Processamento Digital de Sinais

Outline:

As ferramentas para análise de Fourier que estudaremos neste módulo são:

– Séries de Fourier - DFS

– Transformada Discreta de Fourier - DFT

– Transformada Rápida de Fourier - FFT

Transformada Discreta de Fourier - DFT

- Uma forma de definir a DFT é partir da Transformada de Fourier de Tempo Discreto – DTFT, que estudamos anteriormente.

- Na DTFT, $X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n}$,

  – o domínio tempo "n" é discreto, no entanto, a soma sobre "n" é infinita, pois a DTFT é adotada quando a sequência $x(n)$ é definida para todo n.

  – a variável independente, o domínio frequência "ω“, é contínua, pois se o sinal existe em todo o tempo, a separação das componentes espectrais no domínio frequência é infinitesimal e, portanto, o espectro da DTFT é contínuo.

- A DTFT é útil para análise teórica de sinais e sistemas. No entanto, dado que a soma sobre "n" é infinita, a computação da DTFT representa uma dificuldade de implementação numérica, especialmente em sistemas de tempo real.

Transformada Discreta de Fourier - DFT

- Em muitos casos, apenas sinais de duração finita são de interesse. Por exemplo, quando o sinal em si é de duração finita, ou apenas um segmento do sinal é de interesse.

- Quando a sequência $x(n)$ não é definida para todo n mas, sim, para um número limitado de amostras n, pode ser utilizada uma outra representação de Fourier, a Transformada Discreta de Fourier – DFT.

- A DFT é computável e importante para implementação de sistemas de DSP, pois na DFT:

  − o domínio tempo "n" é discreto, e o somatório sobre "n" é finito.

  − o domínio frequência "k" é discreto, e a DFT em si é uma sequência, em vez de uma função de variável contínua.

Transformada Discreta de Fourier - DFT

- No entanto, apesar de computável, transformar sinais do domínio tempo para o domínio frequência através da DFT é computacionalmente custoso.

- No início dos anos 1960, Cooley e Tukey desenvolveram um eficiente algoritmo para o cálculo de DFTs, denominado Transformada Rápida de Fourier – FFT.

- A *Fast Fourier Transform* permitiu determinar o espectro de sinais em tempo real, constituindo um marco histórico no DSP.

- Desde então, uma grande variedade de algoritmos para FFT foram propostos, alguns deles promovendo melhoras no algoritmo original, outros lidando com situações para as quais a FFT não foi projetada.

- Presentemente, todos os processadores de DSP são capazes de calcular a FFT em *software* e, para aplicações mais demandantes, são utilizados dispositivos VLSI específicos.

Transformada Discreta de Fourier - DFT

- Para definir a Transformada Discreta de Fourier, lembremos, inicialmente, que a Transformada de Fourier de Tempo Discreto é expressa por

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n} \qquad (1)$$

- A equação (1) não pode ser utilizada computacionalmente (numericamente) para analisar $x(n)$. No entanto, é possível aproximar o espectro de $x(n)$ a partir de amostras de $X(e^{j\omega})$.
- A ideia de amostrar $X(e^{j\omega})$ em pontos de frequência igualmente espaçados é, de fato, a base da Transformada Discreta de Fourier – DFT .
- Note que a referida amostragem ocorre no domínio frequência ($X(e^{j\omega})$ é uma função da frequência).
- Sob esta interpretação, a DFT corresponde a amostras no domínio frequência da Transformada de Fourier de Tempo Discreto.

Transformada Discreta de Fourier - DFT

- Para obter a DFT a partir da DTFT, a DTFT é amostrada em pontos de frequência igualmente espaçados.
- Dado que $X(e^{j\omega})$ é uma função periódica em ω, com um período de 2π, se tomarmos N amostras em cada período de $X(e^{j\omega})$, o espaçamento entre os pontos de frequência será de $\frac{2\pi}{N}$.
- Assim, a frequência do conjunto de senoides que estamos buscando será da forma $\frac{2\pi}{N}k$, sendo $k = 0, 1, \dots, N-1$.
- Desta forma, a Transformada Discreta de Fourier para uma sequência $x(n)$ finita, com N amostras, tais que $x(n)$ não é definida fora do intervalo $0 \leq n \leq N-1$, é expressa por

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j(2\pi/N)nk} \qquad (2)$$

De fato, a equação (2) é similar à equação (1) que descreve a DTFT, se $\omega = (2\pi/N)k$. Ou seja,

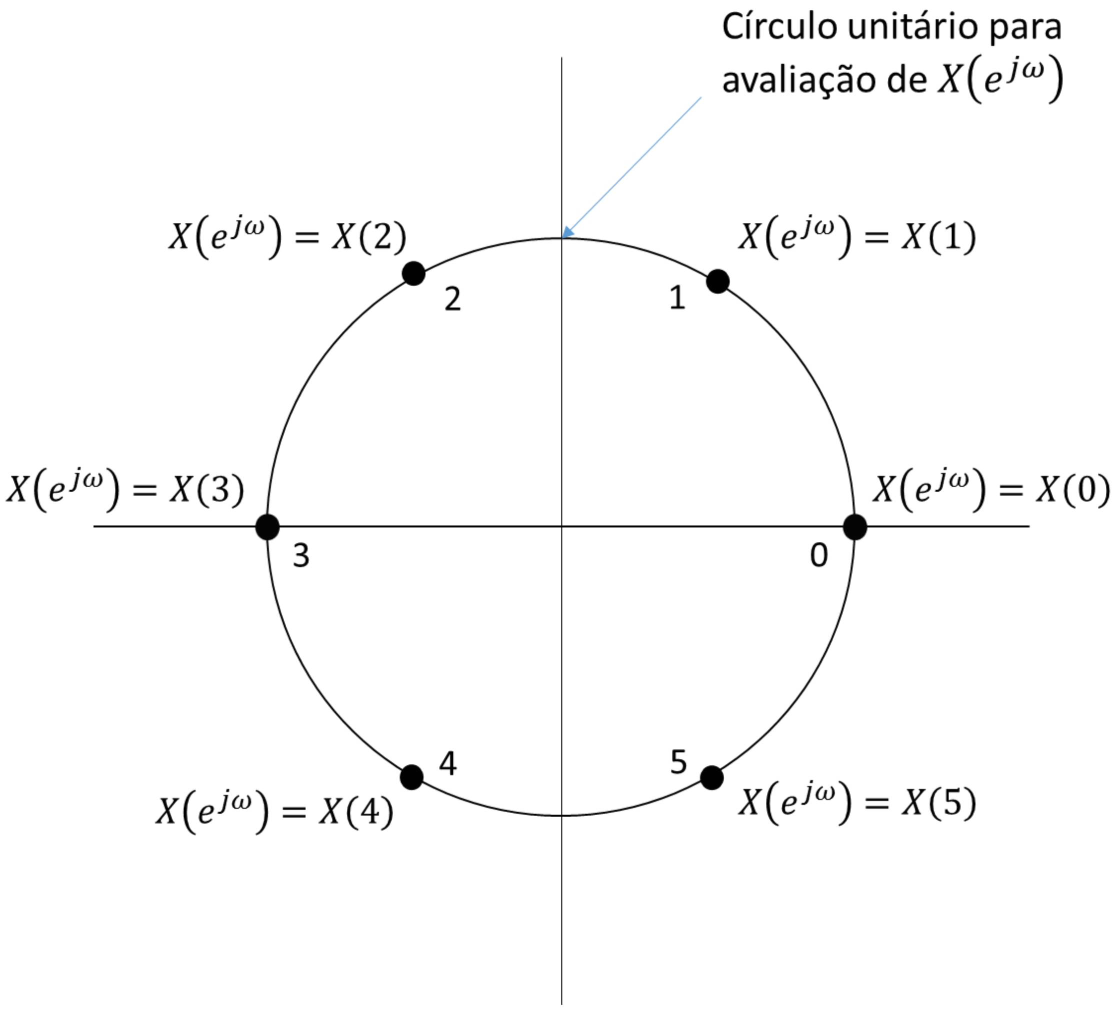
$$X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=(2\pi/N)k} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j(2\pi k/N)n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j(2\pi/N)nk} = X(k)$$

Transformada Discreta de Fourier - DFT

Dado que $X(e^{j\omega})$ é uma função contínua de ω, em consequência, os valores da DFT $X(k)$, expressos por

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j(2\pi/N)nk}$$

são as amostras de $X(e^{j\omega})$ para valores de ω iniciando em $\omega = 0$, igualmente espaçados de $2\pi k/N$ unidades, conforme figura ao lado, em que é assumido $N = 6$.

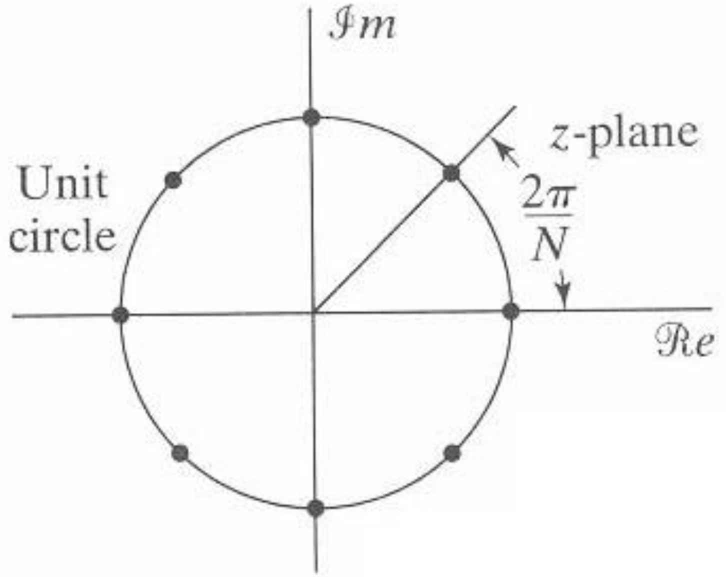


Transformada Discreta de Fourier - DFT

Conforme vimos quando estudamos Transformada $\mathcal{Z}$, o eixo $j\omega$ do plano s mapeia no círculo de raio unitário no plano z. Isto é, $z = \rho e^{j\theta}$, sendo $\rho = e^{\frac{\alpha}{fs}}$; $\theta = 2\pi \frac{f}{f_s}$.

Lembre que, se $\alpha = 0 \ \rightarrow \rho = 1$, definindo assim o círculo de raio unitário.

Note que os valores da sequência de amostras discretas $X(k)$ da Transformada Discreta de Fourier podem ser interpretados como pontos no círculo de raio unitário da Transformada $\mathcal{Z}$, em que $X(z)$ é amostrada a intervalos de $2\pi/N$.



Points on the unit circle at which $X(z)$ is sampled to obtain the periodic sequence $X[k]$ ($N = 8$).

Calculando a Transformada Discreta de Fourier – Séries Discretas de Fourier

- Para calcular numericamente a DFT, faz-se a amostragem da Transformada de Fourier de Tempo Discreto (DTFT), no domínio frequência.
- O desenvolvimento é feito a partir da análise de sequências periódicas.
- Sabemos, pela Análise de Fourier, que uma sequência periódica no tempo pode ser representada através de uma combinação linear de exponenciais complexas. Esta representação é denominada Série Discreta de Fourier.
- A Transformada Discreta de Fourier é uma extensão da Série Discreta de Fourier para sequências de duração finita.

Séries Discretas de Fourier

- Qualquer sinal periódico discreto no tempo, com período N, pode ser expresso como uma combinação linear de N funções exponenciais complexas, conforme

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi kn/N} \qquad (3)$$

onde $j = \sqrt{-1}$ e $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$

- Sendo conhecido o sinal $x(n)$, os coeficientes de Fourier podem ser calculados por

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N} \qquad (4)$$

- Os coeficientes de Fourier formam o espectro discreto de frequências $X(k)$ do sinal periódico discreto no tempo $x(n)$ de período N.

Séries Discretas de Fourier

- Note que os coeficientes de Fourier são geralmente complexos, provendo uma descrição do sinal no domínio frequência.

- O módulo e a fase dos coeficientes c_k representam a magnitude e a fase da componente espectral de $x(n)$ na frequência normalizada $\omega_k = 2\pi k/N$.

- Estes coeficientes de Fourier formam, portanto, o espectro discreto de frequências do sinal $x(n)$.

- A frequência normalizada ω_k pode ser desnormalizada se conhecermos a frequência de amostragem (f_s), ou $\omega_s = 2\pi/T$, onde $T = 1/f_s$ é o intervalo entre duas amostras consecutivas, e f_s é a frequência de amostragem.

- Como $0 \leq \omega_k \leq 2\pi$, a frequência normalizada ω_k assume valores no intervalo $0 \leq \omega_k \leq \omega_s$.

- A sequência de coeficientes c_k é periódica, com período N. Portanto, o espectro de frequências de um sinal periódico será também periódico.

Séries Discretas de Fourier

Para ilustrar, consideremos a sequência de período $N = 4$, definida em um período por

$$x(n) = \{0, \ 1, \ 1, \ 0\} \qquad n = 0, 1, 2, 3$$

Os coeficientes c_k são determinados a partir da equação (4), conforme

$$c_k = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x(n) e^{-j2\pi kn/4} \qquad k = 0, \ldots, 3$$

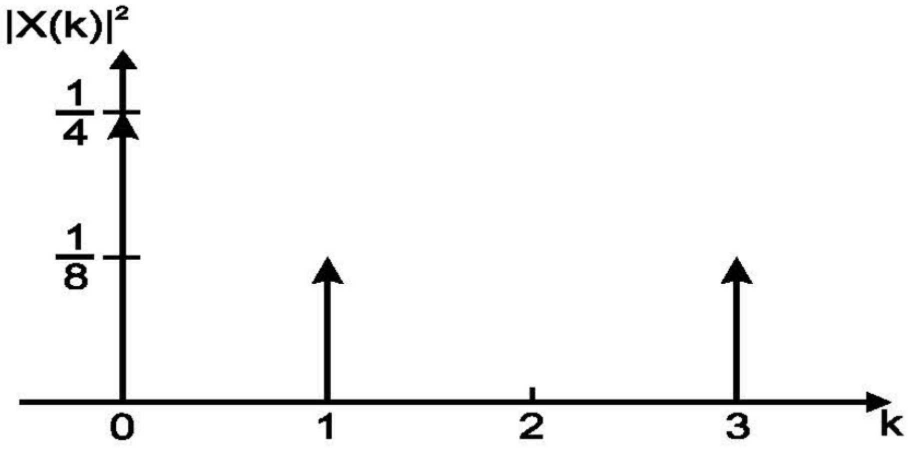
, assim, $c_k = \frac{1}{4}\left[x(1)e^{-j\pi k/2} + x(2)e^{-j\pi k}\right]$

$$c_0 = \frac{1}{4}[1+1] = \frac{1}{2}$$

$$c_1 = \frac{1}{4}\left[e^{-j\pi/2} + e^{-j\pi}\right] = \frac{1}{4}(-1-j)$$

$$c_2 = \frac{1}{4}\left[e^{-j\pi} + e^{-j2\pi}\right] = 0$$

$$c_3 = \frac{1}{4}\left[e^{-j3\pi/2} + e^{-j3\pi}\right] = \frac{1}{4}(-1+j)$$



A figura apresenta o quadrado da magnitude do espectro discreto $X(k)$ do sinal $x(n)$, representando a potência de cada componente espectral (analisadores de espectro usualmente apresentam as componentes espectrais em dBm, ou seja, potência).

Transformada Discreta de Fourier

- Quando um sinal ou uma sequência de tempo discreto é não periódico, no entanto, não podemos usar Séries Discretas de Fourier para representá-lo.
- Nestes casos, a representação no domínio frequência é obtida através da Transformada Discreta de Fourier (DFT).

- Tal como acontece com a Série Discreta de Fourier, a DFT produz um conjunto de coeficientes, os quais são valores amostrados do espectro de frequência, a intervalos regulares.
- O número de amostras obtido depende do número de amostras presente na sequência temporal.

Transformada Discreta de Fourier

Uma sequência $x(n)$ discreta no tempo e não periódica é transformada em uma sequência $X(k)$ através da DFT, ou seja,

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N} \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1 \qquad (5)$$

A equação para determinação de $X(k)$ define uma DFT de N pontos, em que a sequência $X(k)$ resultante é constituída por valores amostrados do espectro contínuo $X(e^{j\omega})$ de $x(n)$.

Por conveniência de notação, a equação (5) é usualmente representada na forma

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1 \quad \text{, onde} \quad W = e^{-j2\pi/N}$$

Transformada Discreta de Fourier

A Transformada Discreta de Fourier Inversa (IDFT) converte a sequência $X(k)$ de coeficientes de Fourier discretos na sequência $x(n)$ discreta no tempo, e é definida conforme

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j2\pi kn/N} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-kn} \quad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

Cabe notar que a expressão para determinação da DFT e a expressão para determinação da IDFT são muito semelhantes, diferindo no sinal do expoente na IDFT (W_N^{-kn}) ao invés de W_N^{kn} na DFT, e pelo fator de escala $1/N$, facilitando o desenvolvimento de algoritmos e o projeto em *hardware.*

Transformada Discreta de Fourier – Direta e Inversa

As equações de análise e síntese da DFT são, portanto, descritas por

Análise

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j(2\pi/N)nk} \quad \text{ou} \quad X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \;,\; k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Síntese

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j(2\pi/N)nk} \quad \text{ou} \quad x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} \;,\; n = 0, 1, \ldots, N-1.$$

$$x(n) \longleftrightarrow X(k)$$

Note que $x(n)$ existe somente para $n = 0, 1, \ldots, N-1$ e que $X(k)$ existe somente para $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

Representação de Sequências de Duração Finita pela Transformada Discreta de Fourier

Uma sequência $x(n)$ de duração finita e N amostras é tal que $x(n)$ não existe (não é definida) fora do intervalo $0 \leq n \leq N-1$.

Em algumas situações, pode ser necessário considerar que a sequência tenha uma duração $M > N$. Para tanto, basta completar a sequência $x(n)$ com $(M-N)$ amostras de valor zero.

A cada sequência $x(n)$ de duração finita é possível associar uma nova sequência periódica, tal que

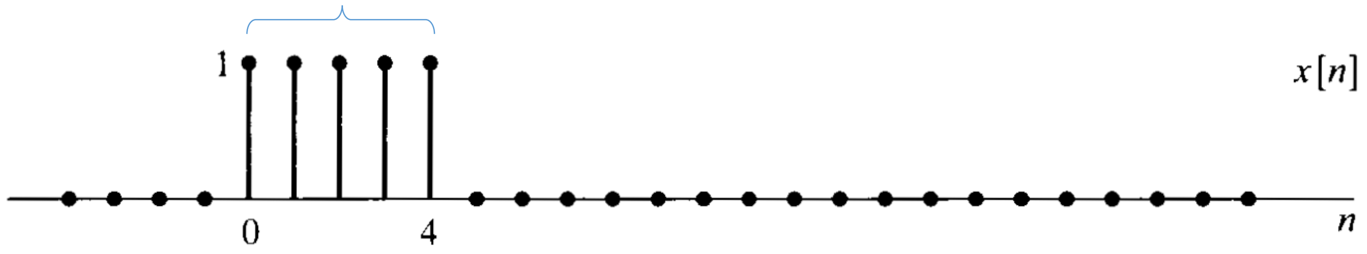
$$\tilde{x}(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n - rN).$$

A sequência de duração finita $x(n)$ pode ser recuperada a partir de $\tilde{x}(n)$, pela extração de um período, conforme

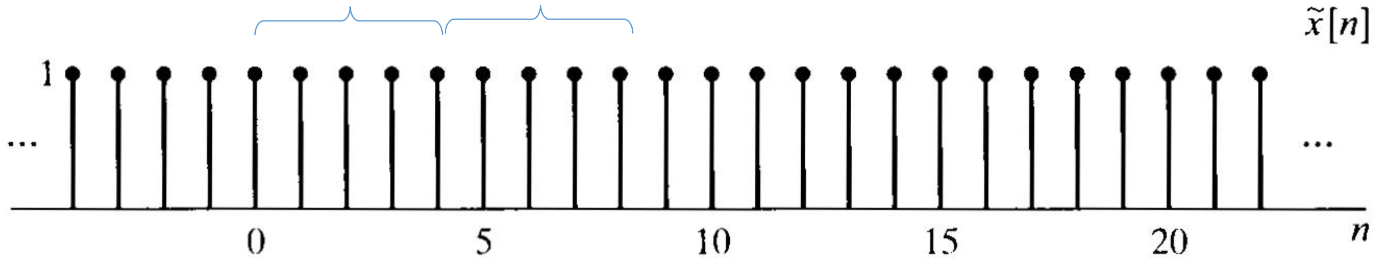
$$x(n) = \begin{cases} \tilde{x}(n), & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & em\ caso\ contrário \end{cases}$$

Representação de Sequências de Duração Finita pela Transformada Discreta de Fourier

- Para ilustrar a DFT de uma sequência de duração finita, consideremos a sequência $x(n)$, conforme figura (a) em que $N = 5$. (Note que, embora $x(n)$ não seja definida fora do intervalo $0 \leq n \leq 4$, a figura assume $x(n) = 0$ fora deste intervalo.)
- Para determinar a DFT, podemos considerar $x(n)$ como uma sequência com qualquer tamanho maior ou igual a $N = 5$.
- Considerando $x(n)$ com $N = 5$ amostras, a sequência $x(n)$ tornada periódica ($\tilde{x}(n)$) é conforme figura (b).



(a)



(b)

Representação de Sequências de Duração Finita pela Transformada Discreta de Fourier

Dado que a sequência formada tem valor constante no intervalo $0 \leq n \leq 4$, a DFT pode ser assim determinada

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{4} e^{-j(2\pi k/5)n}, \ k = 0, 1, \dots, 4.$$

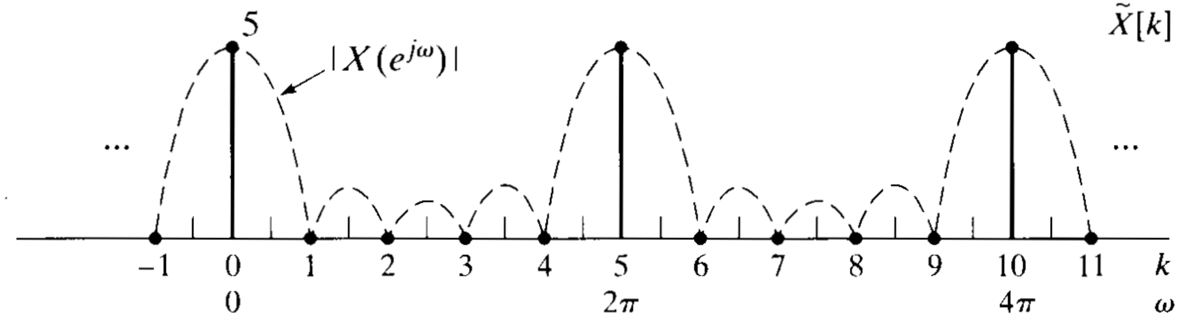
$$\tilde{X}(0) = \sum_{n=0}^{4} e^{0} = 5 \qquad \tilde{X}(1) = \sum_{n=0}^{4} e^{-j(2\pi/5)n} = 0 \qquad \tilde{X}(2) = \sum_{n=0}^{4} e^{-j(4\pi/5)n} = 0$$

$$\tilde{X}(3) = \sum_{n=0}^{4} e^{-j(6\pi/5)n} = 0 \qquad \tilde{X}(4) = \sum_{n=0}^{4} e^{-j(8\pi/5)n} = 0 \qquad \tilde{X}(5) = \sum_{n=0}^{4} e^{-j(2\pi)n} = 5 \quad \dots$$

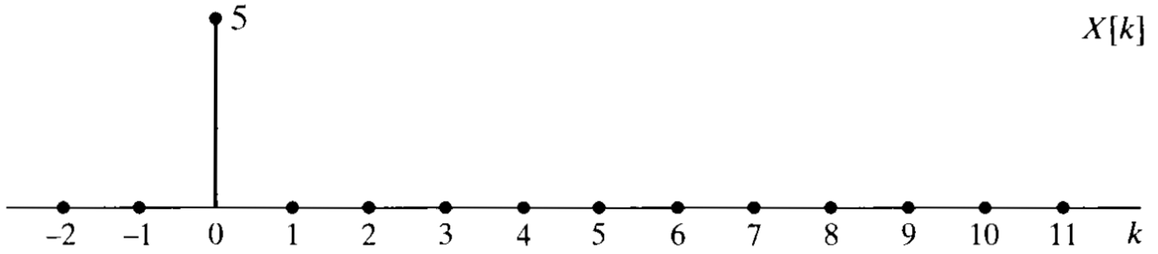
$$\tilde{X}(k) = \begin{cases} 5, & k = 0, \pm 5, \pm 10, \dots \\ 0, & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

Representação de Sequências de Duração Finita pela Transformada Discreta de Fourier

- A figura (c) apresenta os coeficientes da Série Discreta de Fourier de $\tilde{x}(n)$, e também a magnitude $\left|X(e^{j\omega})\right|$, para enfatizar que os coeficientes da Série Discreta de Fourier são amostras de $X\left(e^{j\omega}\right)$.
- Nota-se, na figura (c), que $\tilde{X}(k)$ é uma sequência de amostras de $X(e^{j\omega})$ para $\omega = 2\pi k/5$.
- A figura (d) apresenta a sequência $X(k)$, que é a DFT de cinco pontos de $x(n)$, e que corresponde a um período de $\tilde{X}(k)$.



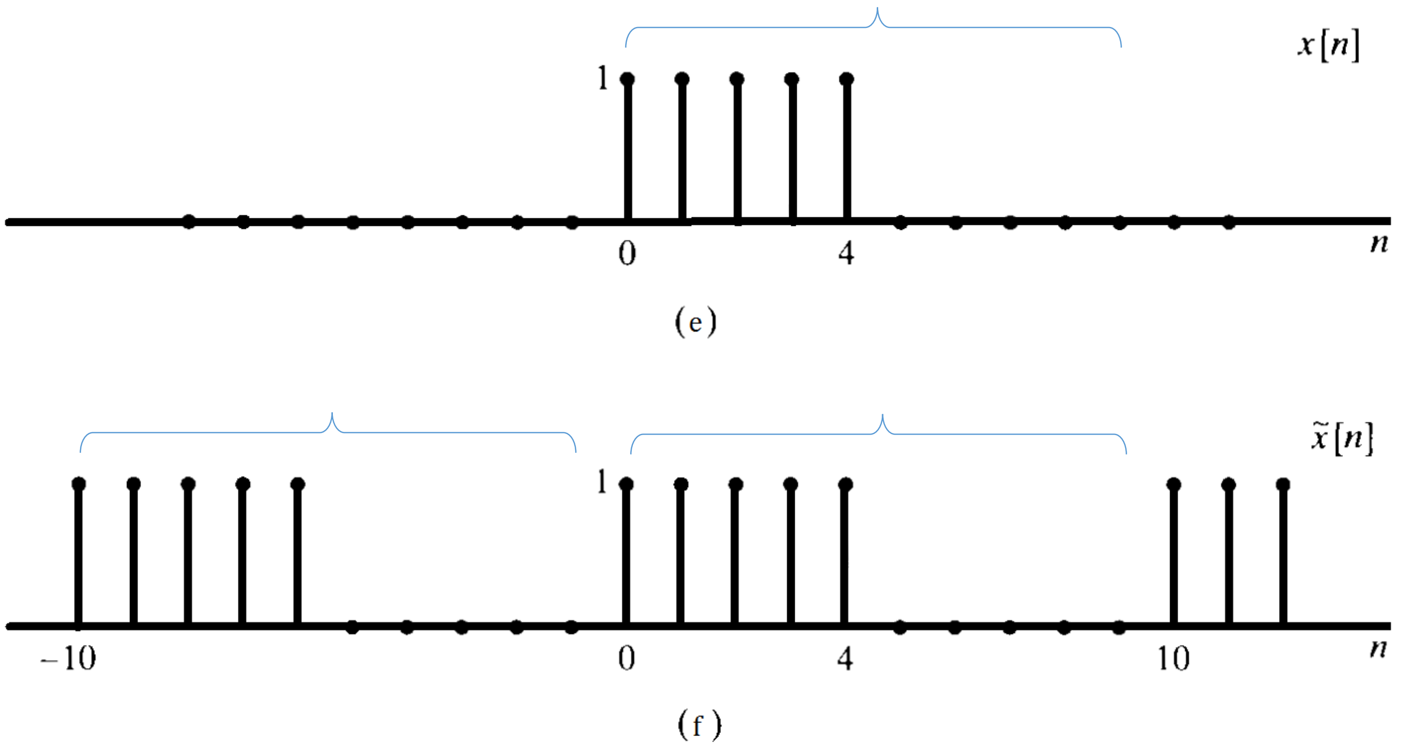
(c)



(d)

Representação de Sequências de Duração Finita pela Transformada Discreta de Fourier

- Se, ao invés de considerarmos $x(n)$ com $N = 5$ amostras, considerarmos $N = 10$, conforme figura (e), a sequência $x(n)$ tornada periódica ($\tilde{x}(n)$) é conforme figura (f).



Representação de Sequências de Duração Finita pela Transformada Discreta de Fourier

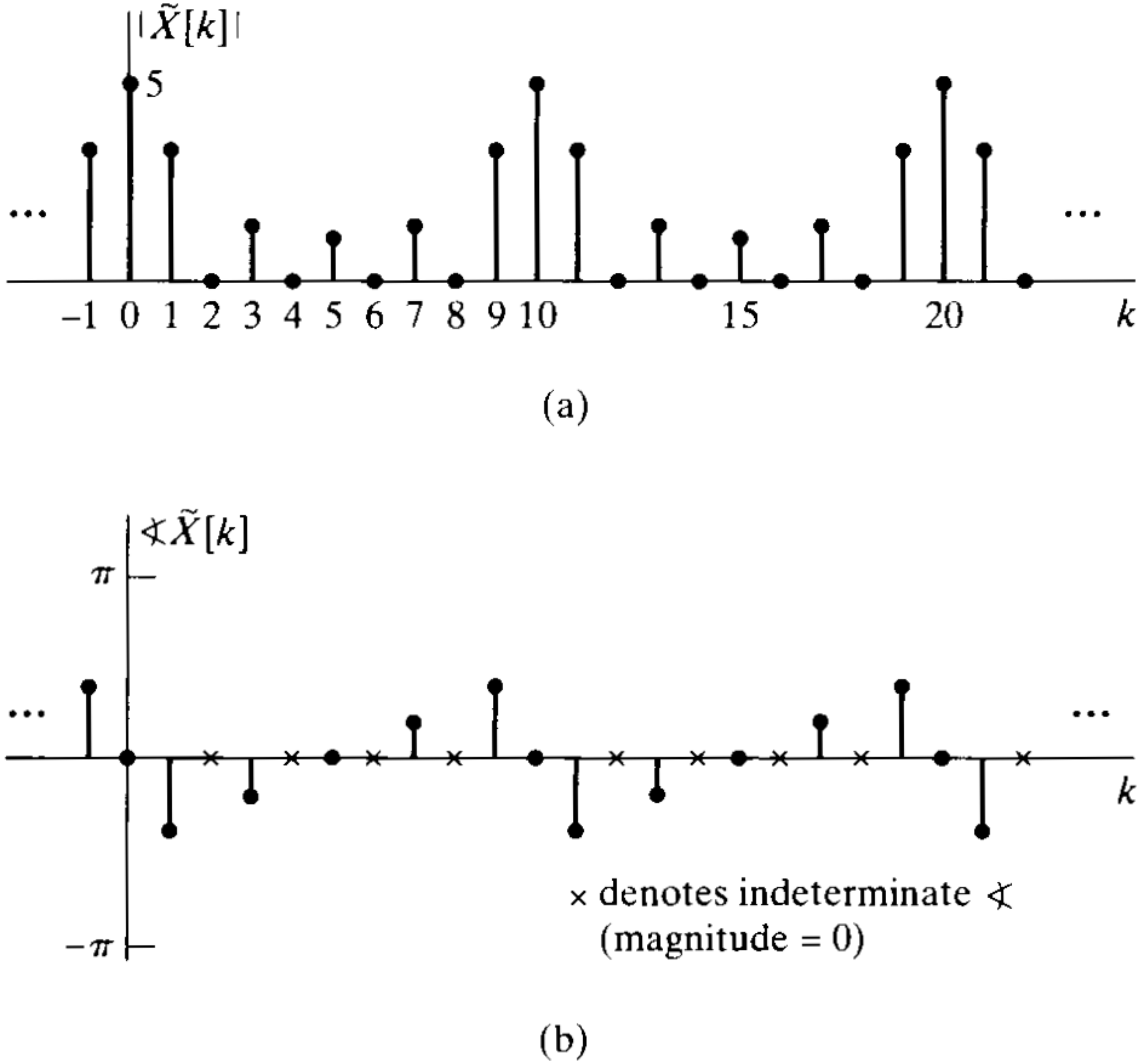
A DFT para $\tilde{x}(n)$ pode ser determinada conforme

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{4} e^{-j(2\pi k/10)n}\ , \ \ k = 0, 1, \dots, 9.$$

e, na forma fechada, pode ser assim expressa

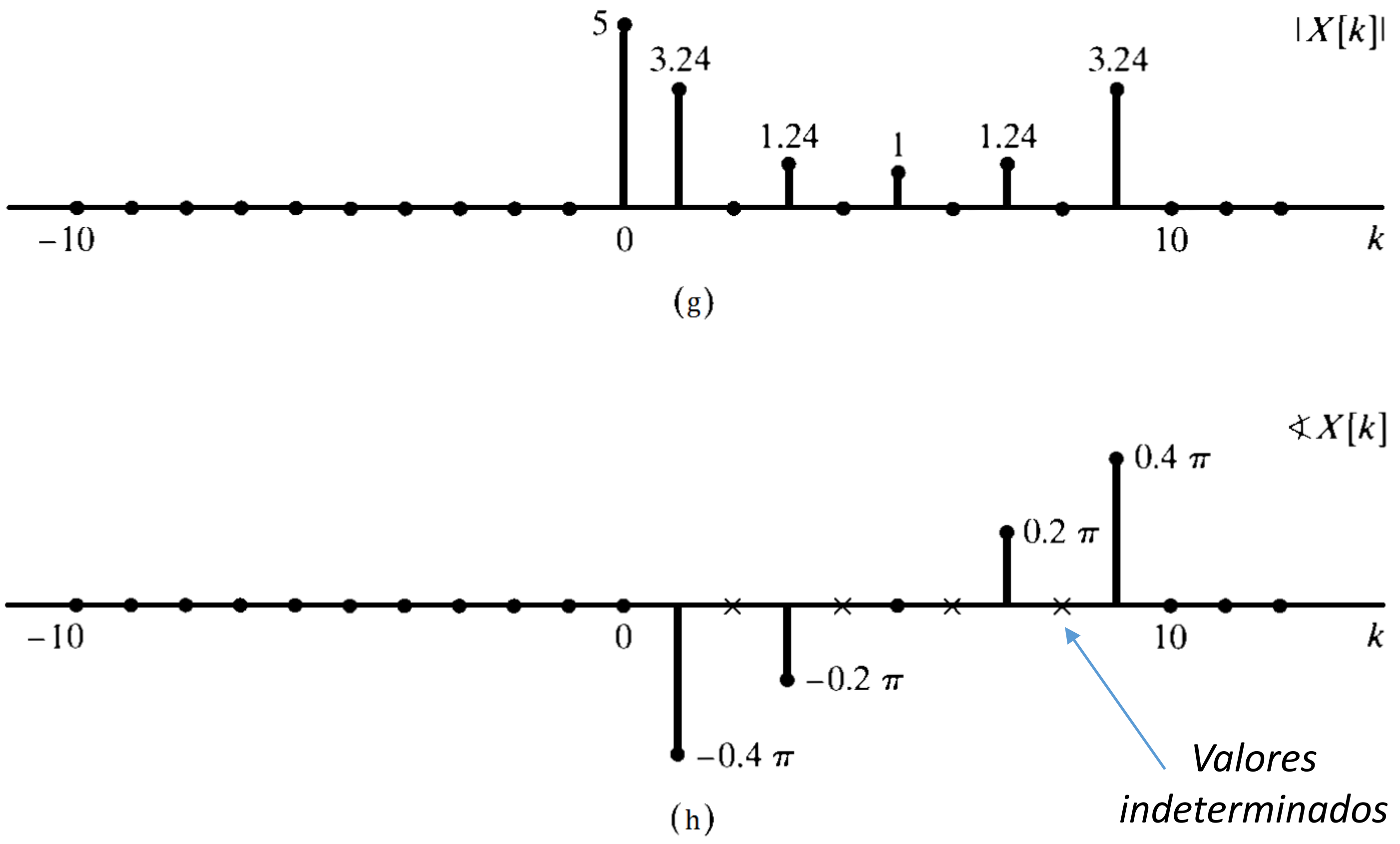
$$\tilde{X}(k) = e^{-j(4\pi k/10)} \frac{\sin(\pi k/2)}{\sin(\pi k/10)}$$

Na figura ao lado, o gráfico (a) apresenta a magnitude e o gráfico (b) apresenta a fase da sequência periódica $\tilde{X}(k)$ no domínio frequência discreto.



Representação de Sequências de Duração Finita pela Transformada Discreta de Fourier

- As figuras abaixo apresentam a DFT de 10 pontos $X(k)$, que corresponde a um período de $\tilde{X}(k)$.
- A figura (g) apresenta a magnitude da DFT e a figura (h) apresenta a fase da DFT.



Propriedades da DFT - Periodicidade

Se $x(n)$ e $X(k)$ são relacionadas pela DFT, conforme $x(n) \leftrightarrow X(k)$.

$$X(k+N) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N} e^{-j2\pi Nn/N} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N} = X(k)$$

$X(k)$ é periódica com período N, embora $x(n)$ seja aperiódica.

Propriedades da DFT - Linearidade

Se $x_1(n)$ e $x_2(n)$ são sequências de duração finita e com N amostras,

e $x_1(n) \leftrightarrow X_1(n)$ e $x_2(n) \leftrightarrow X_2(n)$,

então

$$x(n) = ax_1(n) + bx_2(n) \leftrightarrow X(k) = aX_1(k) + bX_2(k)$$

onde a e b são constantes arbitrárias.

Propriedades da DFT – Relação de Parseval

A relação de Parseval estabelece que a energia do sinal pode ser calculada no domínio tempo, a partir da sequência $x(n)$, ou através de seu espectro no domínio frequência, a partir da Transformada de Fourier $X(k)$.

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

Propriedades da DFT – Sequências Reais

Se $x(n)$ é real, então

$$x(n) = x^*(n) \qquad \text{e} \qquad X(k) = X^*(-k)$$

Isto é, a parte real de $X(k)$ é uma função par ou é simétrica sobre $k = 0$, e a parte imaginária é uma função ímpar.

Este tipo de simetria em $X(k)$ é denominada Simetria Hermitiana.

Propriedades da DFT – Convolução

Convolução no domínio do tempo torna-se uma multiplicação ponto-a-ponto no domínio frequência.

Se $x_1(n)$ e $x_2(n)$ são sequências de duração finita, ambas com N amostras, com DFTs $X_1(k)$ e $X_2(k)$, respectivamente, a convolução é definida por

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) \leftrightarrow X(k) = X_1(k)X_2(k)$$

Assim, uma operação de convolução pode ser executada realizando primeiro a DFT de cada sequência no tempo, obtendo o produto das DFTs e, em seguida, aplicando a DFT inversa ao resultado.

Esta operação é denominada convolução circular.

Propriedades da DFT – Deslocamento no tempo e em frequência

Um deslocamento (ou atraso) no domínio tempo é equivalente a uma multiplicação por uma exponencial complexa no domínio frequência.

$$x(n-m) \leftrightarrow W^{km} X(k) \qquad \boxed{W = e^{-j2\pi/N}}$$

Um deslocamento (ou atraso) no domínio frequência é equivalente a uma multiplicação da sequência no tempo por uma exponencial complexa.

$$W^{-h} x(n) \leftrightarrow X(k-1)$$

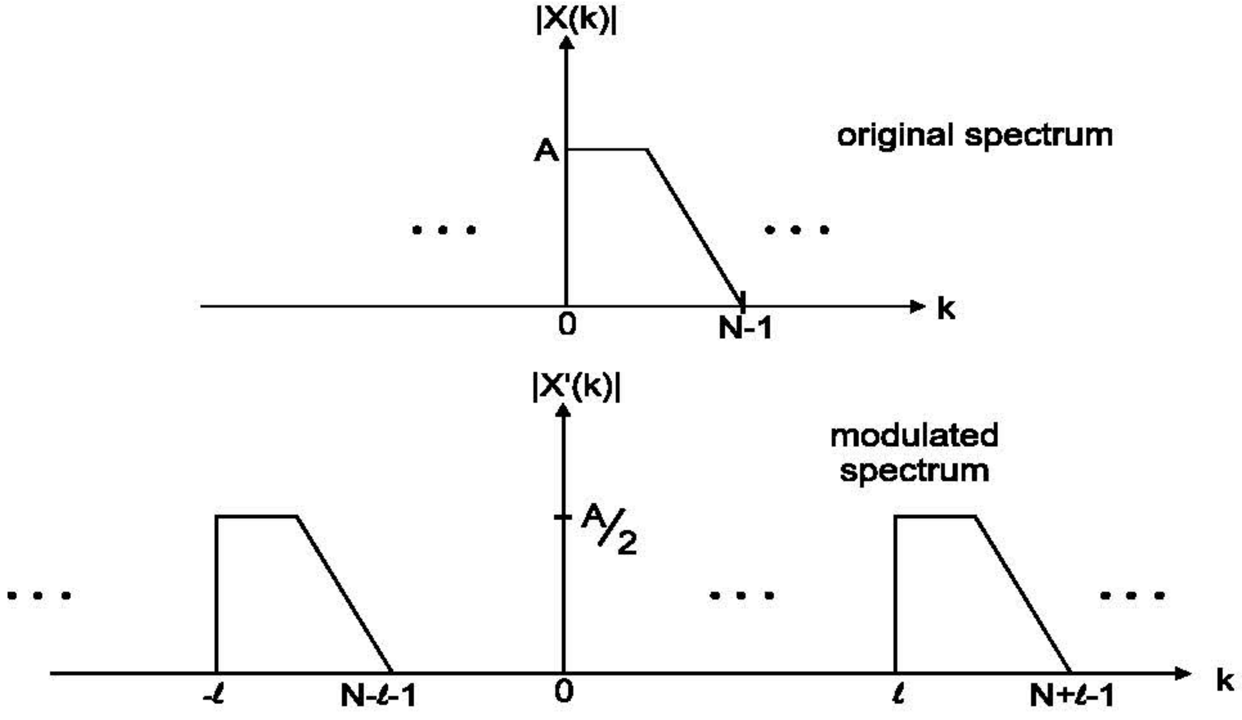
A multiplicação de uma sequência no tempo por uma exponencial complexa equivale a um deslocamento no espectro de frequências.

Propriedades da DFT – Modulação

Vimos que um deslocamento (ou atraso) no domínio frequência é equivalente a uma multiplicação da sequência no tempo por uma exponencial complexa.

$$W^{-h}x(n) \leftrightarrow X(k-1)$$

Se a função exponencial complexa for substituída por uma função senoidal real, a multiplicação no domínio tempo é equivalente à translação do espectro de frequências discreto conforme figura ao lado.



$$x(n)\cos(2\pi l n/N) \leftrightarrow \frac{1}{2}X(k+l) + \frac{1}{2}X(k-l)$$

Esta é a operação de modulação realizada em sistemas de comunicações.

Propriedades da DFT – Diferenciação do domínio frequência

Diferenciação no domínio da frequência está relacionada com a multiplicação do sinal no tempo por uma função rampa.

Esta propriedade é útil no cálculo do atraso de grupo de filtros digitais que estudaremos à frente.

$$nx(n) \leftrightarrow j\frac{\mathrm{d}X(\omega)}{\mathrm{d}(\omega)}$$

DFT de um impulso - Exemplo

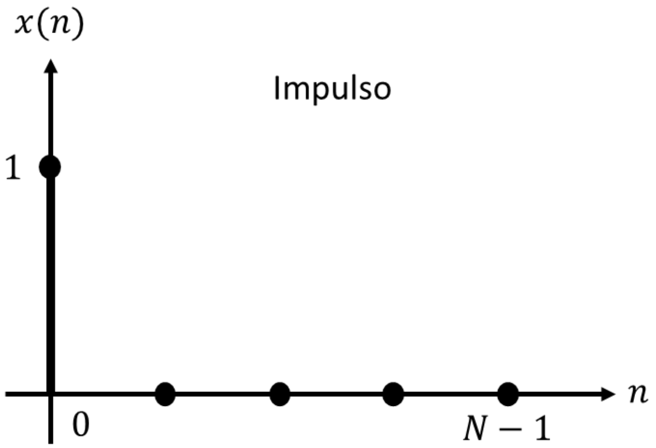
De acordo com a definição da DFT, $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j(2\pi/N)nk}$, $k = 0, 1, \dots, N-1.$

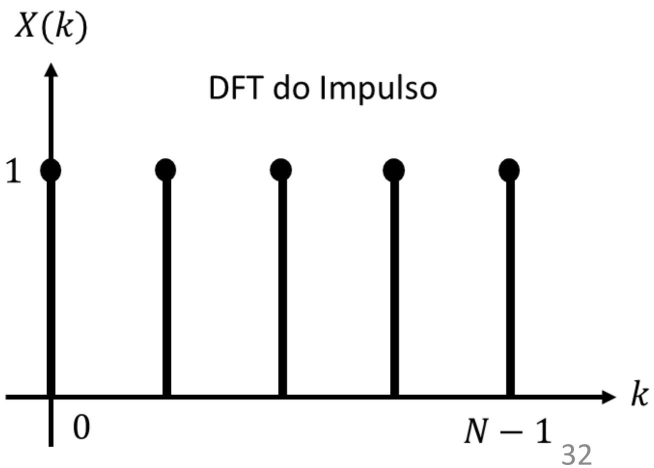
Substituindo $x(n) = \delta(n)$, obtemos $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n)\, e^{-j(2\pi/N)nk}$

Dado que $\delta(n) = 1$ para $n = 0$, e zero em todos os outros casos,

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n) e^{-j(2\pi/N)nk} = 1\, e^{-j(2\pi/N)(0)(k)} = 1, \;\; k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Note que este resultado não depende de N.





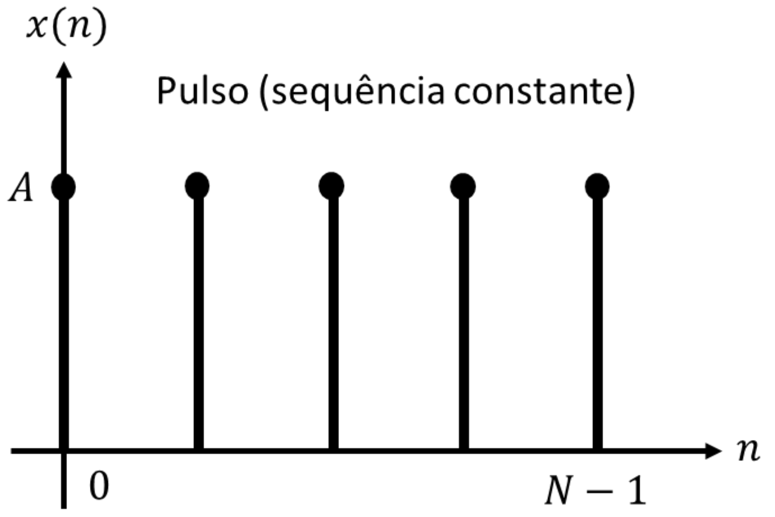
DFT de um pulso - Exemplo

De acordo com a definição da DFT,

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j(2\pi/N)nk}, \;\; k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Substituindo $x(n) = A$, para $n = 0, 1, \dots, N-1$ (pulso de duração N e amplitude A, conforme figura ao lado), obtemos

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} A\, e^{-j(2\pi/N)nk}, \;\; k = 0, 1, \dots, N-1.$$



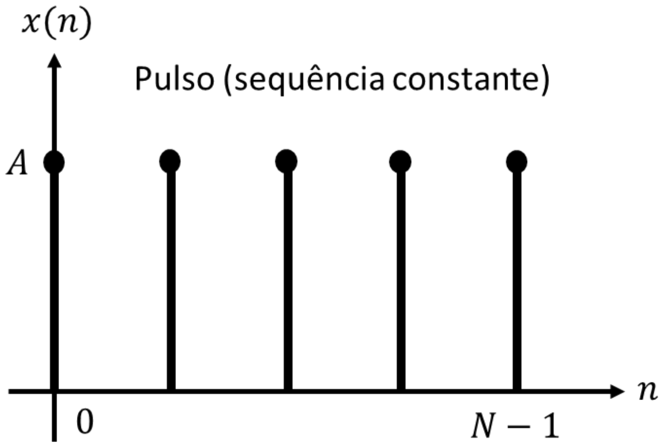
DFT de um pulso - Exemplo

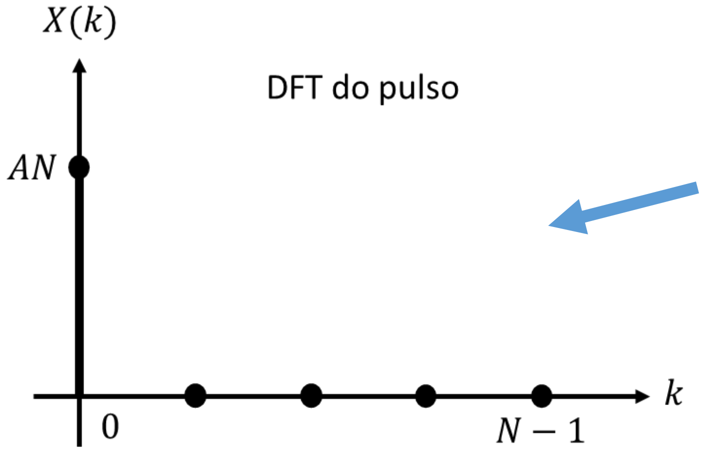
$$X(k=0) = \sum_{n=0}^{N-1} A\, e^{-j(2\pi/N)n(0)} = AN;$$

$$X(k \neq 0) = \sum_{n=0}^{N-1} A\, e^{-j(2\pi/N)nk} = A \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j(2\pi k/N)n} \quad , \; k = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Usando a expressão na forma fechada para a série geométrica finita, temos

$$X(k) = A\frac{1 - e^{-j\left(\frac{2\pi k}{N}\right)N}}{1 - e^{-j\left(\frac{2\pi k}{N}\right)}} = A\frac{1 - e^{-j2\pi k}}{1 - e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)k}} = 0\,, \; k = 1, 2, \ldots, N-1.$$ Assim, $X(k) = AN\delta(k)$.





Lembre que a DFT é a DTFT amostrada em N pontos (conforme vimos no slide 20).

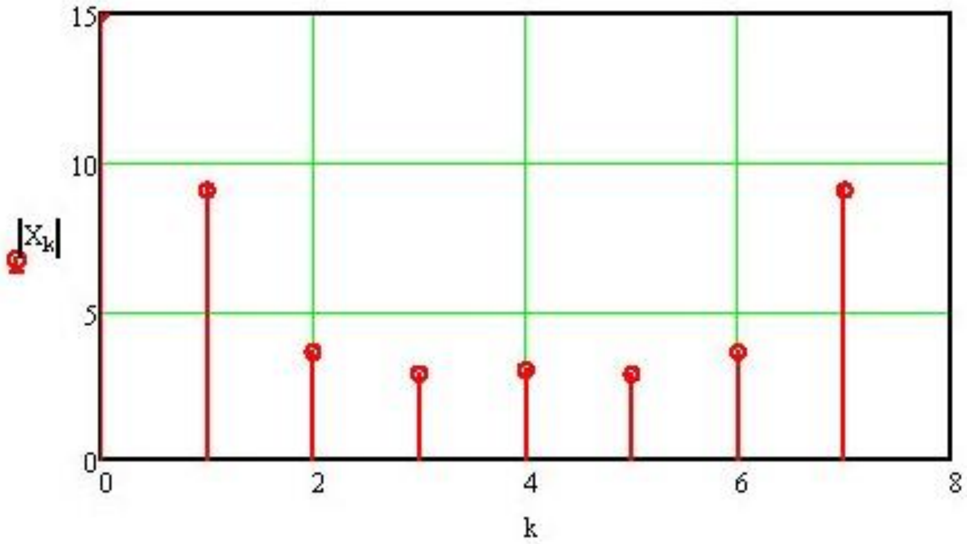
IDFT - Exemplo

Mediu-se a tensão $x(t)$ em um ponto de um circuito, utilizando-se para tanto um osciloscópio de armazenamento digital (*Digital Storage Oscilloscope* - DSO).

O osciloscópio digitalizou o sinal $x(t)$ e armazenou a sequência $x(n)$ resultante.

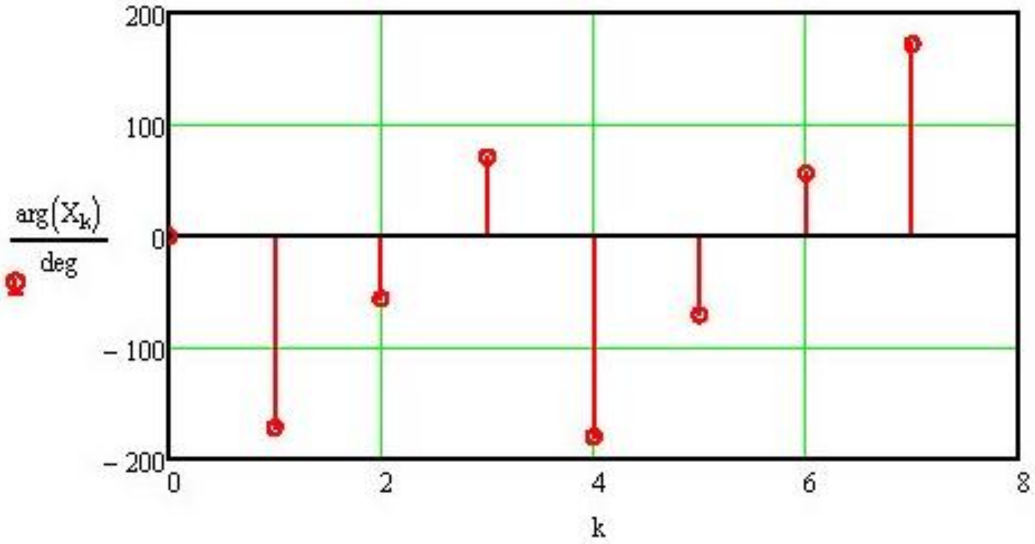
A seguir, utilizou-se a função DFT do osciloscópio, de modo a determinar o espectro $X(k)$ da sequência $x(n)$ através de $X(k) = DFT\{x(n)\}$.

Os gráficos mostrados na tela do osciloscópio para o módulo e a fase do espectro, bem como seus valores numéricos são mostrados nas figuras ao lado.



$|X_k| =$

15
9.043
3.606
2.869
3
2.869
3.606
9.043



$\arg(X_k) =$ °

0
-171.78
-56.31
70.667
-180
-70.667
56.31
171.78

IDFT - Exemplo

Pede-se:

a) Determine e plote a sequência $x(n)$ armazenada na memória do osciloscópio.

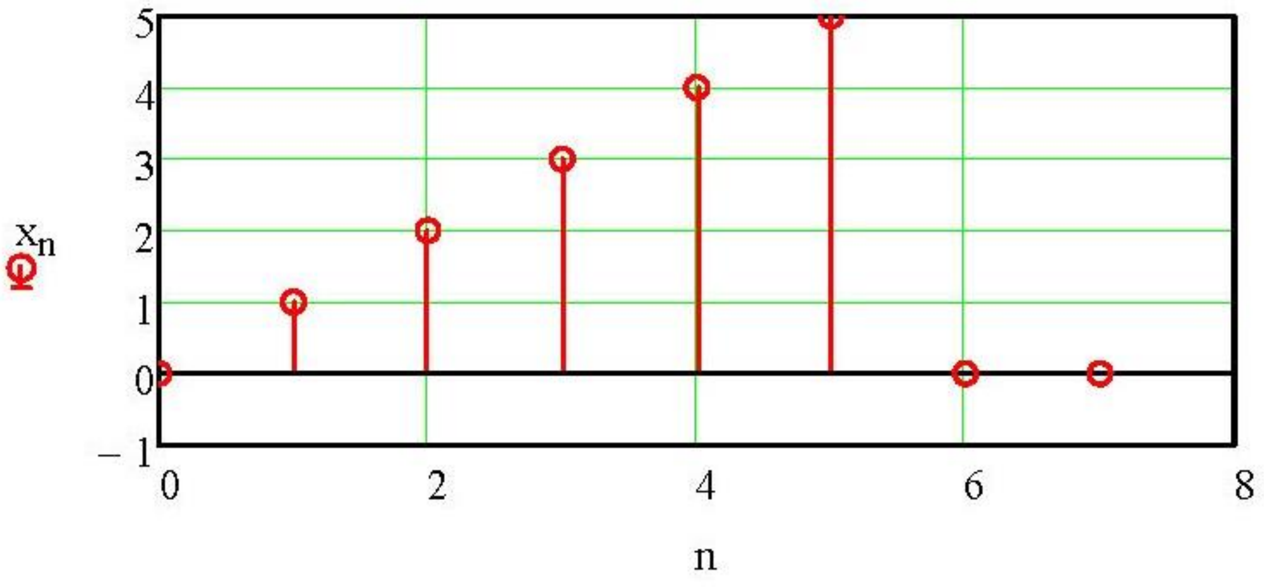
b) Sabendo que a frequência de amostragem utilizada na digitalização de $x(t)$ é $f_s = 256kHz$, determine as frequências analógicas f_s no intervalo de Nyquist, $\frac{-f_s}{2} \leq f_s \leq \frac{f_s}{2}$, que correspondem ao índice k das componentes espectrais discretas do espectro $X(k)$.

c) Sabendo que a DFT é a DTFT sub-amostrada em N pontos no intervalo $-\pi \leq \theta \leq \pi$, correspondendo a $\frac{-f_s}{2} \leq f_s \leq \frac{f_s}{2}$, sendo θ a frequência digital sobre o círculo de raio unitário $z = 1e^{j\theta}$ no plano z , plote novamente $X(k)$ identificando as frequências analógicas no eixo horizontal do gráfico de módulo e fase de $X(k)$.

a) Determine e plote a sequência $x(n)$ armazenada na memória do osciloscópio.

$N = 8 \qquad n := 0..N-1$

$$x_n := \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \left(X_k \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot n \frac{k}{N}} \right)$$



$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Sabendo que a frequência de amostragem utilizada na digitalização de $x(t)$ é $f_s = 256kHz$, determine as frequências analógicas f_s no intervalo de Nyquist, $\frac{-f_s}{2} \leq f_s \leq \frac{f_s}{2}$, que correspondem ao índice k das componentes espectrais discretas do espectro $X(k)$.

Dado que a DFT é a DTFT subamostrada em N pontos no intervalo $-\pi \leq \theta \leq \pi$, correspondendo a $\frac{-fs}{2} \leq fa \leq \frac{fs}{2}$

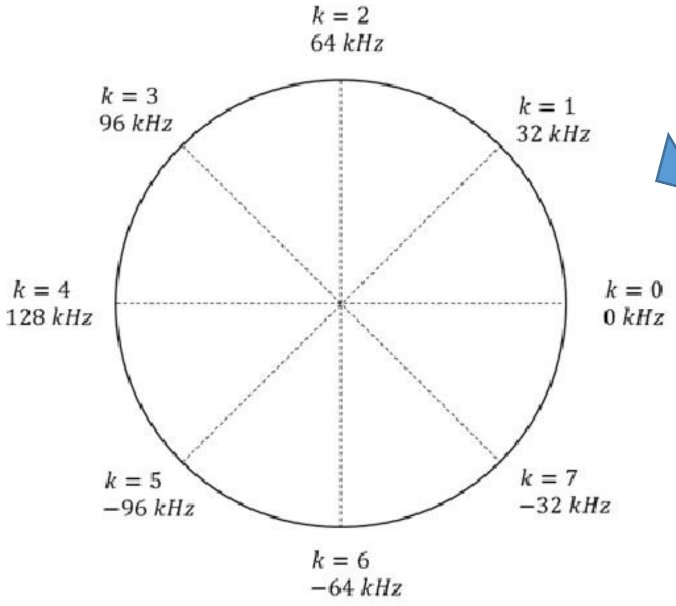
no mundo analógico, sendo θ a frequencia digital sobre o circulo de raio unitário $z = 1e^{j \cdot \theta}$ no plano Z, temos:

$$\theta = \pi \quad \rightarrow \quad fa := \frac{fs}{2} \qquad fa = 128 \cdot KHz \quad \rightarrow \quad k := \frac{N}{2} \qquad k = 4$$

A correspondência acima entre θ, fa e k na frequencia $fa = \frac{fs}{2}$ pode ser generalizada para :

$$fa(k) := \text{if}\left[\left(k \leq \frac{N}{2}\right), k \cdot \frac{fs}{N}, (k - N) \cdot \frac{fs}{N}\right]$$

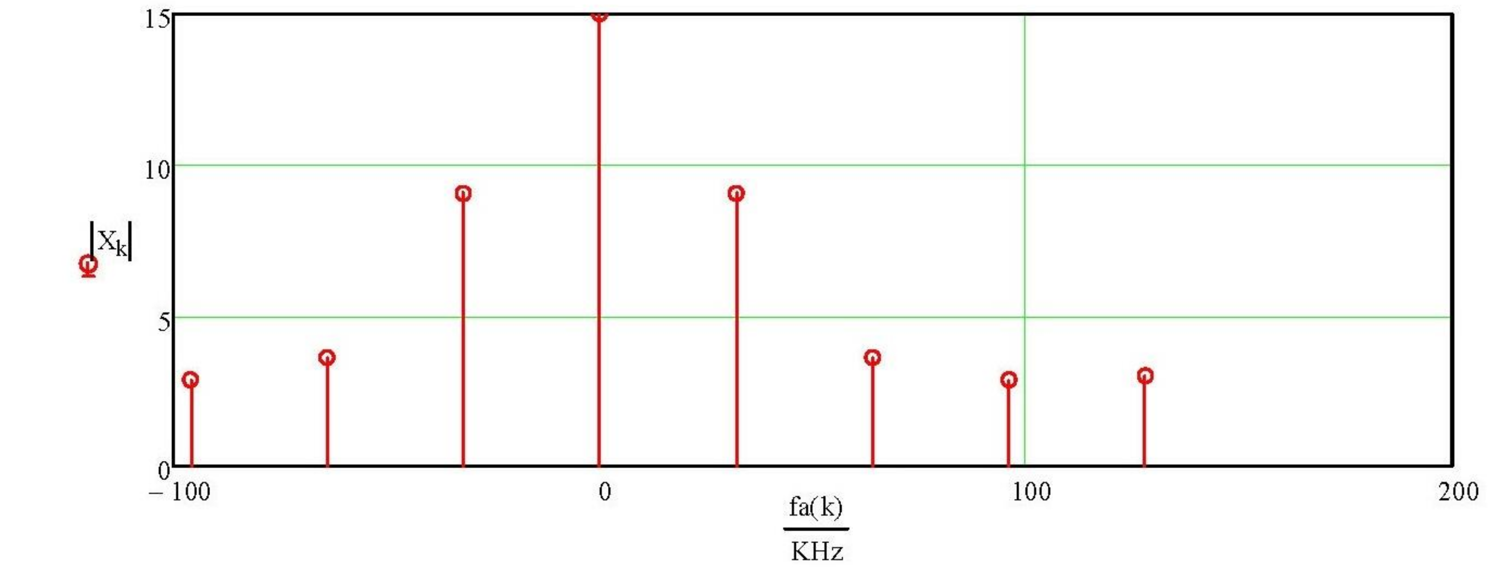
k =	fa(k) = · KHz
0	0
1	32
2	64
3	96
4	128
5	-96
6	-64
7	-32

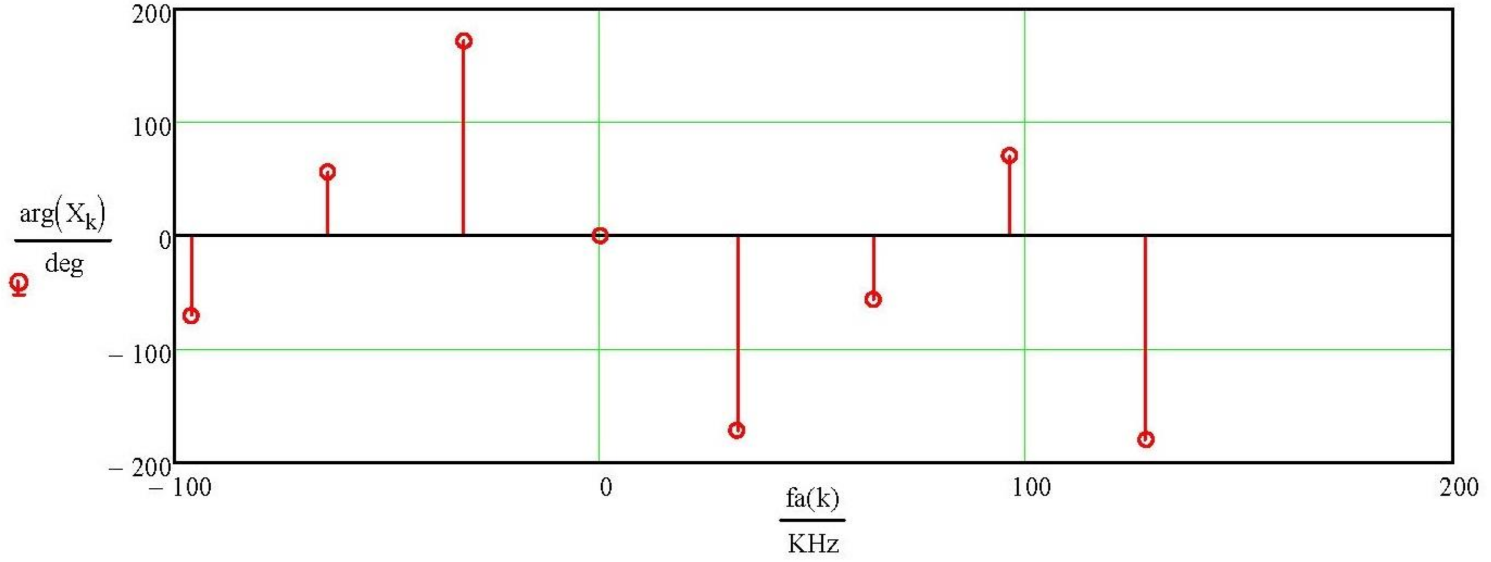


Círculo de raio unitário no plano z

c) Sabendo que a DFT é a DTFT sub-amostrada em N pontos no intervalo $-\pi \leq \theta \leq \pi$, correspondendo a $\frac{-f_s}{2} \leq f_s \leq \frac{f_s}{2}$, sendo θ a frequência digital sobre o círculo de raio unitário $z = 1e^{j\theta}$ no plano z , plote novamente $X(k)$ identificando as frequências analógicas no eixo horizontal do gráfico de módulo e fase de $X(k)$.

Com base nos resultados de (b), temos:





Transformada Rápida de Fourier

- A DFT é uma transformada com elevado custo computacional. Em geral, uma DFT requer N multiplicações complexas e $(N-1)$ adições complexas.
- A Transformada Rápida de Fourier – FFT foi desenvolvida por Cooley e Tukey em 1960 para resolver o problema do custo computacional da implementação da DFT.
- A ideia básica é reescrever a equação da DFT em duas partes:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n)W_{\mathrm{N}}^{\mathrm{2nk}} + W^{\mathrm{k}} \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1)W_{\mathrm{N}}^{\mathrm{2nk}} \qquad k = 0,1,\ldots,N-1$$

$$= X_1(k) + W_{\mathrm{N}}^{\mathrm{k}} X_2(k)$$

$N = 2^r$, com r sendo um inteiro positivo.

A primeira parte, $X_1(k)$, é a DFT da sequência par, e a segunda parte, $X_2(k)$, é a DFT da sequência ímpar.

$$X_1(k) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(2n)W_{\mathrm{N}}^{\mathrm{2kn}} = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(2n)W_{\mathrm{N/2}}^{\mathrm{kn}} \qquad X_2(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1)W_{\mathrm{N}}^{\mathrm{2nk}}$$

Cabe notar que o fator W^{2nk} está presente em $X_1(k)$ e em $X_2(k)$, e precisa ser computado uma única vez.

Os coeficientes da DFT são obtidos combinando as DFTs das sequências par e ímpar, conforme

$$X(k) = X_1(k) + W_N^k X_2(k) \qquad \text{for} \quad k = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2} - 1$$

$$X\left(k + \frac{N}{2}\right) = X_1(k) - W_N^k X_2(k) \qquad \text{for} \quad k = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2} - 1$$

O fator complexo W_N^k é denominado fator de giro.

As subsequências são, então, novamente separadas em sequências pares e ímpares, até que resultem unicamente DFTs de dois pontos.

Cada DFT de $N/2$ pontos é obtida combinando duas DFTs de $N/4$ pontos.

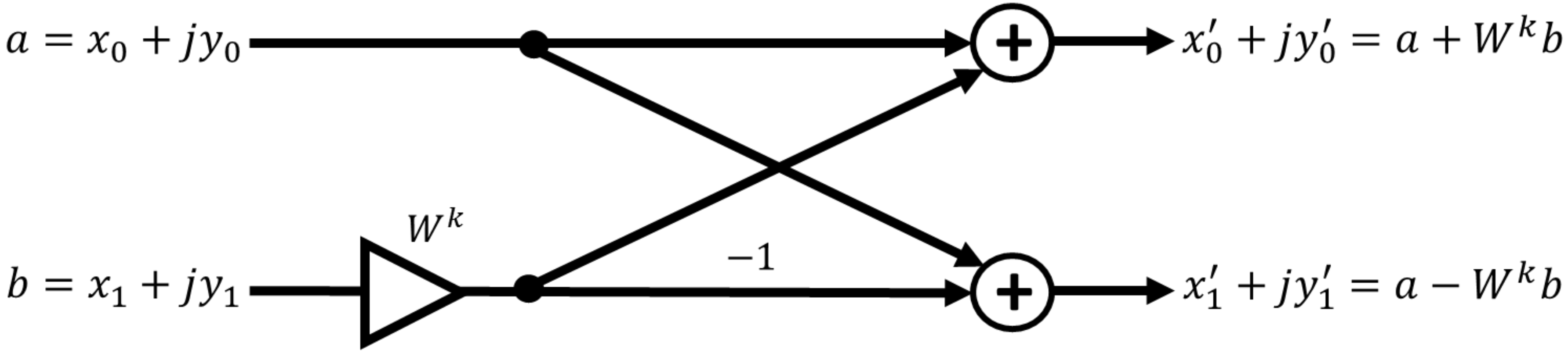
Cada DFT de $N/4$ pontos é obtida combinando duas DFTs de $N/8$ pontos, etc.

O total de etapas será r , dado que $N = 2^r$.

Transformada Rápida de Fourier

Computar a DFT de dois pontos é trivial.

A operação básica é ilustrada na figura a seguir.

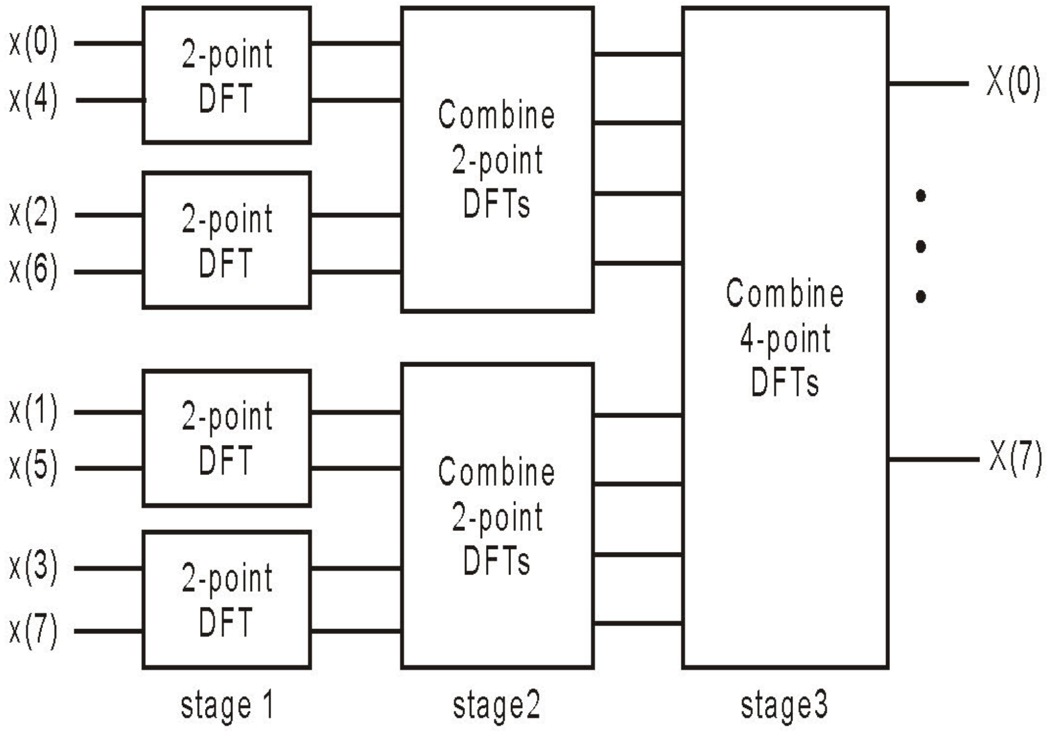


Este processo de decimação no tempo da FFT é denominado operação *butterfly*.

Este algoritmo é também referido como *FFT radix-2 decimation-in-time*.
Radix 2 refere-se ao fato de que DFTs de 2 pontos são o bloco computacional básico deste algoritmo.

Transformada Rápida de Fourier

- A figura a seguir ilustra os três estágios requeridos na computação de uma FFT por decimação no tempo de 8 pontos.
- Os fatores de giro são usualmente pré-computados e armazenados em memória.



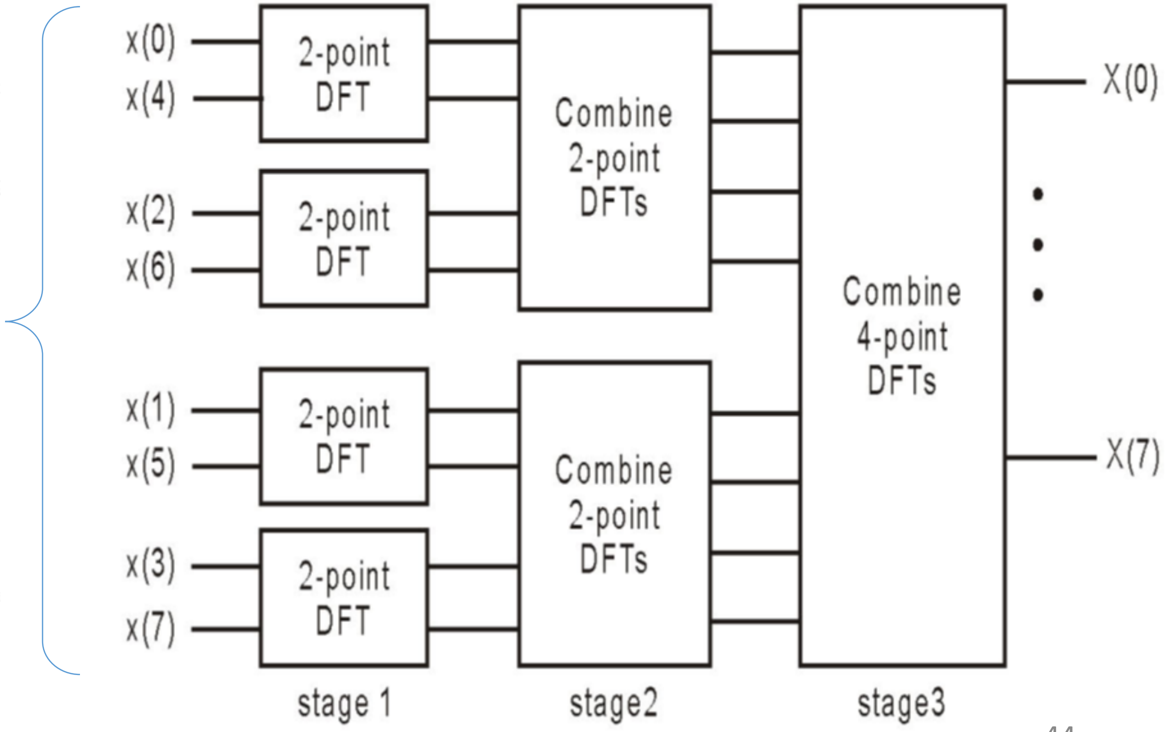
Transformada Rápida de Fourier

Para que os coeficientes da DFT sejam obtidos na ordem natural, a sequência de entrada deve ser reorganizada. Esse reordenamento é conhecido como reversão de bits (*bit reversal*).

O reordenamento é apresentado na figura a seguir.

Note que a representação binária do índice da sequência é reversa, conduzindo ao reordenamento da sequência.

Natural order	Binary form	Bit reversed	Reordered index
0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3
7	111	111	7



A adoção da FFT representa uma redução na complexidade computacional substancial, especialmente quando N é grande.

Uma FFT de N pontos consiste em executar $N/2$ *butterflies* por estágio, com $\log_2 N$ estágios. Cada *butterfly* implica em uma multiplicação complexa e duas adições complexas.

Assim, há um total de $\frac{N}{2}\log_2 N$ multiplicações complexas, em comparação com as N^2 multiplicações complexas necessárias para a para DFT, e $N\log_2 N$ adições complexas, em comparação com as $N(N-1)$ adições complexas necessárias para a DFT.

Transformada Rápida de Fourier

Uma outra versão do algoritmo *radix-2* em que a decimação é feita no domínio frequência é obtida particionando a sequência no tempo em duas metades, ao invés de particionar em sequências par e ímpar, conforme

$$
\begin{aligned}
X(k) &= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(n)W_{\mathrm{N}}^{\mathrm{kn}} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x(n)W_{\mathrm{N}}^{\mathrm{kn}} \\
&= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(n)W_{\mathrm{N}}^{\mathrm{kn}} + W_{\mathrm{N}}^{\mathrm{Nk/2}} \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n+\frac{N}{2})W_{\mathrm{N}}^{\mathrm{kn}} \\
&= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} \left[x(n) + (-1)^k x\left(n+\frac{N}{2}\right)\right] W_{\mathrm{N}}^{\mathrm{kn}}
\end{aligned}
$$

A sequência de coeficientes $X(k)$ da FFT pode, então, ser particionada em uma sequência par e uma sequência ímpar, da forma

$$X(2k) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} g_1(n) W_{N/2}^{kn}$$

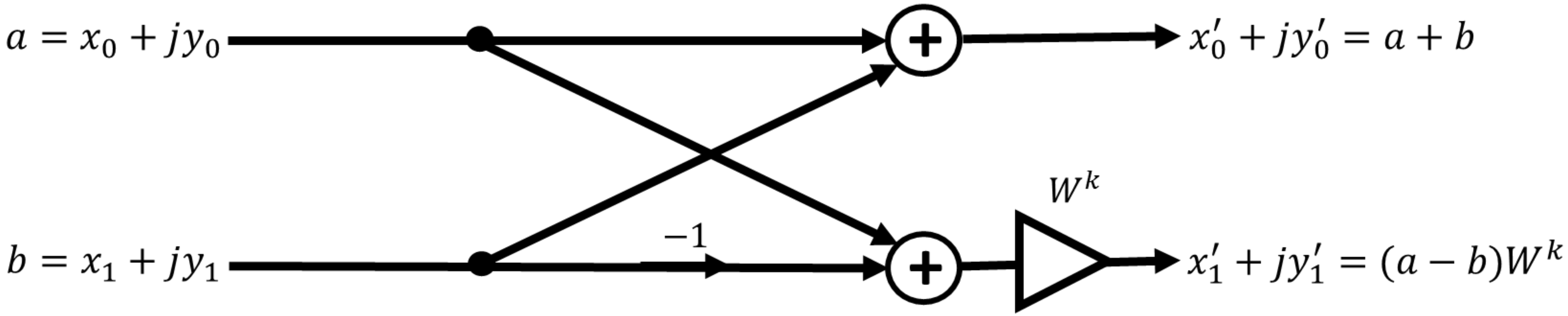
$$X(2k+1) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} g_2(n) W_{N/2}^{kn}$$

onde

$$g_1(n) = x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right)$$

$$g_2(n) = \left[x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right)\right] W_N^n \qquad n = 0, 1, \ldots., (N/2) - 1$$

A determinação das sequências $g_1(n)$ e $g_2(n)$ envolve a operação *butterfly* apresentada na figura que segue.



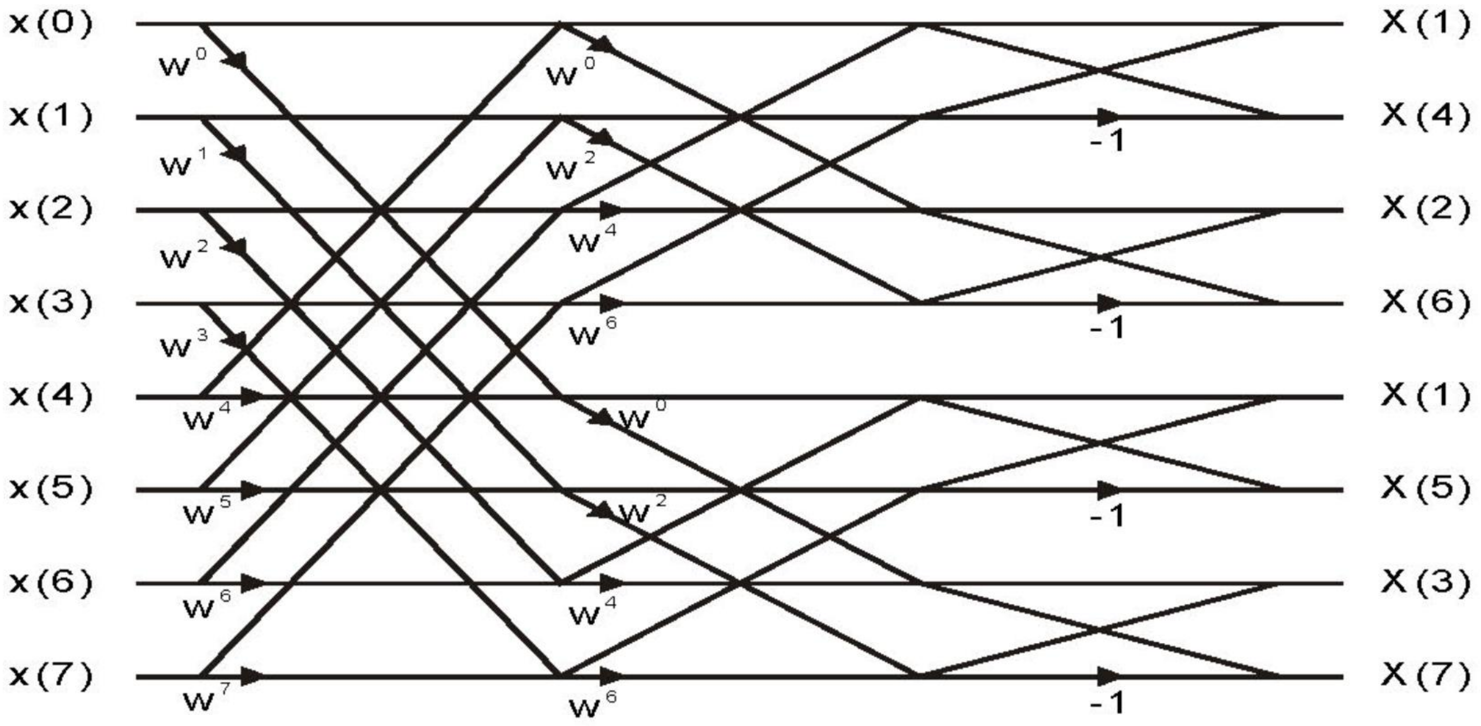
A operação é semelhante à *butterfly* para o algoritmo por decimação no tempo, exceto quanto à posição do fator de giro.

Transformada Rápida de Fourier

As sequências de coeficientes pares e ímpares são divididas em duas metades, e o mesmo procedimento é repetido até que sejam necessárias apenas DFTs de 2 pontos.

A figura ao lado apresenta os três estágios de uma FFT de 8 pontos de *radix*-2 com decimação em frequência.

Note que a sequência no tempo aparece em sua ordem natural, enquanto que a saída da FFT ocorre em ordem reversa.



A complexidade computacional é idêntica à do algoritmo por decimação no tempo.