LÓGICA FUZZY	Mª CRISTINA FELIPPETTO DE CASTRO	FL & GA 14 05 03

LÓGICA FUZZY

I. INTRODUÇÃO

II. NOÇÕES BÁSICAS E CONCEITOS DE FUZZY SETS

III. OPERAÇÕES COM FUZZY SETS

IV. RELAÇÕES FUZZY

V. NÚMEROS FUZZY

VI. VARIÁVEIS LINGÜÍSTICAS

FUNDAMENTOS DE FUZZY SETS

VII. COMPUTAÇÃO BASEADA EM REGRAS

VIII. NEUROCOMPUTAÇÃO FUZZY → ANN

IX. COMPUTAÇÃO EVOLUCIONÁRIA FUZZY → GA

X. MODELAMENTO FUZZY

MODELOS COMPUTACIONAIS

FUZZY :

INDISTINTO

NEBULOSO

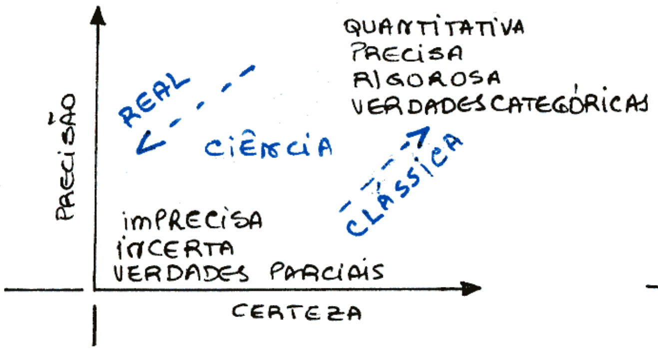
NÃO DELINEADO CLARAMENTE

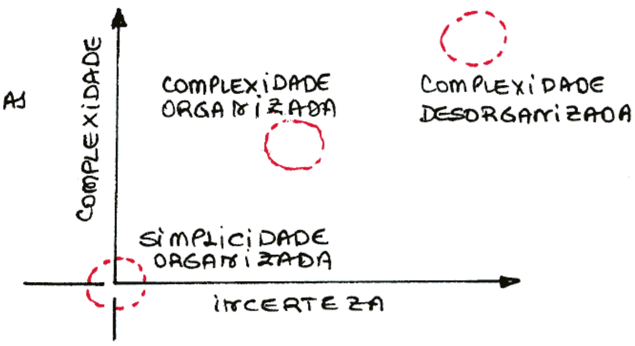
NÃO FOCADO

I. INTRODUÇÃO À LÓGICA FUZZY

"À MEDIDA QUE AS PROPOSIÇÕES MATEMÁTICAS SE REFEREM À REALIDADE, ELAS NÃO SÃO CERTAS; E À MEDIDA QUE SÃO CERTAS, ELAS NÃO SE REFEREM À REALIDADE". ALBERT EINSTEIN, 1928.

"DITO INFORMALMENTE, A ESSÊNCIA DO PRINCÍPIO DA INCOMPATIBILIDADE É QUE, À MEDIDA QUE A COMPLEXIDADE DE UM SISTEMA AUMENTA, NOSSA HABILIDADE DE FAZER AFIRMAÇÕES PRECISAS E SIGNIFICATIVAS SOBRE O SEU COMPORTAMENTO DIMINUI ATÉ UM LIMITE ALÉM DO QUAL PRECISÃO E RELEVÂNCIA SE TORNAM CARACTERÍSTICAS QUASE MUTUAMENTE EXCLUSIVAS". LOTFI ZADEH, 1973.





"UMA SEMENTE NÃO CONSTITUI UM MONTE DE SEMENTES, NEM 2 OU 3 ...
POR OUTRO LADO, 100 MILHÕES DE SEMENTES CONSTITUEM UM MONTE!
QUAL É O LIMITE APROPRIADO?
325647 SEMENTES NÃO CONSTITUEM, MAS 325648 CONSTITUEM?" BOREL, 1950.

PROBLEMA DA DICOTOMIA

DOGMA SIM/NÃO, V/F, ∅/1, ACEITA / REJEITA É ABOLIDO.

INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL / VIDA ARTIFICIAL

SOFTWARE INTELIGENTE → CAPACIDADE DE
- SE AUTO-REPLICAR
- APRENDER ADAPTATIVAMENTE
- CONTROLAR (DENTRO DE LIMITES) O AMBIENTE

INSPIRAÇÃO → BUSCAR EM SISTEMAS NATURAIS AS METÁFORAS PARA ATINGIR TAIS OBJETIVOS ATRAVÉS DO

MODELAMENTO
- DO CÉREBRO
- DO APRENDIZADO
- DA EVOLUÇÃO

TÉCNICAS PARA PROCESSAMENTO DE INFORMAÇÃO QUE SÃO COMPLEMENTARES NO PROJETO DE SISTEMAS INTELIGENTES:

FUZZY SETS
↓
TRATAM IMPRECISÃO
↓
BUSCAM MIMETIZAR A FORMA PELA QUAL O CÉREBRO LIDA COM INFORMAÇÕES IMPRECISAS

ARTIFICIAL NEURAL NETWORKS
↓
TRATAM APRENDIZAGEM
↓
SÃO MODELADAS DE ACORDO COM A ARQUITETURA FÍSICA DO CÉREBRO E BUSCAM MIMETIZAR AS TÉCNICAS DE FORMAÇÃO DOS "MAPAS DE CONHECIMENTO" CEREBRAIS

GENETIC ALGORITHMS
↓
TRATAM EVOLUÇÃO ← CARACTERÍSTICAS
↓
BUSCAM SIMULAR O PROCESSO DE EVOLUÇÃO NATURAL (SELEÇÃO, COMBINAÇÃO...) ← INSPIRAÇÃO NATURAL

FS & ANN: AMBOS APRIMORAM A INTELIGÊNCIA DE SISTEMAS QUE LIDAM COM INCERTEZA, IMPRECISÃO E RUÍDO.

ANN & GA: AMBOS EVOLUEM A PARTIR DE FUNÇÃO DE CUSTO.
- SISTEMA QUE UTILIZA ANN COMO APROX. DE FUNÇÕES E GA COMO OTIMIZADOR.
- SISTEMA QUE UTILIZA GA P/ EVOLUIR (ADAPTAR) OS PESOS SINÁPTICOS DE UMA ANN.

← SIMBIOSE →

NEURAL FUZZY SYSTEM:
UTILIZAM TÉCNICAS DE APRENDIZAGEM DAS ANNs PARA OBTER FUNÇÕES DE PERTINÊNCIA E REGRAS FUZZY MAIS ACURADAS P/ OS SISTEMAS FUZZY

FUZZY NEURAL NETWORKS:
ANNs COM ELEMENTOS "FUZIFICADOS"
APRENDEM O MAPEATO ENTRE FS DE ENTRADA E FS DE SAÍDA
FL PODE SER USADA P/ DETERMINAR O PASSO DE ADAPTAÇ DO ALGOR. DE APR.

FUZZY-NEURAL HYBRID SYSTEM:
TÉCNICAS DE FL — TAREFA 1 ↖ SISTEMA COMBINADO ↗ TÉCNICAS DE ANN — TAREFA 2

MCFC
FL
I.3

TEORIA DOS CONJUNTOS :

TRATA COLEÇÕES DE OBJETOS QUE COMPARTILHAM ALGUMA CARACTERÍSTICA OU PROPRIEDADE .

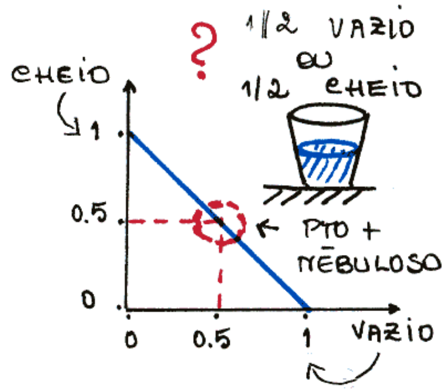
- n^{os} REAIS ,
- ROSEIRAS FLORIDAS EM UM JARDIM ,
- FRUTAS EM UMA CESTA , ...

CONJUNTOS INTRODUZEM A NOÇÃO DE DICOTOMIA , QUE IMPÕE UMA NOÇÃO BINÁRIA : SIM OU NÃO , TUDO OU NADA , PERTENCENTE OU NÃO PERTENCENTE A UMA CATEGORIA , ...

NA REALIDADE , EXISTEM SITUAÇÕES COMO :

- ROSEIRAS MUITO FLORIDAS EM UM JARDIM ,
- FRUTAS MADURAS EM UMA CESTA ,
- BAIXA TEMPERATURA ,
- PEQUENO ERRO ,
- RÁPIDA RESPOSTA DE UM SISTEMA , ...

CONSTITUEM CONJUNTOS ?



TEORIA DE CONJUNTOS NEBULOSOS :

TRATA CLASSES CUJOS LIMITES NÃO SÃO BEM DELIMITADOS .

→ ARITMÉTICA NEBULOSA
→ PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA NEBULOSA
→ GRAFOS NEBULOSOS
→ FUZZIFICAÇÃO DE TEORIAS CLÁSSICAS ...

A TEORIA DE CONJUNTOS NEBULOSOS INCLUI A LÓGICA NEBULOSA .

LÓGICA NEBULOSA :

SISTEMA LÓGICO QUE FORMALIZA O RACIOCÍNIO APROXIMADO .

→ VARIÁVEIS LINGÜÍSTICAS
→ REGRAS SE - ENTÃO ...

LÓGICA FUZZY CAPÍTULO II	Mª CRISTINA FELIPPETTO DE CASTRO	FL & GA 14 05 03

II. NOÇÕES BÁSICAS E CONCEITOS DE FUZZY SETS

→ IDÉIAS FUNDAMENTAIS DE CONJUNTOS NEBULOSOS OU FUZZY SETS.

→ NOÇÕES DA TEORIA ENVOLVIDA.

→ BASE PARA ANÁLISE E PROJETO DE SISTEMAS FUZZY.

NOÇÃO DE CONJUNTO:

– COLEÇÃO DE OBJETOS COM LIMITE BEM DEFINIDO.

NOÇÃO DE CONJUNTO NEBULOSO (OU FUZZY SET):

– COLEÇÕES CUJOS LIMITES NÃO SÃO CLARAMENTE DEFINIDOS.

II.1 CONJUNTOS E FUNÇÕES CARACTERÍSTICAS

O CONCEITO DE CONJUNTOS INTRODUZ A NOÇÃO INTUITIVA FUNDAMENTAL DE ACEITAR OU REJEITAR UM OBJETO COMO PERTENCENTE A UMA DADA COLEÇÃO (OU CATEGORIA).

O PROCESSO DE DICOTOMIA IMPÕE UMA DECISÃO BINÁRIA: TUDO OU NADA, 0 OU 1, VERDADEIRO OU FALSO, ...

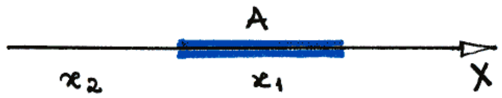


FIG. II.1: $x_1 \in A$; $x_2 \notin A$.

CONSIDERANDO O CONJUNTO A MOSTRADO NA FIGURA AO LADO, NO UNIVERSO X, PODE-SE AFIRMAR CLARAMENTE QUE O OBJETO (PONTO) x_1 PERTENCE AO CONJUNTO A, ENQUANTO x_2 NÃO PERTENCE.

SE DENOTARMOS A DECISÃO DE ACEITAÇÃO POR 1 E A DECISÃO DE REJEIÇÃO POR 0, PODE-SE EXPRESSAR A DECISÃO POR MEIO DE UMA FUNÇÃO CARACTERÍSTICA (OU FUNÇÃO DE PERTINÊNCIA) $A(x)$, $x \in X$, CONFORME:

$$A(x) = \begin{cases} 1, & \text{SE } x \in A \\ 0, & \text{SE } x \notin A \end{cases}$$

E

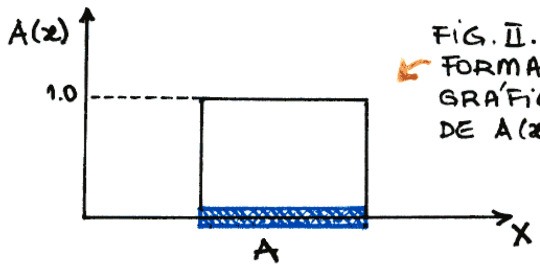


FIG. II.2: FORMA GRÁFICA DE A(x)

FORMA ANALÍTICA DE A(x)

- O CONJUNTO VAZIO ϕ TEM FUNÇÃO CARACTERÍSTICA NULA, $\phi(x) = 0$, $\forall x \in X$;
- O CONJUNTO UNIVERSO X TEM FUNÇÃO CARACTERÍSTICA UNITÁRIA, $X(x) = 1$, $\forall x \in X$;
- UM CONJUNTO QUE CONTENHA APENAS 1 ELEMENTO (a, POR EXEMPLO) $A = \{a\}$ TEM FUNÇÃO CARACTERÍSTICA:

$$A(x) = \begin{cases} 1, & \text{SE } x = a \\ 0, & \text{EM CASO CONTRÁRIO.} \end{cases}$$

A FUNÇÃO DE PERTINÊNCIA $A: X \to \{0,1\}$ INDUZ UMA RESTRIÇÃO COM LIMITES BEM DEFINIDOS SOBRE OS OBJETOS DO UNIVERSO X QUE PODEM SER ATRIBUÍDOS AO CONJUNTO A.

O CONCEITO DE CONJUNTOS FUZZY CONSISTE EM RELAXAR ESTE REQUERIMENTO E ADMITIR VALORES INTERMEDIÁRIOS DE CLASSES DE PERTINÊNCIA.

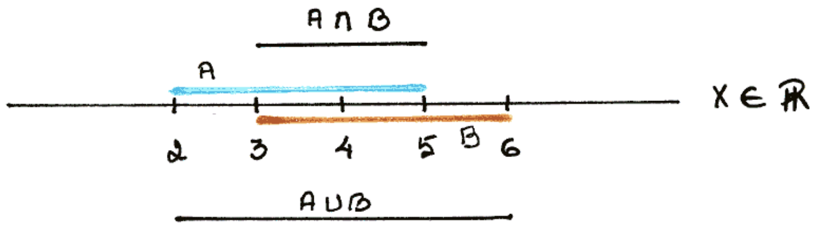
ESTE CONCEITO PERMITE UM CENÁRIO DE INTERPRETAÇÃO MAIS RICO E REALÍSTICO, ACOMODANDO AFIRMAÇÕES COM QUANTIFICAÇÕES PARCIAIS DE PERTINÊNCIA.

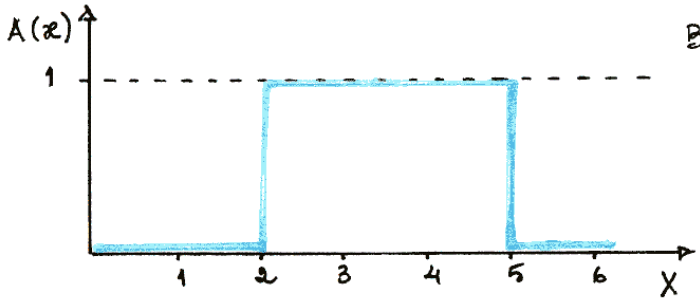
NOÇÕES COMO ALTA TEMPERATURA, MÉDIA PRESSÃO, VIZINHANÇA PRÓXIMA, BAIXA VELOCIDADE, ETC., REPRESENTAM CATEGORIAS USADAS PARA DESCREVER "OBJETOS DO MUNDO REAL" QUE NÃO POSSUEM LIMITES BEM DEFINIDOS.

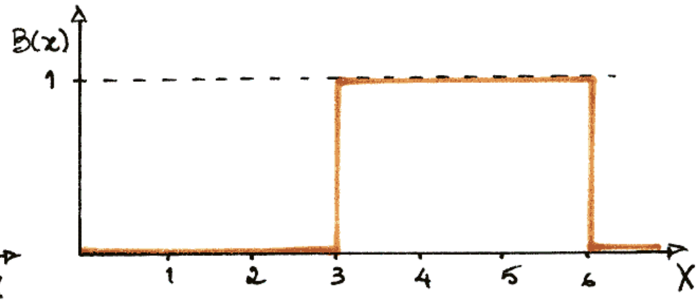
AS EXPRESSÕES EM VERDE IDENTIFICAM AS FONTES DE NEBULOSIDADE (FUZZYNESS: "FUZZYFICIDADE"!)

- SE UM OBJETO PERTENCE OU NÃO A TAL CATEGORIA É UMA QUESTÃO DE GRAU (DE PERTINÊNCIA), EXPRESSO, POR EXEMPLO, POR UM Nº REAL PERTENCENTE AO INTERVALO [0,1].
- QUANTO + PRÓXIMO DE 1, MAIOR O GRAU DE PERTINÊNCIA DO OBJETO À PARTICULAR CATEGORIA.

EXEMPLO II.1 : CONSIDERE OS CONJUNTOS $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 5\}$ E $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 6\}$, OS QUAIS MODELAM INTERVALOS SOBRE A RETA REAL $\mathbb{R}$. * DETERMINE AS FUNÇÕES CARACTERÍSTICAS DE A E B. * DETERMINE A UNIÃO, A INTERSECÇÃO E O COMPLEMENTO DOS CONJUNTOS A E B EM TERMOS DE SUAS FUNÇÕES CARACTERÍSTICAS.







$A : X \to \{0,1\}$ $\qquad$ $B : X \to \{0,1\}$

$$A(x) = \begin{cases} 1, & \text{SE } x \in A \\ 0, & \text{SE } x \notin A \end{cases} \qquad B(x) = \begin{cases} 1, & \text{SE } x \in B \\ 0, & \text{SE } x \notin B \end{cases}$$

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 5\} \qquad B = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 6\}$$

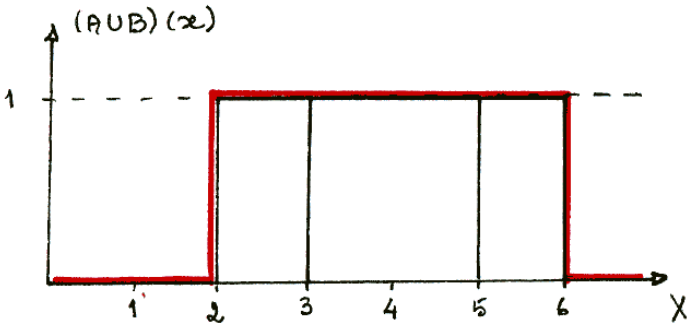
$$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 5\}$$

$$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 6\}$$

$$\bar{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid 5 < x < 2\}$$

$$\bar{B} = \{x \in \mathbb{R} \mid 6 < x < 3\}$$

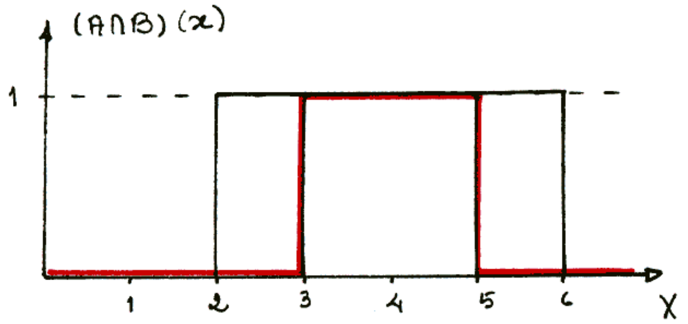
FUNÇÕES CARACTERÍSTICAS



$A \cup B : X \to \{0,1\}$

$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 6\}$

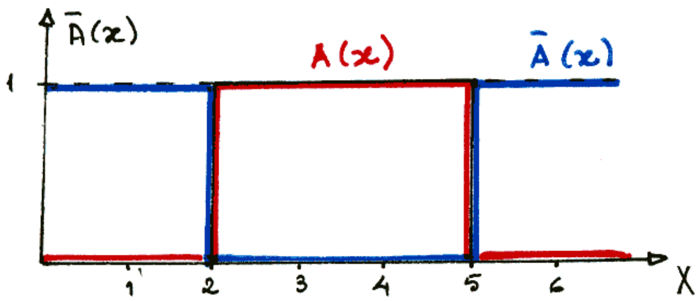
$$(A \cup B)(x) = \begin{cases} 1, & \text{SE } x \in (A \cup B) \\ 0, & \text{CASO CONTRÁRIO} \end{cases}$$



$A \cap B : X \to \{0,1\}$

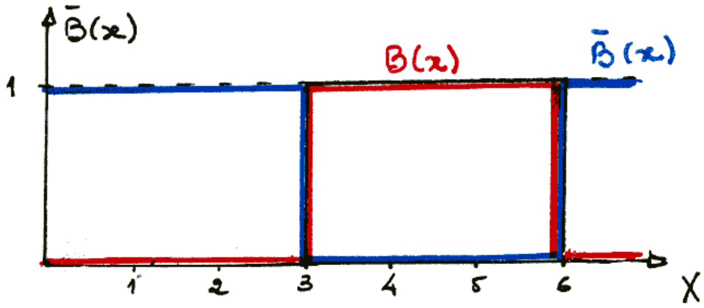
$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 5\}$

$$(A \cap B)(x) = \begin{cases} 1, & \text{SE } x \in (A \cap B) \\ 0, & \text{CASO CONTRÁRIO} \end{cases}$$



$\bar{A}(x) = 1 - A(x), \ \forall x \in X$

$A, \bar{A} : X \to \{0,1\}$



$\bar{B}(x) = 1 - B(x), \ \forall x \in X$

$B, \bar{B} : X \to \{0,1\}$

$(A \cup B)(x)$

$(A \cap B)(x)$

$\bar{A}(x)$

$\bar{B}(x)$

EXEMPLO II.2 : PARA OS CONJUNTOS A E B DO EXEMPLO II.1, COM FUNÇÕES DE PERTINÊNCIA DEFINIDAS POR :

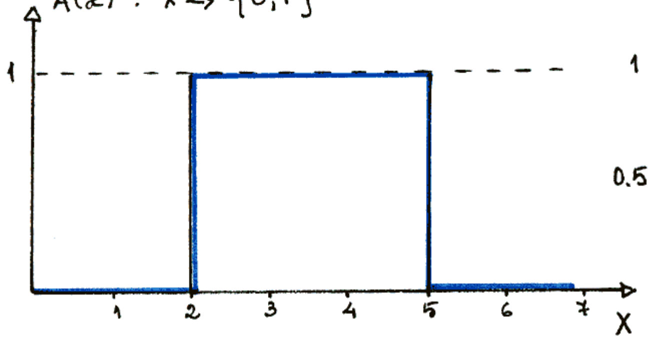
$$A(x) = \begin{cases} 1, & \text{SE } x \in A \\ 0, & \text{CASO CONTRÁRIO} \end{cases} \quad \text{E}$$

$$B(x) = \begin{cases} 0.5, & \text{SE } x \in B \\ 0, & \text{CASO CONTRÁRIO} \end{cases},$$

* DETERMINE A UNIÃO E A INTERSECÇÃO DOS DOIS CONJUNTOS EM TERMOS DE SUAS FUNÇÕES DE PERTINÊNCIA.

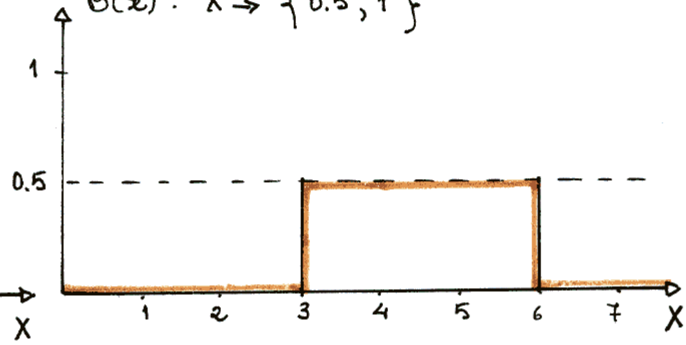
$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 5\}$

$A(x) : X \rightarrow \{0,1\}$

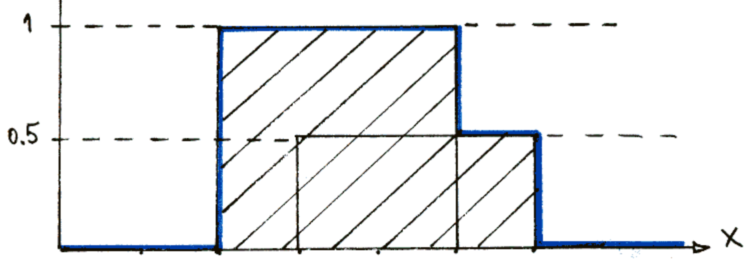


$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 6\}$

$B(x) : X \rightarrow \{0.5, 1\}$

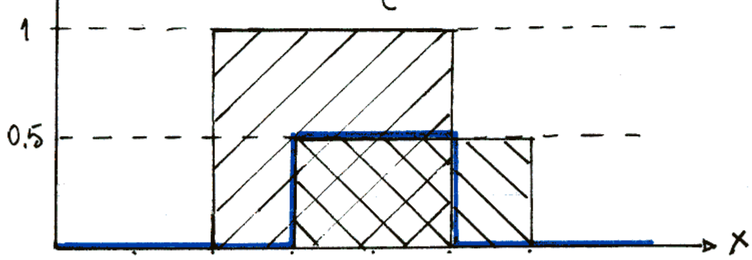


$(A \cup B)(x) = máx\{A(x), B(x)\}, \forall x \in X$



$(A \cup B)(x) : X \rightarrow \{0, 0.5, 1\}$

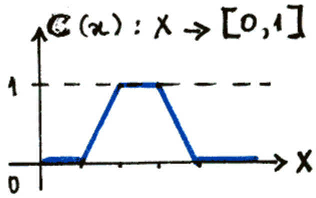
$(A\quad)(x) = mín\{A(x), B(x)\}, \forall x \in X$



$(A \cap B)(x) : X \rightarrow \{0, 0.5, 1\}$

OBS:

$C(x) : X \rightarrow [0,1]$



II.2 DEFINIÇÃO BÁSICA DE UM CONJUNTO FUZZY

FUZZY SET OU CONJUNTO NEBULOSO :

COLEÇÃO DE OBJETOS COM VALORES DE PERTINÊNCIA QUE VARIAM ENTRE A EXCLUSÃO COMPLETA → 0 E A INCLUSÃO COMPLETA → 1 .

- OS VALORES DE PERTINÊNCIA EXPRESSAM OS GRAUS DE COMPATIBILIDADE DO OBJETO COM AS PROPRIEDADES OU CARACTERÍSTICAS QUE DISTINGÜEM A COLEÇÃO (OU SEJA, O QUANTO O OBJETO TEM A VER COM O CONCEITO) .

UM FUZZY SET É CARACTERIZADO POR UMA FUNÇÃO DE PERTINÊNCIA QUE MAPEIA OS ELEMENTOS DE UM DOMÍNIO , ESPAÇO OU UNIVERSO DE DISCURSO X AO INTERVALO UNITÁRIO [0,1] , OU SEJA :

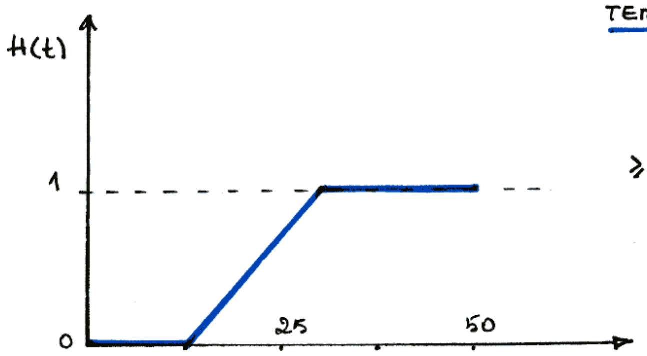
$A : X \to [0,1]$. (ZADEH, 1965)

→ UM FUZZY SET A EM X PODE SER REPRESENTADO COMO UM CONJUNTO DE PARES ORDENADOS DE UM ELEMENTO GENÉRICO $x \in X$ E O GRAU DE PERTINÊNCIA ASSOCIADO A CADA ELEMENTO :

$$A = \{ (A(x)/x) \mid x \in X \} .$$

→ UM FUZZY SET É UMA GENERALIZAÇÃO DO CONCEITO DE UM CONJUNTO CUJAS FUNÇÕES DE PERTINÊNCIA ASSUMEM UM DE DOIS POSSÍVEIS VALORES ; $\{0, 1\}$.

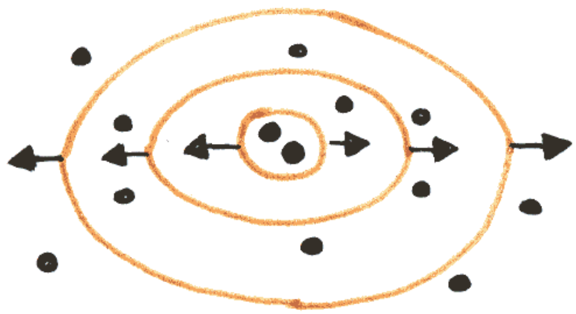
→ O VALOR DE $A(x)$ DESCREVE UM GRAU DE PERTINÊNCIA DE x EM A .



TEMPERATURA	GRAU DE COMPATIBILIDADE COM O CONCEITO
0° → NÃO É ALTA TEMP. →	0 (NULO)
$\geq 30^\circ$ → SÃO ALTAS TEMPS. →	1 (MÁXIMO)

FIGURA II.3 : FUNÇÃO DE PERTINÊNCIA $H : T \to [0,1]$ CARACTERIZANDO O FUZZY SET H DE ALTAS TEMPERATURAS NO UNIVERSO $T = [0,50]$.

TEORIA DE CONJUNTOS NEBULOSOS



FS SÃO RESTRIÇÕES ELÁSTICAS IMPOSTAS AOS ELEMENTOS DE UM UNIVERSO OU DOMÍNIO.

PARA ABRAÇAR UM NOVO PONTO FORA DA CIRCUNFERÊNCIA INICIAL, OS LIMITES SÃO ESTENDIDOS.

A EXTENSÃO DEPENDE DA POSIÇÃO DO NOVO PONTO, CUJO VALOR DE PERTINÊNCIA É FEITO INVERSAMENTE PROPORCIONAL À FORÇA NECESSÁRIA PARA ESTENDER O LIMITE (A "BORRACHA") ATÉ ELE:

↑ FORÇA NECESSÁRIA ↓ PERTINÊNCIA.

OS PONTOS NATURALMENTE ABRAÇADOS PELA CIRCUNFERÊNCIA ORIGINAL NATURALMENTE TÊM VALOR DE PERTINÊNCIA = 1.

ELASTICIDADE!

AUSÊNCIA DE LIMITES DEFINIDOS!

TEORIA DE CONJUNTOS TRADICIONAL

MODELO SIMILAR, NA TEORIA DE CONJUNTOS TRADICIONAL É FORMADO POR LIMITES RÍGIDOS, NÃO SUSCETÍVEIS A QUALQUER EXTENSÃO.

UM PONTO É OU NÃO É MEMBRO DO CONJUNTO CONTIDO NA CIRCUNFERÊNCIA.

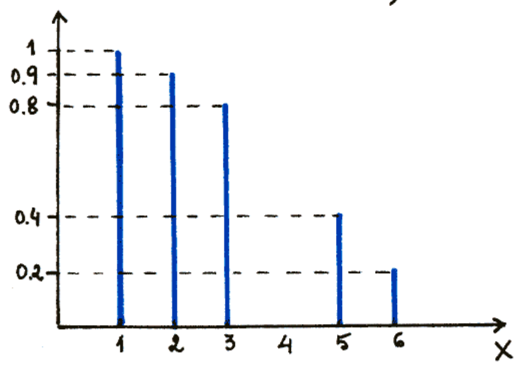
NENHUMA ELASTICIDADE É PERMITIDA!

FUZZY SETS EM UNIVERSOS FINITOS OU INFINITOS

UNIVERSOS DISCRETOS OU FINITOS

CONSIDEREMOS O FUZZY SET ABAIXO, EM QUE

$A(x): X \to [0,1]$; $X = \{1,2,3,4,5,6\}$, DESCRITO POR:



SE UM UNIVERSO X É DISCRETO OU FINITO, COM CARDINALIDADE n, UM FUZZY SET TERÁ A FORMA DE UM VETOR n-DIMENSIONAL, CUJOS ELEMENTOS DENOTAM GRAUS DE PERTINÊNCIA DOS ELEMENTOS DE X.

NO EXEMPLO, $A = [1 \;\; 0.9 \;\; 0.8 \;\; 0 \;\; 0.4 \;\; 0.2]$.

SE $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, ENTÃO O FUZZY SET

$$A = \{(a_i/x_i) \mid x_i \in X\}, \text{ ONDE } a_i = A(x_i),\ i = 1, \ldots, n$$

PODE SER DENOTADO POR:

$$A = a_1/x_1 + a_2/x_2 + \ldots + a_n/x_n = \sum_{i=1}^{n} a_i/x_i ,$$

EM QUE O $\sum$ REPRESENTA UNIÃO.

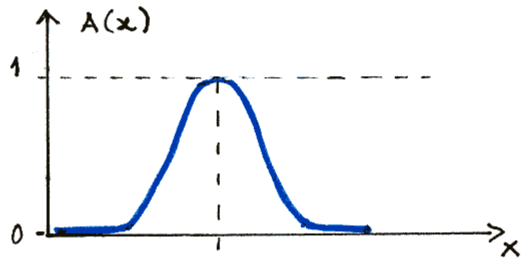
NO EXEMPLO, $A = 1/1 + 0.9/2 + 0.8/3 + 0/4 + 0.4/5 + 0.2/6$

UNIVERSOS CONTÍNUOS OU INFINITOS

QUANDO O UNIVERSO X É CONTÍNUO, UM FUZZY SET TERÁ A SEGUINTE REPRESENTAÇÃO:

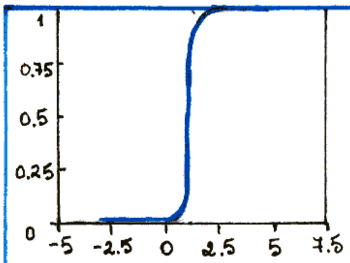
$$A(x) = \int_X a/x , \text{ ONDE } a = A(x) \text{ E}$$

O SÍMBOLO DE INTEGRAÇÃO $\int$ REPRESENTA UNIÃO.



II.3 TIPOS DE FUNÇÕES DE PERTINÊNCIA

- QUALQUER FUNÇÃO DA FORMA $A: X \to [0,1]$ DESCREVE UMA FUNÇÃO DE PERTINÊNCIA ASSOCIADA COM UM FUZZY SET A QUE DEPENDE NÃO APENAS DO CONCEITO A SER REPRESENTADO, MAS TAMBÉM DO CONTEXTO NO QUAL É USADO.
- EM GERAL, FUNÇÕES SIMPLES SÃO CONVENIENTES.
- EM MUITAS APLICAÇÕES PRÁTICAS FUZZY SETS PODEM SER REPRESENTADOS POR FUNÇÕES PARAMETRIZADAS, DO TIPO:



FUNÇÃO Γ

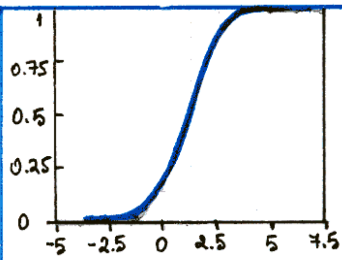
$k = 2$

$a = 1$

$$A(x) = \begin{cases} 0, & \text{SE } x \leq a \\ 1 - e^{-k(x-a)^2}, & \text{SE } x > a \end{cases}$$

OU

$$A(x) = \begin{cases} 0, & \text{SE } x \leq a \\ \dfrac{k(x-a)^2}{1+k(x-a)^2}, & \text{SE } x > a,\ k > 0. \end{cases}$$



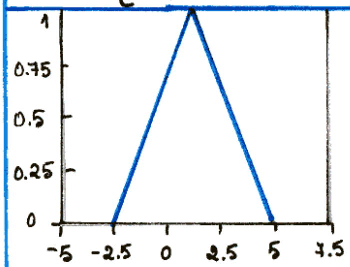
FUNÇÃO S

$a = -1$

$b = 3$

$m = a + \frac{b}{2}$ = CRUZAMENTO DA F S.

$$A(x) = \begin{cases} 0, & \text{SE } x \leq a \\ 2\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)^2, & \text{SE } x \in [a,m] \\ 1 - 2\left(\dfrac{x-b}{b-a}\right)^2, & \text{SE } x \in [m,b] \\ 1, & \text{SE } x > b. \end{cases}$$



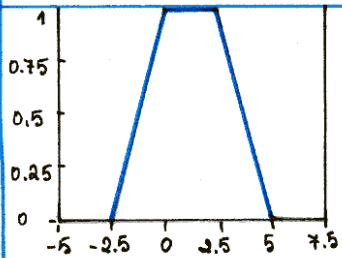
TRIANGULAR

$a = -2.5$

$m = 1.25$

$b = 5.0$

$$A(x) = \begin{cases} 0, & \text{SE } x \leq a \\ \dfrac{x-a}{m-a}, & \text{SE } x \in [a,m] \\ \dfrac{b-x}{b-m}, & \text{SE } x \in [m,b] \\ 0, & \text{SE } x \geq b \end{cases}$$



TRAPEZOIDAL

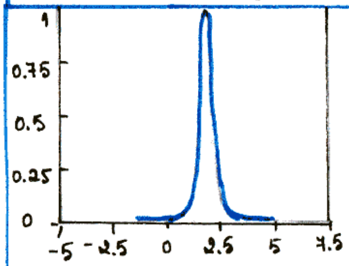
$a = -2.5$

$m = 0$

$n = 2.5$

$b = 5.0$

$$A(x) = \begin{cases} 0, & \text{SE } x < a \\ \dfrac{x-a}{m-a}, & \text{SE } x \in [a,m] \\ 1, & \text{SE } x \in [m,n] \\ \dfrac{b-x}{b-n}, & \text{SE } x \in [n,b] \\ 0, & \text{SE } x > b \end{cases}$$

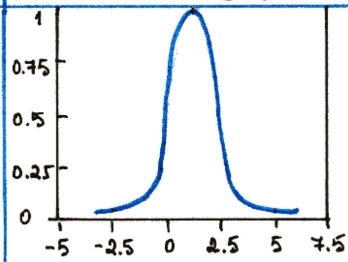


GAUSSIANA

$k = 2$

$m = 2$

$$A(x) = e^{-k(x-m)^2}, \quad k > 0$$



"EXPONENCIAL"

$k = 2$

$m = 1$

$$A(x) = \frac{1}{1+k(x-m)^2}, \quad k > 1$$

OU

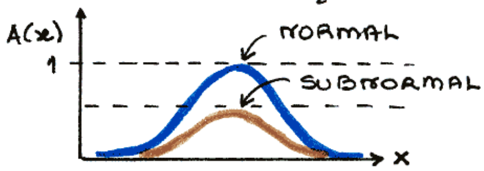
$$A(x) = \frac{k(x-m)^2}{1+k(x-m)^2}, \quad k > 0$$

II.4 CARACTERÍSTICAS DE UM FUZZY SET

A CARACTERIZAÇÃO DE FUZZY SETS É BASEADA NAS PARTICULARIDADES DAS FUNÇÕES DE PERTINÊNCIA QUE OS REPRESENTAM.

1. UM FUZZY SET É NORMAL QUANDO SUA FUNÇÃO DE PERTINÊNCIA ATINGE 1, OU SEJA:

$\sup_x A(x) = 1$.



SE O SUPREMO FOR MENOR DO QUE 1, ENTÃO A É DITO SUBNORMAL.

NOTE QUE $\sup_x A(x) = hgt(A)$ = HEIGHT DE A, ENTÃO,

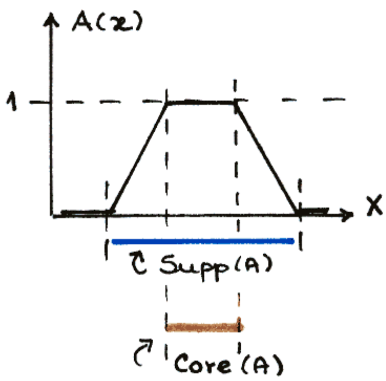
SE $hgt(A) = 1 \Rightarrow$ FUZZY SET É NORMAL.

2. SUPORTE DE UM FUZZY SET A, DENOTADO POR Supp(A), SÃO TODOS OS ELEMENTOS DE X QUE PERTECEM AO FUZZY SET A COM UM GRAU DE PERTINÊNCIA NÃO NULO:

$Supp(A) = \{ x \in X \mid A(x) > 0 \}$.

3. NÚCLEO DE UM FUZZY SET A É O CONJUNTO DE TODOS OS ELEMENTOS DE X QUE POSSUEM PERTINÊNCIA 1 EM A:

$Core(A) = \{ x \in X \mid A(x) = 1 \}$



4. DADO UM FUZZY SET A EM UM UNIVERSO FINITO X, SUA CARDINALIDADE, DENOTADA POR Card(A), É DEFINIDA COMO

$Card(A) = \sum_{x \in X} A(x)$ = CARDINALIDADE ESCALAR = CONTAGEM SIGMA DE A

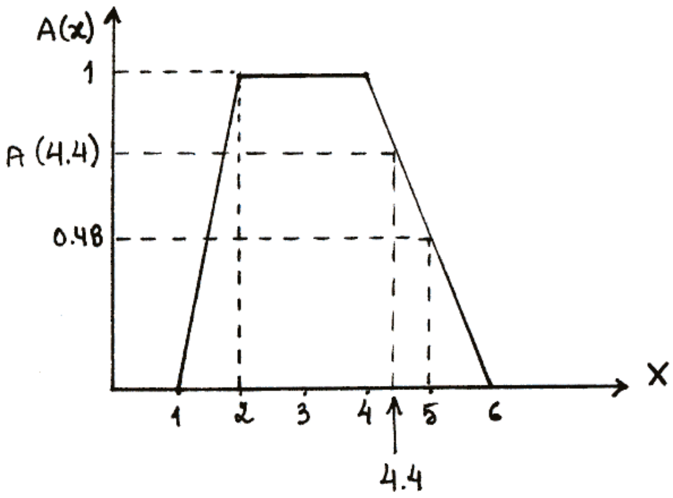
SEJA $A = 0.1/1 + 0.3/2 + 0.6/3 + 1.0/4 + 0.4/5$ EM $X = \{1,2,3,4,5,6\}$,

$Card(A) = 0.1 + 0.3 + 0.6 + 1.0 + 0.4 = 2.4$

5. UM FUZZY SET A É CONVEXO SE SUA FUNÇÃO DE PERTINÊNCIA É TAL QUE :

$$A\left[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right] \geq \min\left[A(x_1), A(x_2)\right],$$

$\forall\, x_1, x_2 \in X$ E $\lambda \in [0,1]$.



$x_1 = 2$; $x_2 = 5$
$A(x_1) = 1$; $A(x_2) = 0.48$
$\lambda = 0.2$

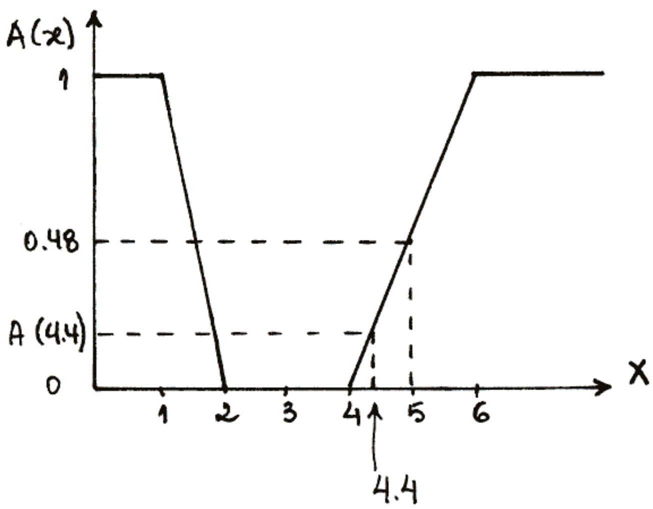
$$A\left[(0.2)(2) + (0.8)(5)\right] \geq \min\left[1, 0.48\right]$$

$$A\left[4.4\right] \geq 0.48 \Rightarrow$$ A É CONVEXO.

6. UM FUZZY SET A É CÔNCAVO SE SUA FUNÇÃO DE PERTINÊNCIA É TAL QUE :

$$A\left[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right] \leq \max\left[A(x_1), A(x_2)\right],$$

$\forall\, x_1, x_2 \in X$ E $\lambda \in [0,1]$.



$x_1 = 2$; $x_2 = 5$
$A(x_1) = 0$; $A(x_2) = 0.48$
$\lambda = 0.2$

$$A\left[(0.2)(2) + (0.8)5\right] \leq \max\left[0, 0.48\right]$$

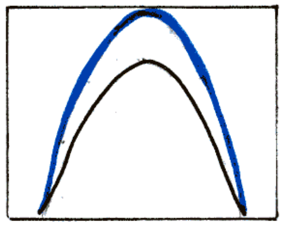
$$A\left[4.4\right] \leq 0.48 \Rightarrow$$ A É CÔNCAVO.

OPERAÇÕES EM FUZZY SETS (APLICADAS A UMA ÚNICA FUNÇÃO DE PERTINÊNCIA)

1. NORMALIZAÇÃO

CONVERTE UM FS SUBNORMAL EM SUA VERSÃO NORMAL, DIVIDINDO A FUNÇÃO DE PERTINÊNCIA POR HEIGHT DE A:

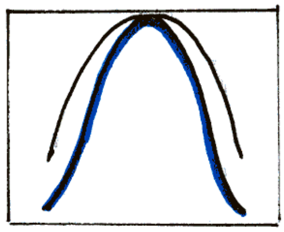
$$Norm\_A(x) = \frac{A(x)}{hgt(A)}$$



2. CONCENTRAÇÃO

CONCENTRA A FUNÇÃO DE PERTINÊNCIA AO REDOR DE PONTOS COM MAIORES GRAUS DE PERTINÊNCIA, POR EXEMPLO, ELEVANDO AO QUAD.:

$Con\_A(x) = A^2(x)$; EFEITO AMPLIFICADO $\rightarrow$ $Con\_A(x) = A^p(x)$, COM $p > 2$.



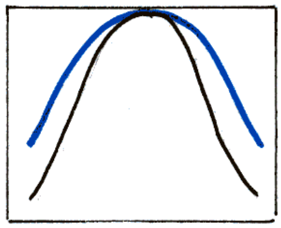
$p = 2$

3. DILATAÇÃO

EFEITO OPOSTO DA OPERAÇÃO DE CONCENTRAÇ, PRODUZIDO PELA MODIFICAÇÃO DA FUNÇÃO DE PERTINÊNCIA ATRAVÉS DA TRANSFORMAÇÃO:

$Dil\_A(x) = A^{0.5}(x)$; $Dil\_A(x) = 2A(x) - A^2(x)$ OU

$Dil\_A(x) = A^r(x)$ COM $r \in [0,1]$

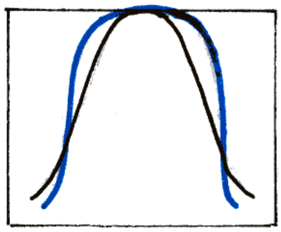


$r = 0.5$

4. INTENSIFICAÇÃO DE CONTRASTE

VALORES MENORES DO QUE 1/2 SÃO DIMINUÍDOS, ENQUANTO QUE OS GRAUS DE PERTINÊNCIA MAIORES DO QUE 1/2 SÃO ELEVADOS.

$$Int\_A(x) = \begin{cases} 2^{p-1} A^p(x), & \text{SE } 0 \le A(x) \le 0.5, \text{ COM } p > 1. \\ 1 - 2^{p-1}(1 - A(x))^p, & \text{EM CASO CONTRÁRIO}. \end{cases}$$

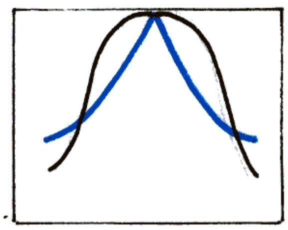


$p = 2$

5. FUZZYFICAÇÃO

DIMINUI O CONTRASTE, AUMENTANDO A "FUZZYFICAÇÃO". O EFEITO É OBTIDO COMO SEGUE:

$$Fuzz\_A(x) = \begin{cases} (A(x)/2)^{1/2}, & \text{SE } A(x) \le 0.5 \\ 1 - ((1 - A(x))/2)^{1/2}, & \text{EM CASO CONTRÁRIO}. \end{cases}$$

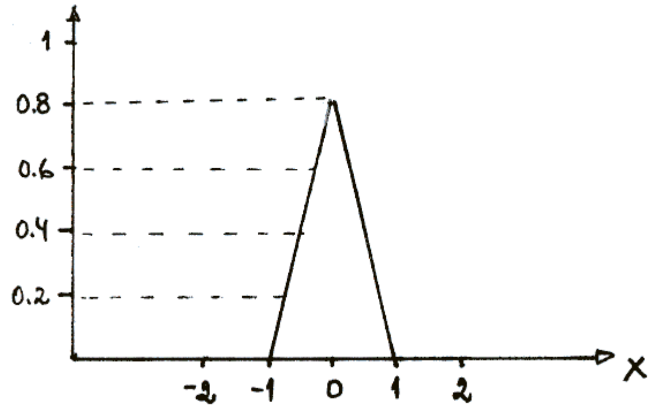


OBS: OPERAÇÕES APLICADAS A UMA FUNÇÃO DE PERTINÊNCIA GAUSSIANA DO TIPO $A(x) = e^{-0.05(x-2)^2}$.

EXPLO: SE H É FS P/ HIGH TEMPERATURE $\Rightarrow$ Con_H SERÁ UMA BOA APROXIMAÇÃO P/ VERY HIGH TEMPERATURE.

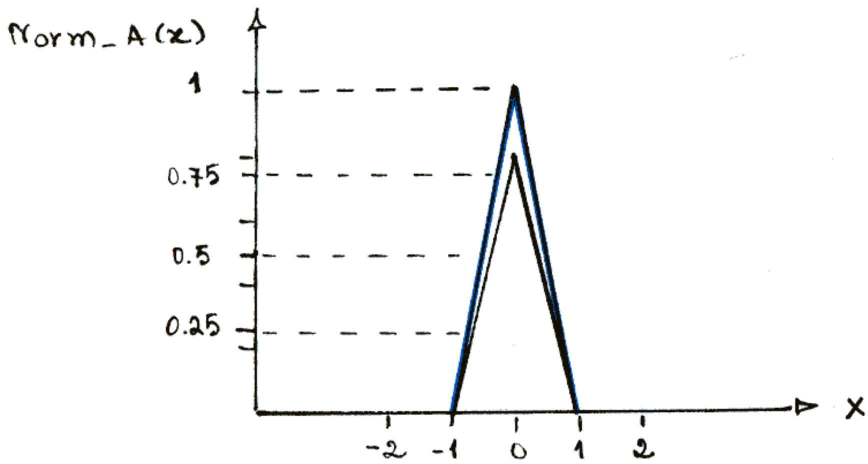
EXEMPLO II.3 : SEJA "A" UM FUZZY SET COM FUNÇÃO DE PERTINÊNCIA TRIANGULAR $A(x; a, m, b) = A(x; -1, 0, 1)$ EM $X = [-2, 2]$. EXECUTE AS CINCO OPERAÇÕES DISCUTIDAS (NORMALIZAÇÃO, CONCENTRAÇÃO, DILATAÇÃO, INTENSIFICAÇÃO DE CONTRASTE E "FUZZYFICAÇÃO") E APRESENTE OS RESULTADOS DE FORMA GRÁFICA. CONSIDERE

$\sup_x A(x) = 0.8$



1. DESDE QUE $A(x)$ É SUBNORMAL, PROCEDEREMOS À NORMALIZAÇÃO:

$$Norm\_A(x) = \frac{A(x)}{hgt(A)} = \frac{A(x)}{0.8}$$

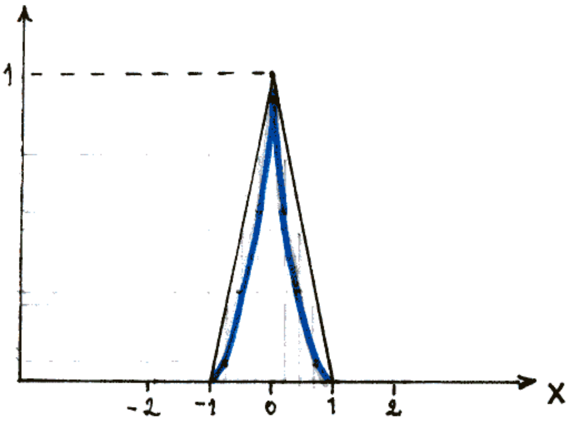


$A(x)$	$Norm\_A(x)$
0.8	1
0.6	0.75
0.4	0.5
0.2	0.25
0	0

O FS $A(x)$ FOI NORMALIZADO, OU SEJA: $\sup_x A(x) = 1$.

2. CONCENTRAÇÃO :

$Con\_A(x) = A^p(x)$; $p = 2$ (ESCOLHEMOS) $\Rightarrow$ $Con\_A(x) = A^2(x)$

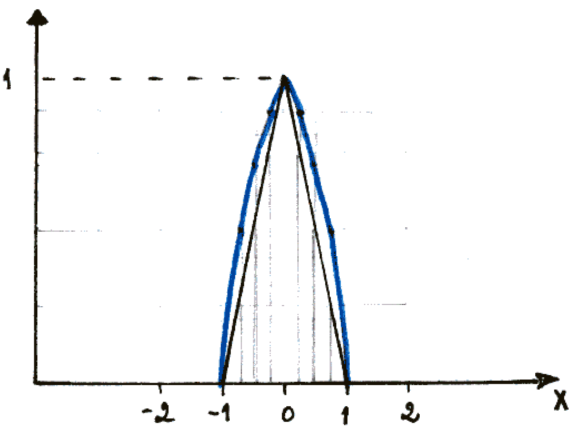


A (x)	$A^2(x)$
1	1
0.75	0.56
0.5	0.25
0.25	0.06
0	0

A FUNÇÃO DE PERTINÊNCIA FICA MAIS CONCENTRADA AO REDOR DE PONTOS COM MAIORES GRAUS DE PERTINÊNCIA.

3. DILATAÇÃO :

$Dil\_A(x) = A^r(x)$; $r \in [0,1]$ $\Rightarrow$ $r = 0.5$ (ESCOLHEMOS) $\Rightarrow$ $Dil\_A(x) = A^{1/2}(x)$



A(x)	$A^{1/2}(x)$
1	1
0.75	0.87
0.5	0.71
0.25	0.5
0	0

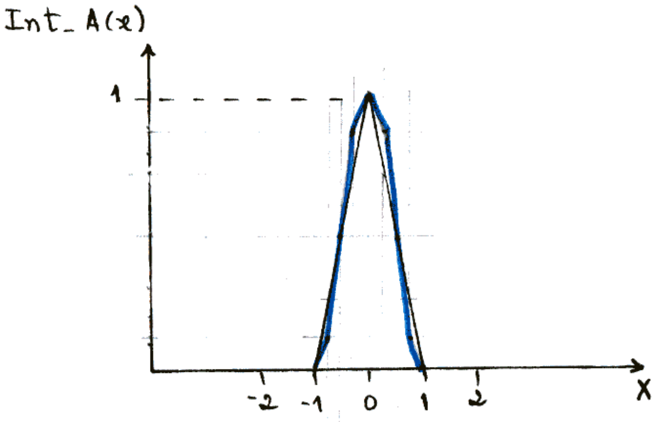
A FUNÇÃO DE PERTINÊNCIA FICA MAIS DILATADA AO REDOR DE PONTOS COM MAIORES GRAUS DE PERTINÊNCIA.

4. INTENSIFICAÇÃO DE CONTRASTE:

$$Int\_A(x) = \begin{cases} 2^{p-1} A^p(x), & \text{SE } 0 \le A(x) \le 0.5, \text{ com } p > 1 \\ 1 - 2^{p-1}(1 - A(x))^p, & \text{CASO CONTRÁRIO} \end{cases}$$

ESCOLHEMOS $p = 2$, ENTÃO:

$$Int\_A(x) = \begin{cases} 2A^2(x), & \text{PARA } 0 \le A(x) \le 0.5, \text{ com } p = 2 \\ 1 - 2(1 - A(x))^2, & \text{CASO CONTRÁRIO} \end{cases}$$

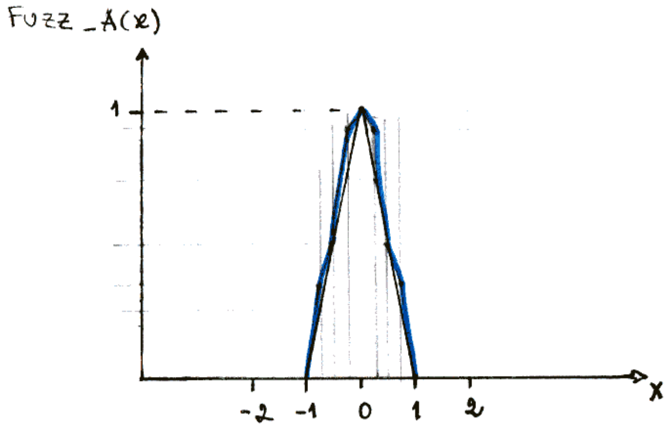


$A(x)$	$[2A^2(x)]$	$[1-2(1-A(x))^2]$
1	—	1
0.75	—	0.875
0.5	0.5	—
0.25	0.125	—
0	0	—

VALORES MENORES DO QUE 0.5 SÃO DIMINUÍDOS, MAIORES SÃO AUMENTADOS.

5. FUZZYFICAÇÃO:

$$Fuzz\_A(x) = \begin{cases} (A(x)/2)^{1/2}, & \text{PARA } A(x) \le 0.5 \\ 1 - ((1 - A(x))/2)^{1/2}, & \text{CASO CONTRÁRIO} \end{cases}$$

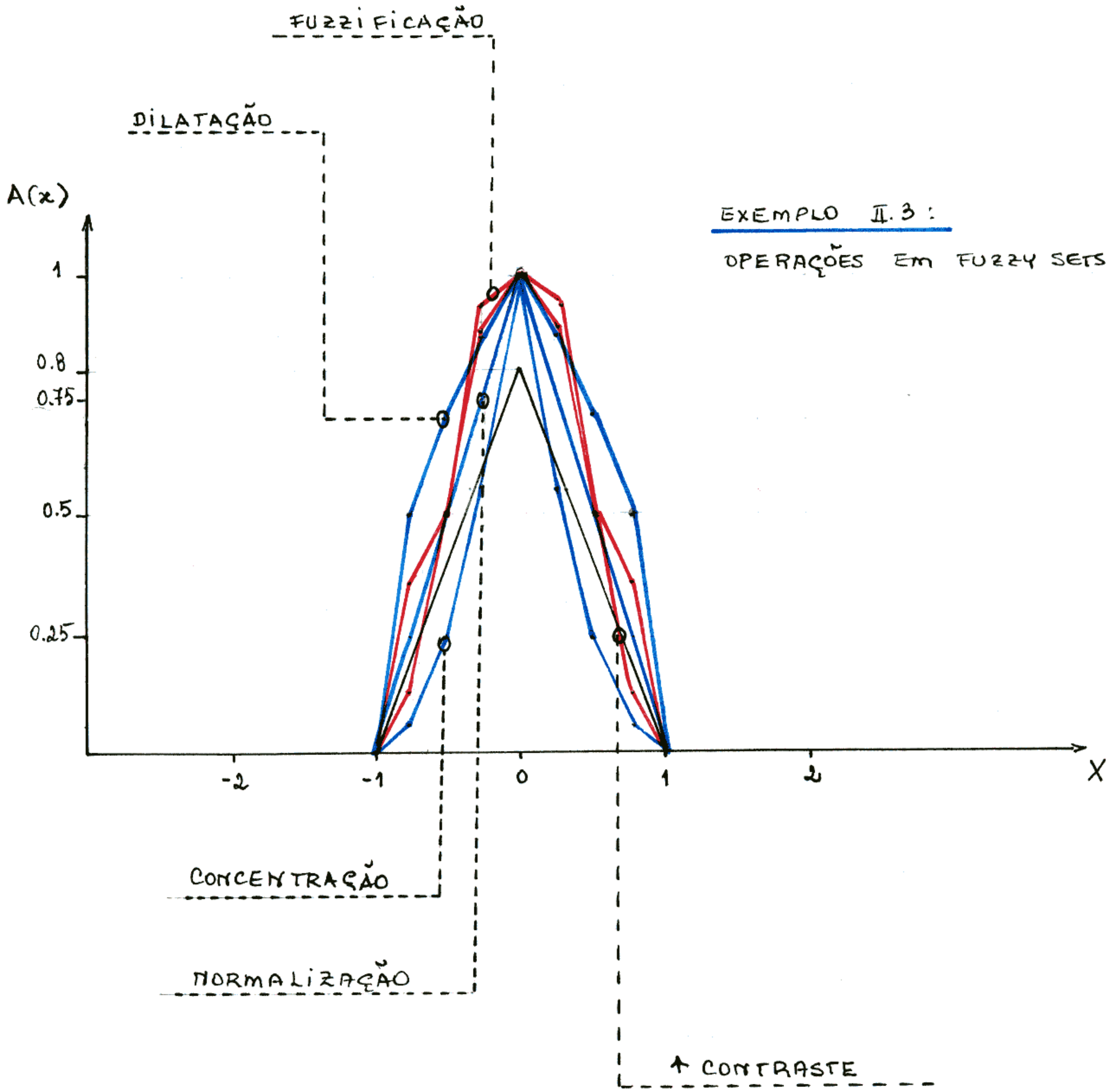


$A(x)$	$[A(x)/2]^{1/2}$	$[1-(1-A(x))/2)^{1/2}]$
1	—	1
0.75	—	0.935
0.5	0.5	—
0.25	0.354	—
0	0	—

EFEITO DE DIMINUIÇÃO DE CONTRASTES, TORNANDO $A(x)$ MAIS NEBULOSO.

EXEMPLO II.3 :

OPERAÇÕES EM FUZZY SETS



II.5 RELAÇÕES BÁSICAS ENTRE CONJUNTOS FUZZY: IGUALDADE E INCLUSÃO.

DA MESMA FORMA QUE NA TEORIA DE CONJUNTOS, PODEM SER DEFINIDAS RELAÇÕES GENÉRICAS ENTRE DOIS CONJUNTOS FUZZY, TAIS COMO IGUALDADE E INCLUSÃO.

IGUALDADE: DOIS FUZZY SETS A E B DEFINIDOS NO MESMO ESPAÇO X SÃO IGUAIS SE E SOMENTE SE SUAS FUNÇÕES DE PERTINÊNCIA SÃO IDÊNTICAS. OU SEJA, PARA CADA ELEMENTO DE X,

$A = B$ SSE $A(x) = B(x)$.

INCLUSÃO: A ESTÁ CONTIDO EM B SE E SOMENTE SE A FUNÇÃO DE PERTINÊNCIA DE A É MENOR DO QUE A FUNÇÃO DE PERTINÊNCIA DE B, PARA CADA x EM X. OU SEJA,

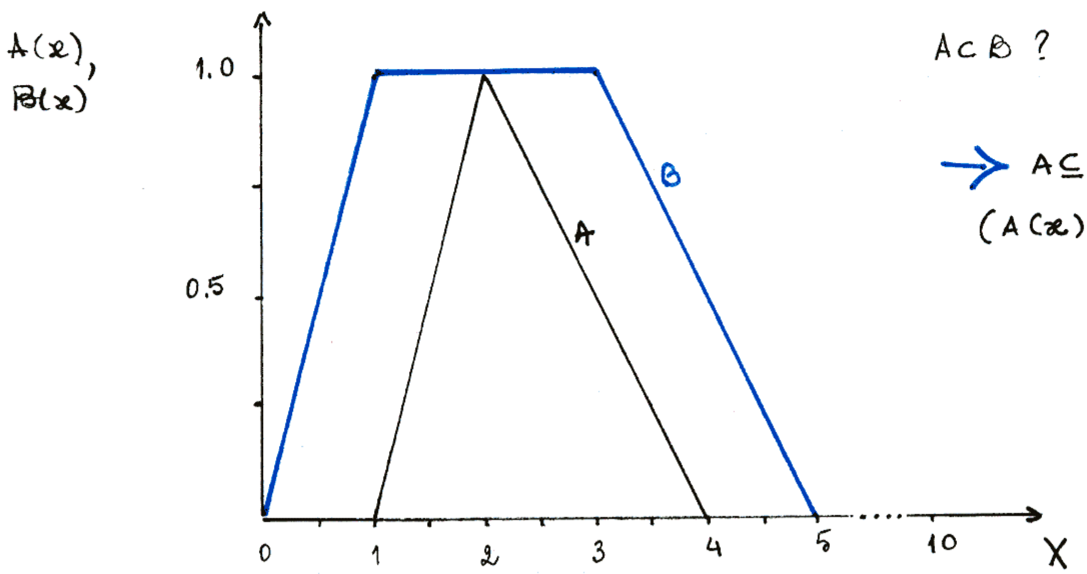
$A \subseteq B$ SSE $A(x) \leq B(x)$.

EXEMPLO II.4: SEJAM OS FUZZY SETS A E B, ABAIXO DEFINIDOS.

→ FS A TEM FUNÇÃO DE PERTINÊNCIA TRAPEZOIDAL $A(x; 0, 1, 3, 5)$,

→ FS B TEM FUNÇÃO DE PERTINÊNCIA TRIANGULAR $B(x; 1, 2, 4)$,

AMBOS EM $X = [0, 10]$.



$A \subset B$? OU $B \subset A$?

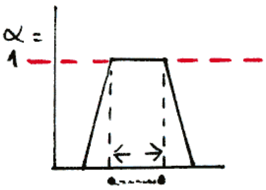
→ $A \subseteq B$

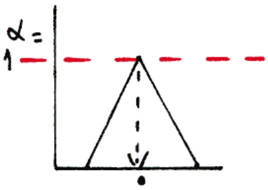
$(A(x) \leq B(x))$

II. 6 TEOREMA DA REPRESENTAÇÃO

"QUALQUER FUZZY SET PODE SER CONSIDERADO COMO UMA FAMÍLIA DE FUZZY SETS".

α-CORTE : O α-CORTE DE A , DENOTADO POR A_α, É UM CONJUNTO QUE CONSISTE DAQUELES ELEMENTOS DO UNIVERSO X CUJOS VALORES DE PERTINÊNCIA EXCEDEM O LIMIAR α , OU SEJA :



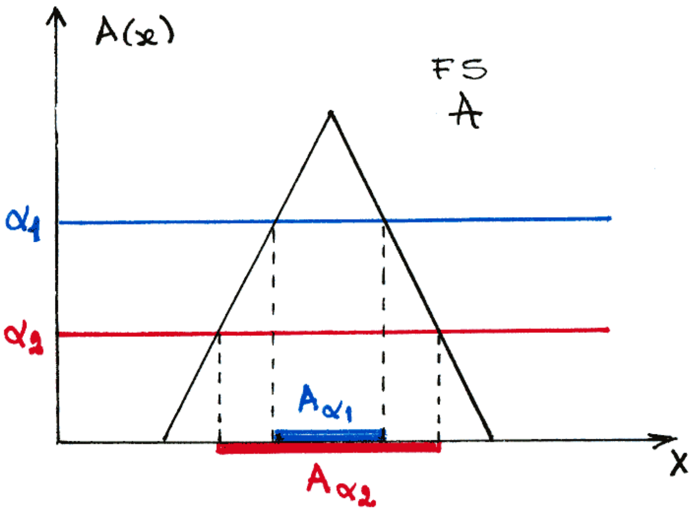


$$A_\alpha = \{ x \mid A(x) \geq \alpha \} .$$

EM PARTICULAR , O MAIOR LIMIAR , α=1, DETERMINA O CONJUNTO DE ELEMENTOS DE X QUE PERTENCEM "TOTALMENTE" AO FS A (PERTINÊNCIA MÁXIMA = 1) .

QUANTO MENOR O NÍVEL DE α , MAIOR O NÚMERO DE ELEMENTOS DE X QUE PERTENCEM AO CORRESPONDENTE α-CORTE , OU SEJA :

SE $\alpha_1 > \alpha_2 \Rightarrow A_{\alpha_1} \subset A_{\alpha_2}$.



$\Lambda(A)$ = CONJUNTO DE TODOS OS NÍVEIS $\alpha \in [0,1]$ QUE REPRESENTAM α-CORTES DISTINTOS DE UM FUZZY SET A .

TEOREMA DA REPRESENTAÇÃO:

QUALQUER FUZZY SET A PODE SER DECOMPOSTO EM UMA SÉRIE DE α-CORTES , DE TAL FORMA QUE

$$A = \bigcup (\alpha A_\alpha) ; \alpha \in [0,1) ,$$

OU, DE FORMA EQUIVALENTE, A FUNÇÃO DE PERTINÊNCIA

$$A(x) = \sup_{\alpha \in [0,1)} [\alpha A_\alpha(x)] .$$

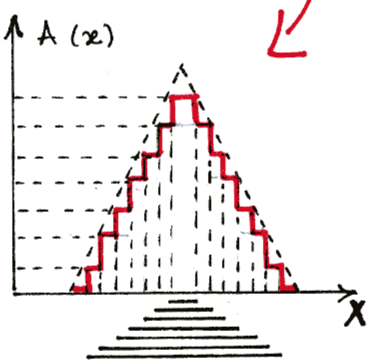
$\Lambda(A) = \{ \alpha \mid A(x) = \alpha$ PARA ALGUM $x \in X \}$

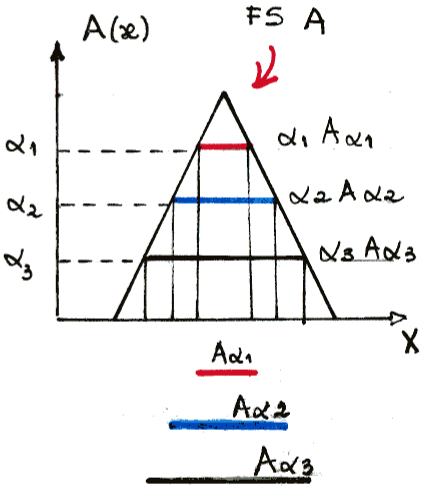
QUALQUER FUZZY SET PODE SER "RECONSTRUÍDO" A PARTIR DE UMA FAMÍLIA DE α-CORTES.

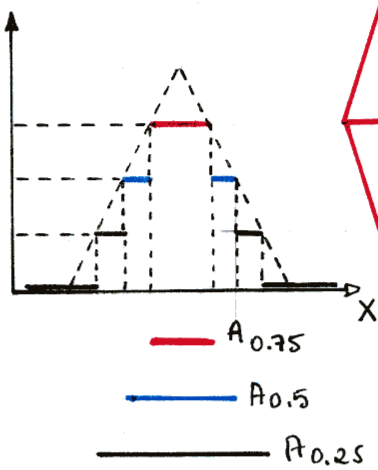
PROBLEMAS ENVOLVENDO FUZZY SETS PODEM SER RESOLVIDOS TRANSFORMANDO ESTES FUZZY SETS EM SUAS CORRESPONDENTES FAMÍLIAS DE α-CORTES E DETERMINANDO SOLUÇÕES PARA CADA UM DOS α-CORTES ATRAVÉS DO USO DE TÉCNICAS PADRÕES, NÃO FUZZY.

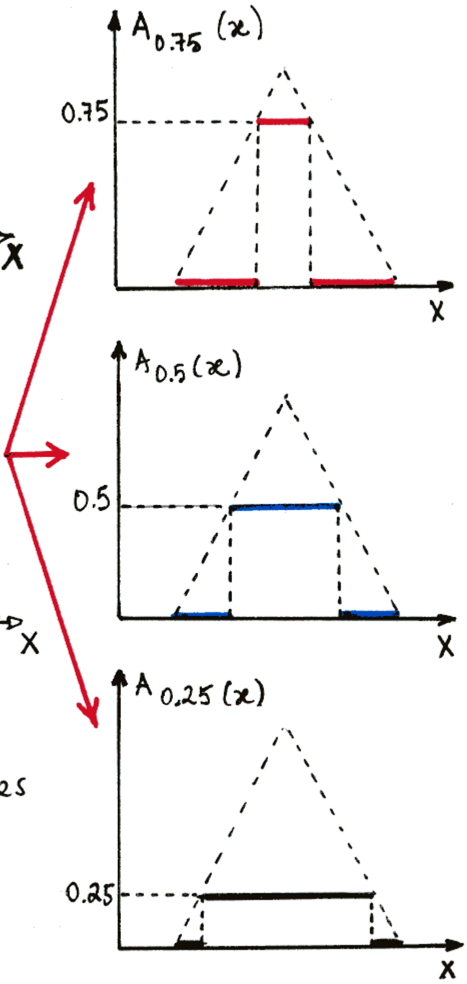
TODOS OS RESULTADOS PARCIAIS PODEM SER APROPRIADAMENTE COMBINADOS, RECONSTRUINDO UMA SOLUÇÃO PARA O PROBLEMA EM SUA FORMULAÇÃO FUZZY ORIGINAL.

↑ Nº DE NÍVEIS DE QUANTIZAÇÃO DOS VALORES DE PERTINÊNCIA (OU SEJA, ↑ Nº DE α-CORTES) ↑ DETALHADA A RECONSTRUÇÃO.









$$\text{FS } A = \bigcup_{\alpha \in [0,1)} (\alpha A_\alpha)$$

$$A(x) = \sup_{\alpha \in [0,1)} [\alpha A_\alpha(x)]$$

II.7 PRINCÍPIO DA EXTENSÃO

PERMITE TRADUZIR CONCEITOS BASEADOS EM CONJUNTOS EM SUAS "CONTRAPARTIDAS" FUZZY (FUZZY SETS).

SEJAM X E Y DOIS CONJUNTOS E f UM MAPEAMENTO DE X EM Y, $f: X \to Y$.

SEJA A UM FUZZY SET EM X.

O PRINCÍPIO DA EXTENSÃO DIZ QUE A IMAGEM DE A SOB ESTE MAPEAMENTO É UM FUZZY SET $B = f(A)$ EM Y TAL QUE, PARA CADA $y \in Y$, $B(y) = \sup_x A(x)$, $x \in X$ E $y = f(x)$.