LÓGICA FUZZY CAPÍTULO III	Mª CRISTINA FELIPPETTO DE CASTRO	FL & GA 28 05 2003

III. OPERAÇÕES COM FUZZY SETS

OPERAR FUZZY SETS $A, B, C : X \to [0,1]$ — COMBINAR, COMPARAR, AGREGAR — INFORMAÇÃO, PROCESSAM.^TO^ DE DADOS

III.1 TEORIA DE CONJUNTOS E OPERAÇÕES
III.2 NORMAS TRIANGULARES
III.3 OPERAÇÕES DE AGREGAÇÃO
III.4 NEGAÇÕES
III.5 OPERAÇÕES DE COMPARAÇÃO

III.1 TEORIA DE CONJUNTOS E OPERAÇÕES

1. INTERSECÇÃO $(A \cap B)(x) = \min(A(x), B(x)) = A(x) \wedge B(x)$

2. UNIÃO $(A \cup B)(x) = \max(A(x), B(x)) = A(x) \vee B(x)$

3. COMPLEMENTO $\bar{A}(x) = 1 - A(x)$

OBS: $\forall x \in X$

4. COMUTATIVIDADE
$$A(x) \cup B(x) = B(x) \cup A(x)$$
$$A(x) \cap B(x) = B(x) \cap A(x)$$

5. ASSOCIATIVIDADE
$$A(x) \cup (B(x) \cup C(x)) = (A(x) \cup B(x)) \cup C(x) = A(x) \cup B(x) \cup C(x)$$
$$A(x) \cap (B(x) \cap C(x)) = (A(x) \cap B(x)) \cap C(x) = A(x) \cap B(x) \cap C(x)$$

6. IDEMPOTÊNCIA
$$A(x) \cup A(x) = A(x)$$
$$A(x) \cap A(x) = A(x)$$

7. DISTRIBUTIVIDADE
$$A(x) \cap (B(x) \cup C(x)) = (A(x) \cap B(x)) \cup (A(x) \cap C(x))$$
$$A(x) \cup (B(x) \cap C(x)) = (A(x) \cup B(x)) \cap (A(x) \cup C(x))$$

8\. CONDIÇÕES DE CONTORNO $A(x) \cup \phi(x) = A(x)$, $A(x) \cup X(x) = X(x)$
$A(x) \cap \phi(x) = \phi(x)$, $A(x) \cap X(x) = A(x)$

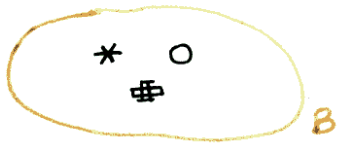
9\. INVOLUÇÃO $\bar{\bar{A}}(x) = A(x)$, OU SEJA:
$\bar{\bar{A}}(x) = \overline{(\bar{A}(x))} = \overline{(1 - A(x))} = A(x)$

10\. TRANSITIVIDADE $A(x) \subset B(x)$ E $B(x) \subset C(x) \Rightarrow A(x) \subset C(x)$

IMPLICAÇÕES DAS PROPRIEDADES:

→ SEJAM:

$A = \{ □, ○, ⊠, *, ⊞ \}$ E $B = \{ *, ○, ⊞ \}$



ENTÃO, DA TEORIA DE CONJUNTOS:

1\. $(A \cap B) \subset A \subset (A \cup B)$
2\. SE $B \subset A$, ENTÃO $B = B \cap A$ E $A = B \cup A$
3\. $\text{CARD}(A) + \text{CARD}(B) = \text{CARD}(A \cap B) + \text{CARD}(A \cup B)$
4\. $\text{CARD}(B) + \text{CARD}(\bar{B}) = \text{CARD}(X)$

→ AS MESMAS RELAÇÕES SÃO VÁLIDAS PARA
$A(x): X \to [0,1]$
$B(x): X \to [0,1]$
$C(x): X \to [0,1]$

III.2 NORMAS TRIANGULARES

UMA NORMA TRIANGULAR (t-norma) É UMA OPERAÇÃO BINÁRIA $t : [0,1]^2 \to [0,1]$, OU SEJA $t : \underbrace{[0,1] \times [0,1]}_{\text{DOMÍNIO}} \to \underbrace{[0,1]}_{\text{IMAGEM}}$, QUE SATISFAÇA OS SEGUINTES REQUERIMENTOS:

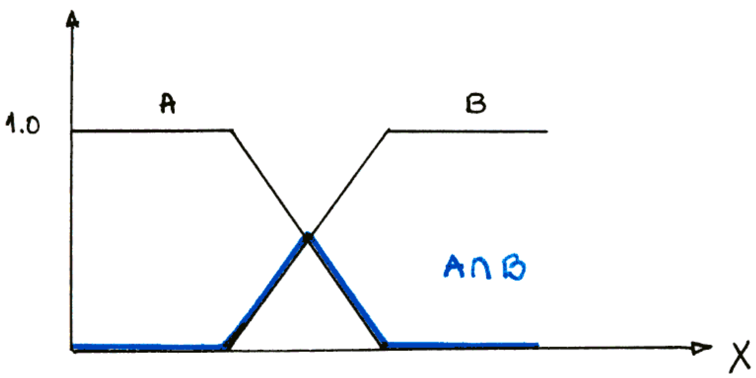
COMUTATIVIDADE : $x t y = y t x$

ASSOCIATIVIDADE : $x t (y t z) = (x t y) t z$

MONOTONICIDADE : SE $x \leq y$ E $w \leq z \Rightarrow x t w \leq y t z$

CONTORNO : $0 t x = 0$, $1 t x = x$

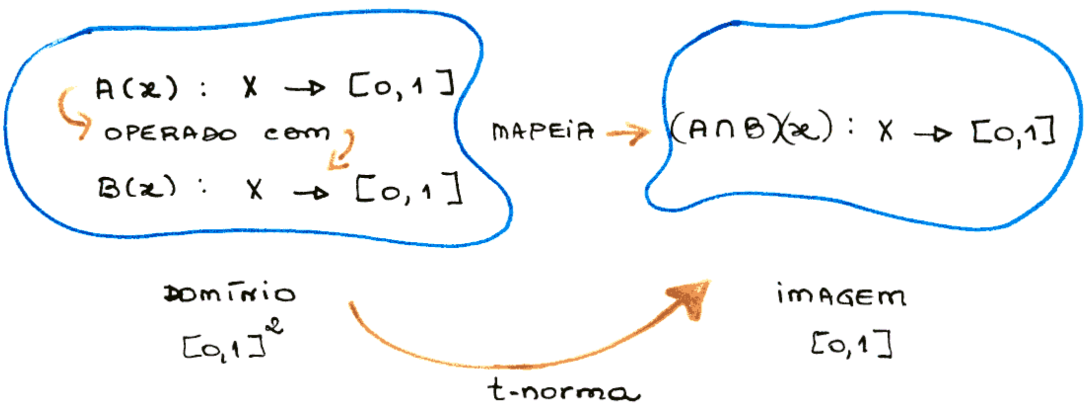
EXEMPLO: OPERADOR $\wedge$ (t-norma min)



> t-normas:
> GENERALIZAÇÃO DA INTERSECÇÃO

$$(A \cap B)(x) = \min\left(A(x), B(x)\right) = A(x) \wedge B(x)$$
$$\forall x \in X$$

t-norma min MODELA INTERSECÇÃO



UMA CO-NORMA TRIANGULAR (s-norma) É UMA OPERAÇÃO BINÁRIA $s: [0,1]^2 \to [0,1]$, OU SEJA $s: \underbrace{[0,1] \times [0,1]}_{\text{DOMÍNIO}} \to \underbrace{[0,1]}_{\text{IMAGEM}}$,

QUE SATISFAÇA OS SEGUINTES REQUERIMENTOS:

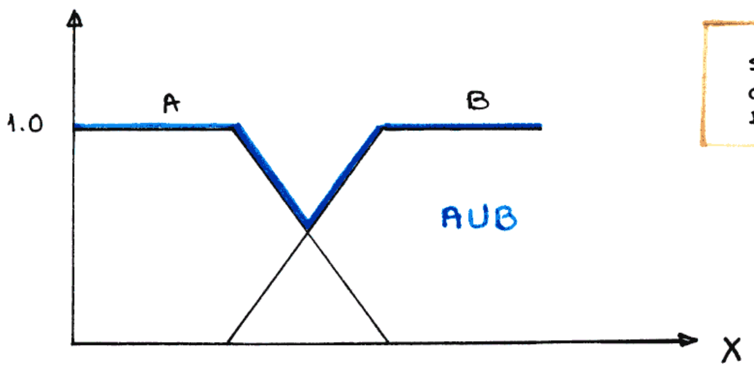
COMUTATIVIDADE: $x \, s \, y = y \, s \, x$

ASSOCIATIVIDADE: $x \, s \, (y \, s \, z) = (x \, s \, y) \, s \, z$

MONOTONICIDADE: SE $x \leq y$ E $w \leq z \Rightarrow x \, s \, w \leq y \, s \, z$

CONTORNO: $x \, s \, 0 = x$, $x \, s \, 1 = 1$

EXEMPLO: OPERADOR $\vee$ (s-norma máx)



S-normas:
GENERALIZAÇÃO
DA UNIÃO

$$(A \cup B)(x) = \text{máx}\,(A(x), B(x)) = A(x) \vee B(x) \quad \forall x \in X$$

S-norma máx MODELA UNIÃO

$A(x): X \to [0,1]$
OPERADO COM
$B(x): X \to [0,1]$

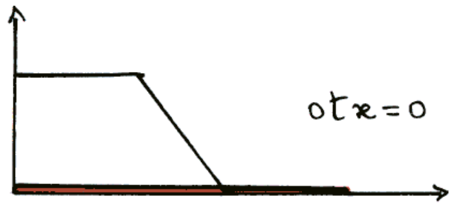
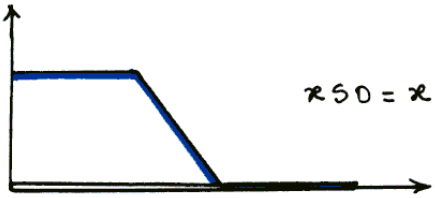
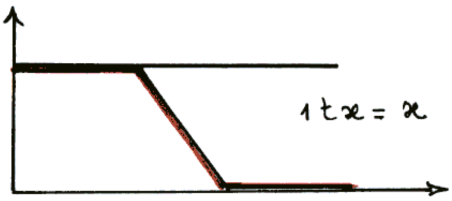
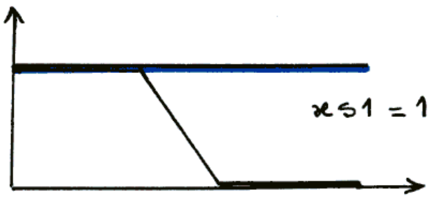
MAPEIA

$(A \cap B)(x): X \to [0,1]$

DOMÍNIO $[0,1]^2$ s-norma IMAGEM $[0,1]$

AS PROPRIEDADES COMUTATIVIDADE, ASSOCIATIVIDADE E MONOTONICIDADE SÃO IDÊNTICAS PARA t-NORMAS E S-NORMAS.

QUANTO ÀS CONDIÇÕES DE CONTORNO:

t-NORMA ($\wedge$)	S-NORMA ($\vee$)
	
	

t-NORMAS (EXEMPLOS)

$x t_4 y = xy$

$x t_2 y = \max\big(0, (1+p)(x+y-1) - pxy\big), \; p \geq -1$

$x t_{11} y = \begin{cases} x, & \text{SE } y = 1 \\ y, & \text{SE } x = 1 \\ 0, & \text{CASO CONTRÁRIO} \end{cases}$

S-NORMAS (EXEMPLOS)

$x S_4 y = x + y - xy$

$x S_2 y = \min(1, x + y + pxy), \; p \geq 0$

$x S_{11} y = \begin{cases} x, & \text{SE } y = 0 \\ y, & \text{SE } x = 0 \\ 1, & \text{CASO CONTRÁRIO} \end{cases}$

t-NORMAS (PROPRIEDADES)

MAIOR t-NORMA $\rightarrow$ OPERADOR $\min$

MENOR t-NORMA $\rightarrow$ OPERADOR t_{11} (PRODUTO DRÁSTICO)

LIMITES DA FAMÍLIA DE t-NORMAS:

$x t_{11} y \leq x t y \leq \min(x, y)$

S-NORMAS (PROPRIEDADES)

MAIOR S-NORMA $\rightarrow$ OPERADOR S_{11} (SOMA DRÁSTICA)

MENOR S-NORMA $\rightarrow$ OPERADOR $\max$

LIMITES DA FAMÍLIA DE S-NORMAS:

$\max(x, y) \leq x S y \leq x S_{11} y$

EXEMPLOS DE t-NORMAS

- $x \operatorname{t}_1 y = \dfrac{1}{1 + \sqrt[p]{((1-x)/x)^p + ((1-y)/y)^p}}, \quad p > 0$
- $x \operatorname{t}_2 y = \max(0, (1+p)(x+y-1) - pxy), \quad p \geq -1$
- $x \operatorname{t}_3 y = 1 - \min(1, \sqrt[p]{(1-x)^p + (1-y)^p}), \quad p > 0$
- $x \operatorname{t}_4 y = xy$
- $x \operatorname{t}_5 y = \dfrac{xy}{p + (1-p)(x+y-xy)}, \quad p \geq 0$
- $x \operatorname{t}_6 y = \dfrac{1}{\sqrt[p]{1/x^p + 1/y^p - 1}}$
- $x \operatorname{t}_7 y = \sqrt[p]{\max(0, x^p + y^p - 1)}, \quad p > 0$
- $x \operatorname{t}_8 y = \dfrac{xy}{\max(x, y, p)}, \quad p \in [0, 1]$
- $x \operatorname{t}_9 y = \log_p\left[1 + \dfrac{(p^x - 1)(p^y - 1)}{p - 1}\right], \quad p > 0, p \neq 1$
- $x \operatorname{t}_{10} y = \dfrac{1}{1 + \sqrt[p]{((1-x)/x)^p + ((1-y)/y)^p}}, \quad p > 0$
- $x \operatorname{t}_{11} y = \begin{cases} x, & \text{if } y = 1 \\ y, & \text{if } x = 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

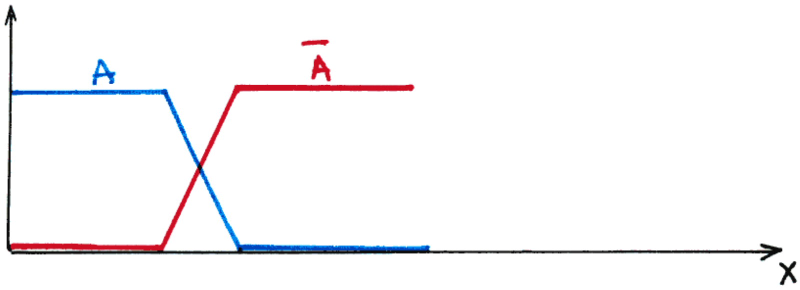
EXEMPLOS DE S-NORMAS

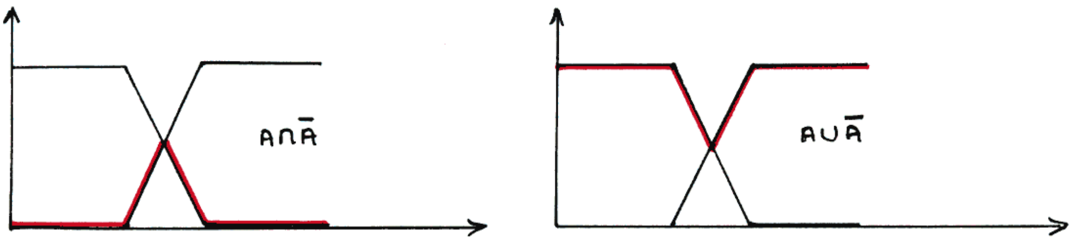
MCFC
FL
III.7

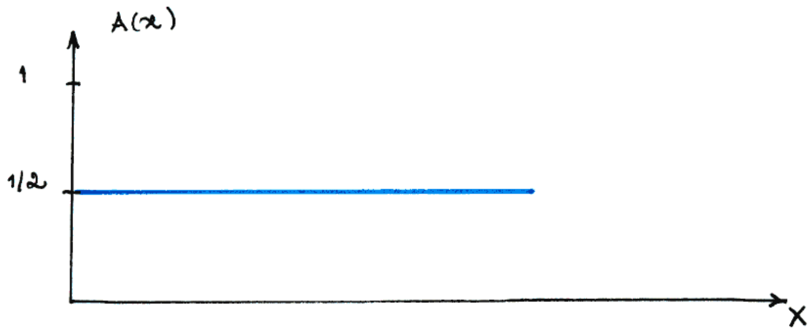
- $x \; s_1 \; y = \dfrac{1}{1 + \sqrt[p]{(x/1-x)^p + (y/1-y)^p}}, \quad p > 0$
- $x \; s_2 \; y = \min(1, x + y + pxy), \quad p \geq 0$
- $x \; s_2 \; y = \min(1, \sqrt[p]{x^p + y^p}), \quad p > 0$
- $x \; s_4 \; y = x + y - xy$
- $x \; s_5 \; y = \dfrac{x + y - xy - (1-p)xy}{1 - (1-p)xy}, \quad p \geq 0$
- $x \; s_6 \; y = 1 - \dfrac{1}{\sqrt[p]{1/(1-x)^p + 1/(1-x)^p - 1}}$
- $x \; s_7 \; y = 1 - \max(0, \sqrt[p]{((1-x)^p + (1-y)^p - 1)}), \quad p > 0$
- $x \; s_8 \; y = 1 - \dfrac{(1-x)(1-y)}{\max((1-x), (1-y), p)}, \quad p \in [0, 1]$
- $x \; s_9 \; y = \log_p \left[1 + \dfrac{(p^{1-x} - 1)(p^{1-y} - 1)}{p - 1}\right], \quad p > 0, p \neq 1$
- $x \; s_{10} \; y = \dfrac{1}{1 - \sqrt[p]{(x/1-x)^p + (y/1-y)^p}}, \quad p > 0$
- $x \; s_{11} \; y = \begin{cases} x, & \text{if } y = 0 \\ y, & \text{if } x = 0 \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases}$

EM GERAL, NORMAS TRIANGULARES NÃO SATISFAZEM AS LEIS DA CONTRADIÇÃO, OU SEJA:

$$A(x) \cap \bar{A}(x) \neq \phi$$
$$A(x) \cup \bar{A}(x) \neq X$$







A(x) É O CONJUNTO MAIS NEBULOSO DENTRE TODOS OS FUZZY SETS QUE PODEM SER DEFINIDOS EM X.

TANTO O OPERADOR MÍNIMO QUANTO O OPERADOR MÁXIMO RETORNAM O MESMO VALOR PARA INTERSECÇÃO E UNIÃO DE A E $\bar{A}$:

$$\min\left[A(x),\ 1-A(x)\right] = \min\left(1/2,\ 1/2\right) = 1/2$$
$$\max\left[A(x),\ 1-A(x)\right] = \max\left(1/2,\ 1/2\right) = 1/2 \quad , \ \forall x \text{ EM } X.$$

O GRAU DE FALHA DE UM CONJUNTO EM SATISFAZER AS LEIS DA CONTRADIÇÃO INDICAM O GRAU DE NEBULOSIDADE DO CONJUNTO.

III.3 OPERAÇÕES DE AGREGAÇÃO

ELEMENTOS DE UMA COLEÇÃO DE FUZZY SETS PODEM SER COMBINADOS PARA PRODUZIR UM ÚNICO FUZZY SET, POR MEIO DE OPERAÇÕES DE AGREGAÇÃO.

EXEMPLO: $\cap$ E $\cup$ DE QUALQUER Nº DE FUZZY SETS

UMA AGREGAÇÃO É UMA OPERAÇÃO n-ÁRIA $A : [0,1]^n \to [0,1]$ QUE SATISFAÇA AS SEGUINTES CONDIÇÕES:

CONDIÇÕES DE CONTORNO : $A(0,\dots,0) = 0$ E $A(1,\dots,1) = 1$

MONOTONICIDADE : $A(x_1,\dots,x_n) \geq A(y_1,\dots,y_n)$ SE $x_i \geq y_i$, $i = 1,\dots,n$

(NORMAS TRIANGULARES (t-NORMAS E s-NORMAS) SÃO OPERADORES DE AGREGAÇÃO).

1. SOMAS SIMÉTRICAS : SÃO FUNÇÕES DE n-ARGUMENTOS, DENOTADAS POR S_SOMAS, TAIS QUE, ALÉM DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO E MONOTONICIDADE, SEJAM CONTÍNUAS, COMUTATIVAS E AUTO-DUAIS.

$$S\_soma(x_1,\dots,x_n) = 1 - S\_soma(1-x_1,\dots,1-x_n)$$

QUALQUER SOMA SIMÉTRICA PODE SER REPRESENTADA NA FORMA

$$S\_soma(x_1,\dots,x_n) = \left[1 + \frac{\rho(1-x_1,\dots,1-x_n)}{\rho(x_1,\dots,x_n)}\right]^{-1}$$

COM ρ SENDO UMA FUNÇÃO CONTÍNUA E CRESCENTE, COM $\rho(0,\dots,0) = 0$

2. **MÉDIAS**: UM OPERADOR MÉDIA (MÉDIA GENERALIZADA), DEFINIDO PARA n ARGUMENTOS É IDEMPOTENTE E COMUTATIVO, ALÉM DE ATENDER ÀS CONDIÇÕES DE MONOTONICIDADE E DE CONTORNO.

A MÉDIA GENERALIZADA É EXPRESSA POR:

$$A(x_1, \dots, x_n) = \sqrt[p]{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i)^p}, \quad p \in \mathbb{R}, \quad p \neq 0.$$

CASO PARTICULAR:

MÉDIA ARITMÉTICA

$$p = 1 \implies A(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i)$$

3. **MÉDIA PONDERADA ORDENADA** (ORDERED WEIGHTED AVERAGING = OWA):

A FAMÍLIA DE OPERADORES OWA PODE SER CONSIDERADA COMO UMA CLASSE DE OPERADORES PONDERADOS.

SEJA O VETOR DE PESOS $\underline{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, TAL QUE $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$.

SEJA A SEQÜÊNCIA DE VALORES DE PERTINÊNCIA $\{A(x_i)\}$ ORDENADA CONFORME $A(x_1) \leq A(x_2) \leq \dots \leq A(x_n)$.

ENTÃO,

$$OWA(A, \underline{w}) = \sum_{i=1}^{n} w_i \, A(x_i).$$

OPERADOR OWA $\iff$ SOMA PONDERADA EM QUE OS ARGUMENTOS SÃO ORDENADOS.

→ SE $\underline{w} = (1\ 0 \dots 0) \implies OWA(A, \underline{w}) = OWA(A, (1\ 0 \dots 0)) =$
$= A(x_1) = \min[A(x_1), \dots, A(x_n)]$

→ SE $\underline{w} = (0 \dots 0\ 1) \implies OWA(A, \underline{w}) = OWA(A, (0 \dots 0\ 1)) =$
$= A(x_n) = \max[A(x_1), \dots, A(x_n)]$

→ SE $\underline{w} = (1/n \dots 1/n) \implies OWA(A, \underline{w}) = OWA(A, (1/n \dots 1/n)) =$
$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A(x_i)$ MÉDIA ARITMÉTICA

III. 4 OPERAÇÕES DE NEGAÇÃO (NEGAÇÕES)

A NOÇÃO DO COMPLEMENTO DE A PODE SER GENERALIZADA A PARTIR DA OPERAÇÃO DE NEGAÇÃO

$$N : [0,1] \to [0,1] \quad ,$$

DE ACORDO COM AS CONDIÇÕES :

- MONOTONICIDADE E N É NÃO CRESCENTE
- CONDIÇÕES DE CONTORNO : $N(0) = 1$, $N(1) = 0$

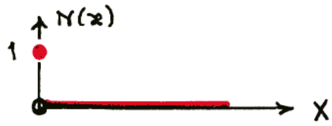
} SEMPRE

- CONTINUIDADE : N É UMA FUNÇÃO CONTÍNUA
- INVOLUÇÃO : $N(N(x)) = x$ PARA $x \in [0,1]$

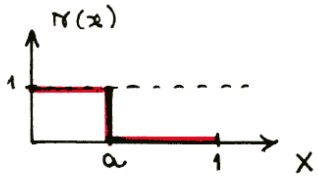
} NEM SEMPRE

EXEMPLOS DE FUNÇÕES QUE SE QUALIFICAM A OPERADORES DE NEGAÇÃO:

$$N(x) = \begin{cases} 1, & \text{SE } x = 0 \\ 0, & \text{SE } x > 0 \end{cases}$$



$$N(x) = \begin{cases} 1, & \text{SE } x < a \\ 0, & \text{SE } x \geq a \end{cases} \quad , a \in [0,1]$$



$$N(x) = \frac{1-x}{1+\lambda x} \;, \lambda \in (-1,\infty) \;; \text{ PARA } \lambda = 0 \Rightarrow N(x) = 1 - x$$

COMPLEMENTO DE 1

$$N(x) = \sqrt[w]{1-x^w} \;, w \in (0,\infty) \;; \text{ PARA } w = 1 \Rightarrow N(x) = 1 - x$$

SISTEMA FORMAL DE OPERAÇÕES LÓGICAS

É UM SISTEMA FORMADO POR NORMAS TRIANGULARES E NEGAÇÕES, DO TIPO (t, s, N) .

EM UM SISTEMA (t, s, N) UMA t-NORMA E UMA s-NORMA SÃO DUAIS COM RESPEITO A N SE E SOMENTE SE :

$$x\, s\, y = N(N(x)\, t\, N(y)) \quad \text{OU} \quad x\, t\, y = N(N(x)\, s\, N(y)) .$$

$$A \cup B = \overline{(\bar{A} \cap \bar{B})} \qquad\qquad A \cap B = \overline{(\bar{A} \cup \bar{B})}$$

EXEMPLO : SISTEMA (t, s, N) = SISTEMA $(\min(x,y), \max(x,y), 1-x)$

$x\, t\, y = \min(x,y)$

$x\, s\, y = \max(x,y)$

$N(x) = 1 - x$

III.5 OPERAÇÕES DE COMPARAÇÃO

MÉTRICA 1 : MEDIDAS DE DISTÂNCIA

MEDIDAS DE DISTÂNCIA CONSIDERAM UMA FUNÇÃO DISTÂNCIA ENTRE FUNÇÕES DE PERTINÊNCIA DE FUZZY SETS A E B E CONSIDERAM ESTA MÉTRICA COMO UM INDICADOR DE O QUANTO UM FUZZY SET PODE APROXIMAR OUTRO FUZZY SET.

EM GERAL, A DISTÂNCIA ENTRE A E B, DEFINIDA NO MESMO UNIVERSO DE DISCURSO X, $X \subseteq \mathbb{R}$, PODE SER DEFINIDA USANDO A DISTÂNCIA DE MINKOWSKI:

$$d(A,B) = \left[\int_X |A(x) - B(x)|^p \, dx \right]^{1/p}, \quad p \geq 1 .$$

- CASOS ESPECÍFICOS TIPICAMENTE ENCONTRADOS EM APLICAÇÕES:

DISTÂNCIA DE HAMMING ($p=1$) : $d(A,B) = \int_X |A(x) - B(x)| \, dx$

DISTÂNCIA EUCLIDEANA ($p=2$) : $d(A,B) = \left(\int_X |A(x) - B(x)|^2 dx \right)^{1/2}$

DISTÂNCIA DE TCHEBYSCHEV ($p=\infty$) : $d(A,B) = \sup_{x \in X} |A(x) - B(x)|$.

- PARA UNIVERSOS DE DISCURSO CONTÍNUOS, $\int_X \to \sum_X$.

- QUANTO MAIS SIMILARES FOREM DOIS FUZZY SETS, MENOR O VALOR DA FUNÇÃO DISTÂNCIA $d(A,B)$, ENTRE ELES.

- COSTUMA-SE NORMALIZAR $d(A,B)$ E USAR A VERSÃO NORMALIZADA DA DISTÂNCIA ($d_n(A,B)$) PARA EXPRESSAR SIMILARIDADE, DE ACORDO COM O COMPLEMENTO, OU SEJA, $(1 - d_n(A,B))$.

MÉTRICA 2 : ÍNDICES DE IGUALDADE

ÍNDICES DE IGUALDADE SE CONCENTRAM NA EXPRESSÃO DE SIMILARIDADE (OU DIFERENÇA) ENTRE FUZZY SETS.

PREDICADO ORIGINAL DA TEORIA DE CONJUNTOS: $A = B \iff (A \subset B)\ E\ (B \subset A)$

NA TEORIA DE CONJUNTOS NEBULOSOS:

- A CONJUNÇÃO "E" DO PREDICADO ORIGINAL É MODELADA PELO OPERADOR min
- A INCLUSÃO "$\subset$" DO PREDICADO ORIGINAL É MODELADA PELO OPERADOR φ, INDUZIDO POR UMA t-NORMA CONTÍNUA:

$$A(x)\ \varphi\ B(x) = \sup_{c \in [0,1]} \big(A(x)\ t\ c\big) \leq B(x)$$

ASSIM:

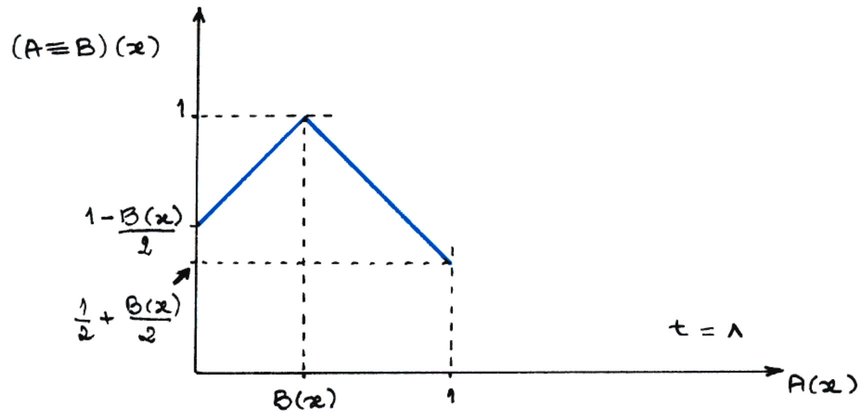
$$(A \equiv B)(x) = \frac{1}{2} \Big\{ [A(x)\varphi B(x)] \wedge [B(x) \varphi A(x)] + [\bar{A}(x)\varphi \bar{B}(x)] \wedge [\bar{B}(x) \varphi \bar{A}(x)] \Big\}$$

- NA EXPRESSÃO P/ $(A \equiv B)(x)$ É TOMADA A MÉDIA DOS DOIS TERMOS PARA QUE O ÍNDICE DE IGUALDADE SEJA UMA FUNÇÃO MAIS SIMÉTRICA DOS VALORES DE PERTINÊNCIA QUE ESTÃO SENDO COMPARADOS.

- O SEGUNDO TERMO NA EXPRESSÃO INCLUI COMPLEMENTOS DOS RESPECTIVOS FUZZY SETS.

- A t-NORMA ESPECIFICADA CORRESPONDE AO OPERADOR min ($\wedge$).

A FIGURA ABAIXO REPRESENTA GRAFICAMENTE O ÍNDICE DE IGUALDADE $(A\equiv B)(x)$, CONFORME DEFINIDO.



PARA REPRESENTAR $(A\equiv B)(x)$ GRAFICAMENTE, A PARTIR DE

$$(A\equiv B)(x) = \frac{1}{2}\left\{\underbrace{[A(x)\varphi B(x)]}_{(1)} \wedge \underbrace{[B(x)\varphi A(x)]}_{(2)} + \underbrace{[\bar{A}(x)\varphi \bar{B}(x)]}_{(3)} \wedge \underbrace{[\bar{B}(x)\varphi \bar{A}(x)]}_{(4)}\right\}$$

FORAM DETERMINADOS (1), (2), (3) E (4). COMO EXEMPLO,

(1) $A(x)\varphi B(x) = \sup\limits_{c\in[0,1]} (A(x)\,t\,c) \leq B(x)$; $t=\wedge$

$$a\varphi b = \sup_{c\in[0,1]} (a\,t\,c)\leq b \;;\; a,b\in[0,1]$$

a	b	$a\,t\,c = a\wedge c$; $c\in[0,1]$	$\sup a\,t\,c \overset{?}{\leq} b$
0	0	0 $(=a)$	VERDADEIRO, ENTÃO $a \Rightarrow b$
0	1	0 $(=a)$	VERDADEIRO, ENTÃO $a \Rightarrow b$
1	0	c $(c\in[0,1])$	FALSO, ENTÃO $a \not\Rightarrow b$
1	1	c $(c\in[0,1])$	VERDADEIRO, ENTÃO $a \Rightarrow b$

ASSIM:

$$A(x)\varphi B(x) = \begin{cases} 1 & \text{SE } A(x) < B(x) \\ B(x) - A(x) + 1 & \text{SE } A(x) \geqslant B(x) \end{cases}$$

a	b		
0	0	$a=b$	$b-a+1=1$
0	1	$a<b$	1
1	0	$a>b$	$b-a+1=0$
1	1	$a=b$	$b-a+1=1$

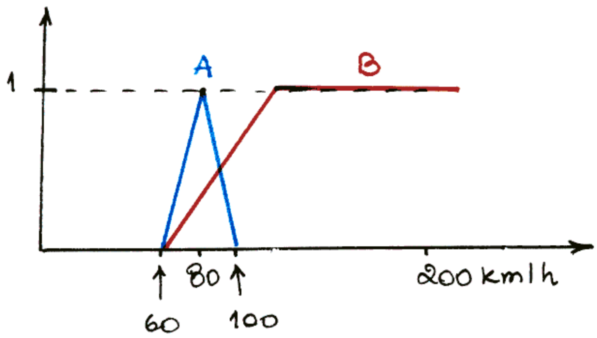
SIMILARMENTE PODEM SER DETERMINADOS (2), (3) E (4), COMO O INTUITO DE OBTER GRAFICAMENTE $(A\equiv B)(x)$.

Conseqüentemente,

$$(A \equiv B)(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(A(x) - B(x)\right) + 1 & \text{se } A(x) < B(x) \\ \frac{1}{2}\left(B(x) - A(x)\right) + 1 & \text{se } A(x) \geq B(x) \end{cases}$$

Métrica 3: Medidas de Possibilidade e Necessidade

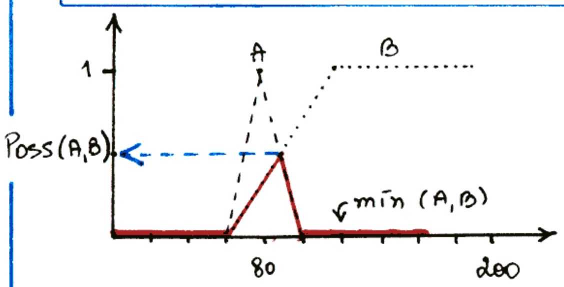
Considere a figura abaixo, em que o conceito de alta velocidade é representado por um fuzzy set B definido no espaço de velocidades. O limite de velocidade na freeway em questão é de 100 km/h.



A função de pertinência de um veículo que se move a ≈ 80 km/h é triangular, (A).

A medida de possibilidade do FS A com respeito ao FS B, denotada por Poss (A,B), é definida como:

$$\text{Poss}(A,B) = \sup_{x \in X} \left[\min\left(A(x), B(x)\right)\right].$$



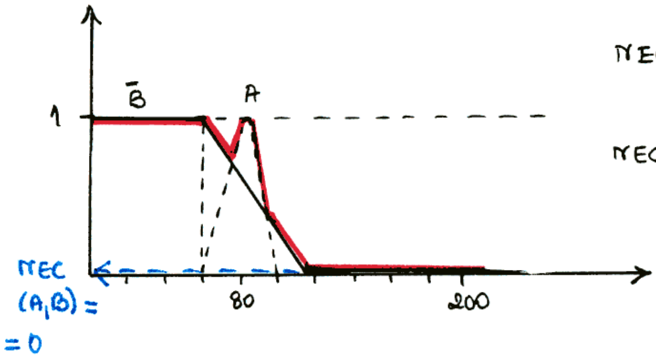
A medida de possibilidade quantifica o quanto A e B se sobrepõem. (o que têm em comum)

Poss (A,B) = Poss (B,A)

$$\text{Poss}\,(\underbrace{\text{AO REDOR DE 80}}_{A},\ \underbrace{\text{ALTA VELOCIDADE}}_{B}) = 0.6\ .$$

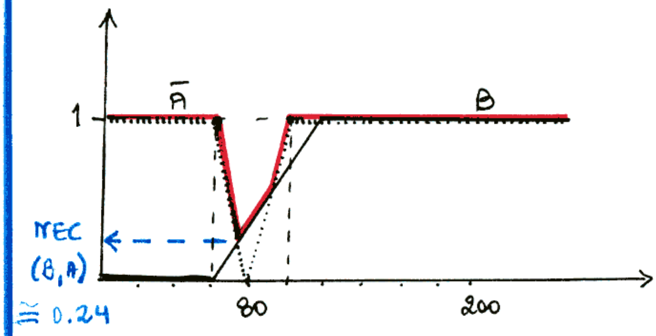
A medida de necessidade de A com respeito a B, denotada por Nec(A,B), é definida como:

$$\text{Nec}(A,B) = \inf_{x \in X} \left[\max \left(A(x), 1 - B(x) \right) \right].$$



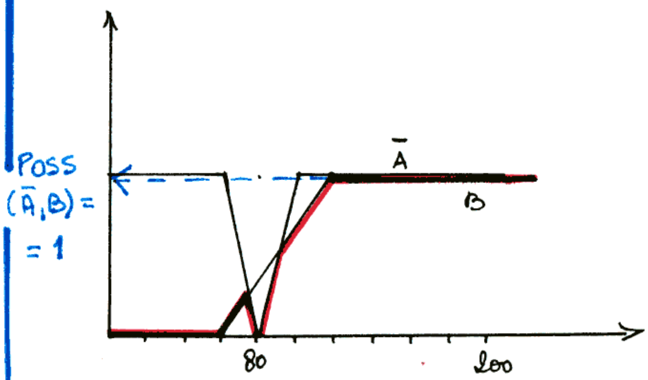
$\text{Nec}(A,B) = 0$.

$\text{Nec}(A,B) \neq \text{Nec}(B,A)$

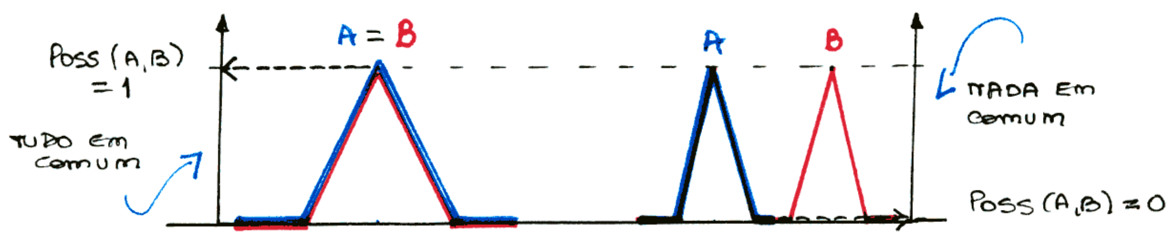


$\text{Nec}(B,A) \cong 0.24$

$$\boxed{\text{Nec}(A,B) + \text{Poss}(\bar{A},B) = 1}$$



$$\left.\begin{array}{l} \text{Nec}(A,B) = 0 \\ \text{Poss}(\bar{A},B) = 1 \end{array}\right\} +$$



MÉTRICA 4: MEDIDAS DE COMPATIBILIDADE

QUANTIFICAM O QUANTO Y É COMPATÍVEL COM OUTRO CONJUNTO NEBULOSO DEFINIDO NO MESMO ESPAÇO.

SEJAM Y E A CONJUNTOS NEBULOSOS EXPRESSOS EM X.
A COMPATIBILIDADE DE Y COM A É DEFINIDA COMO:

$$\text{comp}\,(Y,A)(u) = \sup_{u = A(x)} Y(x) \quad , u \in [0,1]$$

- COMP NÃO É QUANTIDADE NUMÉRICA, MAS UM MAPEAMENTO ENTRE DOIS INTERVALOS UNITÁRIOS.
- COMP PODE SER VISTA COMO UM CONJUNTO NEBULOSO DEFINIDO EM $[0,1]$: UM FUZZY SET DE COMPATIBILIDADE.
- COMP É ASSIMÉTRICA.

NA FIGURA ABAIXO, O FS A É UMA REFERÊNCIA CONCEITUAL COM RESPEITO À QUAL A COMPATIBILIDADE DEVA SER COMPUTADA.