

Processamento Digital de Sinais

Outline:

- Transformada de Laplace e Transformada \mathcal{Z} – Introdução
- Transformada de Laplace
- Propriedades, Teoremas e Pares da Transformada de Laplace
- Transformada \mathcal{Z}
- Interpretação da Transformada \mathcal{Z}
- Transformada \mathcal{Z} de uma sequência atrasada no domínio tempo discreto
- Transformada \mathcal{Z} Inversa
- Propriedades e Pares da Transformada \mathcal{Z}
- Determinando a Transformada \mathcal{Z} – Exemplos 1 a 5
- Métodos para determinar a Transformada \mathcal{Z} Inversa e Exemplos – Método da Inspeção, Expansão por Fração Parcial, Expansão em Séries de Potência
- Apêndice I – Reconstrução de $x(t)$ a partir de suas componentes espectrais no plano $s = \alpha + j\omega$
- Apêndice II – Pólos e Zeros no domínio S
- Apêndice III – Pólos e Zeros no domínio \mathcal{Z}

Transformada de Laplace e Transformada \mathcal{Z}

- A Transformada \mathcal{Z} para sinais discretos no tempo é equivalente à Transformada de Laplace para sinais contínuos no tempo.
- Iniciaremos nosso estudo pela Transformada de Laplace, que é uma extensão da Transformada de Fourier.
- A Transformada de Laplace leva explicitamente em consideração o regime transitório, e não apenas o regime permanente, como é o caso da Transformada de Fourier.
- Enquanto a Transformada de Fourier representa o domínio frequência unicamente considerando a variação oscilatória senoidal na representação de $x(t)$, a Transformada de Laplace inclui nesta representação a variação exponencial de $x(t)$.
- A consideração adicional da variação exponencial na representação de $x(t)$ permite à Transformada de Laplace a análise do regime transitório.

Transformada de Laplace

Seja $x(t)$ uma função contínua no domínio tempo. Define-se como **Transformada de Laplace** de $x(t)$ a representação matemática

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (1)$$

sendo $s = \alpha + j\omega$.

- A Equação (1) determina o Espectro de Frequências Complexas $X(s)$ do sinal $x(t)$.
- Visto que $s = \alpha + j\omega$, então $X(s)$ é também de valor complexo, pois $X(s)$ pode ser interpretada como uma soma ponderada de valores de $x(t)$ em cada intervalo infinitesimal dt no domínio tempo, com fatores de ponderação dados por funções de valor complexo $e^{-st} = e^{-(\alpha+j\omega)t}$.

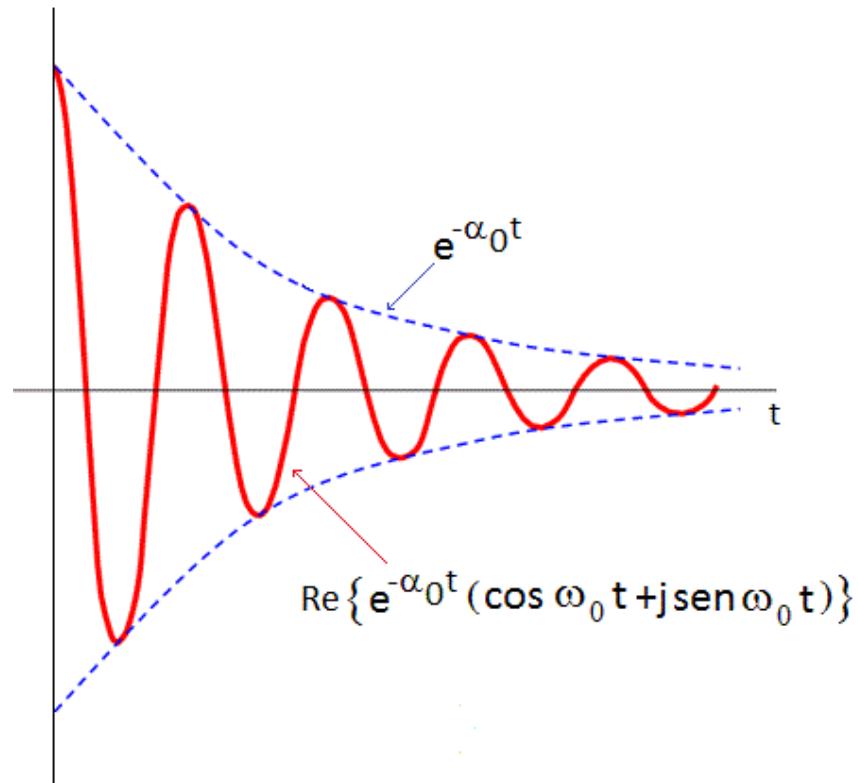
Transformada de Laplace

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt, \text{ com } s = \alpha + j\omega \quad (1)$$

- Visto que a variável de integração t tem a dimensão de tempo, o expoente de e^{-st} deve ser uma **grandeza adimensional**, caso contrário estaria em desacordo com a interpretação de (1) como uma soma de valores de $x(t)$ ao longo de intervalos infinitesimais de tempo.
- Por exemplo, se $x(t)$ é dado em [Volt] então $X(s)$ é dado em [Volt x segundo].
- Portanto, o parâmetro s deverá ter a dimensão do inverso do tempo, isto é, **frequência**, ou, equivalentemente, **variação**.
- Sendo assim, **s é uma grandeza complexa que representa modos de variação** .

Transformada de Laplace

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt, \text{ com } s = \alpha + j\omega \quad (1)$$



- A **parte real** α_0 de uma específica frequência complexa $s = s_0 = \alpha_0 + j\omega_0$, pertencente ao conjunto s de frequências complexas do espectro que representa $x(t)$, está associada à **variação exponencial** $e^{-\alpha_0 t}$ no universo de possíveis variações no tempo da função $x(t)$.
 - Por outro lado, a **parte imaginária** ω_0 de $s_0 = \alpha_0 + j\omega_0$ está associada à **variação oscilatória senoidal** $e^{-j\omega_0 t} = \cos \omega_0 t - j \sin \omega_0 t$ no universo de possíveis variações no tempo da função $x(t)$.
- Portanto, visto que $e^{-st} = e^{-(\alpha+j\omega)t} = e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} = e^{-\alpha t} (\cos \omega t - j \sin \omega t)$, a Transformada de Laplace decompõe um sinal no tempo $x(t)$ em **modos de variação exponenciais (não-oscilatórios)** e **modos de variação senoidais (oscilatórios)**, cada um deles determinado por cada frequência do conjunto s de frequências complexas.

Transformada de Laplace

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt, \text{ com } s = \alpha + j\omega \quad (1)$$

- ⇒ O módulo da componente espectral complexa $X(s_0) = |X(s_0)|e^{j\angle\{X(s_0)\}}$, i.é., $|X(s_0)|$, representa a intensidade (magnitude) da contribuição daquele modo de variação na frequência complexa $s_0 = \alpha_0 + j\omega_0$.
- ⇒ A fase da componente espectral complexa $X(s_0) = |X(s_0)|e^{j\angle\{X(s_0)\}}$, i.é., $\angle\{X(s_0)\}$ representa o ângulo associado a quão deslocada no tempo está a contribuição da variação oscilatória $e^{-j\omega_0 t}$ na frequência $s_0 = \alpha_0 + j\omega_0$.
- Por exemplo, $\angle\{X(s_0)\} = \pi/2$ rad significa que o modo de variação oscilatório no tempo para a frequência $s_0 = j\omega_0$ é

$$e^{-j\omega_0 t} e^{j(\pi/2)} = e^{-j(\omega_0 t - \pi/2)} = e^{-j\left(\frac{2\pi}{T_0}t - \frac{\pi}{2}\right)} = e^{-j\frac{2\pi}{T_0}\left(t - \frac{T_0}{4}\right)} \quad (2)$$

ou seja, o modo de variação oscilatório no tempo está deslocado $T_0/4$ segundos, sendo T_0 o período da componente oscilatória senoidal na frequência complexa s_0 definido por $T_0 = 2\pi/\omega_0$.

Transformada de Laplace

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt, \text{ com } s = \alpha + j\omega \quad (1)$$

- Cabe notar, também, que a equação (1) soma ponderando $x(t)$ ao longo do tempo com a exponencial e^{-st} , i.é, a equação (1) estabelece o grau de semelhança, ou correlação, entre $x(t)$ e e^{-st} .
- Especificamente, (1) procura estabelecer o grau de semelhança entre $x(t)$ e variações exponenciais e/ou senoidais definidas pela frequência complexa $s = \alpha + j\omega$.
- Quanto mais semelhante (correlacionado) for $x(t)$ com o fator e^{-st} na frequência $s = \alpha + j\omega$, maior será o produto $x(t)e^{-st}$ e, portanto, maior será o módulo $|X(s)|$ de $X(s) = |X(s)|e^{j\angle\{X(s)\}}$.
- Ainda, o grau de semelhança $|X(s)|$ na frequência $s = \alpha + j\omega$ é válido para um deslocamento no tempo da variação senoidal dado por $\angle\{X(s)\} T/2\pi$ segundos, ou seja, a variação oscilatória na frequência s é caracterizada por $e^{-j\omega(t+\angle\{X(s)\}T/2\pi)}$, sendo $T = 2\pi/\omega$.

Transformada de Laplace

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt, \text{ com } s = \alpha + j\omega \quad (1)$$

- ⇒ Neste contexto, o espectro $X(s)$, cujo domínio é o plano de frequências complexas $s = \alpha + j\omega$, define como $x(t)$ é construída a partir de variações exponenciais $e^{\alpha t}$ e senoidais $e^{j\omega t}$ no domínio tempo.
- Note, portanto, que a Transformada de Laplace é uma generalização da transformada de Fourier, visto que o espectro obtido através da Transformada de Fourier é o espectro das frequências angulares ω que constroem $x(t)$ através de variações senoidais no tempo,
 - enquanto que o espectro obtido através da Transformada de Laplace é o espectro das frequências complexas $s = \alpha + j\omega$ que constroem $x(t)$ através de variações exponenciais e senoidais no tempo.

Transformada de Laplace

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt, \text{ com } s = \alpha + j\omega \quad (1)$$

Com base nesta interpretação, a partir de (1) é possível mostrar que

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha_m - j\infty}^{\alpha_m + j\infty} X(s)e^{st} ds \quad (3)$$

A Equação (3) é a chamada **Transformada de Laplace Inversa** de $X(s)$.

Dado o espectro $X(s)$, a Equação (3) define analiticamente como reconstruir $x(t)$ no tempo, a partir de seu espectro $X(s)$ no domínio frequência complexa $s = \alpha + j\omega$.

Transformada de Laplace

- É possível mostrar (a partir do Teorema de Cauchy – no Apêndice, ao final deste conjunto de slides) que os limites de integração $(\alpha_m - j\infty)$ a $(\alpha_m + j\infty)$ na Transformada de Laplace Inversa (3), muito embora definam um caminho retilíneo, equivalem a “varrer” ponto a ponto o plano complexo $s = \alpha + j\omega$.
- Esta varredura total do plano s é garantida desde que o caminho de integração que inicia em $s = \alpha_m - j\infty$ e termina em $s = \alpha_m + j\infty$ em (3) e que é definido pela reta $s = \alpha_m$ na Figura 1, seja tal que a reta $s = \alpha_m$ esteja à direita do pólo de $X(s)$ mais à direita no plano s .

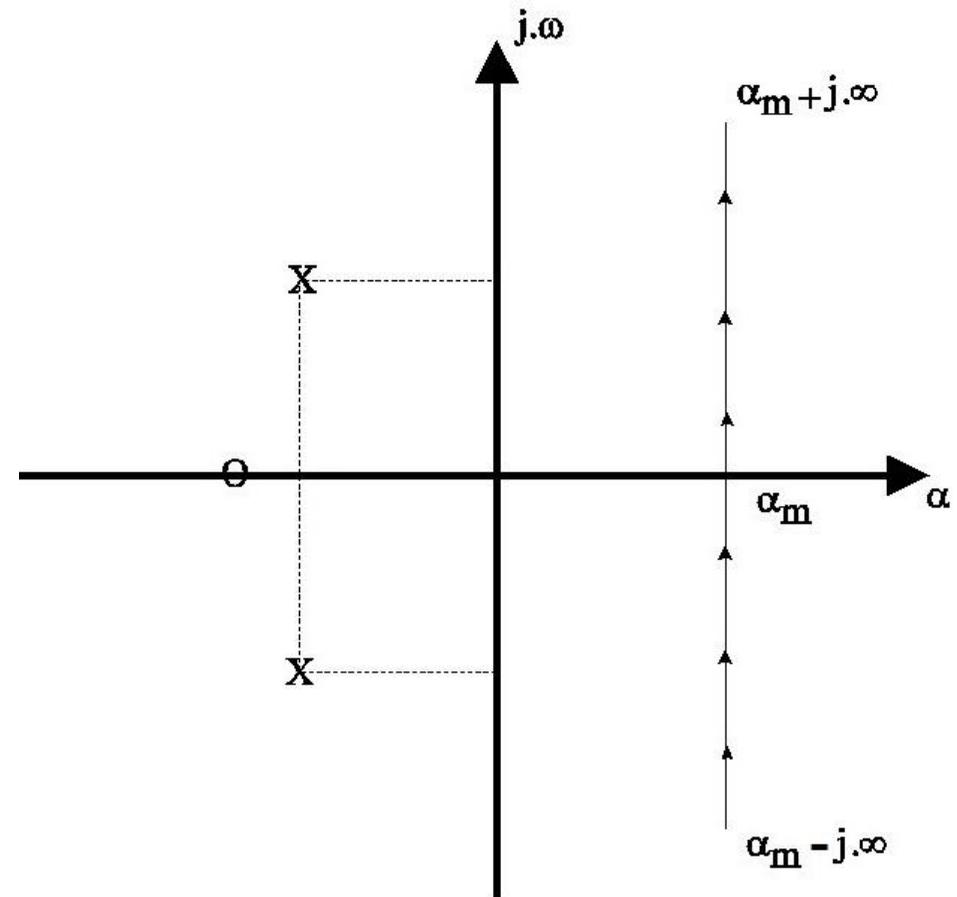


Figura 1: “Root Locus” de $X(s)$ e contorno de integração para cômputo de (3).
Pólo (x): valor de s tal que $|X(s)| = \infty$.
Zero (o): valor de s tal que $|X(s)| = 0$.

Transformada de Laplace

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha_m - j\infty}^{\alpha_m + j\infty} X(s) e^{st} ds$$

- Sob esta condição, a equação (3) acima reproduzida pode ser interpretada como uma “varredura” em todo plano s , efetuando uma soma ponderada das componentes espectrais $X(s)$, com fator de ponderação dado por e^{st} .
- Em outras palavras, a equação (3) constrói (expande) $x(t)$ a partir de uma série infinita de termos e^{st} , ponderados por coeficientes $X(s)$, infinitesimalmente distantes entre si no domínio frequência complexa $s = \alpha + j\omega$.

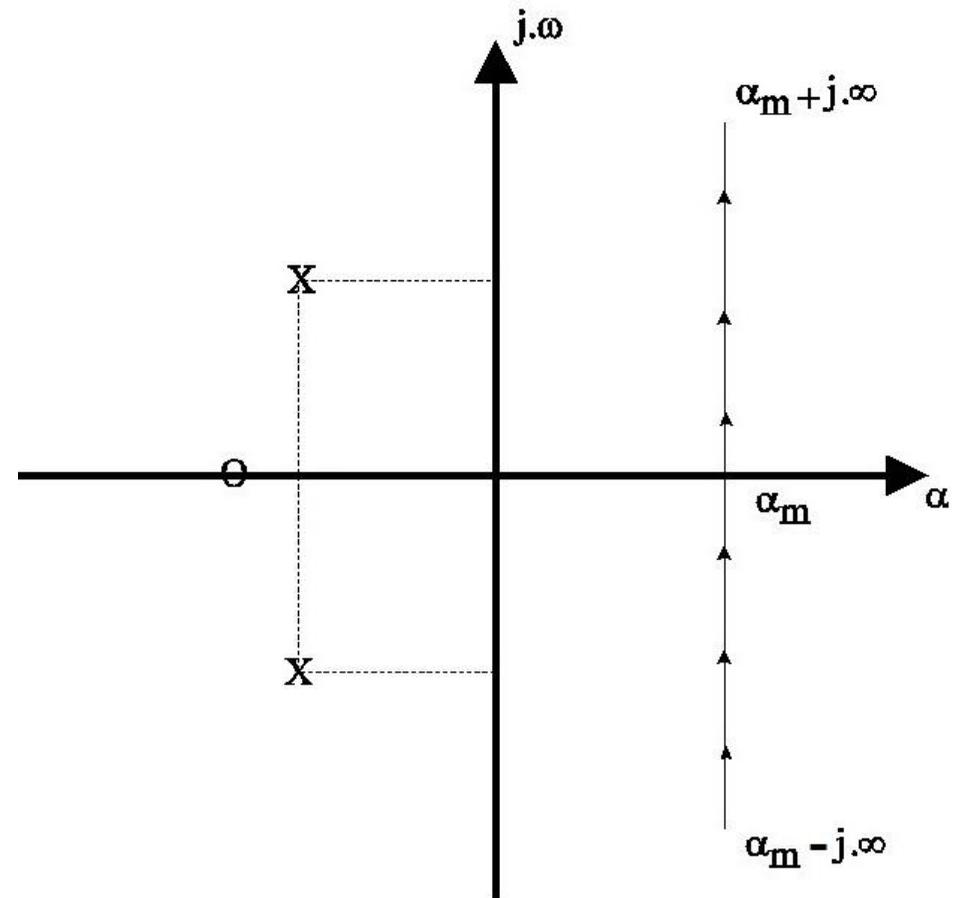


Figura 1: “Root Locus” de $X(s)$ e contorno de integração para cálculo de (3). Pólo (x): valor de s tal que $|X(s)| = \infty$. Zero (o): valor de s tal que $|X(s)| = 0$.

Transformada de Laplace

Para finalizar esta análise interpretativa da Transformada de Laplace, consideremos a função $x(t)$ no domínio tempo e o respectivo Espectro de Frequências Complexas $X(s)$, obtido conforme tabela de pares de Transformadas de Laplace⁽¹⁾,

$$x(t) = 1.05e^{-5t} \cos(6t - 18.4^\circ) u(t) \quad (4)$$

$$X(s) = \frac{s+7}{s^2+10s+61} \quad (5)$$

A Figura 1 mostra a localização dos pólos e zeros de $X(s)$ no plano s , e um possível caminho de integração ao longo da reta $s = \alpha_m$ para cômputo da Transformada Inversa de Laplace (Equação (3)).

Foi dito “possível” porque qualquer valor de α_m que localize o caminho retilíneo de integração à direita de todos os pólos de $X(s)$ é válido.

(1) Ver tabela de pares de Transformadas de Laplace, slides 16 a 18.

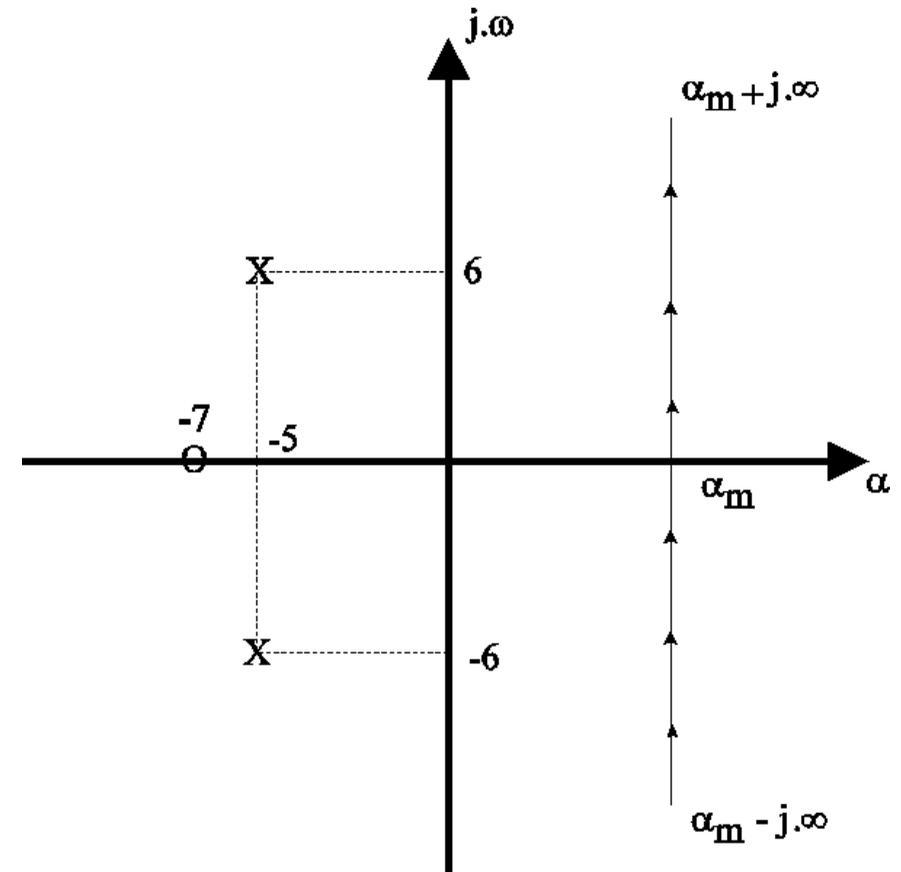


Figura 1: “Root Locus” de $X(s)$ e contorno de integração para cômputo de (3). Pólo (x): valor de s tal que $|X(s)| = \infty$. Zero (o): valor de s tal que $|X(s)| = 0$.

Transformada de Laplace

- As Figuras 2 e 3 mostram a vista tridimensional da Figura 1, respectivamente as superfícies de módulo e ângulo do espectro $X(s)$.
- Dado que $X(s)$ é um número complexo, são necessários dois gráficos tridimensionais para definir $X(s)$, um para a superfície da função $|X(s)|$ e outro para a superfície da função $\angle\{X(s)\}$, plotadas contra o plano $s = \alpha + j\omega$, que é o conjunto de domínio destas funções.

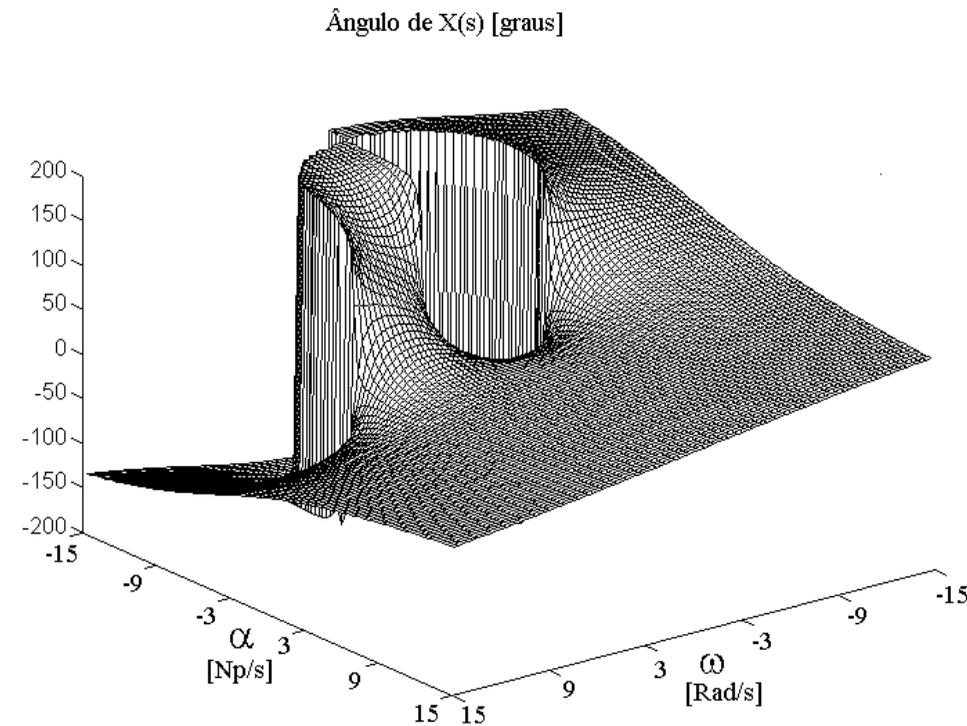
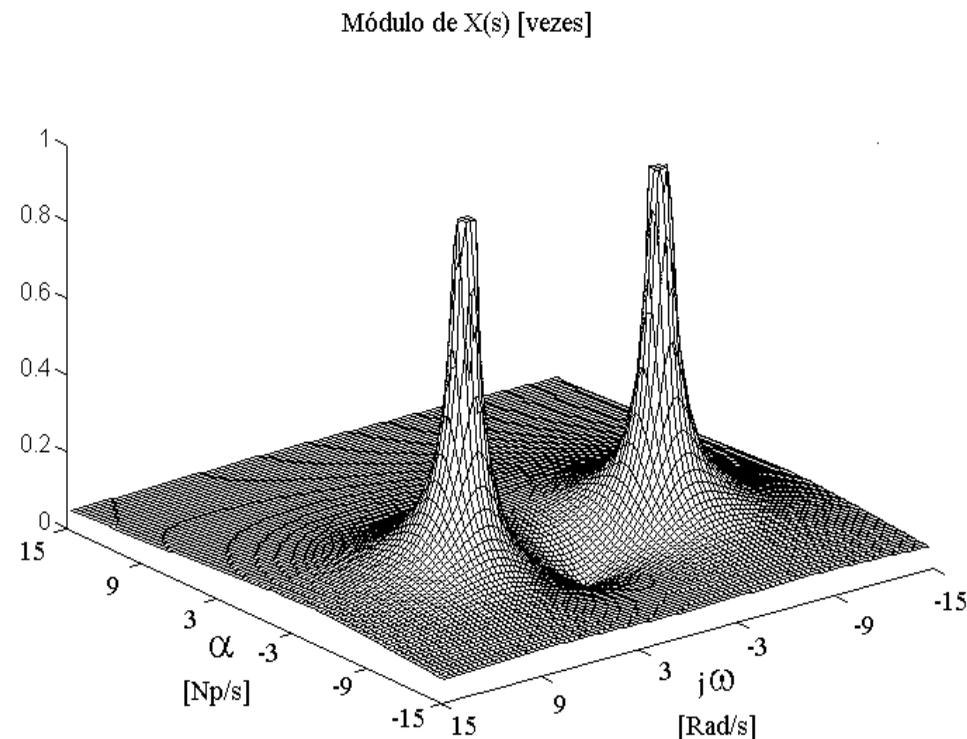


Figura 2: Módulo do espectro de frequências complexas $X(s)$ com topo dos pólos limitado em 1.0. Figura 3: Ângulo do espectro de frequências complexas $X(s)$.

Propriedades da Transformada de Laplace

1	$\mathcal{L}[Af(t)] = AF(s)$
2	$\mathcal{L}[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s)$
3	$\mathcal{L}_{\pm}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s) - f(0_{\pm})$
4	$\mathcal{L}_{\pm}\left[\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right] = s^2F(s) - sf(0_{\pm}) - \dot{f}(0_{\pm})$
5	$\mathcal{L}_{\pm}\left[\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right] = s^nF(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k}f^{(k-1)}(0_{\pm})$ <p style="text-align: center;">where $f^{(k-1)}(t) = \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}f(t)$</p>
6	$\mathcal{L}_{\pm}\left[\int f(t) dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{1}{s}\left[\int f(t) dt\right]_{t=0_{\pm}}$
7	$\mathcal{L}_{\pm}\left[\int \cdots \int f(t)(dt)^n\right] = \frac{F(s)}{s^n} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{s^{n-k+1}}\left[\int \cdots \int f(t)(dt)^k\right]_{t=0_{\pm}}$
8	$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{F(s)}{s}$
9	$\int_0^{\infty} f(t) dt = \lim_{s \rightarrow 0} F(s) \quad \text{if } \int_0^{\infty} f(t) dt \text{ exists}$

Propriedades da
Transformada
de Laplace

10	$\mathcal{L}[e^{-\alpha t}f(t)] = F(s + a)$
11	$\mathcal{L}[f(t - \alpha)1(t - \alpha)] = e^{-as}F(s) \quad \alpha \geq 0$
12	$\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{dF(s)}{ds}$
13	$\mathcal{L}[t^2f(t)] = \frac{d^2}{ds^2}F(s)$
14	$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$
15	$\mathcal{L}\left[\frac{1}{t}f(t)\right] = \int_s^\infty F(s) ds \quad \text{if } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}f(t) \text{ exists}$
16	$\mathcal{L}\left[f\left(\frac{1}{a}\right)\right] = aF(as)$
17	$\mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(t - \tau)f_2(\tau) d\tau\right] = F_1(s)F_2(s)$
18	$\mathcal{L}[f(t)g(t)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p)G(s - p) dp$

Teoremas da Transformada de Laplace

Initial value theorem	$f(0+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$
Final value theorem	$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$
Pulse function $f(t) = \frac{A}{t_0} 1(t) - \frac{A}{t_0} 1(t - t_0)$	$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{A}{t_0 s} - \frac{A}{t_0 s} e^{-st_0}$
Impulse function $g(t) = \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{A}{t_0}, \quad \text{for } 0 < t < t_0$ $= 0, \quad \text{for } t < 0, t_0 < t$	$\mathcal{L}[g(t)] = \lim_{t_0 \rightarrow 0} \left[\frac{A}{t_0 s} (1 - e^{-st_0}) \right]$ $= \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dt_0} [A(1 - e^{-st_0})]}{\frac{d}{dt_0} (t_0 s)}$ $= \frac{As}{s} = A$

Pares de Transformadas de Laplace

	$f(t)$	$F(s)$
1	Unit impulse $\delta(t)$	1
2	Unit step $1(t)$	$\frac{1}{s}$
3	t	$\frac{1}{s^2}$
4	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{1}{s^n}$
5	$t^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
6	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
7	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
8	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$
9	$t^n e^{-at} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
10	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
11	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
12	$\sinh \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$
13	$\cosh \omega t$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$

Pares de Transformadas de Laplace

	$f(t)$	$F(s)$
14	$\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$
15	$\frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
16	$\frac{1}{b-a}(be^{-bt} - ae^{-at})$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$
17	$\frac{1}{ab} \left[1 + \frac{1}{a-b}(be^{-at} - ae^{-bt}) \right]$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$
18	$\frac{1}{a^2}(1 - e^{-at} - ate^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)^2}$
19	$\frac{1}{a^2}(at - 1 + e^{-at})$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$
20	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
21	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
22	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t \quad (0 < \zeta < 1)$	$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$
23	$-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t - \phi)$ $\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$ $(0 < \zeta < 1, \quad 0 < \phi < \pi/2)$	$\frac{s}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$

Pares de
Transformadas
de Laplace

	$f(t)$	$F(s)$
24	$1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \phi)$ $\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}$ $(0 < \zeta < 1, 0 < \phi < \pi/2)$	$\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$
25	$1 - \cos \omega t$	$\frac{\omega^2}{s(s^2 + \omega^2)}$
26	$\omega t - \sin \omega t$	$\frac{\omega^3}{s^2(s^2 + \omega^2)}$
27	$\sin \omega t - \omega t \cos \omega t$	$\frac{2\omega^3}{(s^2 + \omega^2)^2}$
28	$\frac{1}{2\omega} t \sin \omega t$	$\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
29	$t \cos \omega t$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
30	$\frac{1}{\omega_2^2 - \omega_1^2} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) \quad (\omega_1^2 \neq \omega_2^2)$	$\frac{s}{(s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_2^2)}$
31	$\frac{1}{2\omega} (\sin \omega t + \omega t \cos \omega t)$	$\frac{s^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$

Transformada \mathcal{Z}

Suponhamos, agora, que uma função $x(t)$, cujo espectro de frequências complexas é $X(s)$, seja amostrada no tempo sob um período de amostragem T_s , isto é,

$$x(t) = x(nT_s), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

Para o sinal $x(t)$ assim amostrado, temos que a Equação (1), a seguir reproduzida,

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt, \quad \text{com } s = \alpha + j\omega \quad (1)$$

assume a forma

$$X(s) = \int_0^{nT_s} x(nT_s)e^{-snT_s} d(nT_s) = \int_0^{nT_s} x(nT_s)(e^{sT_s})^{-n} d(nT_s) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)(e^{sT_s})^{-n} \quad (7)$$

↑

A passagem da representação em forma de integral contínua para a representação em forma de somatório discreto em (7) será detalhada a seguir, quando veremos a interpretação da Transformada \mathcal{Z} .

Transformada \mathcal{Z}

$$X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)(e^{sT_s})^{-n} \quad (7)$$

Definindo, em (7),

$$z = e^{sT_s} \quad (8)$$

e substituindo (8) em (7), temos

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad (9) \quad \leftarrow \text{A equação (9) constitui a Transformada } \mathcal{Z} \text{ da seqüência } x[n].$$

- Note que tanto n como z são ambas grandezas adimensionais.
- O fato de n ser adimensional torna-se evidente pela equação (6), isto é, n representa apenas o índice da amostra.
- A grandeza z é adimensional pela equação (8), porque sendo a dimensão de s [tempo]⁻¹ e sendo a dimensão do período de amostragem T_s [tempo], a função exponencial aplicada sobre uma grandeza adimensional (o produto de s por T_s), resultará em uma grandeza também adimensional.

Transformada \mathcal{Z}

A equação (9) expressa a Transformada \mathcal{Z} da sequência $x[n]$.

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad (9)$$

No entanto, a representação de $x[n]$ pela Transformada \mathcal{Z} também pode ser expressa conforme

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad (9a)$$

Os limites do somatório em (9a), $-\infty \leq n \leq \infty$, consideram a possibilidade de uma sequência não causal, ou seja, com valores se estendendo à esquerda de zero.

- Nos casos representados por (9a), a Transformada \mathcal{Z} é denominada bilateral.
- A Transformada \mathcal{Z} apresentada em (9) é também denominada Transformada \mathcal{Z} unilateral.
- A Transformada \mathcal{Z} bilateral e a Transformada \mathcal{Z} unilateral são equivalentes para o caso em que $x[n] = 0$, para $n < 0$.
- Nas aplicações práticas, a Transformada \mathcal{Z} unilateral prepondera, razão pela qual será o foco deste estudo.

Interpretação da Transformada \mathcal{Z}

O que representam z e $X(z)$, já que z é uma grandeza adimensional ?

Partindo de $z = e^{sT_s}$, e definindo a frequência de amostragem $f_s = 1/T_s$ temos

$$z = Re(z) + Im(z) = e^{sT_s} = e^{\frac{s}{f_s}} = e^{\frac{\alpha + j\omega}{f_s}} = e^{\frac{\alpha}{f_s}} e^{j\frac{\omega}{f_s}} = \rho e^{j\theta} \quad (10)$$

$$\text{onde } \rho = e^{\frac{\alpha}{f_s}} \quad \text{e} \quad \theta = 2\pi \frac{f}{f_s}.$$

Ou seja, z é o resultado da normalização do domínio de frequências complexas $s = \alpha + j\omega$ em relação à frequência de amostragem f_s , com subsequente mapeamento através da transformação $z = e^u$, onde $u = \frac{s}{f_s}$ representa o plano s normalizado em relação a f_s .

Interpretação da Transformada \mathcal{Z}

Em outras palavras, quando um sinal $x(t)$ é amostrado a uma frequência de amostragem f_s , dando origem a uma seqüência $x[n]$, não existe mais um domínio de frequências complexas $s = \alpha + j\omega$ absolutas, mas sim, um domínio de frequências relativas u , cujo parâmetro de referência é a frequência de amostragem f_s .

Sobre este domínio relativo u aplica-se a transformação $z = e^u$, no sentido de simplificar o trabalho computacional envolvido na Equação (7), abaixo reproduzida,

$$X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)(e^{sT_s})^{-n}$$

eliminando assim o cômputo adicional da exponencial que haveria caso mantivéssemos o domínio da

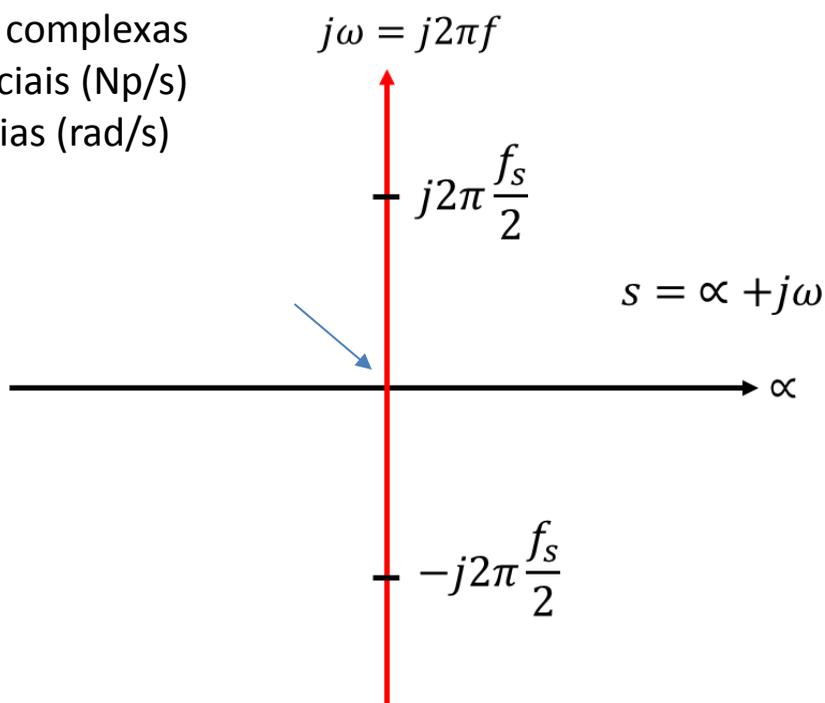
função $X(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} x[n]z^{-n}$ como sendo s , e não z .

O cômputo da exponencial em (7) impõe um custo computacional desnecessário visto que, conforme veremos a seguir, todas as informações contidas no plano s são mapeadas no plano z através de $z = e^{sT_s}$.

Interpretação da Transformada Z

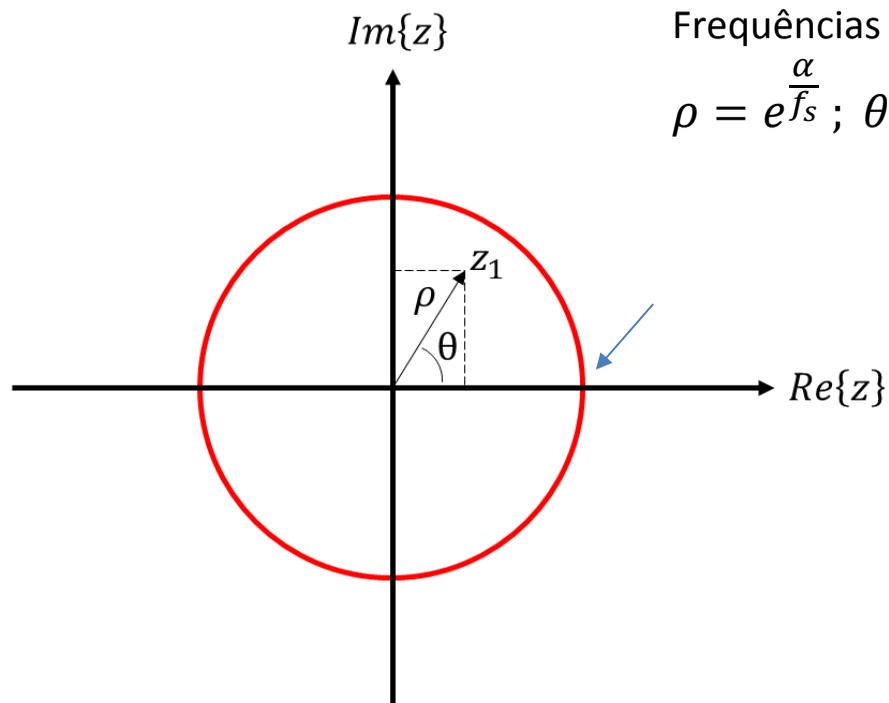
Plano $S = \alpha + j\omega$

Frequências analógicas complexas
 $\alpha \rightarrow$ variações exponenciais (Np/s)
 $\omega \rightarrow$ variações oscilatórias (rad/s)



Plano $Z = \rho e^{j\theta}$

Frequências digitais complexas
 $\rho = e^{\frac{\alpha}{f_s}}$; $\theta = 2\pi \frac{f}{f_s}$



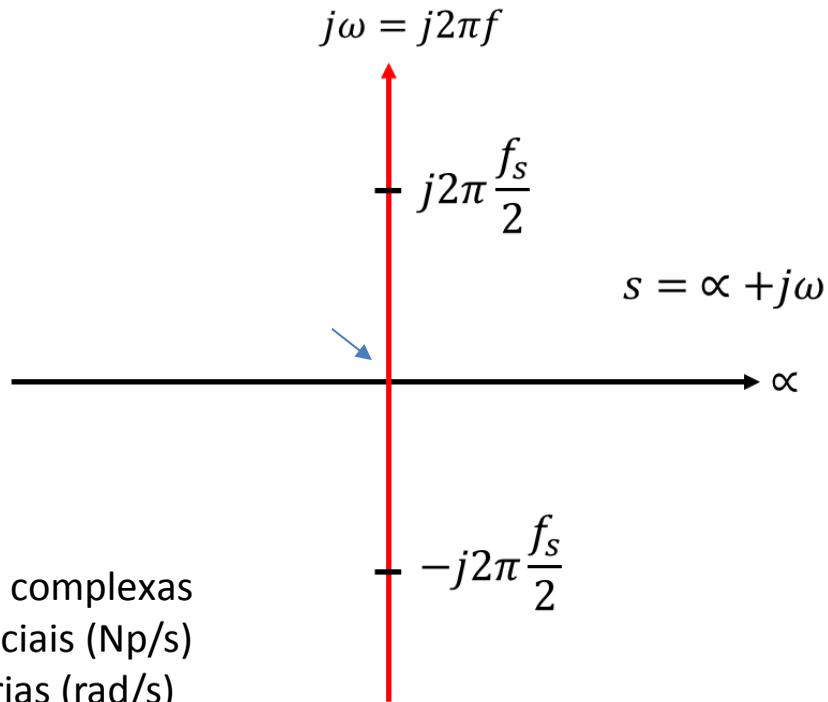
$$z_1 = \rho e^{j\theta} = \underbrace{\rho \cos \theta}_{Re\{z_1\}} + j \underbrace{\rho \sin \theta}_{Im\{z_1\}}$$

- O eixo $j\omega$ mapeia no círculo de raio unitário, pois $\alpha = 0 \rightarrow \rho = 1$
- O que está à esquerda do eixo $j\omega$ mapeia dentro do círculo de raio unitário, pois $\alpha < 0 \rightarrow \rho < 1$.
- O que está à direita do eixo $j\omega$ mapeia fora do círculo de raio unitário, pois $\alpha > 0 \rightarrow \rho > 1$.

Interpretação da Transformada \mathcal{Z}

Plano $S = \alpha + j\omega$

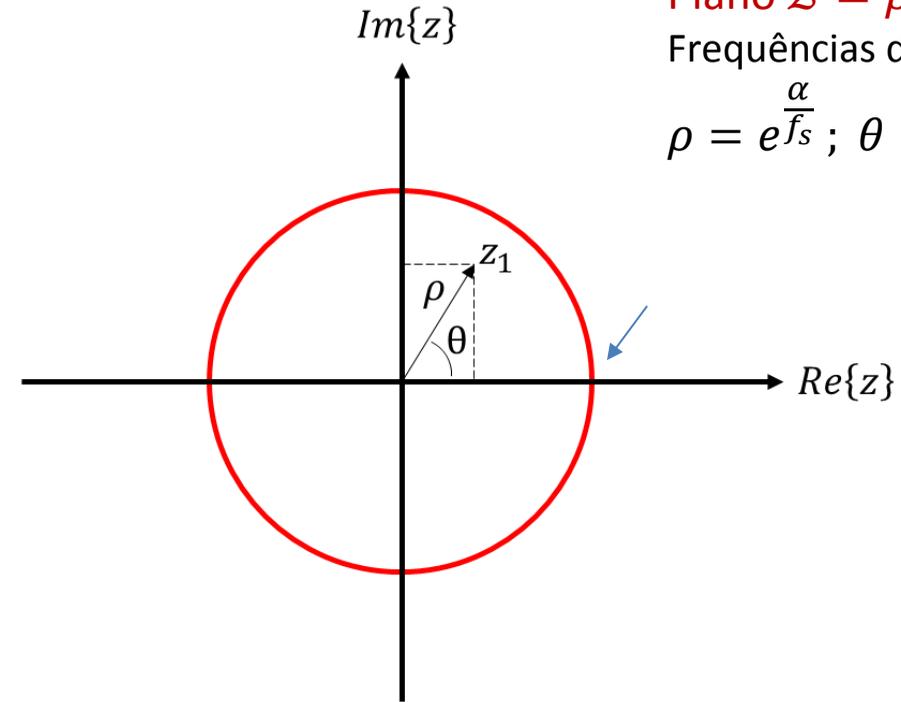
Frequências analógicas complexas
 $\alpha \rightarrow$ variações exponenciais (Np/s)
 $\omega \rightarrow$ variações oscilatórias (rad/s)



Plano $\mathcal{Z} = \rho e^{j\theta}$

Frequências digitais complexas

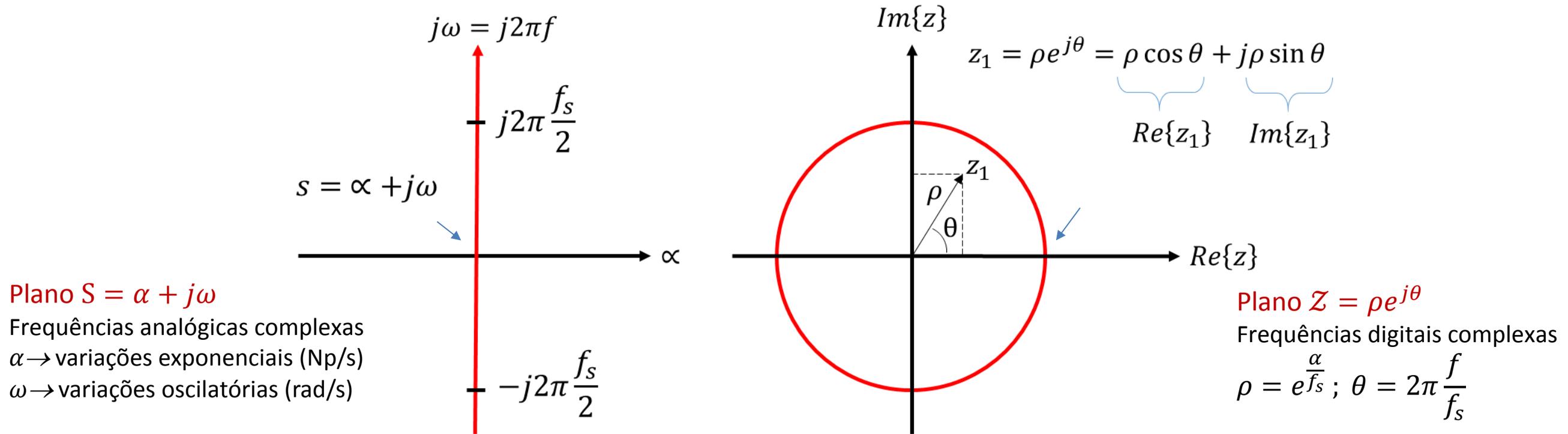
$$\rho = e^{\frac{\alpha}{f_s}}; \theta = 2\pi \frac{f}{f_s}$$



$$z_1 = \rho e^{j\theta} = \underbrace{\rho \cos \theta}_{\text{Re}\{z_1\}} + j \underbrace{\rho \sin \theta}_{\text{Im}\{z_1\}}$$

Pela análise de $z = \rho e^{j\theta}$ verifica-se que o mapeamento por ela definido é tal que uma trajetória paralela ao eixo α no plano s (variação somente em α) é mapeada em uma trajetória radial no plano z (variação somente em ρ), uma vez que $\rho = e^{\alpha/f_s}$.

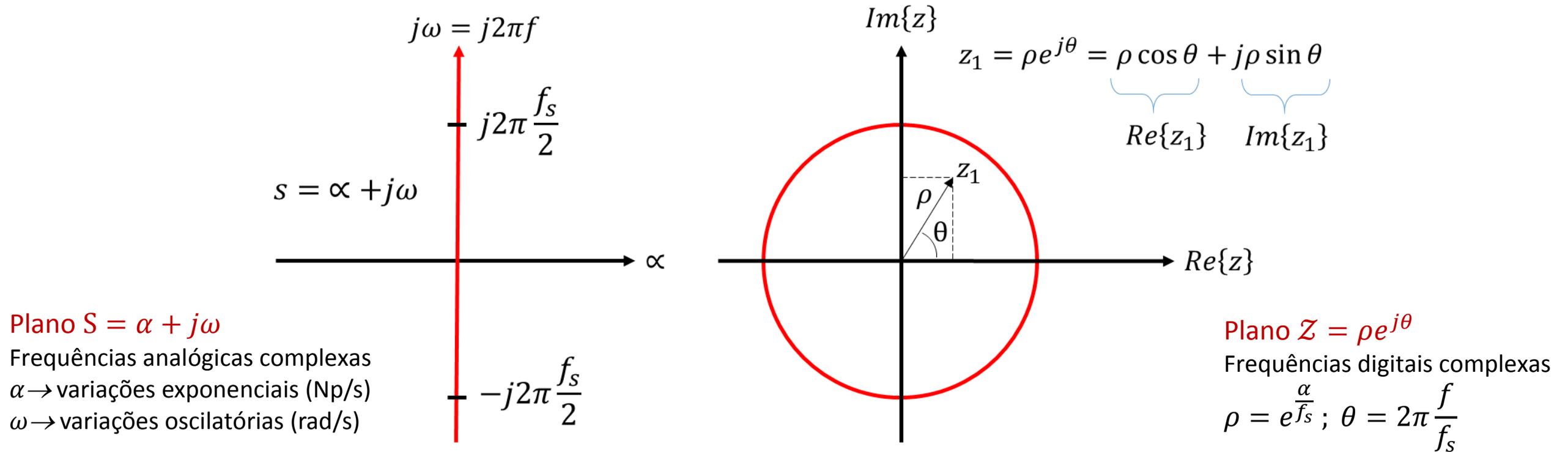
Interpretação da Transformada \mathcal{Z}



Por análise semelhante, uma trajetória paralela ao eixo $j\omega$ no plano s (variação somente em ω) é mapeada em uma trajetória circular no plano z (variação somente em θ), uma vez que $e^{j\omega/f_s} = e^{j\theta}$, onde θ é a denominada frequência digital definida por

$$\theta = \frac{\omega}{f_s} = 2\pi \frac{f}{f_s} \quad (11)$$

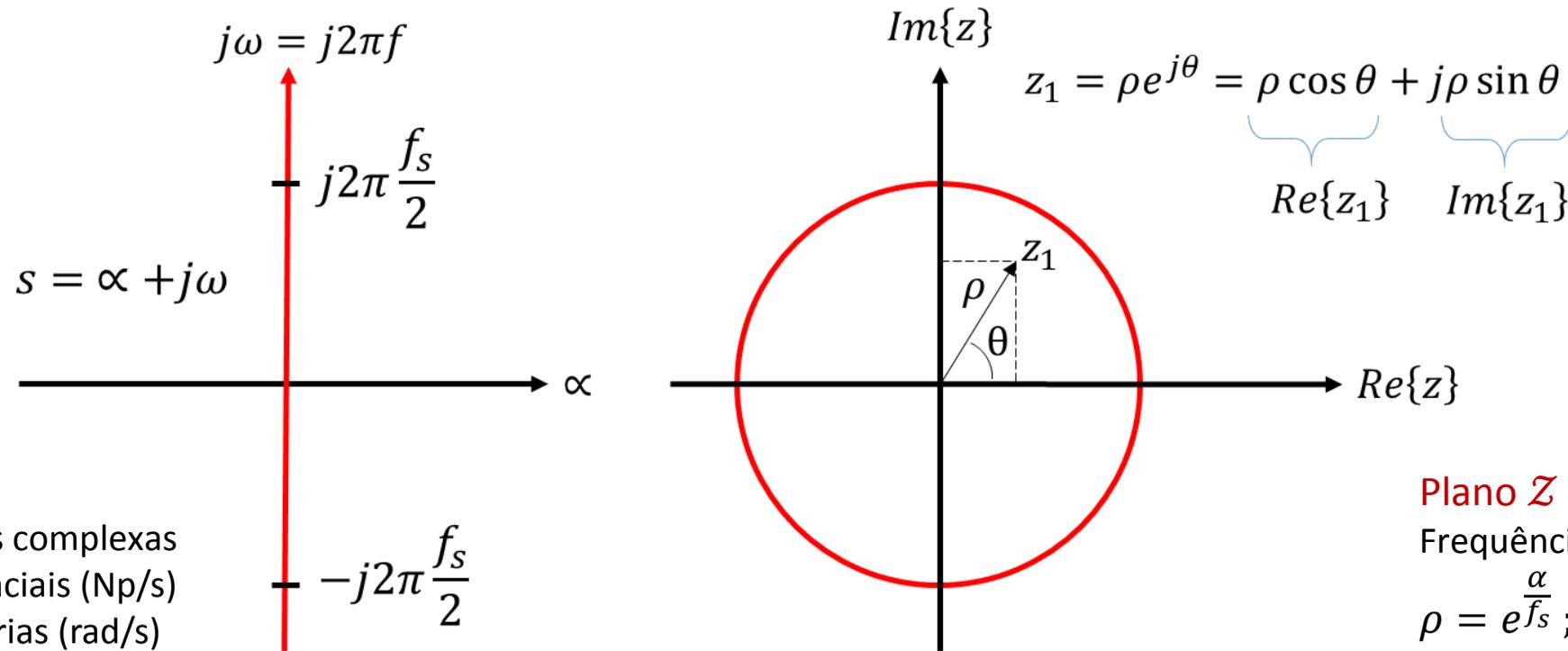
Interpretação da Transformada \mathcal{Z}



Uma vez que a exponencial complexa $e^{j\theta}$ possui magnitude unitária e ângulo de fase θ , note de $z = \rho e^{j\theta}$ que o eixo $j\omega$ do domínio $s = \alpha + j\omega$ é mapeado em um círculo $1e^{j\theta}$ com raio unitário no domínio $z = Re(z) + jIm(z)$.

Note também que os pontos à esquerda do eixo $j\omega$ no plano s são mapeados dentro do círculo de raio unitário $1e^{j\theta}$ no plano z e que os pontos à direita do eixo $j\omega$ no plano s são mapeados fora do círculo de raio unitário $1e^{j\theta}$ no plano z .

Interpretação da Transformada \mathcal{Z}



Plano $S = \alpha + j\omega$

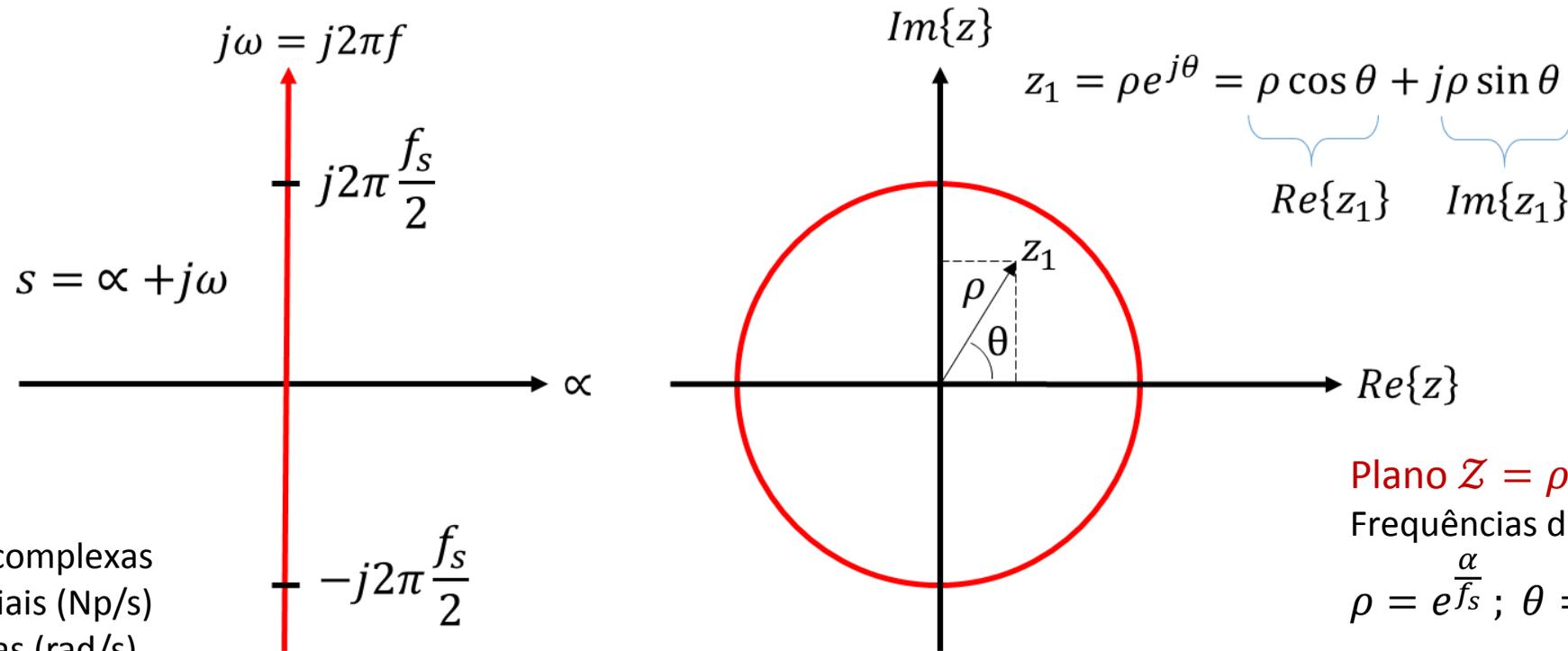
Frequências analógicas complexas
 $\alpha \rightarrow$ variações exponenciais (Np/s)
 $\omega \rightarrow$ variações oscilatórias (rad/s)

Plano $\mathcal{Z} = \rho e^{j\theta}$

Frequências digitais complexas
 $\rho = e^{\frac{\alpha}{f_s}}$; $\theta = 2\pi \frac{f}{f_s}$

Observe também que, se um observador se movimentar linearmente ao longo do eixo $j\omega$ no plano $s = \alpha + j\omega$, partindo de $\omega = 0$ e indo até $\omega = \infty$, o movimento correspondente no plano $z = Re(z) + jIm(z)$ será um movimento circular de múltiplas voltas no sentido anti-horário ao longo do círculo de raio unitário $1e^{j\theta}$, partindo de $\theta = 0$ e indo até $\theta = \infty$.

Interpretação da Transformada \mathcal{Z}

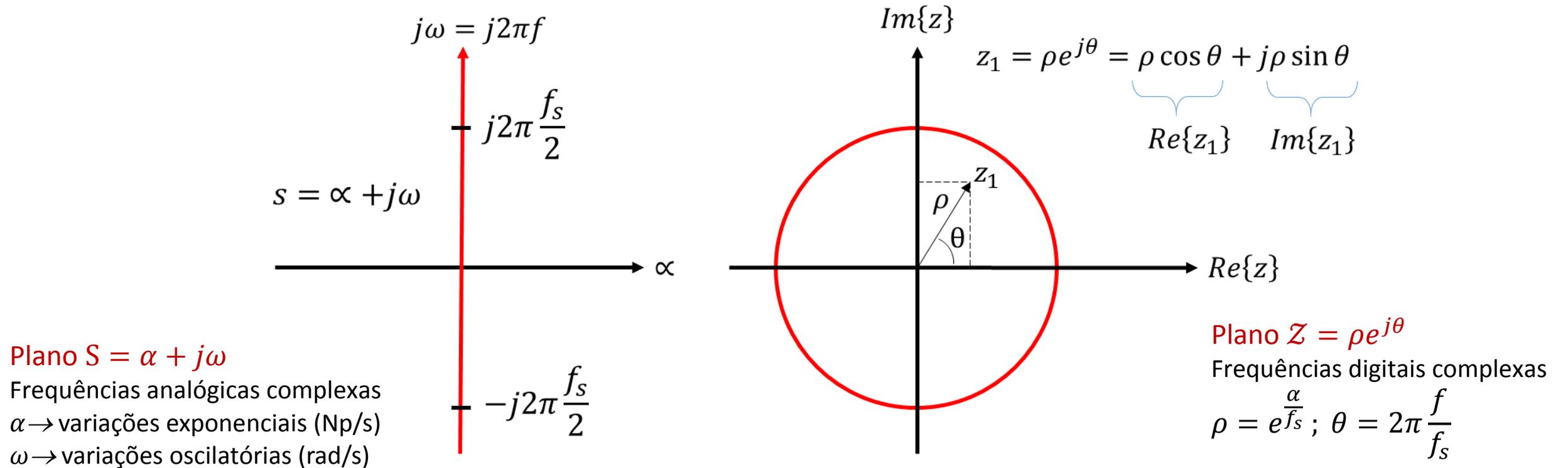


Plano $S = \alpha + j\omega$

Frequências analógicas complexas
 $\alpha \rightarrow$ variações exponenciais (Np/s)
 $\omega \rightarrow$ variações oscilatórias (rad/s)

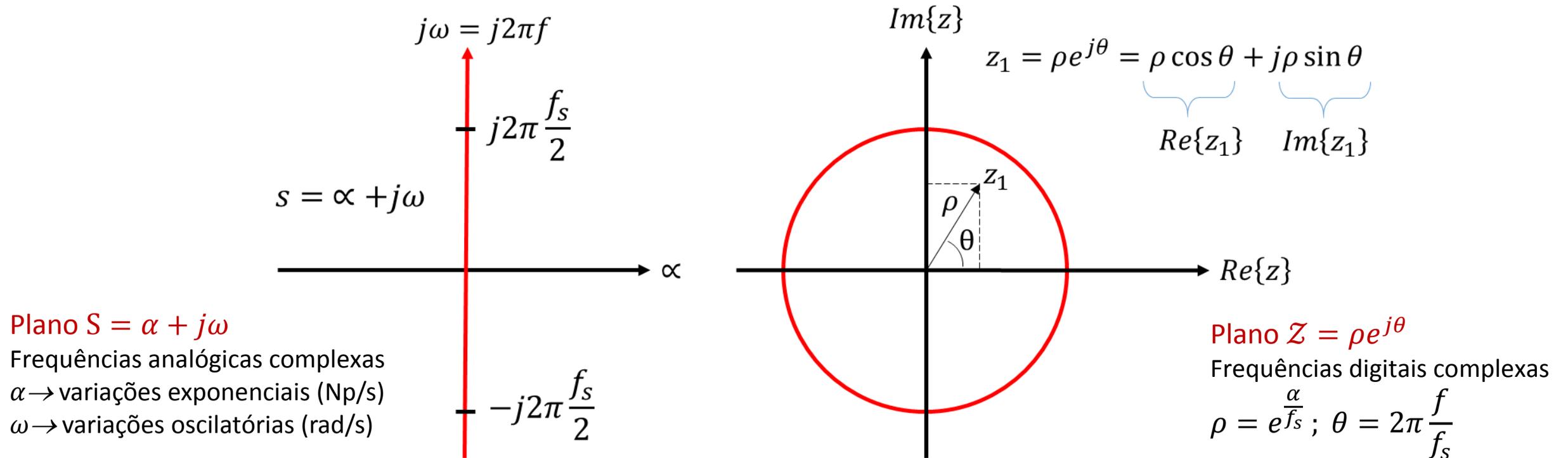
De mesma forma, se um observador se movimentar linearmente ao longo do eixo $j\omega$ no plano $s = \alpha + j\omega$, partindo de $\omega = 0$ e indo até $\omega = -\infty$, o movimento correspondente no plano $z = \text{Re}(z) + j\text{Im}(z)$ será um movimento circular de múltiplas voltas no sentido horário ao longo do círculo de raio unitário $1e^{j\theta}$, partindo de $\theta = 0$ e indo até $\theta = -\infty$.

Interpretação da Transformada \mathcal{Z}



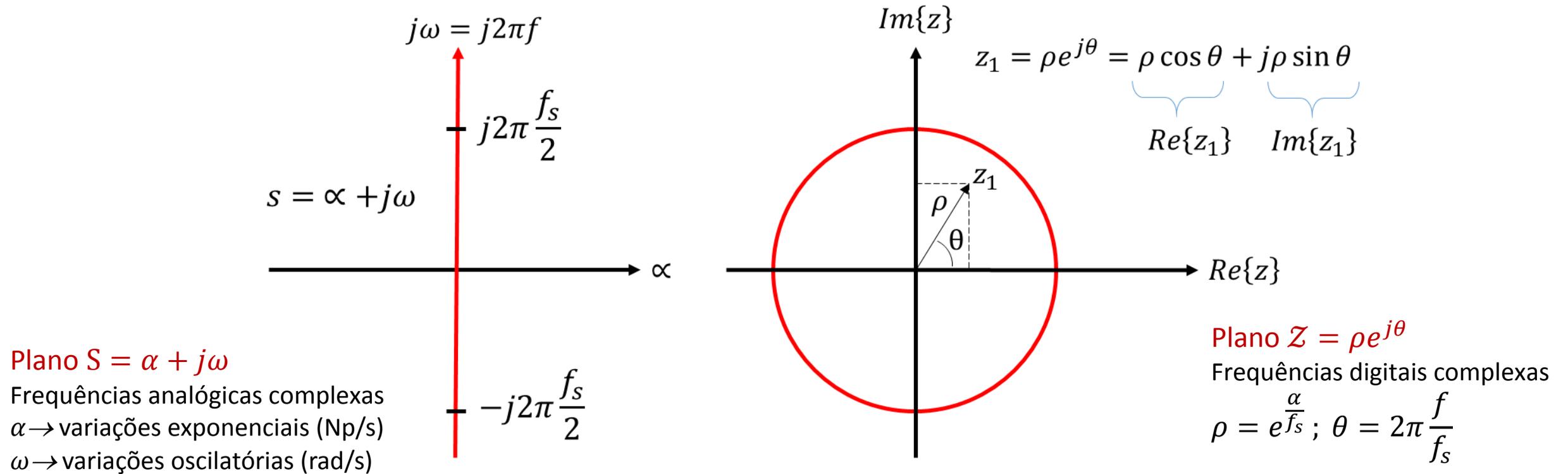
Ainda, note em $\theta = \omega/f_s = 2\pi f/f_s$, que a máxima frequência f permitida no espectro do sinal analógico $x(t)$ é $f_{max} = f_s/2$ para que não ocorra *aliasing* no processo de amostragem efetuado pelo conversor A/D (Critério de Nyquist), processo que digitaliza $x(t)$ convertendo $x(t)$ na sequência $x[n]$.

Interpretação da Transformada \mathcal{Z}



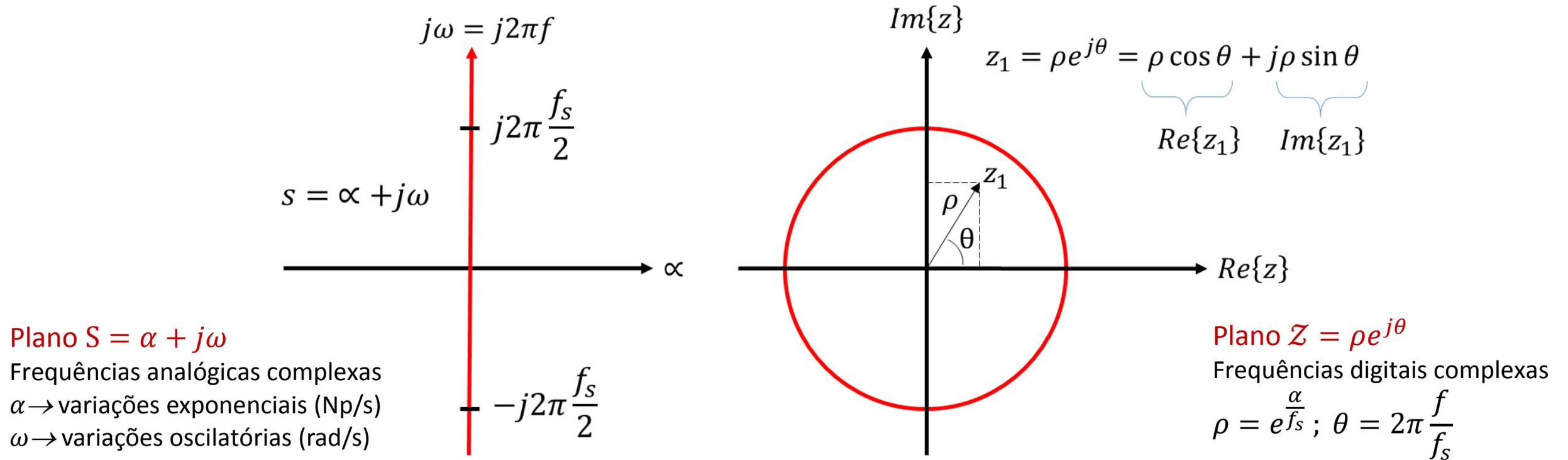
Portanto, para evitar *aliasing*, o observador que se movimenta linearmente ao longo do eixo $j\omega$ no plano $s = \alpha + j\omega$, partindo de $\omega = 0$ na direção de $\omega = \infty$, poderá se mover no máximo até $\omega_{max} = +2\pi f_{max} = +2\pi \frac{f_s}{2}$. Nesta situação, o movimento correspondente no plano $z = Re(z) + jIm(z)$ será um movimento circular de meia volta no sentido anti-horário ao longo do círculo de raio unitário $1e^{j\theta}$, partindo de $\theta = 0$ e indo até $\theta_{max} = 2\pi \frac{f_{max}}{f_s} = 2\pi \frac{f_s/2}{f_s} = +\pi$.

Interpretação da Transformada \mathcal{Z}



De mesma forma, para evitar *aliasing*, o observador que se movimenta linearmente ao longo do eixo $j\omega$ no plano $s = \alpha + j\omega$, partindo de $\omega = 0$ na direção de $\omega = -\infty$, poderá se mover no máximo até $\omega'_{max} = -2\pi f_{max} = -2\pi \frac{f_s}{2}$. Nesta situação, o movimento correspondente no plano $z = Re(z) + jIm(z)$ será um movimento circular de meia volta no sentido horário ao longo do círculo de raio unitário $1e^{j\theta}$, partindo de $\theta = 0$ e indo até $\theta'_{max} = -2\pi \frac{f_{max}}{f_s} = -2\pi \frac{f_s/2}{f_s} = -\pi$.

Interpretação da Transformada \mathcal{Z}



Neste contexto, na hipótese de o espectro do sinal analógico $x(t)$ conter qualquer frequência $f > f_s/2$, esta será mapeada em um ponto sobre círculo de raio unitário $1e^{j\theta}$ para o qual já exista mapeada alguma outra frequência $f < f_s/2$, caracterizando, assim, a superposição espectral resultante do *aliasing*.

Interpretação da Transformada \mathcal{Z}

Sob este ponto de vista, $X(z)$ definida por

$$X(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} x[n]z^{-n}$$

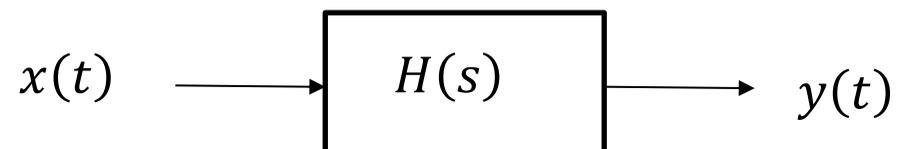
representa espectro, a diferença sendo que o domínio frequência encontra-se “distorcido” pela passagem de s para z através da transformação $z = e^u$.

Poderíamos perguntar porque então não usar a Transformada de Laplace ($X(s) = \mathcal{L}(x(t))$) para um sinal amostrado $x(nT_s)$ em vez da Transformada \mathcal{Z} ($X(z) = \mathcal{Z}(x[n])$), já que ambas resultam em uma representação espectral?

A resposta a esta pergunta reside na inviabilidade da integral que define a Transformada de Laplace em representar uma grandeza discreta no tempo através de um diferencial infinitesimal no tempo, conforme veremos a seguir.

Interpretação da Transformada Z

Seja um sistema LIT descrito por sua resposta em frequência (=função de transferência) $H(s)$, conforme segue



$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

$$s = \alpha + j\omega$$

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

$$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} = \int_0^{\infty} y(t)e^{-st} dt$$

Mas $x(t) = x(nT_s)$; $n = 0, 1, \dots$ e $T_s = \frac{1}{f_s}$

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(nT_s)e^{-snT_s} dt$$

Não existe diferencial dt de uma grandeza x discreta no tempo cujos valores são definidos apenas nos instantes nT_s !!!

Interpretação da Transformada \mathcal{Z}

Adaptando a Transformada de Laplace a sinais no tempo discreto \rightarrow substituindo a integral contínua no tempo por um somatório discreto no tempo:

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(nT_s) e^{-snT_s} dt$$

$$X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) e^{-snT} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) e^{-snT} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \underbrace{\left(e^{\frac{s}{f_s}} \right)^{-n}}_z \rightarrow \boxed{z = e^{\frac{s}{f_s}} = e^{\frac{\alpha + j\omega}{f_s}}}$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} = \mathcal{Z}\{x(n)\}$$

Conclusão \Rightarrow A Transformada \mathcal{Z} pode ser interpretada como a Transformada de Laplace adaptada a sinais e sistemas do tempo discreto.

Transformada \mathcal{Z} de uma sequência $x[n]$ atrasada no domínio tempo discreto

Esta propriedade é particularmente útil quando o sistema pondera réplicas atrasadas de uma sequência $x(n)$, objetivando conformar o espectro $X(z)$ de acordo com um *template* desejado – filtro digital FIR (*Finite Impulse Response*), que será objeto de estudo em nossa disciplina.

Consideremos a sequência $x[n]$, atrasada de n_d amostras, tal que $x_d[n] = x[n - n_d]$. Aplicando a Transformada \mathcal{Z} a $x_d[n]$ temos

$$X_d(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n - n_d) z^{-n}$$

O atraso de n_d amostras em $x_d[n]$ pode ser também representado como um adiantamento de z^{-n} em relação a $x[n]$, ou seja

$$X_d(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-(n+d)} = \underbrace{\left[\sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} \right]}_{X(z)} z^{-d} = X(z) z^{-d}$$

Transformada \mathcal{Z} Inversa

Assim como na Transformada de Laplace $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ utilizamos o conceito de que $x(t)$ pode ser reconstruído a partir das componentes espectrais definidas por $X(s)$, conforme,

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha_m - j\infty}^{\alpha_m + j\infty} X(s)e^{st} ds$$

da mesma forma $x[n]$ pode ser reconstruído pelas componentes espectrais definidas por $X(z)$, através da relação

$$x[n] = \oint_C X(z)z^{n-1} dz \quad (12)$$

A Equação (12) é a chamada **Transformada \mathcal{Z} Inversa** de $X(z)$, ou seja, dado o espectro $X(z)$, a equação (12) define como reconstruir $x[n]$ no domínio tempo discreto.

Note que a integração é realizada sobre um contorno fechado C no domínio $z = Re(z) + jIm(z)$.

Este contorno fechado no domínio z nada mais é do que o caminho de integração definido pela reta $s = \alpha_m$ em

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha_m - j\infty}^{\alpha_m + j\infty} X(s)e^{st} ds$$

e mostrado na Figura 1, caminho que inicia em $s = \alpha_m - j\infty$ e termina em $s = \alpha_m + j\infty$, mas mapeado de s para z através da transformação $z = e^u$.

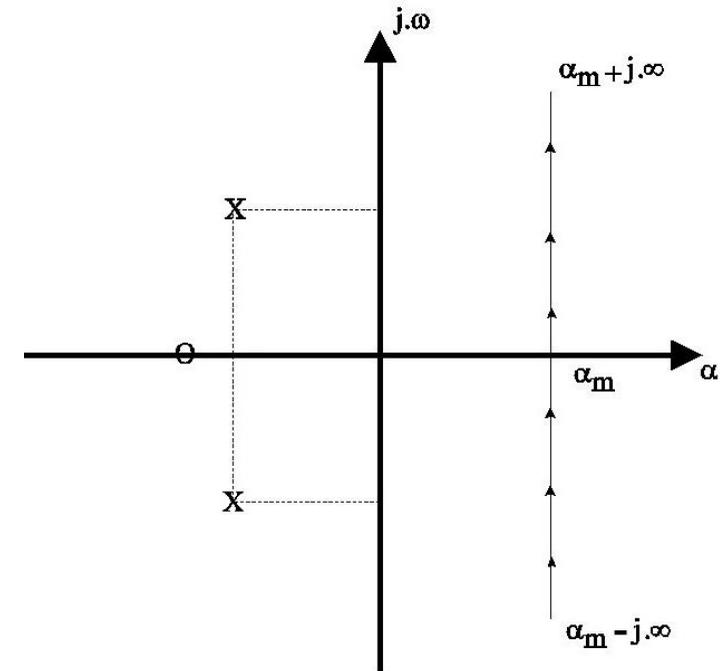


Figura 1: “Root Locus” de $X(s)$ e contorno de integração para cômputo de (3).

Assim como a reta $s = \alpha_m$ deve estar à direita do pólo de $X(s)$ mais à direita no plano $s = \alpha + j\omega$ conforme já discutido na análise da Equação da [Transformada Inversa de Laplace](#) (3), o contorno de integração fechado C da [Transformada \$\mathcal{Z}\$ Inversa](#) (12) deve estar localizado externamente ao pólo de $X(z)$ mais afastado da origem do plano \mathcal{Z} , localização que obedece ao mapeamento dado por $z = \rho e^{j\theta}$ (10).

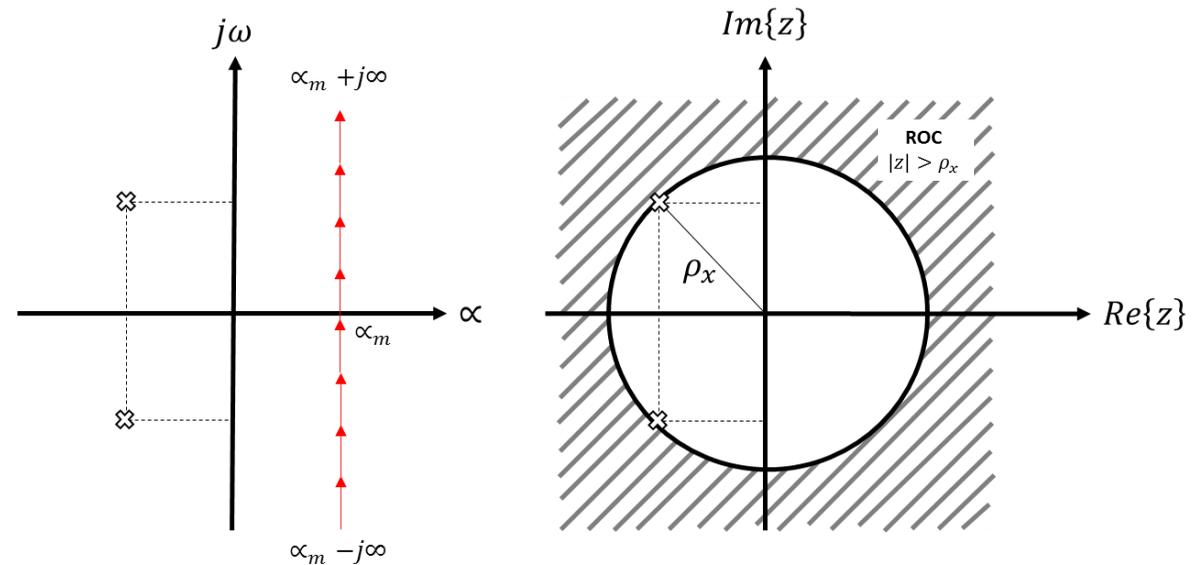
Esta região, na qual C obrigatoriamente deve estar contido, denomina-se [ROC - Region Of Convergence](#), mas não implica, absolutamente, que $X(z)$ inexista fora dela.

Assim como $X(s)$ continua existindo mesmo à direita da reta $s = \alpha_m$, $X(z)$ existe e é definida mesmo fora da ROC.

Cabe lembrar que estamos tratando de sequências $x[n]$ causais. Para sequências causais:

A ROC é externa ao polo mais afastado da origem do plano \mathcal{Z} , ou seja, $|z| > \rho_x$.

O sistema será estável se a ROC contiver o círculo unitário, ou seja, os pólos de $H(z)$ estão dentro do círculo unitário.



- A Transformada \mathcal{Z} , no entanto, permite a determinação do espectro $X(z)$ de sequências $x[n]$ não-causais.
- Esta situação equivaleria, na Transformada de Laplace, a inverter o sentido do caminho de integração ao longo da reta $s = \alpha_m$ na equação para determinação da Transformada de Laplace Inversa (3), isto é, o caminho de integração agora iniciaria em $s = \alpha_m + j\infty$ e terminaria em $s = \alpha_m - j\infty$, o que, como consequência, admite a existência do sinal $x(t)$ somente para $t < 0$.
- Nesta situação hipotética, a reta $s = \alpha_m$ deveria estar à esquerda dos pólos de $X(s)$ e, conseqüentemente, C deveria estar localizado internamente aos pólos de $X(z)$.
- A ROC seria, então, interna aos pólos, ou seja, $|z| < \rho_x$.

Consideremos, a título de exemplo, o par de transformadas de Laplace, dado pelas equações (4) e (5), a seguir reproduzidas,

$$x(t) = 1.05e^{-5t} \cos(6t - 18.4^\circ) u(t) \quad (4)$$

$$X(s) = \frac{s+7}{s^2+10s+61} \quad (5)$$

Suponhamos que $x(t)$ seja agora amostrado sob um período de amostragem $T_s = 0.1$ segundos, de modo que é necessária a representação através da Transformada \mathcal{Z} .

Nesta situação, a partir da tabela de pares de Transformadas $\mathcal{Z}^{(2)}$, a função no tempo discreto $x[n]$ e o respectivo Espectro de Frequências Complexas $X(z)$ relacionados através das equações (12) e (9), são:

$$x[n] = 1.054e^{-0.5n} \cos(0.6n - 18.4^\circ) u[n] \quad (13)$$

$$X(z) = \mathcal{Z}(x[n]) = \frac{z(z - 0.386)}{z^2 - z + 0.368} \quad (14)$$

$$\left(x[n] = \oint_C X(z) z^{n-1} dz \quad (12) \right)$$

$$\left(X(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} x[n] z^{-n} \quad (9) \right)$$

(2) Ver tabela de pares de Transformadas \mathcal{Z} , slide 45.

A Figura 4 mostra a localização dos pólos e zeros de $X(z)$ no plano z , e um possível caminho de integração C ao longo do contorno definido pelo círculo denominado “limite interno da ROC” para cômputo da Transformada \mathcal{Z} Inversa (12).

Foi dito “possível” porque qualquer círculo externo à este seria válido como contorno C para cômputo de (12).

Note que ao mapearmos no plano z os 2 pólos em s de $X(s)$ (Equação (5) e Figura 1) através de (10) com $f_s = 1/T_s = 10$ Hz, as posições mapeadas em z coincidem com as posições dos 2 pólos de $X(z)$ dada por (14).

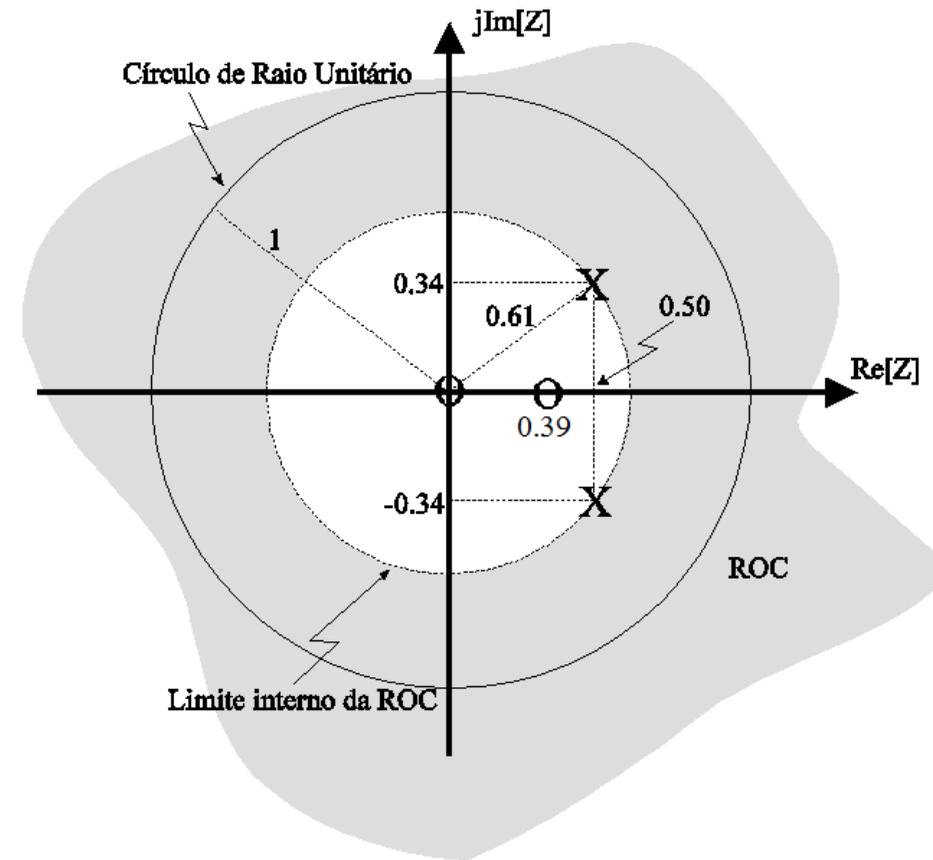


Figura 4: Root Locus de $X(z)$ sendo a ROC representada pela região sombreada.

$$X(z) = \frac{z(z - 0.386)}{z^2 - z + 0.368}$$

As Figuras 5 e 6 apresentam o gráfico tridimensional da Figura 4, respectivamente as superfícies de módulo e ângulo do espectro $X(z)$.

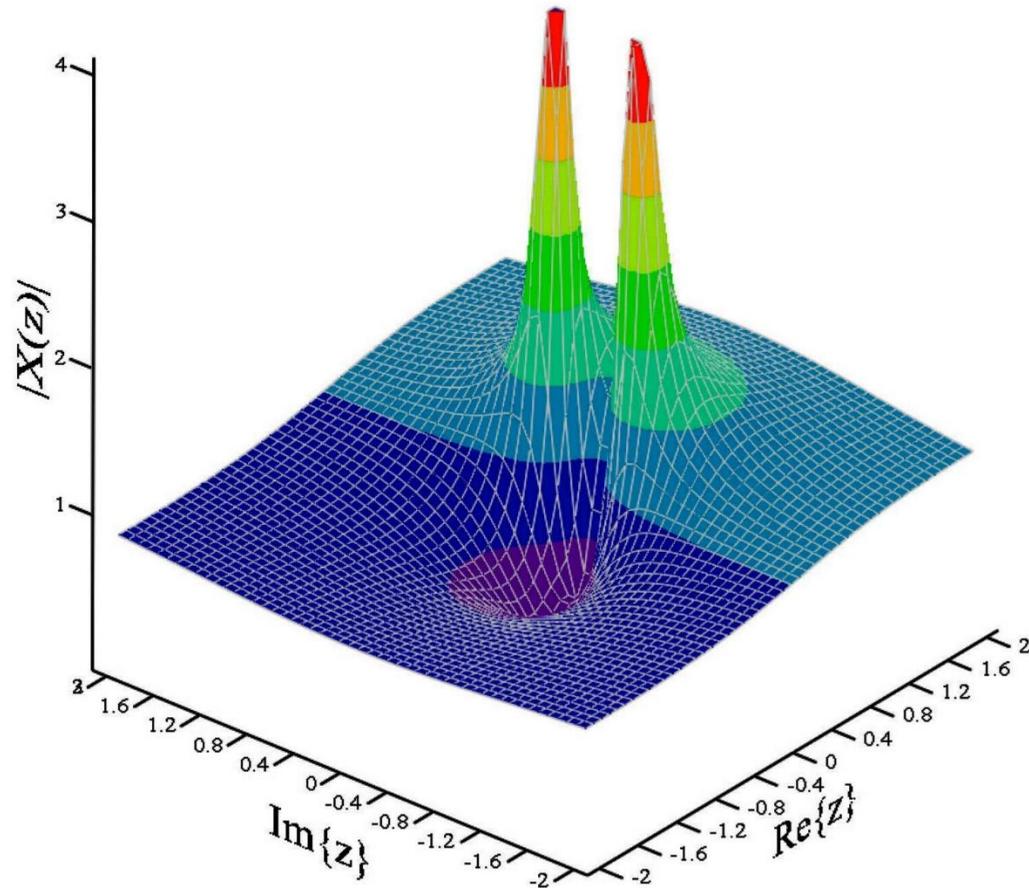


Figura 5: Módulo do espectro $X(z)$ com topo dos pólos limitado em 4.0.

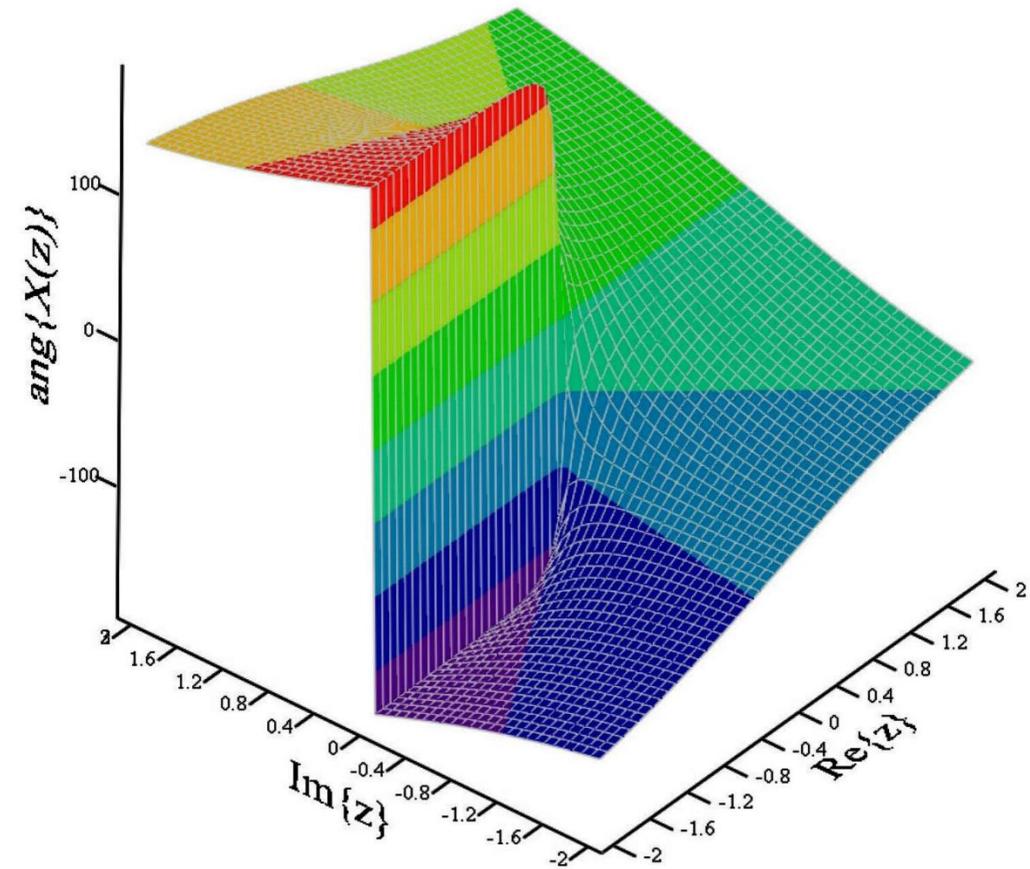


Figura 6: Ângulo do espectro $X(z)$.

Propriedades da Transformada \mathcal{Z}

Reference	Sequence	Transform	ROC
	$x[n]$	$X(z)$	R_x
	$x_1[n]$	$X_1(z)$	R_{x_1}
	$x_2[n]$	$X_2(z)$	R_{x_2}
1	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1(z) + bX_2(z)$	Contains $R_{x_1} \cap R_{x_2}$
2	$x[n - n_0]$	$z^{-n_0} X(z)$	R_x , except for the possible addition or deletion of the origin or ∞
3	$z_0^n x[n]$	$X(z/z_0)$	$ z_0 R_x$
4	$nx[n]$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	R_x , except for the possible addition or deletion of the origin or ∞
5	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R_x
	$\text{Re}\{x[n]\}$	$\frac{1}{2}[X(z) + X^*(z^*)]$	Contains R_x
	$\text{Im}\{x[n]\}$	$\frac{1}{2j}[X(z) - X^*(z^*)]$	Contains R_x
6	$x^*[-n]$	$X^*(1/z^*)$	$1/R_x$
7	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	Contains $R_{x_1} \cap R_{x_2}$
8	Initial-value theorem: $x[n] = 0, \quad n < 0$	$\lim_{z \rightarrow \infty} z X(z) = x[0]$	

Pares de Transformadas \mathcal{Z}

Sequence	Transform	ROC
1. $\delta[n]$	1	All z
2. $u[n]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z > 1$
3. $-u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z < 1$
4. $\delta[n - m]$	z^{-m}	All z except 0 (if $m > 0$) or ∞ (if $m < 0$)
5. $a^n u[n]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z > a $
6. $-a^n u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z < a $
7. $na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z > a $
8. $-na^n u[-n - 1]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z < a $
9. $[\cos \omega_0 n]u[n]$	$\frac{1 - [\cos \omega_0]z^{-1}}{1 - [2 \cos \omega_0]z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$
10. $[\sin \omega_0 n]u[n]$	$\frac{[\sin \omega_0]z^{-1}}{1 - [2 \cos \omega_0]z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$
11. $[r^n \cos \omega_0 n]u[n]$	$\frac{1 - [r \cos \omega_0]z^{-1}}{1 - [2r \cos \omega_0]z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$ z > r$
12. $[r^n \sin \omega_0 n]u[n]$	$\frac{[r \sin \omega_0]z^{-1}}{1 - [2r \cos \omega_0]z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$ z > r$
13. $\begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq N - 1, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{1 - a^N z^{-N}}{1 - az^{-1}}$	$ z > 0$
14. $Aa^n \cos(\theta n + \phi)u(n)$	$\frac{Az[z \cos \phi - a \cos(\phi - \theta)]}{z^2 - (2a \cos \theta)z + a^2}$	$ z > a $

Determinando a Transformada \mathcal{Z} – Exemplo 1

Determine a Transformada \mathcal{Z} da sequência $x[n] = A\delta[n]$.

Solução: A partir da definição, temos que a Transformada \mathcal{Z} da sequência $x[n]$ é obtida por

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} A\delta[n]z^{-n} = Az^0 = A$$

$$A\delta[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} A$$

Determinando a Transformada \mathcal{Z} – Exemplo 2

Determine a Transformada \mathcal{Z} da sequência $x[n] = Au[n]$.

Solução: A partir da definição, temos que a Transformada \mathcal{Z} da sequência $x[n]$ é obtida por

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Au[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} Az^{-n} = A \sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1})^n = \frac{A}{1 - z^{-1}}$$

onde usamos a forma fechada de uma série geométrica infinita, que requer $|z^{-1}| < 1$, ou $|z| > 1$. Este conjunto de valores de z para os quais a série converge define a Região de Convergência, e se torna bastante intuitivo se considerarmos a série na forma aberta, ou seja,

$$X(z) = A[1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-n} + \dots] = A \left[1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots \right]$$

a qual converge unicamente para $|z| > 1$.

$$Au[n] \quad \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \quad \frac{A}{1 - z^{-1}}$$

Determinando a Transformada \mathcal{Z} – Exemplo 3

Determine a Transformada \mathcal{Z} da sequência $x[n] = Aa^n u[n]$.

Solução: A partir da definição, temos que a Transformada \mathcal{Z} da sequência $x[n]$ é obtida por

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} Aa^n z^{-n} = A \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{A}{1 - az^{-1}}, \text{ para } |az^{-1}| < 1, \text{ ou } |z| > |a|.$$

Esta forma fechada da série geométrica infinita tem uma Região de Convergência de $|az^{-1}| < 1$, ou $|z| > |a|$.

$$Aa^n u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{A}{1 - az^{-1}}$$

Determinando a Transformada \mathcal{Z} – Exemplo 4

Determine a Transformada \mathcal{Z} da sequência $x[n] = Aa^n e^{j\theta n}, n \geq 0; x[n] = 0, n < 0$.

Solução: A partir da definição, temos que a Transformada \mathcal{Z} da sequência $x[n]$ é obtida por

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} Aa^n e^{j\theta n} z^{-n} = A \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{j\theta} z^{-1})^n = \frac{A}{1 - ae^{j\theta} z^{-1}}$$

para $|ae^{j\theta} z^{-1}| < 1$, ou $|z| > |ae^{j\theta}|$, ou $|z| > |a|$, dado que $|e^{j\theta}| = 1$

$$Aa^n e^{j\theta n} \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{A}{1 - ae^{j\theta} z^{-1}}$$

Determinando a Transformada \mathcal{Z} – Exemplo 5

Determine a Transformada \mathcal{Z} da sequência $x[n] = Aa^n \cos \theta n, n \geq 0; x[n] = 0, n < 0$.

Solução: A partir da definição, temos que a Transformada \mathcal{Z} da sequência $x[n]$ é obtida por

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} Aa^n \cos(\theta n) z^{-n} = A \sum_{n=0}^{\infty} a^n \left[\frac{e^{j\theta n} + e^{-j\theta n}}{2} \right] z^{-n}$$

que pode ser escrita em dois termos, conforme

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{A}{2} \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{j\theta n} z^{-n} + \frac{A}{2} \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\theta n} z^{-n} = \frac{A}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{j\theta} z^{-1})^n + \frac{A}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\theta} z^{-1})^n = \\ &= \frac{A}{2} \left[\frac{1}{1 - ae^{j\theta} z^{-1}} + \frac{1}{1 - ae^{-j\theta} z^{-1}} \right], \text{ para } |ae^{\pm j\theta} z^{-1}| < 1. \end{aligned}$$

O lado direito da equação acima obtida pode ser combinado em um denominador comum, conforme

$$X(z) = \frac{A}{2} \left[\frac{2 - az^{-1}(e^{j\theta} + e^{-j\theta})}{(1 - ae^{j\theta}z^{-1})(1 - ae^{-j\theta}z^{-1})} \right] = \frac{A(1 - az^{-1} \cos \theta)}{1 - az^{-1}(e^{j\theta} + e^{-j\theta}) + a^2z^{-2}}$$

E, colocando na forma quadrática de segunda ordem, encontramos

$$X(z) = \frac{A(1 - az^{-1} \cos \theta)}{1 - (2a \cos \theta)z^{-1} + a^2z^{-2}} = \frac{Az(z - a \cos \theta)}{z^2 - (2a \cos \theta)z + a^2}$$

A ROC é $|ae^{\pm j\theta}z^{-1}| < 1$, ou $|z| > |a|$.

$$Aa^n \cos \theta n \quad \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \quad \frac{Az(z - a \cos \theta)}{z^2 - (2a \cos \theta)z + a^2}$$

Métodos para determinar a Transformada \mathcal{Z} Inversa

- A Transformada \mathcal{Z} é muito utilizada na análise de sistemas discretos no tempo LIT, muitas vezes sendo necessário determinar Transformadas \mathcal{Z} de sequências e, com alguma manipulação algébrica, encontrar as Transformadas \mathcal{Z} Inversas.
- Há algumas possíveis formas de encontrar a Transformada \mathcal{Z} Inversa como, por exemplo, através do teorema da integral de Cauchy.
- No entanto, para algumas sequências típicas encontradas na análise de sistemas LIT, há procedimentos mais informais disponíveis, dentre eles: o método de inspeção, a expansão em frações parciais e a expansão em séries de potência.

Determinação da Transformada \mathcal{Z} Inversa pelo Método de Inspeção

O método de inspeção consiste simplesmente em familiarizar-se com certos pares de Transformadas \mathcal{Z} , reconhecendo-os “por inspeção”, a partir dos pares de Transformadas \mathcal{Z} mais frequentemente utilizados (encontrados na Tabela de Pares de Transformadas \mathcal{Z}).

Por exemplo, se queremos determinar a Transformada \mathcal{Z} inversa de

$$X(z) = \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \right), \quad |z| > \frac{1}{2},$$

Consultamos a Tabela de Pares de Transformadas \mathcal{Z} , onde encontramos o par

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|.$$

Por inspeção, reconheceremos que a sequência $x[n] = a^n u[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$, com $|z| > \left|\frac{1}{2}\right|$.

Determinação da Transformada \mathcal{Z} Inversa pelo Método da Expansão por Fração Parcial

Há casos em que $X(z)$ não pode ser explicitamente encontrada na Tabela de pares de Transformadas \mathcal{Z} , mas pode ser obtida uma expressão alternativa para $X(z)$, como a soma de termos mais simples, os quais podem estar tabulados.

Nestes casos, sendo possível encontrar a expansão em frações parciais de $X(z)$, as sequências individuais podem ser obtidas facilmente em Tabelas de pares de Transformadas \mathcal{Z} .

Com o intuito de obter uma expansão em frações parciais, vamos assumir que $X(z)$ é expressa como uma razão de polinômios em z^{-1} (como frequentemente ocorre em sistemas LIT), conforme apresentado ao lado.

$$X(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

Determinação da Transformada \mathcal{Z} Inversa pelo Método da Expansão por Fração Parcial

Uma expressão equivalente é

$$X(z) = \frac{z^N \sum_{k=0}^M b_k z^{M-k}}{z^M \sum_{k=0}^N a_k z^{N-k}}$$

A equação acima deixa explícito que, para tais funções, haverá M zeros e N pólos em locais diferentes de zero no plano \mathcal{Z} .

Se $M > N$ haverá $M - N$ pólos em $z = 0$ ou, se $N > M$ haverá $N - M$ zeros em $z = 0$.

Dito de outra forma, Transformadas \mathcal{Z} da forma da equação ao lado sempre terão o mesmo número de pólos e zeros no plano \mathcal{Z} finito, e não terão pólos ou zeros em $z = \infty$.

$$X(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}.$$

Determinação da Transformada \mathcal{Z} Inversa pelo Método da Expansão por Fração Parcial

Para encontrar a expansão em frações parciais é mais conveniente expressar $X(z)$ conforme

$$X(z) = \frac{b_0 \prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{a_0 \prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})}, \quad \text{onde os } c_k \text{ são os zeros não zero de } X(z), \\ \text{e os } d_k \text{ são os pólos não zero de } X(z).$$

Se $M < N$ e os pólos são todos de primeira ordem, então $X(z)$ pode ser expressa como

$$X(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}}.$$

Multiplicando ambos os lados da equação por $(1 - d_k z^{-1})$ e avaliando para $z = d_k$, os coeficientes A_k podem ser encontrados por

$$A_k = (1 - d_k z^{-1}) X(z) \Big|_{z=d_k}.$$

Consideremos a sequência $x[n]$ cuja Transformada \mathcal{Z} é $X(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}$, $|z| > \frac{1}{2}$.

Podemos expressar $X(z)$ conforme $X(z) = \frac{A_1}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})} + \frac{A_2}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}$.

Onde $A_1 = (1 - \frac{1}{4}z^{-1}) X(z)|_{z=1/4} = -1$, $A_2 = (1 - \frac{1}{2}z^{-1}) X(z)|_{z=1/2} = 2$.

Portanto, $X(z) = \frac{-1}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})} + \frac{2}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}$.

A partir da tabela de pares de Transformadas \mathcal{Z} encontramos o par

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad |z| > |a|$$

Considerando a propriedade da linearidade da Transformadas \mathcal{Z} , podemos encontrar $x[n]$, conforme

$$x[n] = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n].$$

Para ilustrar a expansão em frações parciais quando $M \geq N$, consideremos a sequência $x[n]$ cuja Transformada \mathcal{Z} é

$$X(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} = \frac{(1 + z^{-1})^2}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)(1 - z^{-1})}, \quad |z| > 1.$$

O primeiro passo é dividir o polinômio do numerador pelo polinômio do denominador, conforme

$$\frac{1}{2}z^{-2} - \frac{3}{2}z^{-1} + 1 \quad \begin{array}{r} 2 \\ \hline z^{-2} + 2z^{-1} + 1 \\ z^{-2} - 3z^{-1} + 2 \\ \hline 5z^{-1} - 1 \end{array}$$

Dado que os termos do resto da divisão são de grau 1 (z^{-1}), não é necessário continuar a divisão e $X(z)$ pode ser expressa por

$$X(z) = 2 + \frac{-1 + 5z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)(1 - z^{-1})}.$$

A partir daqui, procedemos como no caso anterior, determinando os coeficientes A_1 e A_2 através de

$$A_k = (1 - d_k z^{-1}) X(z) \Big|_{z=d_k}.$$

Assim,

$$A_1 = \left[\left(\frac{-1 + 5z^{-1}}{\cancel{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})} (1 - z^{-1})} \right) \cancel{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)} \right]_{z=1/2} = -9,$$

$$A_2 = \left[\left(\frac{-1 + 5z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1}) \cancel{(1 - z^{-1})}} \right) \cancel{(1 - z^{-1})} \right]_{z=1} = 8.$$

De onde,

$$X(z) = 2 - \frac{9}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{8}{1 - z^{-1}}.$$

A partir da tabela de pares de Transformadas \mathcal{Z} encontramos os pares

$$\begin{aligned} \delta[n] &\xleftrightarrow{\mathcal{Z}} 1 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] &\xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \\ u[n] &\xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{1}{1 - z^{-1}} \end{aligned}$$

Considerando a propriedade da linearidade da Transformadas \mathcal{Z} , podemos encontrar $x[n]$, conforme

$$x[n] = 2\delta[n] - 9\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 8u[n].$$

Determinação da Transformada \mathcal{Z} Inversa pelo Método da Expansão em Séries de Potência

Se a Transformada \mathcal{Z} for dada na forma de uma série de potências (série de Laurent) conforme

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \\ &= \cdots + x[-2]z^2 + x[-1]z + x[0] + \\ &\quad + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \cdots, \end{aligned}$$

onde os valores $x[n]$ da sequência são os coeficientes de z^{-n} , podemos determinar qualquer valor particular da sequência encontrando o coeficiente da potência apropriada de z^{-n} .

Consideremos $X(z)$ conforme

$$X(z) = z^2 \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right) (1 + z^{-1})(1 - z^{-1}).$$

Multiplicando os fatores na expressão de $X(z)$, encontramos

$$X(z) = z^2 - \frac{1}{2}z - 1 + \frac{1}{2}z^{-1}.$$

Por inspeção, observamos que

$$x[n] = \begin{cases} 1, & n = -2, \\ -\frac{1}{2}, & n = -1, \\ -1, & n = 0, \\ \frac{1}{2}, & n = 1, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

A partir da tabela de pares de Transformadas \mathcal{Z} encontramos o par

$$\delta[n - m] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} z^{-m}$$

E, portanto,

$$x[n] = \delta[n + 2] - \frac{1}{2}\delta[n + 1] - \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n - 1].$$

Apêndice I – Reconstrução de $x(t)$ a partir de suas componentes espectrais no plano $s = \alpha + j\omega$

Seja uma função no tempo $x(t)$ com instante inicial em $t = 0$, e seja $X(s)$ seu espectro de frequências complexas, onde $s = \alpha + j\omega$.

Seja $x(t)$ construída a partir de seu espectro $X(s)$ através da expressão

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{s=\alpha+j\omega} X(s)e^{st} ds \quad (15)$$

Interpretando a integral (15), esta “varre” todo plano complexo $s = \alpha + j\omega$ “procurando” as infinitas e infinitesimalmente distantes entre si componentes espectrais $X(s)$ no intuito de restituir a cada uma delas a variação temporal, ponderando-as com a exponencial no tempo e^{st} , de mesma frequência complexa $s = \alpha + j\omega$ que a componente espectral sendo ponderada.

Ocorre que o custo computacional de (15) é altíssimo, visto que implica na varredura ponto a ponto de todo o plano complexo $s = \alpha + j\omega$. No sentido de reduzir este custo computacional vamos definir uma estratégia de “varredura” do plano $s = \alpha + j\omega$ que evite esta situação, mas que seja equivalente.

Uma maneira de “varrer” o plano s seria particioná-lo em infinitos contornos retangulares de dimensões infinitesimais, como mostra a Figura A.1.

Note que as fronteiras de cada quatro contornos adjacentes se anulam devido aos sentidos contrários de integração nas fronteiras, resultando em um contorno equivalente que envolve os quatro originais.

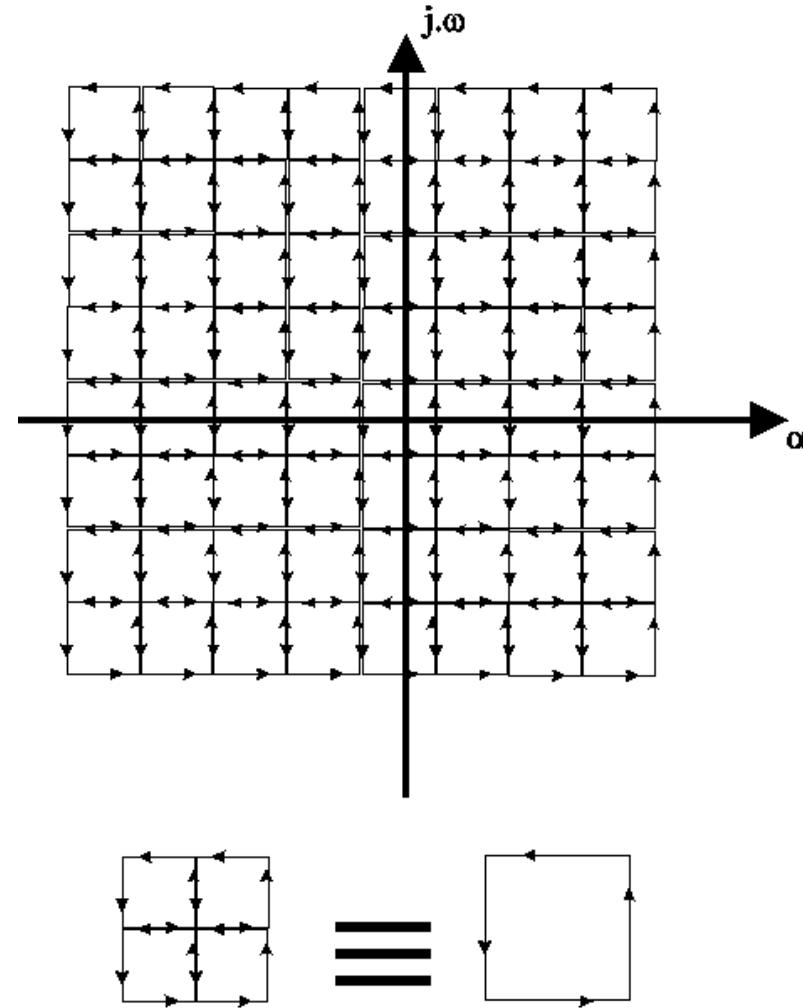


Figura A.1: Plano $s = \alpha + j\omega$ subdividido em infinitos contornos retangulares de dimensões infinitesimais. Cada quatro contornos adjacentes equivalem a um contorno envolvendo os quatro originais.

Se cada quatro contornos adjacentes resultam em um único contorno de dimensões equivalentes à soma dos quatro originais, podemos aplicar este procedimento em todo plano $s = \alpha + j\omega$ e executar a “varredura” à procura de componentes espectrais simplesmente executando a integral definida por (15) ao longo de um caminho retangular de lados tendendo ao infinito, conforme mostra a Figura A.2.

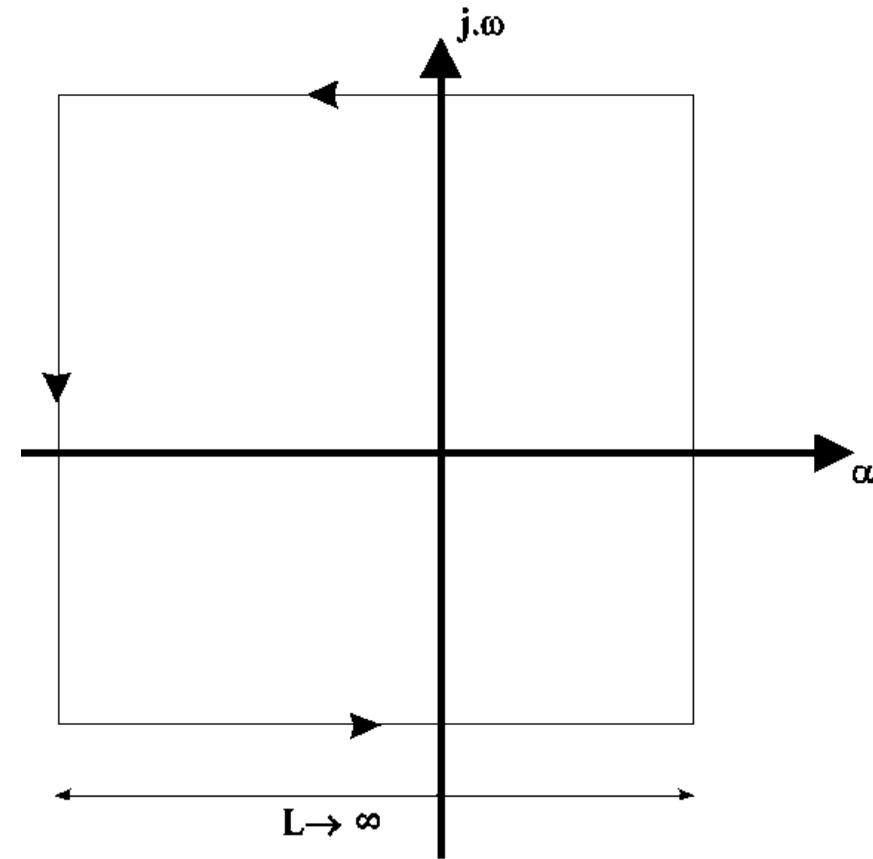


Figura A.2: Varredura do todo plano s realizada pela integração ao longo de um contorno retangular de lados L tendendo ao infinito.

Mas se os lados do contorno retangular tendem ao infinito, um observador “sentado” no plano $s = \alpha + j\omega$ localizado em qualquer posição finita não poderá distinguir as fronteiras do contorno da Figura A.2.

Sendo assim, a forma do contorno não importa, desde que suas fronteiras estejam no infinito. Portanto o contorno de integração da integral definida pela Equação (15) pode ser o mostrado na Figura A.3.

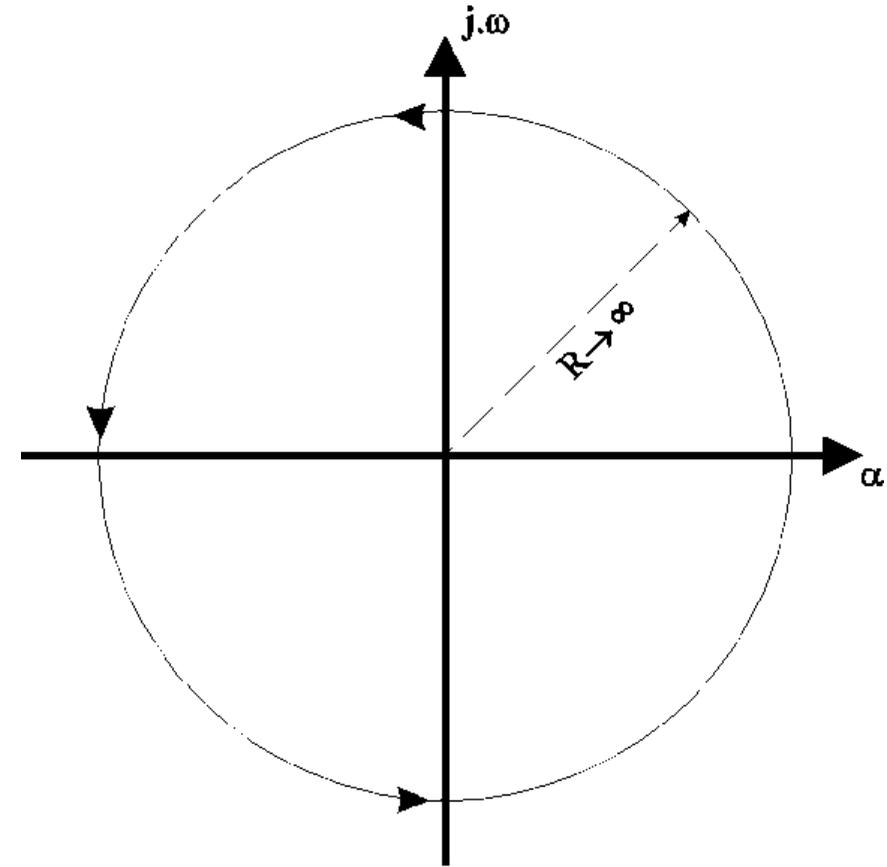


Figura A.3: Varredura do todo plano $s = \alpha + j\omega$ realizada pela integração ao longo de um contorno circular de raio tendendo ao infinito.

Mas sabemos do Teorema de Cauchy que a integral de uma função complexa ao longo de um caminho fechado definido sobre o plano complexo de domínio da função é nula se o caminho fechado não engloba pelo menos um pólo ou singularidade da função complexa.

Sendo assim, vamos dividir o contorno da Figura A.3 em dois contornos C1 e C2, separados pela fronteira em $s = \alpha_m$, de tal forma que todos os pólos de $X(s)$ estejam à esquerda da fronteira $s = \alpha_m$, conforme mostra a Figura A.4.

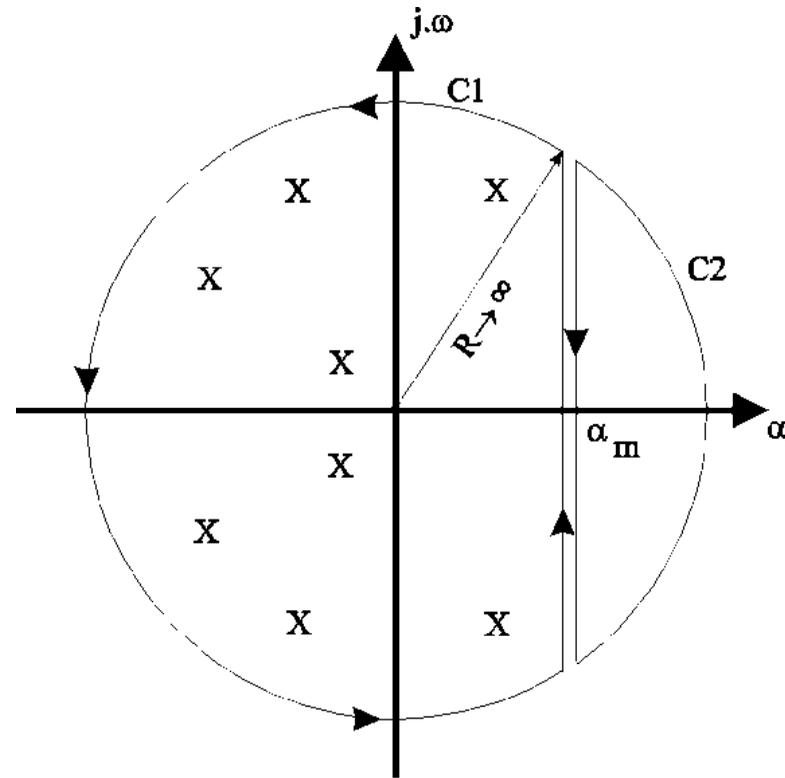


Figura A.4: Varredura do todo plano s realizada pela integração ao longo dos contornos C1 e C2. Todos os pólos de $X(s)$ estão à esquerda da fronteira $s = \alpha_m$.

Mas, pelo Teorema de Cauchy, a integral definida por (15) ao longo do contorno C2 é nula.

Se fizermos, após esta consideração, o raio do contorno C1 tender efetivamente ao infinito teremos o contorno definido na Figura A.5.

Note que este é o caminho de integração definido na equação (3), e por mais estranho que possa parecer, estaremos realizando a varredura sobre todo plano $s = \alpha + j\omega$ se apenas fizermos a integral (15) sobre este caminho retilíneo, que inicia em $s = \alpha_m - j\infty$ e termina em $s = \alpha_m + j\infty$.

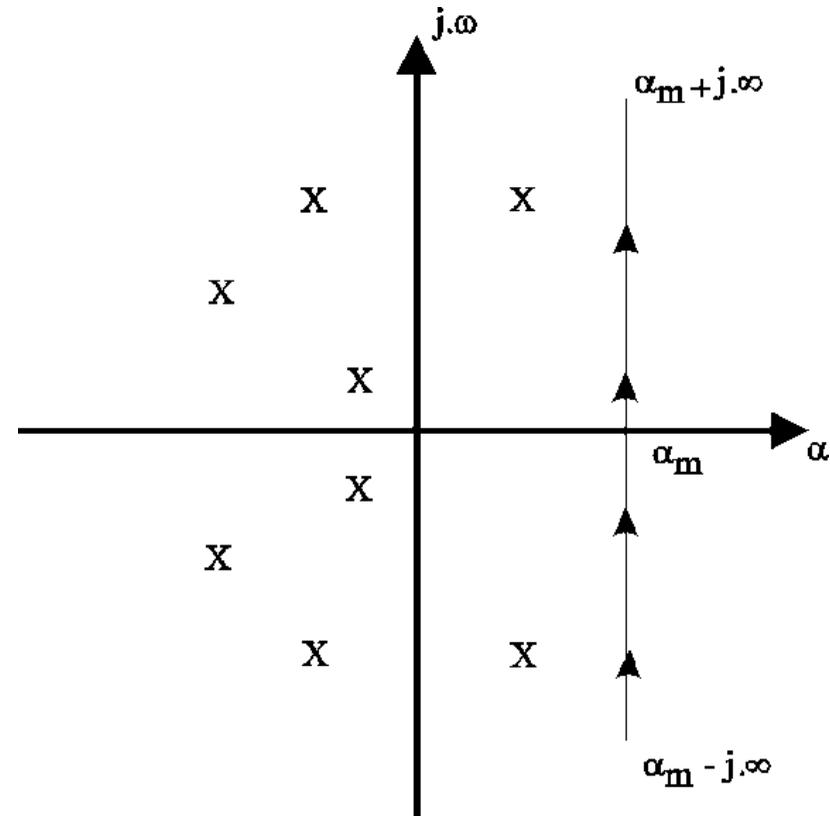


Figura A.5: Varredura do todo plano $s = \alpha + j\omega$ “à procura” de componentes espectrais realizada pela integração ao longo do caminho definido pela reta $s = \alpha_m$. A reta $s = \alpha_m$ está à direita de todos os pólos de $X(s)$.

Apêndice II – Pólos e Zeros no domínio S

Todo sistema LIT analógico, com uma entrada $x(t)$ e uma saída $y(t)$, é descrito no domínio frequência complexa $s = \alpha + j\omega$ por uma função de transferência (resposta em frequência) $H(s)$, conforme

$$H(s) = P(s)/Q(s) ,$$

onde $P(s)$ e $Q(s)$ são polinômios da variável independente $s = \alpha + j\omega$, sendo

$$H(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}/\mathcal{L}\{x(t)\} = Y(s)/X(s) .$$

⇒ **Zeros** são frequências $s = \alpha + j\omega$ no espectro de frequências complexas $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ do sinal de entrada $x(t)$ em que $P(s) = 0$, zerando a razão $H(s) = P(s)/Q(s)$, e zerando, portanto, a amplitude do espectro $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} = H(s)X(s)$ da saída $y(t)$ nas frequências $s = \alpha + j\omega$ correspondentes às frequências dos zeros.

Zeros são, portanto, frequências complexas $s = \alpha + j\omega$ em que o sistema apresenta atenuação infinita.

⇒ **Pólos** são frequências $s = \alpha + j\omega$ no espectro de frequências complexas $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ do sinal de entrada $x(t)$ em que $Q(s) = 0$, tornando infinita a razão $H(s) = P(s)/Q(s)$, e tornando infinita, portanto, a amplitude do espectro $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} = H(s)X(s)$ da saída $y(t)$ nas frequências $s = \alpha + j\omega$ correspondentes às frequências dos polos.

Pólos são, portanto, frequências complexas $s = \alpha + j\omega$ em que o sistema apresenta ganho infinito.

Quando se aplica um impulso $\delta(t)$ na entrada $x(t)$, dado que o espectro de um impulso $\delta(t)$ é unitário, constante e formado por todas as frequências complexas $s = \alpha + j\omega$, isto é,

$$X(s) = \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1,$$

o sistema terá como resposta o espectro da saída

$$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} = X(s)H(s) = H(s),$$

que terá componentes espectrais de magnitude significativa somente nas frequências dos pólos.

Apêndice III – Pólos e Zeros no domínio \mathcal{Z}

Todo sistema LIT digital, com uma entrada $x[n]$ e uma saída $y[n]$, é descrito no domínio frequência complexa $z = \text{Re}\{z\} + j\text{Im}\{z\} = \rho e^{j\theta}$, por uma função de transferência (resposta em frequência)

$$H(z) = P(z)/Q(z),$$

onde $P(z)$ e $Q(z)$ são polinômios da variável independente $z = \rho e^{j\theta}$, sendo

$$H(z) = \mathcal{Z}\{y[n]\} / \mathcal{Z}\{x[n]\} = Y(z)/X(z).$$

⇒ **Zeros** são frequências $z = \rho e^{j\theta}$ no espectro de frequências complexas $X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\}$ da sequência de entrada $x[n]$ em que $P(z) = 0$, zerando a razão $H(z) = P(z)/Q(z)$, e zerando, portanto, a amplitude do espectro $Y(z) = \mathcal{Z}\{y[n]\} = H(z)X(z)$ da saída $y[n]$ nas frequências $z = \rho e^{j\theta}$ correspondentes às frequências dos zeros.

Zeros são, portanto, frequências complexas $z = \rho e^{j\theta}$ em que o sistema apresenta atenuação infinita.

⇒ **Pólos** são frequências $z = \rho e^{j\theta}$ no espectro de frequências complexas $X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\}$ da sequência de entrada $x[n]$ em que $Q(z) = 0$, tornando infinita a razão $H(z) = P(z)/Q(z)$, e tornando infinita, portanto, a amplitude do espectro $Y(z) = \mathcal{Z}\{y[n]\} = H(z)X(z)$ da saída $y[n]$ nas frequências $z = \rho e^{j\theta}$ correspondentes às frequências dos polos.

Polos são, portanto, frequências complexas $z = \rho e^{j\theta}$ em que o sistema apresenta ganho infinito.

Quando se aplica um impulso $\delta[n]$ na entrada $x[n]$, dado que o espectro de um impulso $\delta[n]$ é unitário, constante e formado por todas as frequências complexas $z = \rho e^{j\theta}$, isto é,

$$X(z) = \mathcal{Z}\{\delta[n]\} = 1,$$

o sistema terá como resposta o espectro da saída

$$Y(z) = \mathcal{Z}\{y[n]\} = X(z)H(z) = H(z),$$

que terá componentes espectrais de magnitude significativa somente nas frequências dos pólos.