IV RELAÇÕES FUZZY

IV.1 FRAMES DE COGNIÇÃO
DEFINIÇÃO, PROPRIEDADES

IV.2 CODIFICAÇÃO E DECODIFICAÇÃO NEBULOSA
FUZZYFICAÇÃO, DEFUZZYFICAÇÃO
DECODIFICAÇÃO BASEADA EM VALORES MODAIS
DECODIFICAÇÃO BASEADA EM FUNÇÕES CARACTERÍSTICAS

IV.3 RELAÇÕES FUZZY
DEFINIÇÕES, OPERAÇÕES, PROPRIEDADES

IV.4 COMPOSIÇÃO DE RELAÇÕES NEBULOSAS
COMPOSIÇÃO SUP-t
COMPOSIÇÃO INF-S
PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES DE COMPOSIÇÃO

IV.5 PROJEÇÃO DE RELAÇÕES NEBULOSAS

IV.6 EXTENSÃO CILÍNDRICA DE RELAÇÕES NEBULOSAS

IV.1 FRAMES DE COGNIÇÃO

- FAMÍLIAS DE FUZZY SETS GERAM O CONCEITO DE FRAMES DE COGNIÇÃO.
- FRAMES DE COGNIÇÃO GRANULARIZAM A INFORMAÇÃO.
- GRANULARIZAÇÃO DA INFORMAÇÃO PERMITE:

  - MODELAMENTO FUZZY
  - CONTROLE FUZZY
  - CLASSIFICADORES FUZZY
  - SISTS. FUZZY P/ PROCESSAMENTO DE INFORMAÇÃO

- GRANULARIZAÇÃO ≡ QUANTIZAÇÃO NEBULOSA

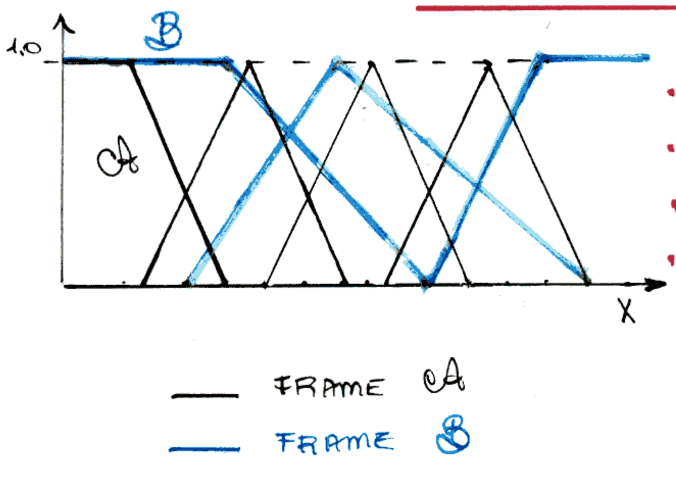
> UM FRAME DE COGNIÇÃO (OU MOLDURA COGNITIVA) CONSISTE DE VÁRIOS FUZZY SETS NORMAIS USADOS COMO PONTOS DE REFERÊNCIA PARA O PROCESSAMENTO DE INFORMAÇÃO NEBULOSA.

DEFINIÇÃO: UM FRAME DE COGNIÇÃO $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ É UMA COLEÇÃO DE TODOS OS FUZZY SETS DEFINIDOS NO MESMO UNIVERSO DE DISCURSO X QUE SATISFAZEM AS SEGUINTES CONDIÇÕES:

1. COBERTURA: $\forall x \in X \; \exists \; A_i(x) > \varepsilon, \; \varepsilon \in [0,1], \; i = 1, \dots, n$.

   ε: NÍVEL DE COBERTURA; $\varepsilon \in [0,1]$.
   CADA ELEMENTO DE X É A, NO MÍNIMO, UM FS, A UM GRAU MAIOR DO QUE ε.

2. RELEVÂNCIA SEMÂNTICA: INTERPRETABILIDADE LINGUÍSTICA DOS ELEMENTOS DE $\mathcal{A}$.



- A_i's SÃO UNIMODAIS
- A_i's SÃO NORMAIS
- A_i's SÃO SUFICIENTEMENTE DISJUNTOS
- $\# A_i$'s (CARDINALIDADE DE A) É PEQUENA

$$5 \leq \# A_i\text{'s} \leq 9$$

$\# A_i$'s (EMPIRICAMENTE ADEQUADO) = ?

SUFICIENTEMENTE DISJUNTOS PARA QUE OS FS SEJAM LINGUISTICAMENTE SIGNIFICATIVOS.

PROPRIEDADES DOS FRAMES DE COGNIÇÃO:

UMA FAMÍLIA DE DESIGNADORES LINGÜÍSTICOS ↑FSs ENCAPSULADOS EM UM FRAME DE COGNIÇÃO TEM AS SEGUINTES PROPRIEDADES:

FOCO DE ATENÇÃO:

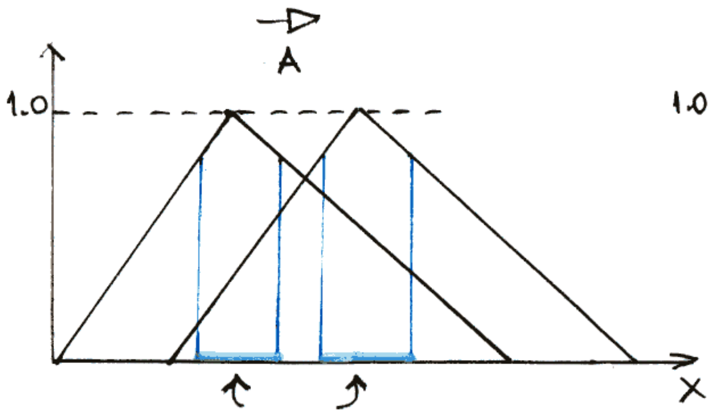
O FOCO DE ATENÇÃO DE UM FS $A = A_i$ PERTENCENTE AO FRAME DE COGNIÇÃO $\mathcal{A}$ É DEFINIDO COMO COMO UM α-CORTE DESTE FUZZY SET.

MOVENDO A AO LONGO DE X, SEM ALTERAR A FORMA DE SUA FUNÇÃO DE PERTINÊNCIA, PODE-SE FOCAR EM UMA CERTA REGIÃO DE X.

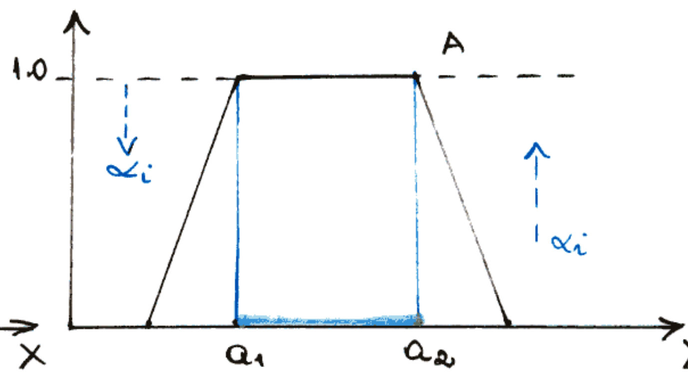
INFORMATION HIDING:

CONSIDERE O FS TRAPEZOIDAL A MOSTRADO NA FIG. ABAIXO. O α-CORTE ($\alpha = 1$) É CONSTITUÍDO DOS ELEMENTOS $\in [a_1, a_2]$. COMO $A(x) = 1 \ \forall x \in [a_1, a_2]$, TODOS OS ELEMENTOS DENTRO DESTE INTERVALO SÃO "NÃO-DISTINGÜÍVEIS", CONFORME EXPRESSOS POR A.

ASSIM, MODULANDO (AUMENTANDO OU DIMINUINDO) O NÍVEL DO α-CORTE PROCEDE-SE A UMA "α-INFORMATION HIDING".



FOCOS DE ATENÇÃO



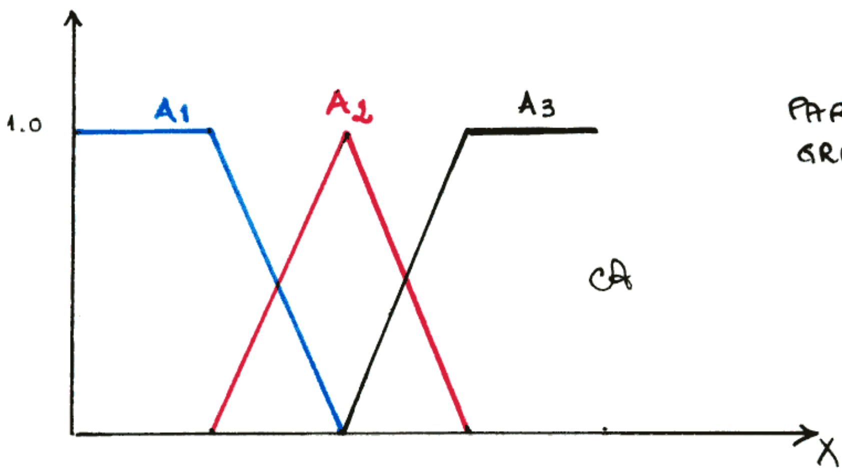
INFORMATION HIDING AT $\alpha = 1.0$

IV.2 CODIFICAÇÃO E DECODIFICAÇÃO NEBULOSA

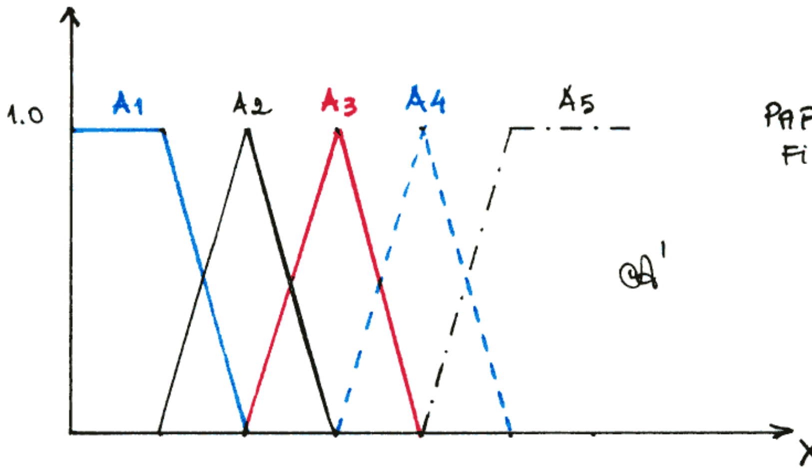
CODIFICAÇÃO: ≡ **FUZZYFICAÇÃO**	REPRESENTAÇÃO DE QUALQUER DADO (NUMÉRICO OU NÃO) EM TERMOS DE UM "CODEBOOK" $\mathcal{A}$.
DECODIFICAÇÃO: ≡ **DEFUZZYFICAÇÃO**	TRANSFORMAR O "CODEBOOK" $\mathcal{A}$ DE VOLTA A SEU FORMATO ORIGINAL.

CODIFICAÇÃO

- A QUALIDADE DA CODIFICAÇÃO DEPENDE DA GRANULARIDADE IMPOSTA AO FRAME DE COGNIÇÃO, A QUAL DEPENDE DA NATUREZA DO PROBLEMA TRATADO.
- A FIGURA ABAIXO APRESENTA PARTIÇÕES FUZZY DE DIFERENTES GRANULARIDADES.



PARTIÇÃO GROSSA DE X



PARTIÇÃO FINA DE X

DECODIFICAÇÃO

- OS MECANISMOS DE CODIFICAÇÃO (F) E DECODIFICAÇÃO (F^{-1}) DEVEM SER TAIS QUE

$$F^{-1}(F(x)) = X$$

QUANDO $X = \{x\}$;

$$F^{-1}(F(\{x\})) = x$$

- HÁ DUAS CATEGORIAS DE ALGORITMOS PARA DECODIFICAÇÃO (OU DEFUZZYFICAÇÃO) :
  1. DECODIFICAÇÃO BASEADA EM VALORES MODAIS DO "CODEBOOK" ;
  2. DECODIFICAÇÃO ATRAVÉS DAS FUNÇÕES CARACTERÍSTICAS DOS TERMOS LINGÜÍSTICOS DO "CODEBOOK" .

- CADA UMA DAS DUAS CATEGORIAS APRESENTA INÚMERAS HEURÍSTICAS PARA DECODIFICAÇÃO . AS MAIS UTILIZADAS SÃO :

VALORES MODAIS $\rightarrow$ DECODIFICAÇÃO POR CENTRO DE GRAVIDADE

FUNÇÕES CARACTERÍSTICAS $\rightarrow$ DECODIFICAÇÃO PELO MÉTODO DO CENTRO DE ÁREA .

CENTRO DE GRAVIDADE

$$F^{-1}(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i(x)\, a_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i(x)}$$

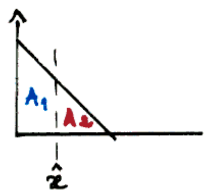
ONDE a_i DENOTA UM VALOR MODAL DE A_i .

ESTA ABORDAGEM PRODUZ UM VALOR APROXIMADO DE x .

CENTRO DE ÁREA (CoA)

O VALOR DECODIFICADO ($\hat{x}$) É RESULTADO DO BALANÇO ENTRE AS DUAS ÁREAS DE A DELIMITADAS POR $\hat{x}$, OU SEJA , $\hat{x}$ É TAL QUE

$$\int_{-\infty}^{\hat{x}} A(x)\,dx = \int_{\hat{x}}^{\infty} A(x)\,dx .$$

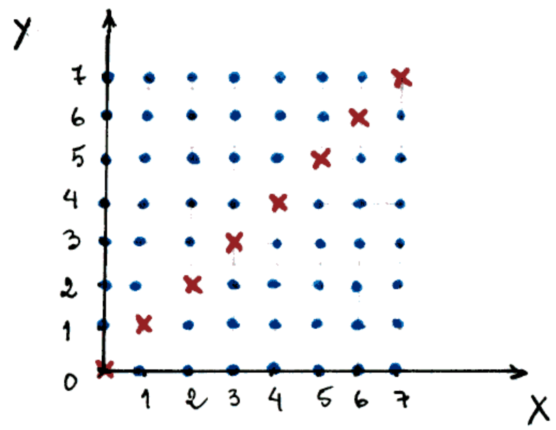


$A_1 = A_2$

IV.3 RELAÇÕES FUZZY

→ SEJAM X E Y DOIS UNIVERSOS DE DISCURSO. UMA **RELAÇÃO** DEFINIDA EM $X \times Y$ É QUALQUER SUB-CONJUNTO DO PRODUTO CARTESIANO DESTES DOIS UNIVERSOS: $R : X \times Y \rightarrow \{0,1\}$.

→ SE O VALOR DA RELAÇÃO PARA ALGUM x E y EM X E Y FOR IGUAL A 1; $R(x,y)=1$, SIGNIFICA QUE OS DOIS ELEMENTOS SÃO RELACIONADOS. CASO CONTRÁRIO, $R(x,y)=0$ E x E y SÃO DITOS NÃO RELACIONADOS.



A RELAÇÃO "IGUAL A" DEFINIDA EM $X = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ IDENTIFICA O SEGUINTE CONJUNTO NO PRODUTO CARTESIANO DE $X \times Y$:
$R = \{(x,y) \in X \times Y \mid x=y\}$, OU SEJA, OS PARES $(0,0), (1,1), \dots, (7,7)$.
PARA ESTES PARES, A RELAÇÃO VALE 1.
PARA OS DEMAIS, ZERO.
$R(0,0)=1$; $R(1,1)=1$; $R(0,1)=0$; ...

A RELAÇÃO "IGUAL A" CONFORME DEFINIDA, PODE SER EXPRESSA SOB A FORMA MATRICIAL, CUJOS ELEMENTOS "1" DEFINEM A RELAÇÃO DE PERTINÊNCIA E OS ELEMENTOS "0" DEFINEM NÃO PERTINÊNCIA.

$$R(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$R(x,y)=1$ PARA OS PARES (x,y) QUE PERTENCEM À RELAÇÃO.
(OU: $xRy=1$)

$R(x,y) \rightarrow \{0,1\}$

RELAÇÕES FUZZY GENERALIZAM O CONCEITO GENÉRICO DE RELAÇÃO ADMITINDO A NOÇÃO DE PERTINÊNCIA PARCIAL NA ASSOCIAÇÃO ENTRE OS PONTOS NO UNIVERSO DE DISCURSO, OU SEJA:

RELAÇÃO NEBULOSA : $R(x,y) \to [0,1]$; $\left.\begin{matrix} x \ll y \\ x \approx y \end{matrix}\right\}$ O QUANTO?

EXEMPLOS DE RELAÇÕES NEBULOSAS COMPREENDEM (EM $\mathbb{R}^2$):

x É MUITO MENOR DO QUE y : $R(x,y) = 1 - \exp(-|y-x|)$

x E y SÃO APROXIMADAMENTE IGUAIS : $R(x,y) = \exp\left\{\frac{|x-y|}{\alpha}\right\}; \alpha > 0$

SEJAM $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ E $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$, CONSIDERE A RELAÇÃO FUZZY R, EXPRESSA POR:

$$R = \begin{array}{c|ccc} & y_1 & y_2 & y_3 \\ \hline x_1 & 0.0 & 0.4 & 1.0 \\ x_2 & 0.3 & 0.9 & 0.0 \\ x_3 & 0.5 & 0.7 & 0.2 \end{array}$$

RELAÇÃO MATRICIAL

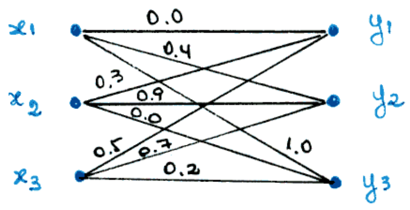


DIAGRAMA SAGITAL

$R : X \times Y \to [0,1]$

O DOMÍNIO DE R, $dom(R)$, É DEFINIDO COMO $dom(R)(x) = \sup_{y \in Y} R(x,y)$.
(MÁX. VALOR DE R AO LONGO DE Y)

O CO-DOMÍNIO DE R, $co(R)$, É DEFINIDO COMO $co(R)(y) = \sup_{x \in X} R(x,y)$.
(MÁX. VALOR DE R AO LONGO DE X)

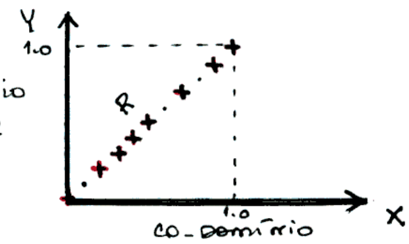
$$dom(R)(x) = \sup_{y \in Y} R(x,y) = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.9 \\ 1.0 \end{bmatrix} = 1.0$$

$$R = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.4 & 1.0 \\ 0.3 & 0.9 & 0.0 \\ 0.5 & 0.7 & 0.2 \end{bmatrix} \quad \xrightarrow{y} \quad \downarrow x$$

$$co\text{-}dom(R)(y) = \sup_{x \in X} R(x,y) = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0.9 \\ 0.7 \end{bmatrix} = 1.0$$

UNIVERSOS DE DISCURSO DISCRETOS COM $CARD(X)$ E $CARD(Y) < \infty$, O DOMÍNIO E O CO-DOMÍNIO SÃO O MAIOR VALOR (HEIGHT) DAS LINHAS E COLUNAS DA RELAÇÃO FUZZY R.

DOMÍNIO
PROJEÇÃO DE R NO EIXO Y



CO-DOMÍNIO
PROJEÇÃO DE R NO EIXO X

DEFINIÇÕES :

1. DOMÍNIO : $\text{dom}\, R(x) = \sup\limits_{y \in Y} R(x,y)$

2. CO-DOMÍNIO : $\text{co}\, R(x) = \sup\limits_{x \in X} R(x,y)$

OPERAÇÕES :

1. UNIÃO : $(R \cup W)(x,y) = R(x,y) \, s \, W(x,y)$

2. INTERSECÇÃO : $(R \cap W)(x,y) = R(x,y) \, t \, W(x,y)$

3. COMPLEMENTO : $\bar{R}(x,y) = 1 - R(x,y)$

PROPRIEDADES :

1. INCLUSÃO : $R \subseteq W \qquad R(x,y) \leq W(x,y)$

2. IGUALDADE : $R = W \qquad R(x,y) = W(x,y)$

3. TRANSPOSIÇÃO :

$$R^T(x,y) = R(y,x)$$
$$(R^T)^T = R$$
$$(\bar{R})^T = \overline{R^T}$$

IV.4 COMPOSIÇÃO DE RELAÇÕES NEBULOSAS

RELAÇÕES FUZZY PODEM SER COMPOSTAS COM O AUXÍLIO DE DIFERENTES OPERAÇÕES DA TEORIA DE CONJUNTOS.

SEJAM R, G E W RELAÇÕES FUZZY DEFINIDAS NOS PRODUTOS CARTESIANOS
$R: X \times Y \to [0,1]$; $G: X \times Z \to [0,1]$; $W: Z \times Y \to [0,1]$

COMPOSIÇÃO SUP-t (OU SUP-MIN)

$$R(x,y) = \sup_{z \in Z} \left[G(x,z) \; t \; W(z,y) \right]$$

$R = G \,\square\, W$ OU $R = G \circ W$

$$R(x,y) = \sup_{z \in Z} \left\{ G(x,z) \wedge W(z,y) \right\}$$

COMPOSIÇÃO SUP MIN
(OU MÁX-MIN EM UNIVERSOS DE DISCURSO DISCRETOS)

COMPOSIÇÃO INF-S (OU INF-MÁX)

$$R(x,y) = \inf_{z \in Z} \left[G(x,z) \; s \; W(z,y) \right]$$

$R = G \blacklozenge W$ OU $R = G \bullet W$

$$R(x,y) = \inf_{\in Z} \left\{ G(x,z) \vee W(z,y) \right\}$$

COMPOSIÇÃO INF MÁX
(OU MIN-MÁX EM UNIVERSOS DE DISCURSO DISCRETOS)

SEJAM : $X = \{x_1, x_2\}$; $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$; $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$

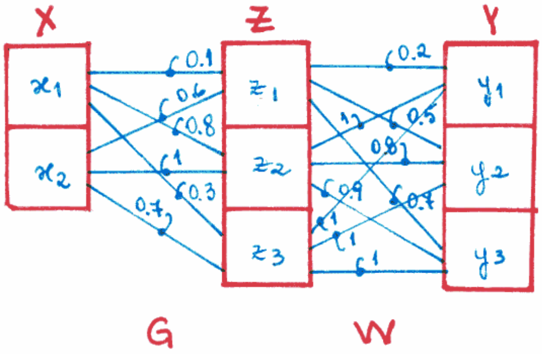
$$G(x,z) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.1 & 0.8 & 0.3 \\ 0.6 & 1 & 0.7 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array}$$

$[x \times z] = [2 \times 3]$

$$W(z,y) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.7 \\ 1 & 0.8 & 0.9 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{array}$$

$[z \times y] = [3 \times 3]$

$$R(x,y) = \begin{bmatrix} R(x_1,y_1) & R(x_1,y_2) & R(x_1,y_3) \\ R(x_2,y_1) & R(x_2,y_2) & R(x_2,y_3) \end{bmatrix}$$



				y_1	y_2	y_3
			z_1	0.2	0.5	0.7
			z_2	1	0.8	0.9
	z_1	z_2	z_3	1	1	1
x_1	0.1	0.8	0.3	$R(x_1,y_1)$	$R(x_1,y_2)$	$R(x_1,y_3)$
x_2	0.6	1	0.7	$R(x_2,y_1)$	$R(x_2,y_2)$	$R(x_2,y_3)$

COMPOSIÇÃO SUP-t (OU SUP-MÍN)		COMPOSIÇÃO INF-S (OU INF-MÁX)
$R(x,y) = \sup_{z \in Z} \{G(x,z) \wedge W(z,y)\}$		$R(x,y) = \inf_{z \in Z} \{G(x,z) \vee W(z,y)\}$
$\text{máx}\{\text{mín}(0.1,0.2); \text{mín}(0.8,1); \text{mín}(0.3,1)\}$ $\text{máx}\{0.1, 0.8, 0.3\} = 0.8$	$R(x_1,y_1)$	$\text{mín}\{\text{máx}(0.1,0.2); \text{máx}(0.8,1); \text{máx}(0.3,1)\}$ $\text{mín}\{0.2, 1, 1\} = 0.2$
$\text{máx}\{\text{mín}(0.1,0.5); \text{mín}(0.8,0.8); \text{mín}(0.3,1)\}$ $\text{máx}\{0.1, 0.8, 0.3\} = 0.8$	$R(x_1,y_2)$	$\text{mín}\{\text{máx}(0.1,0.5); \text{máx}(0.8,0.8); \text{máx}(0.3,1)\}$ $\text{mín}\{0.5, 0.8, 1\} = 0.5$
$\text{máx}\{\text{mín}(0.1,0.7); \text{mín}(0.8,0.9); \text{mín}(0.3,1)\}$ $\text{máx}\{0.1, 0.8, 0.3\} = 0.8$	$R(x_1,y_3)$	$\text{mín}\{\text{máx}(0.1,0.7); \text{máx}(0.8,0.9); \text{máx}(0.3,1)\}$ $\text{mín}\{0.7, 0.9; 1\} = 0.7$
$\text{máx}\{\text{mín}(0.6,0.2); \text{mín}(1,1); \text{mín}(0.7,1)\}$ $\text{máx}\{0.2, 1, 0.7\} = 1$	$R(x_2,y_1)$	$\text{mín}\{\text{máx}(0.6,0.2); \text{máx}(1,1); \text{máx}(0.7,1)\}$ $\text{mín}\{0.6, 1, 1\} = 0.6$
$\text{máx}\{\text{mín}(0.6,0.5); \text{mín}(1,0.8); \text{mín}(0.7,1)\}$ $\text{máx}\{0.5, 0.8, 0.7\} = 0.8$	$R(x_2,y_2)$	$\text{mín}\{\text{máx}(0.6,0.5); \text{máx}(1,0.8); \text{máx}(0.7,1)\}$ $\text{mín}\{0.6, 1, 1\} = 0.6$
$\text{máx}\{\text{mín}(0.6,0.7); \text{mín}(1,0.9); \text{mín}(0.7,1)\}$ $\text{máx}\{0.6, 0.9, 0.7\} = 0.9$	$R(x_2,y_3)$	$\text{mín}\{\text{máx}(0.6,0.7); \text{máx}(1,0.9); \text{máx}(0.7,1)\}$ $\text{mín}\{0.7, 1, 1\} = 0.7$
$R = G \,\square\, W = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.8 & 0.8 \\ 1 & 0.8 & 0.9 \end{bmatrix}$ (máx – mín)		$R = G \,\blacklozenge\, W = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.7 \\ 0.6 & 0.6 & 0.7 \end{bmatrix}$ (mín – máx)

PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES DE COMPOSIÇÃO sup-t E inf-s

→ ASSOCIATIVIDADE:

$$R \square (P \square W) = (R \square P) \square W$$

$$R \blacklozenge (P \blacklozenge W) = (R \blacklozenge P) \blacklozenge W$$

→ DISTRIBUTIVIDADE SOBRE UNIÃO (COMPOSIÇÃO SUP-t) E SOBRE INTERSECÇÃO (COMPOSIÇÃO INF-S):

$$R \square (P \cup W) = (R \square P) \cup (P \square W)$$

$$R \blacklozenge (P \cap W) = (R \blacklozenge P) \cap (R \blacklozenge P)$$

→ DISTRIBUTIVIDADE FRACA SOBRE INTERSECÇÃO (COMPOSIÇÃO SUP-t) E SOBRE UNIÃO (COMPOSIÇÃO INF-S):

$$R \square (P \cap W) \subset (R \square P) \cap (R \square W)$$

$$R \blacklozenge (P \cup W) \supset (R \blacklozenge P) \cup (R \blacklozenge W)$$

→ MONOTONICIDADE:

SE $P \subset W$ ENTÃO $R \square P \subset R \square W$ E $R \blacklozenge P \supset R \blacklozenge W$

→ OS OPERADORES DE COMPOSIÇÃO E O TRANSPOSTO INTERAGEM DA SEGUINTE FORMA:

$$(R \square P)^T = P^T \square R^T$$

$$(R \cup P)^T = R^T \cup P^T$$

$$(R \cap P)^T = R^T \cap P^T$$

IV.5 PROJEÇÃO DE RELAÇÕES NEBULOSAS

➡ A OPERAÇÃO DE PROJEÇÃO É USADA PARA AFETAR O TAMANHO DAS RELAÇÕES FUZZY.

SEJA R DEFINIDA EM $X \times Y$.

- A PROJEÇÃO DE R SOBRE X É DEFINIDA COMO

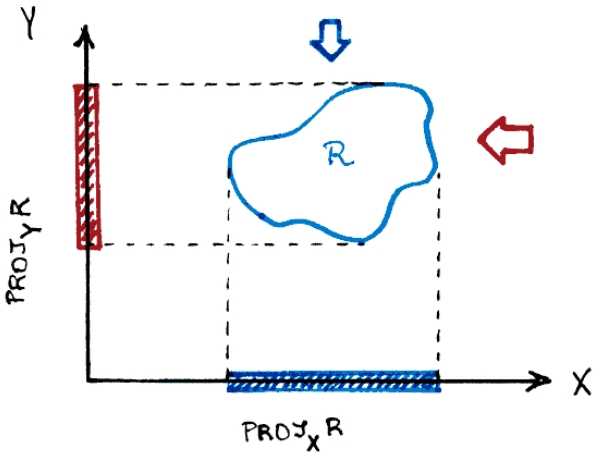
$$R_{|X}(x) = \text{PROJ}_X R(x) = \sup_{y \in Y} R(x,y) \quad , x \in X .$$

- A PROJEÇÃO DE R SOBRE Y É DEFINIDA COMO

$$R_{|Y}(y) = \text{PROJ}_Y R(y) = \sup_{x \in X} R(x,y) \quad , y \in Y .$$

→ PROJEÇÃO É UMA OPERAÇÃO QUE REDUZ A DIMENSÃO DA RELAÇÃO (P/ UMA RELAÇÃO BI-DIMENSIONAL, OBTÉM-SE UM FUZZY SET) E

→ CONDUZ À COMPRESSÃO DA INFORMAÇÃO, IMPLICANDO QUASE SEMPRE EM PERDAS (A OPERAÇÃO SUPREMO ELIMINA TODAS, EXCETO UMA, COORDENADA DA RELAÇÃO, A DE MÁXIMO VALOR).



EXEMPLO:

$$\begin{array}{cc} & \rightarrow y_1 \cdots \\ \downarrow x_1 \ \vdots & \end{array}$$

$$R(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0.3 & 0.6 \\ 0.8 & 0.1 & 1 & 0 \\ 0.9 & 0.7 & 0 & 0.5 \\ 0.9 & 0 & 0.3 & 0.7 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0.9 \\ 0.9 \end{bmatrix} \ \text{PROJ}_X R$$

$$\begin{bmatrix} 0.9 & 1 & 1 & 0.7 \end{bmatrix}$$

$\text{PROJ}_Y R$

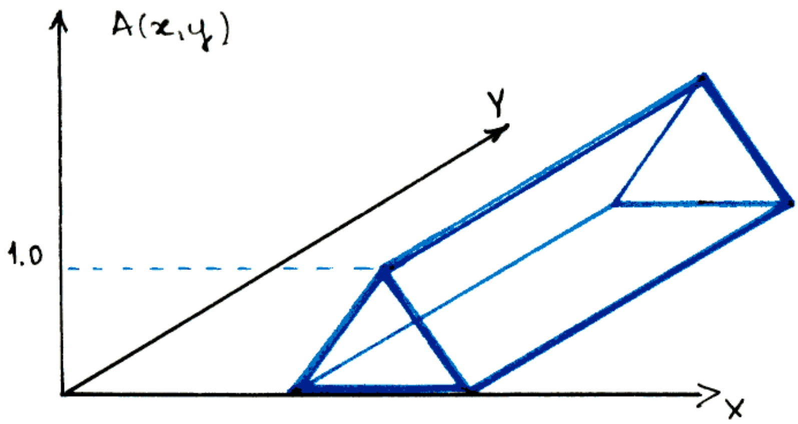
IV.6 EXTENSÃO CILÍNDRICA DE RELAÇÕES NEBULOSAS

- A OPERAÇÃO DE EXTENSÃO CILÍNDRICA É USADA PARA ELEVAR A DIMENSÃO, EXPANDINDO UM FUZZY SET EM UMA RELAÇÃO FUZZY; UMA RELAÇÃO BI-DIMENSIONAL EM SUA CONTRAPARTIDA TRI-DIMENSIONAL, ETC.
- O COMPORTAMENTO DA EXTENSÃO CILÍNDRICA É COMPLEMENTAR AO MECANISMO DA PROJEÇÃO.

- A EXTENSÃO CILÍNDRICA SOBRE $X \times Y$ DE QUALQUER A EM X É UMA RELAÇÃO FUZZY (CYL A), COM FUNÇÃO DE PERTINÊNCIA DADA POR:

$$(\text{CYL } A)(x,y) = A(x) \quad , \quad \forall\, y \in Y \quad .$$

- SE A RELAÇÃO FUZZY FOR EXPRESSA COMO UM VETOR, A OPERAÇÃO EXTENSÃO CILÍNDRICA CONSTRÓI COLUNAS IDÊNTICAS, INDEXADAS PELOS VALORES SUCESSIVOS DE y.



$$\text{CYL } A : X \times Y \to [0,1]$$

$$\text{CYL } A(x,y) = A(x) \, , \, \forall y \in Y$$

EXEMPLO :

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.9 \\ 1.0 \\ 0.6 \end{bmatrix} \qquad \text{CYL } A(x,y) = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0.9 \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \\ 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.6 \end{bmatrix}$$