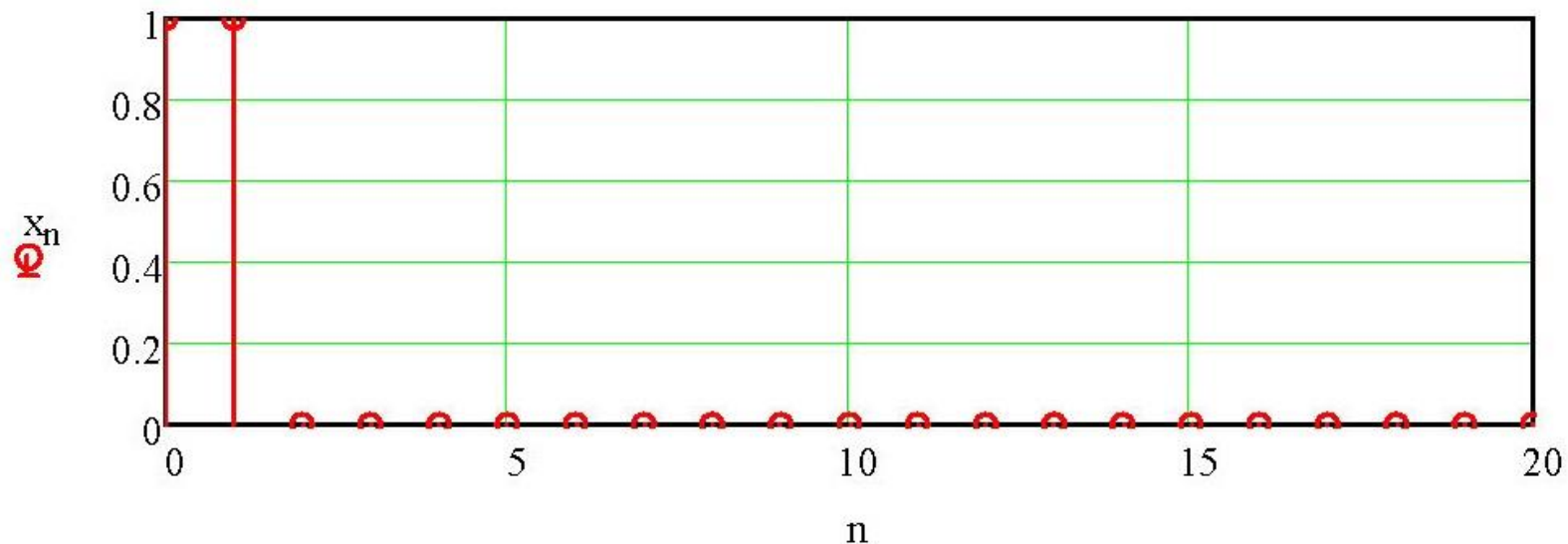
$$\Delta t := \frac{2}{f_s} \rightarrow \Delta t = 0.031 \cdot \text{ms} \rightarrow \text{duração do pulso } x(t)$$

$$T_s := \frac{1}{f_s} \rightarrow T_s = 0.016 \cdot \text{ms} \rightarrow \text{intervalo entre as amostras da sequência } x[n]$$

$$N := \text{round}\left(\frac{\Delta t}{T_s}\right) \rightarrow N = 2 \rightarrow \text{número de amostras do pulso representado por } x[n]$$

Portanto, para $n := 0, 1 \dots 20$, a sequência $x[n]$ na saída do A/D é representada por:

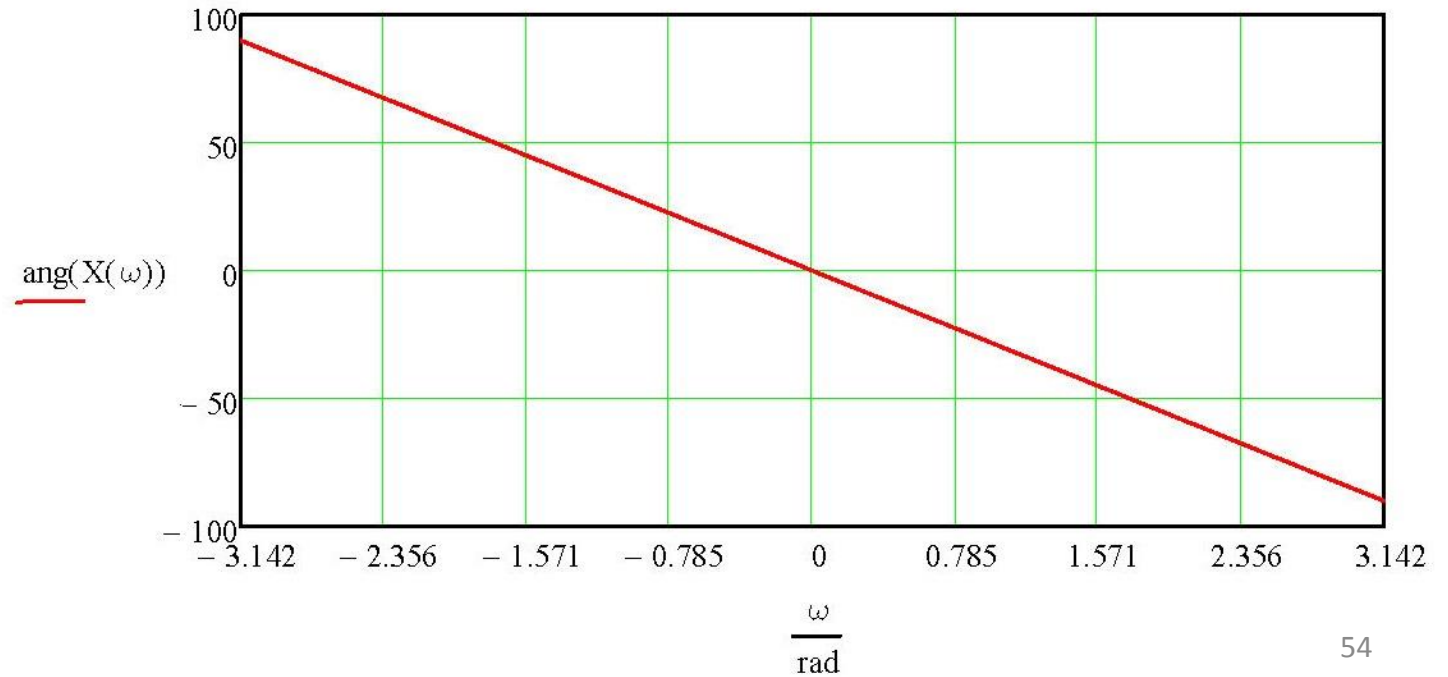
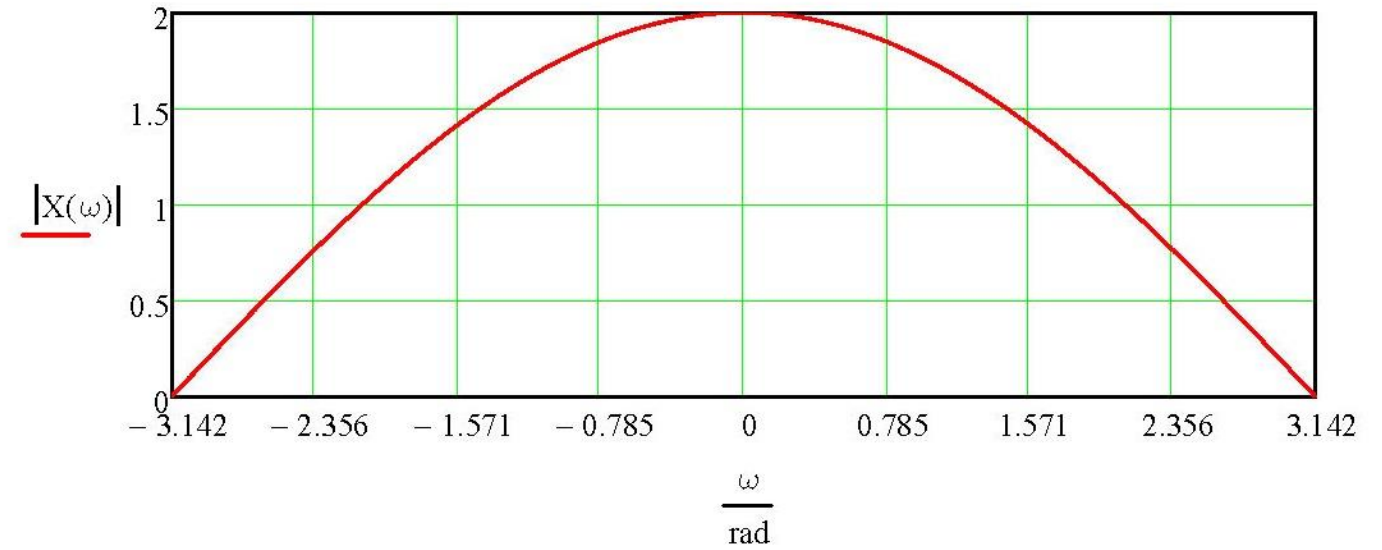
$$x_n := \text{if}[(n \geq 0) \cdot (n < N), A, 0] \quad \text{sendo } A = 1 \quad \text{e } N = 2, \text{ o que resulta no gráfico:}$$



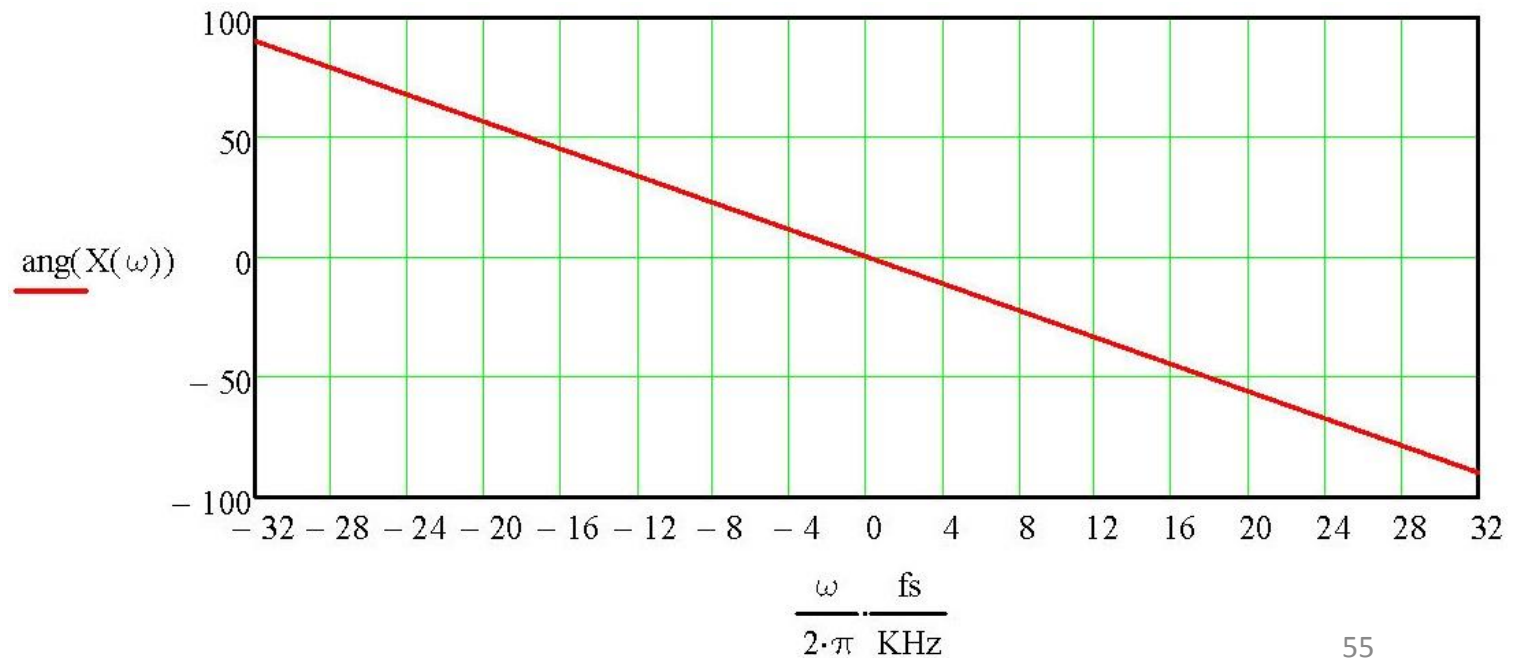
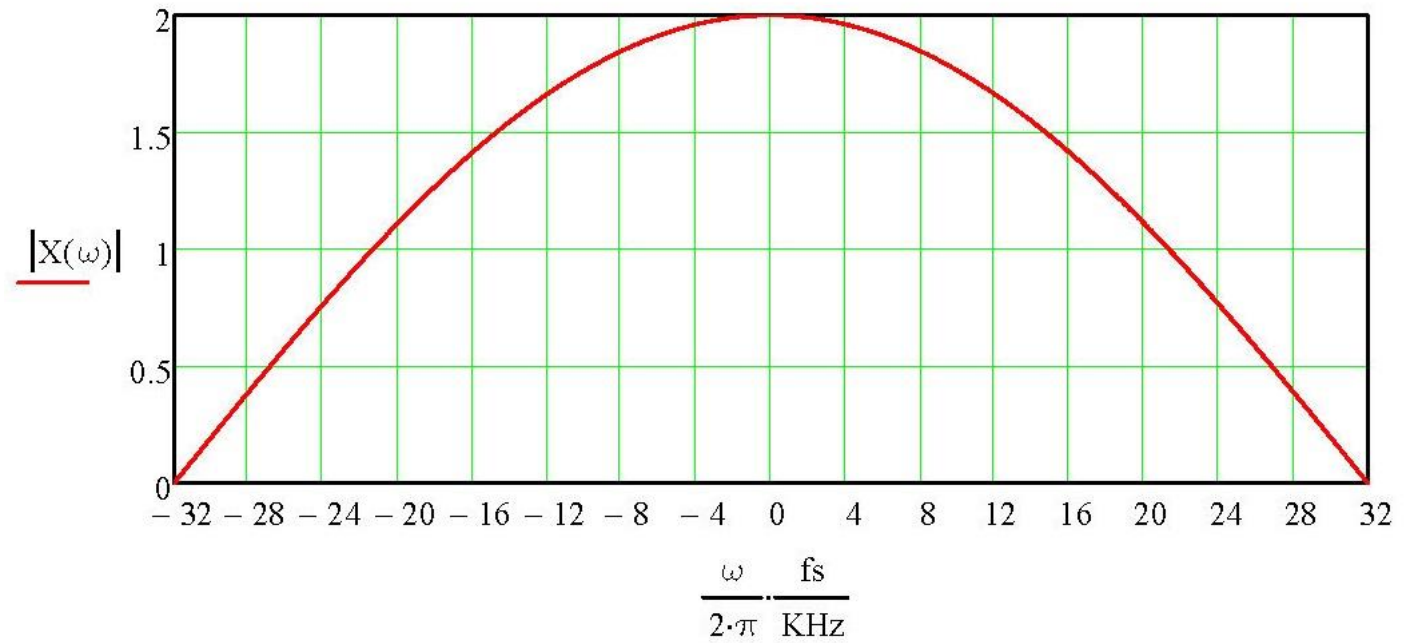
Os gráficos de módulo e fase de $X(\omega)=F\{x[n]\}$ no intervalo $-\pi \leq \omega \leq \pi$ são:

Do par 9 da tabela de Pares de Transformadas de Fourier, com $M := N - 1$, temos que a Transformada de Fourier da sequência $x[n]$ acima definida, isto é, $X(\omega)=F\{x[n]\}$, é dada por

$$X(\omega) := \frac{A \cdot \sin\left[\omega \cdot \left(\frac{M+1}{2}\right)\right] \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot \frac{M}{2}}}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$



Os gráficos de módulo e fase de $X(\omega) = \mathcal{F}\{x[n]\}$ com o eixo da abscissa representando o intervalo de frequências analógicas $-f_s/2 \leq f \leq f_s/2$, são conforme apresentados ao lado:



(f) Repita (a), (b) e (c) para $\Delta t = 1/f_s$.

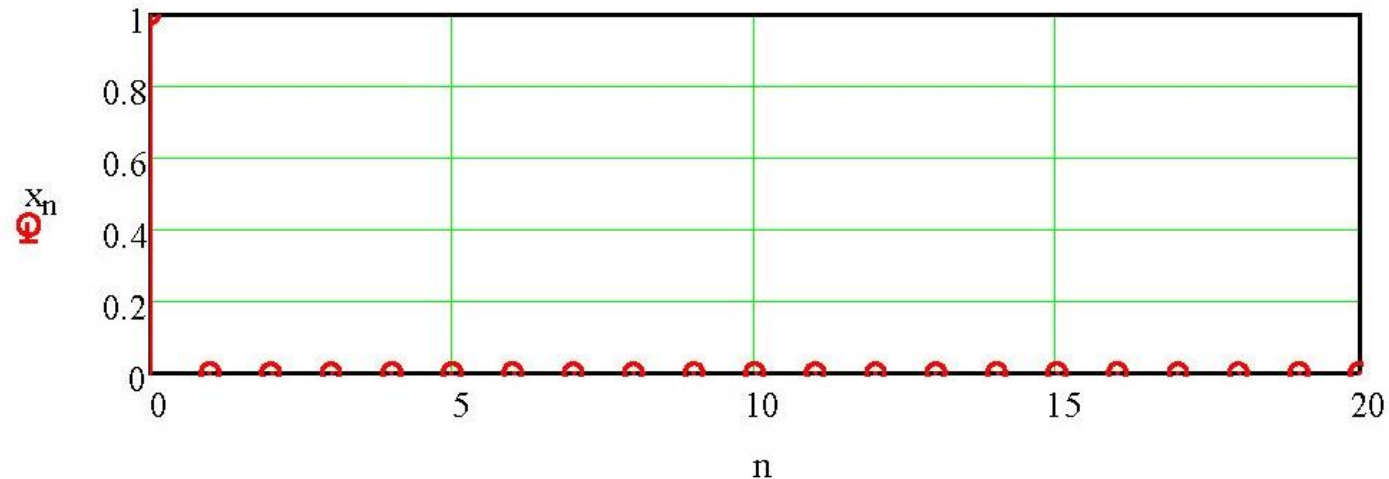
$$\Delta t := \frac{1}{f_s} \rightarrow \Delta t = 0.016 \cdot \text{ms} \rightarrow \text{duração do pulso } x(t)$$

$$T_s := \frac{1}{f_s} \rightarrow T_s = 0.016 \cdot \text{ms} \rightarrow \text{intervalo entre as amostras da sequencia } x[n]$$

$$N := \text{round}\left(\frac{\Delta t}{T_s}\right) \rightarrow N = 1 \rightarrow \text{número de amostras do pulso representado por } x[n]$$

Portanto, para $n := 0, 1 \dots 20$, a sequência $x[n]$ na saída do A/D é representada por:

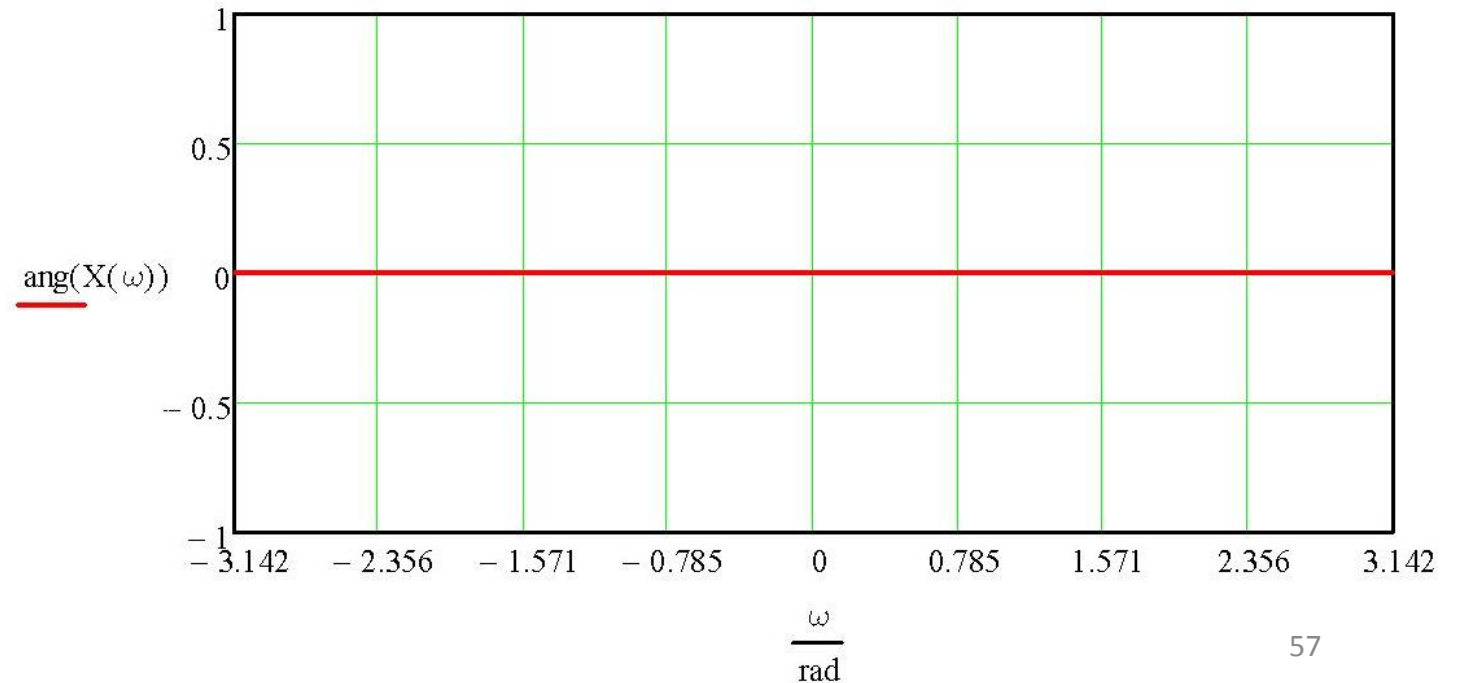
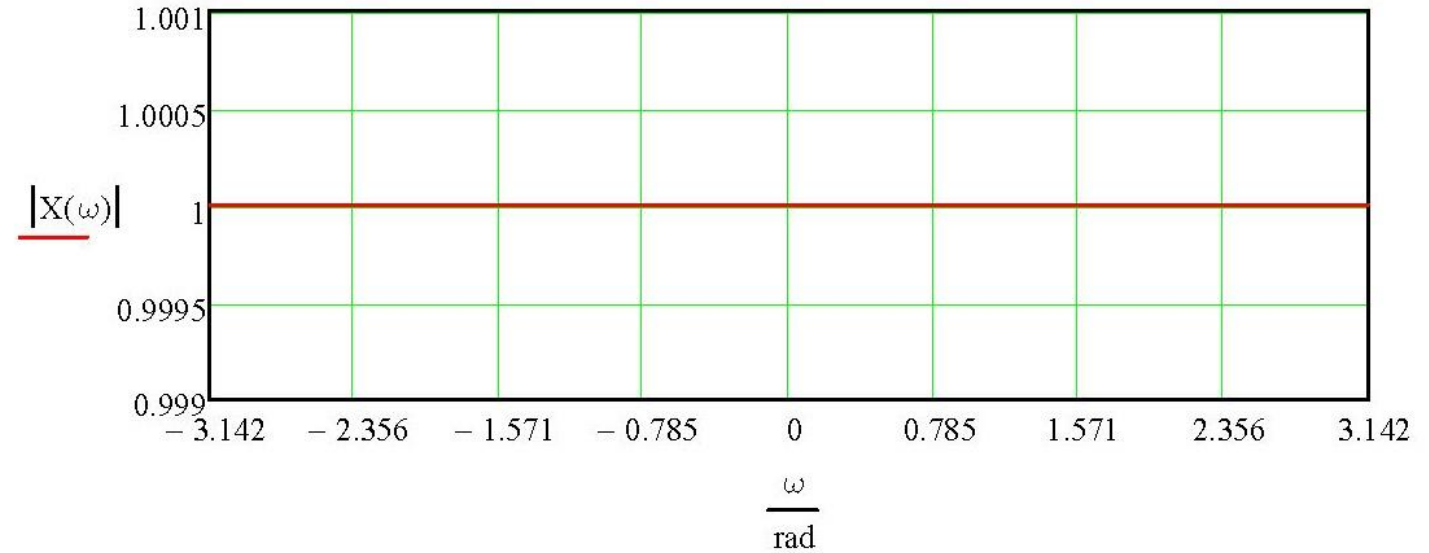
$$x_n := \text{if}[(n \geq 0) \cdot (n < N), A, 0] \quad \text{sendo } A = 1 \quad \text{e } N = 1, \text{ o que resulta no gráfico:}$$



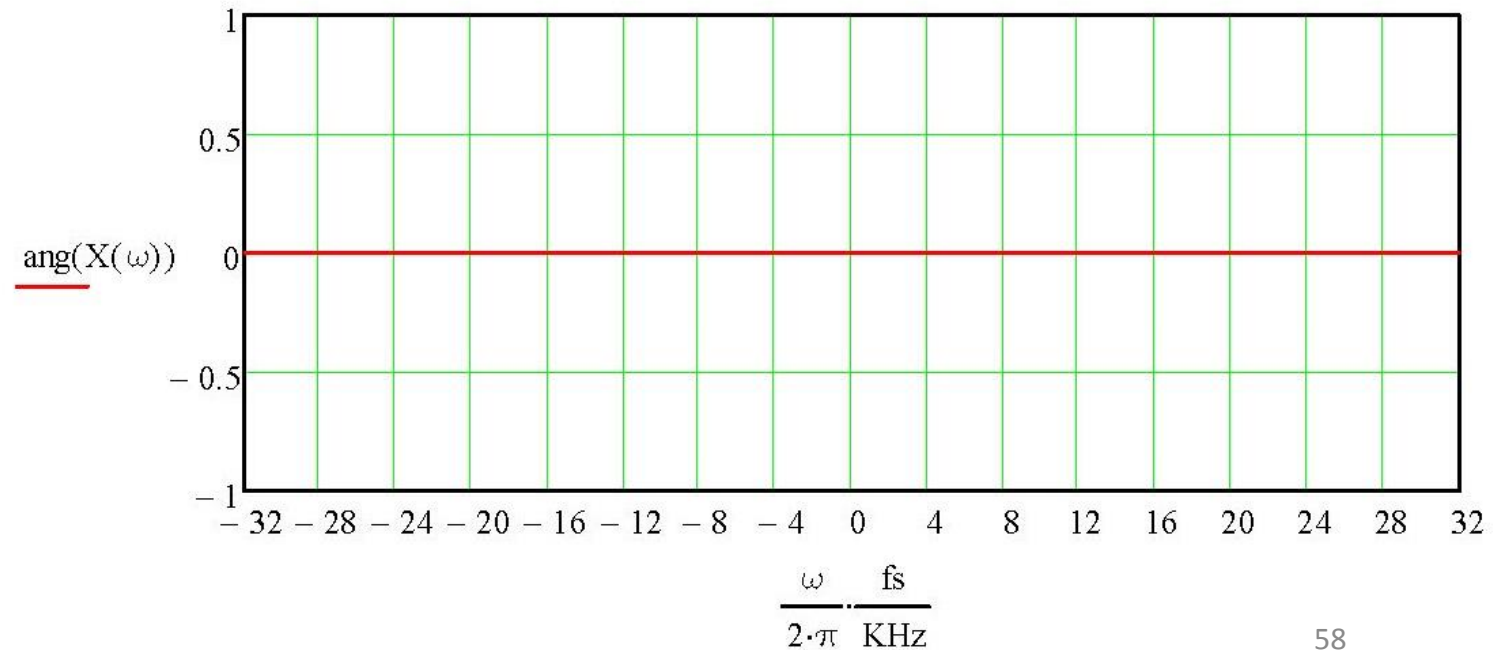
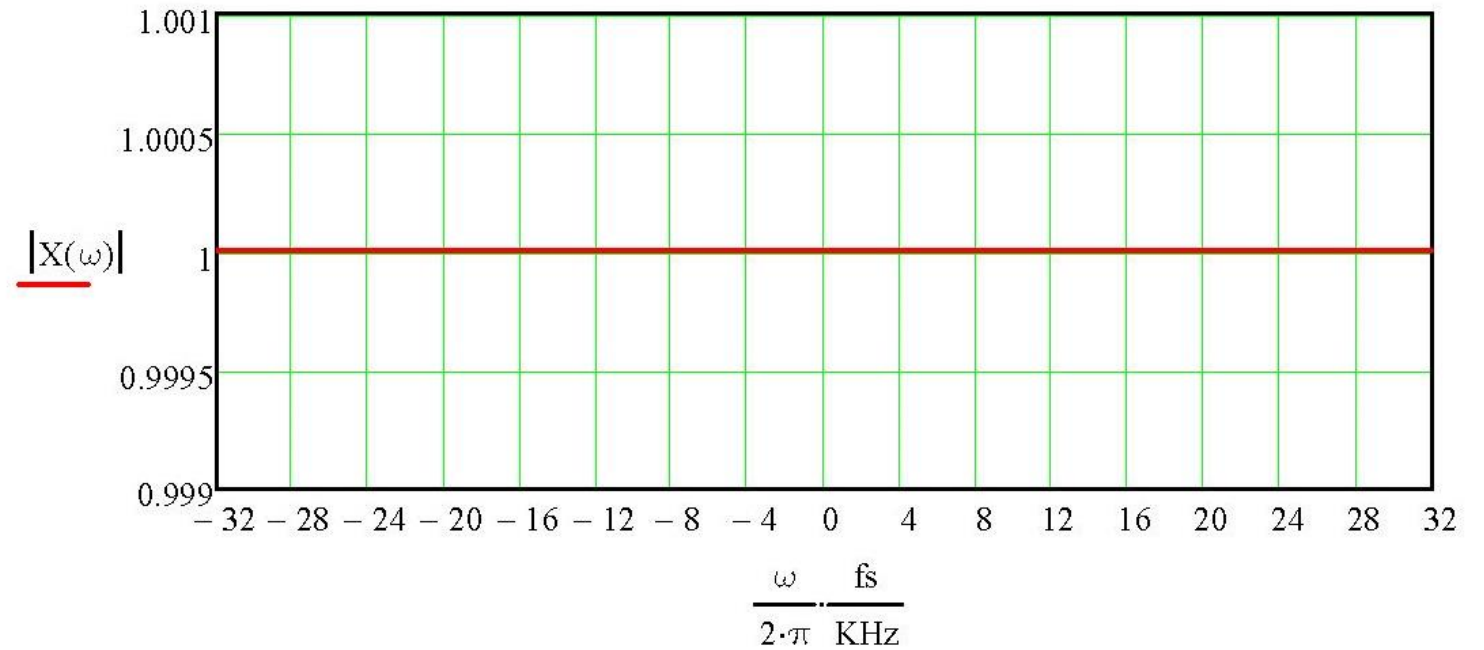
Do par 9 da tabela de Pares de Transformadas de Fourier, com $M := N - 1$, temos que a Transformada de Fourier da sequência $x[n]$ acima definida, isto é, $X(\omega) = F\{x[n]\}$, é dada por:

$$X(\omega) := \frac{A \cdot \sin\left[\omega \cdot \left(\frac{M+1}{2}\right)\right]}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot \frac{M}{2}}$$

Os gráficos de módulo e fase de $X(\omega) = F\{x[n]\}$ no intervalo $-\pi \leq \omega \leq \pi$ são:



Os gráficos de módulo e fase de $X(\omega) = \mathcal{F}\{x[n]\}$ com o eixo da abscissa representando o intervalo de frequências analógicas $-f_s/2 \leq f \leq f_s/2$, são conforme apresentados ao lado:



(g) Estabeleça conclusões a partir dos resultados encontrados de (a)-(f).

Conclusões:

Quanto menor for a duração Δt do pulso no domínio tempo menor será a magnitude (=módulo = amplitude) do espectro $H(\omega)$ no domínio frequência, mas, simultaneamente, maiores serão as magnitudes das componentes espectrais de alta frequência necessárias para construir o pulso no domínio tempo.

Ou seja, quanto mais rápida for a variação no tempo do sinal (= quanto mais estreito for um pulso de duração Δt), mais largo será o espectro $H(\omega)$ resultante no domínio frequência.

No limite, quando o pulso se torna um impulso, conforme descrito no item (f), $H(\omega)$ resulta em uma constante, indicando que todas as frequências são necessárias para construir no domínio tempo uma variação tão rápida como é o impulso.

Por exemplo, é sabido que descargas elétricas atmosféricas (relâmpagos) interferem as comunicações de rádio em uma ampla faixa de frequências. Isto ocorre porque um relâmpago pode ser aproximado por um impulso, e, portanto, o espectro resultante é extremamente largo, interferindo os sinais de rádio nas faixas de VLF, LF, MF, HF e VHF.