

# **Desconvolução Autodidata Concorrente para Equalização de Canais de Comunicações\***

por  
Fernando César Comparsi de Castro

Tese de Doutorado apresentada à  
Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP,  
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação,  
como requisito parcial para a obtenção do grau de  
Doutor em Engenharia Elétrica.

Orientador:  
Prof. Dr. Dalton Soares Arantes

Banca Examinadora:  
Prof. Dr. Dario Francisco Guimarães Azevedo  
Prof. Dr. João Batista Destro  
Prof. Dr. João Marcos Travassos Romano  
Prof. Dr. José Geraldo Chiquito  
Prof. Dr. Max Machado Costa  
Prof. Dr. Paulo Roberto Girardello Franco

Campinas, São Paulo  
Março de 2001

\* Patente Internacional protocolada no INPI sob nº PCT/BR 02/00030 de 01/03/2002.

# Resumo

O algoritmo CMA (*Constant Modulus Algorithm*) é reconhecido como o algoritmo mais amplamente utilizado em equalização autodata de canais. Entretanto, a função de custo do algoritmo CMA exibe mínimos locais, o que frequentemente conduz a problemas de convergência. Esta tese propõe o Equalizador Concorrente, no qual um equalizador LMS (*Least Mean Square*) opera cooperativamente com um equalizador CMA, controlado através de um elo não-linear que depende do estado *a priori* do sistema. Os resultados de simulação utilizando modulação *M*-QAM mostraram que o Equalizador Concorrente apresenta uma sensibilidade muito mais baixa a mínimos locais do que apresenta a abordagem CMA.

# Abstract

The Constant Modulus Algorithm (CMA) is recognized as the most widely used algorithm in blind channel equalization practice. However, the CMA cost function exhibits local minima, which often leads to ill-convergence. This thesis proposes the Concurrent Equalizer, in which a Least Mean Square (LMS) equalizer operates cooperatively with a CMA equalizer, controlled through a non-linear link that depends on the system *a priori* state. Simulation results using *M*-QAM signalling have shown that the Concurrent Equalizer presents a much lower sensitivity to local minima than the CMA approach.

# Agradecimentos

*A todos os que, direta ou indiretamente contribuíram para a conclusão a bom termo deste trabalho, meu sincero reconhecimento.*

*Um especial reconhecimento a meu orientador, pelo apoio logístico e pela ilimitada paciência nas discussões com este teimoso orientado seu.*

*Minha gratidão a Ney e Rosalina pelo suporte durante todos estes anos de “exílio científico” deste que escreve.*

*Um especial agradecimento a Cristina, que, com seu sereno raciocínio lógico, deu segurança a este autor ao longo das infindáveis veredas matemáticas percorridas.*

*Acima de tudo, um profundo sentimento de gratidão àqueles entes queridos que, embora não presentes fisicamente, conduziram, inspiraram e suavemente influenciaram este aprendiz ao longo de toda a jornada.*

# Índice

|  |             |
|--|-------------|
| <b>Lista de Figuras</b>  | <b>vii</b>  |
| <b>Lista de Tabelas</b>  | <b>xiii</b> |
| <b>Lista de Acrônimos</b>  | <b>xiv</b>  |
| <br>   |             |
| <b>1 Introdução</b>  | <b>1</b>    |
| 1.1 Motivação . . . . .  | 1           |
| 1.2 Equalização de Canais – O Cenário Atual . . . . .                              | 3           |
| <br>   |             |
| <b>2 Equalização Autodidata de Canal</b>   | <b>15</b>   |
| 2.1 Descrição do Problema . . . . .  | 15          |
| 2.2 Equalizadores Não-Fracionários . . . . .                                       | 17          |
| 2.3 Equalizadores Fracionários . . . . .   | 20          |
| 2.4 Condições Ideais para ZF em um Equalizador CMA . . . . .                       | 32          |
| 2.5 Algumas Definições Operacionais . . . . .                                      | 33          |
| <br>   |             |
| <b>3 Modelos de Canais</b>   | <b>35</b>   |
| 3.1 Descrição da Base de Dados . . . . .   | 35          |
| 3.2 Caracterização dos Canais . . . . .  | 38          |
| <br>   |             |
| <b>4 Equalização com o Algoritmo CMA</b>   | <b>59</b>   |
| 4.1 Características do Algoritmo CMA . . . . .                                     | 60          |
| 4.2 O Algoritmo CMA . . . . .  | 62          |
| 4.3 Exemplos de Operação do Algoritmo CMA . . . . .                                | 67          |
| <br>   |             |
| <b>5 O Equalizador Concorrente</b>   | <b>71</b>   |
| 5.1 Algumas Tentativas Prévias de Melhora do Desempenho do Algoritmo CMA . . . . . | 73          |
| 5.2 O Equalizador Autodidata Concorrente . . . . .                                 | 77          |
| <br>   |             |
| <b>6 Resultados Experimentais</b>  | <b>91</b>   |
| 6.1 Condições Operacionais . . . . .   | 92          |
| 6.2 Inicialização . . . . .  | 93          |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 6.3      | Passo de Adaptação . . . . .   | 93         |
| 6.4      | Indicadores de Desempenho . . . . .                                    | 94         |
| 6.5      | Simulações . . . . .   | 94         |
| 6.6      | Interpretação dos Resultados . . . . .                                 | 100        |
| 6.7      | Desempenho com Canal Dinâmico. . . . .                                 | 101        |
| 6.7.1    | O Sistema ATSC 8–VSB . . . . .   | 101        |
| 6.7.2    | Modelo de Canal . . . . .  | 102        |
| 6.7.3    | Resultados Experimentais . . . . .                                     | 105        |
| 6.7.4    | Interpretação dos Resultados . . . . .                                 | 112        |
| <b>7</b> | <b>Conclusão</b>   | <b>113</b> |
|          | <b>Referências Bibliográficas</b>                                      | <b>115</b> |
|          | <b>Apêndice A - Simulações Compreendendo toda a Base de Dados SPIB</b> | <b>121</b> |
|          | <b>Apêndice B - Constelações e Constantes de Dispersão</b>             | <b>213</b> |

# Lista de Figuras

|      |   |    |
|------|---|----|
| 1.1  | Modelo do canal e equalizador no domínio frequência . . . . .   | 4  |
| 1.2  | Exemplo do processo de desconvolução de um canal de comunicações . . . . .  | 6  |
| 1.3  | Raízes no plano $z$ do canal utilizado no exemplo da Figura 1.2 . . . . .   | 8  |
| 1.4  | Equalizador LMS-DD . . . . .  | 9  |
| 2.1  | Diagrama de um sistema para equalização de canal em transmissão digital . . . . .   | 16 |
| 2.2  | Modelo com dois sub-canais (par e ímpar) resultante da amostragem fracionária $T/2$ do canal original . . . . .   | 23 |
| 2.3  | Modelo em dois sub-filtros (par e ímpar) para o equalizador, resultante da operação sob amostragem fracionária $T/2$ do canal . . . . .   | 25 |
| 2.4  | Modelo equivalente não-fracionário para um sistema de equalização com amostragem fracionária $T/2$ . O espaçamento entre amostras adjacentes em $s$ e $y$ é $T$ . . . . .       | 26 |
| 2.5  | Equivalência entre pares de raízes de $C(z)$ refletidas com relação à origem e pares de raízes comuns entre os sub-canais $C^{\text{PAR}}(z)$ e $C^{\text{ÍMPAR}}(z)$ . . . . . | 31 |
| 3.1  | Caracterização do canal M1 . . . . .  | 39 |
| 3.2  | Caracterização do canal M2 . . . . .  | 40 |
| 3.3  | Caracterização do canal M3 . . . . .  | 41 |
| 3.4  | Caracterização do canal M4 . . . . .  | 42 |
| 3.5  | Caracterização do canal M5 . . . . .  | 43 |
| 3.6  | Caracterização do canal M6 . . . . .  | 44 |
| 3.7  | Caracterização do canal M7 . . . . .  | 45 |
| 3.8  | Caracterização do canal M8 . . . . .  | 46 |
| 3.9  | Caracterização do canal M9 . . . . .  | 47 |
| 3.10 | Caracterização do canal M10 . . . . .   | 48 |
| 3.11 | Caracterização do canal M11 . . . . .   | 49 |
| 3.12 | Caracterização do canal M12 . . . . .   | 50 |
| 3.13 | Caracterização do canal M13 . . . . .   | 51 |
| 3.14 | Caracterização do canal M14 . . . . .   | 52 |

|      |  |     |
|------|--|-----|
| 3.15 | Caracterização do canal M15 . . . . .  | 53  |
| 3.16 | Caracterização do canal C1 . . . . .   | 54  |
| 3.17 | Caracterização do canal C2 . . . . .   | 55  |
| 3.18 | Caracterização do canal RR . . . . .   | 56  |
| 3.19 | Caracterização do canal RU . . . . .   | 57  |
| 4.1  | Equalizador CMA com filtro FIR transversal . . . . .   | 63  |
| 4.2  | Resultados do CMA para o canal M2 com modulação 16-QAM e SNR=35dB . . . . .  | 69  |
| 4.3  | Resultados do CMA para o canal M6 com modulação 16-QAM e SNR=35dB . . . . .  | 70  |
| 5.1  | Diagrama do Equalizador Concorrente . . . . .  | 77  |
| 6.1  | Comparação entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente para o canal M14 com modulação 16-QAM e SNR=35dB . . . . .  | 95  |
| 6.2  | Comparação entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente para o canal M9 com modulação 64-QAM e SNR=35dB . . . . .   | 96  |
| 6.3  | Comparação entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente para o canal C1 com modulação 256-QAM e SNR=35dB . . . . .  | 97  |
| 6.4  | Comparação entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente para o canal M4 com modulação 16-QAM e SNR=35dB . . . . .   | 98  |
| 6.5  | Comparação entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente para o canal M4 com modulação 64-QAM e SNR=35dB . . . . .   | 99  |
| 6.6  | Representação gráfica da função de transferência $H(f)$ do filtro <i>raised-cosine</i> do sistema ATSC 8-VSB . . . . .   | 103 |
| 6.7  | Gráfico de $h_{rc}(i)$ para $N = 64$ e $\alpha = 0.115$ . . . . .  | 104 |
| 6.8  | Gráfico da resposta discreta ao degrau do filtro analógico definido pelo gráfico da Figura C.1 para $N = 64$ e $\alpha = 0.115$ . . . . .  | 104 |
| 6.9  | Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente para o canal especificado na Tabela C.4 com $f = 0Hz$ , incluindo o efeito do filtro <i>raised-cosine</i> . . . . .  | 107 |
| 6.10 | Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente para o canal especificado na Tabela C.4 com $f = 10Hz$ , incluindo o efeito do filtro <i>raised-cosine</i> . . . . . | 108 |
| 6.11 | Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente para o canal especificado na Tabela C.4 com $f = 20Hz$ , incluindo o efeito do filtro <i>raised-cosine</i> . . . . . | 109 |

|      |   |     |
|------|---|-----|
| 6.12 | Resultados comparativos entre o equalizador <i>CMA</i> e o Equalizador Concorrente para o canal especificado na Tabela C.4 com $f = 50\text{Hz}$ , incluindo o efeito do filtro <i>raised-cosine</i> . . . . .  | 110 |
| 6.13 | Resultados comparativos entre o equalizador <i>CMA</i> e o Equalizador Concorrente para o canal especificado na Tabela C.4 com $f = 100\text{Hz}$ , incluindo o efeito do filtro <i>raised-cosine</i> . . . . . | 111 |
| A.1  | Resultados para o canal M1, modulação 16-QAM e SNR=35dB . . . . .   | 123 |
| A.2  | Resultados para o canal M2, modulação 16-QAM e SNR=35dB . . . . .   | 124 |
| A.3  | Resultados para o canal M3, modulação 16-QAM e SNR=35dB . . . . .   | 125 |
| A.4  | Resultados para o canal M4, modulação 16-QAM e SNR=35dB . . . . .   | 126 |
| A.5  | Resultados para o canal M5, modulação 16-QAM e SNR=35dB . . . . .   | 127 |
| A.6  | Resultados para o canal M6, modulação 16-QAM e SNR=35dB . . . . .   | 128 |
| A.7  | Resultados para o canal M7, modulação 16-QAM e SNR=35dB . . . . .   | 129 |
| A.8  | Resultados para o canal M8, modulação 16-QAM e SNR=35dB . . . . .   | 130 |
| A.9  | Resultados para o canal M9, modulação 16-QAM e SNR=35dB . . . . .   | 131 |
| A.10 | Resultados para o canal M10, modulação 16-QAM e SNR=35dB . . . . .  | 132 |
| A.11 | Resultados para o canal M11, modulação 16-QAM e SNR=35dB . . . . .  | 133 |
| A.12 | Resultados para o canal M12, modulação 16-QAM e SNR=35dB . . . . .  | 134 |
| A.13 | Resultados para o canal M13, modulação 16-QAM e SNR=35dB . . . . .  | 135 |
| A.14 | Resultados para o canal M14, modulação 16-QAM e SNR=35dB . . . . .  | 136 |
| A.15 | Resultados para o canal M15, modulação 16-QAM e SNR=35dB . . . . .  | 137 |
| A.16 | Resultados para o canal M1, modulação 16-QAM e SNR=25dB . . . . .   | 138 |
| A.17 | Resultados para o canal M2, modulação 16-QAM e SNR=25dB . . . . .   | 139 |
| A.18 | Resultados para o canal M3, modulação 16-QAM e SNR=25dB . . . . .   | 140 |
| A.19 | Resultados para o canal M4, modulação 16-QAM e SNR=25dB . . . . .   | 141 |
| A.20 | Resultados para o canal M5, modulação 16-QAM e SNR=25dB . . . . .   | 142 |
| A.21 | Resultados para o canal M6, modulação 16-QAM e SNR=25dB . . . . .   | 143 |
| A.22 | Resultados para o canal M7, modulação 16-QAM e SNR=25dB . . . . .   | 144 |
| A.23 | Resultados para o canal M8, modulação 16-QAM e SNR=25dB . . . . .   | 145 |
| A.24 | Resultados para o canal M9, modulação 16-QAM e SNR=25dB . . . . .   | 146 |
| A.25 | Resultados para o canal M10, modulação 16-QAM e SNR=25dB . . . . .  | 147 |



|      |  |     |
|------|--|-----|
| A.26 | Resultados para o canal M11, modulação 16–QAM e SNR=25dB . . . . | 148 |
| A.27 | Resultados para o canal M12, modulação 16–QAM e SNR=25dB . . . . | 149 |
| A.28 | Resultados para o canal M13, modulação 16–QAM e SNR=25dB . . . . | 150 |
| A.29 | Resultados para o canal M14, modulação 16–QAM e SNR=25dB . . . . | 151 |
| A.30 | Resultados para o canal M15, modulação 16–QAM e SNR=25dB . . . . | 152 |
| A.31 | Resultados para o canal M1, modulação 16–QAM e SNR=15dB . . . .  | 153 |
| A.32 | Resultados para o canal M2, modulação 16–QAM e SNR=15dB . . . .  | 154 |
| A.33 | Resultados para o canal M3, modulação 16–QAM e SNR=15dB . . . .  | 155 |
| A.34 | Resultados para o canal M4, modulação 16–QAM e SNR=15dB . . . .  | 156 |
| A.35 | Resultados para o canal M5, modulação 16–QAM e SNR=15dB . . . .  | 157 |
| A.36 | Resultados para o canal M6, modulação 16–QAM e SNR=15dB . . . .  | 158 |
| A.37 | Resultados para o canal M7, modulação 16–QAM e SNR=15dB . . . .  | 159 |
| A.38 | Resultados para o canal M8, modulação 16–QAM e SNR=15dB . . . .  | 160 |
| A.39 | Resultados para o canal M9, modulação 16–QAM e SNR=15dB . . . .  | 161 |
| A.40 | Resultados para o canal M10, modulação 16–QAM e SNR=15dB . . . . | 162 |
| A.41 | Resultados para o canal M11, modulação 16–QAM e SNR=15dB . . . . | 163 |
| A.42 | Resultados para o canal M12, modulação 16–QAM e SNR=15dB . . . . | 164 |
| A.43 | Resultados para o canal M13, modulação 16–QAM e SNR=15dB . . . . | 165 |
| A.44 | Resultados para o canal M14, modulação 16–QAM e SNR=15dB . . . . | 166 |
| A.45 | Resultados para o canal M15, modulação 16–QAM e SNR=15dB . . . . | 167 |
| A.46 | Resultados para o canal M1, modulação 64–QAM e SNR=35dB . . . .  | 168 |
| A.47 | Resultados para o canal M2, modulação 64–QAM e SNR=35dB . . . .  | 169 |
| A.48 | Resultados para o canal M3, modulação 64–QAM e SNR=35dB . . . .  | 170 |
| A.49 | Resultados para o canal M4, modulação 64–QAM e SNR=35dB . . . .  | 171 |
| A.50 | Resultados para o canal M5, modulação 64–QAM e SNR=35dB . . . .  | 172 |
| A.51 | Resultados para o canal M6, modulação 64–QAM e SNR=35dB . . . .  | 173 |
| A.52 | Resultados para o canal M7, modulação 64–QAM e SNR=35dB . . . .  | 174 |
| A.53 | Resultados para o canal M8, modulação 64–QAM e SNR=35dB . . . .  | 175 |
| A.54 | Resultados para o canal M9, modulação 64–QAM e SNR=35dB . . . .  | 176 |
| A.55 | Resultados para o canal M10, modulação 64–QAM e SNR=35dB . . . . | 177 |

|      |   |     |
|------|---|-----|
| A.56 | Resultados para o canal M11, modulação 64-QAM e SNR=35dB . . . .  | 178 |
| A.57 | Resultados para o canal M12, modulação 64-QAM e SNR=35dB . . . .  | 179 |
| A.58 | Resultados para o canal M13, modulação 64-QAM e SNR=35dB . . . .  | 180 |
| A.59 | Resultados para o canal M14, modulação 64-QAM e SNR=35dB . . . .  | 181 |
| A.60 | Resultados para o canal M15, modulação 64-QAM e SNR=35dB . . . .  | 182 |
| A.61 | Resultados para o canal M1, modulação 64-QAM e SNR=25dB . . . .   | 183 |
| A.62 | Resultados para o canal M2, modulação 64-QAM e SNR=25dB . . . .   | 184 |
| A.63 | Resultados para o canal M3, modulação 64-QAM e SNR=25dB . . . .   | 185 |
| A.64 | Resultados para o canal M4, modulação 64-QAM e SNR=25dB . . . .   | 186 |
| A.65 | Resultados para o canal M5, modulação 64-QAM e SNR=25dB . . . .   | 187 |
| A.66 | Resultados para o canal M6, modulação 64-QAM e SNR=25dB . . . .   | 188 |
| A.67 | Resultados para o canal M7, modulação 64-QAM e SNR=25dB . . . .   | 189 |
| A.68 | Resultados para o canal M8, modulação 64-QAM e SNR=25dB . . . .   | 190 |
| A.69 | Resultados para o canal M9, modulação 64-QAM e SNR=25dB . . . .   | 191 |
| A.70 | Resultados para o canal M10, modulação 64-QAM e SNR=25dB . . . .  | 192 |
| A.71 | Resultados para o canal M11, modulação 64-QAM e SNR=25dB . . . .  | 193 |
| A.72 | Resultados para o canal M12, modulação 64-QAM e SNR=25dB . . . .  | 194 |
| A.73 | Resultados para o canal M13, modulação 64-QAM e SNR=25dB . . . .  | 195 |
| A.74 | Resultados para o canal M14, modulação 64-QAM e SNR=25dB . . . .  | 196 |
| A.75 | Resultados para o canal M15, modulação 64-QAM e SNR=25dB . . . .  | 197 |
| A.76 | Resultados para o canal C1, modulação 256-QAM e SNR=100dB . . . . | 198 |
| A.77 | Resultados para o canal C2, modulação 256-QAM e SNR=100dB . . . . | 199 |
| A.78 | Resultados para o canal C1, modulação 256-QAM e SNR=35dB . . . .  | 200 |
| A.79 | Resultados para o canal C2, modulação 256-QAM e SNR=35dB . . . .  | 201 |
| A.80 | Resultados para o canal RR, modulação 16-QAM e SNR=35dB . . . .   | 202 |
| A.81 | Resultados para o canal RR, modulação 16-QAM e SNR=25dB . . . .   | 203 |
| A.82 | Resultados para o canal RR, modulação 16-QAM e SNR=15dB . . . .   | 204 |
| A.83 | Resultados para o canal RR, modulação 64-QAM e SNR=35dB . . . .   | 205 |
| A.84 | Resultados para o canal RR, modulação 64-QAM e SNR=25dB . . . .   | 206 |
| A.85 | Resultados para o canal RU, modulação 16-QAM e SNR=35dB . . . .   | 207 |

|      |   |     |
|------|---|-----|
| A.86 | Resultados para o canal RU, modulação 16–QAM e SNR=25dB . . . . | 208 |
| A.87 | Resultados para o canal RU, modulação 16–QAM e SNR=15dB . . . . | 209 |
| A.88 | Resultados para o canal RU, modulação 64–QAM e SNR=35dB . . . . | 210 |
| A.89 | Resultados para o canal RU, modulação 64–QAM e SNR=25dB . . . . | 211 |

# Lista de Tabelas

|     |  |     |
|-----|--|-----|
| 1.1 | Nível máximo de MSE para transferência ao algoritmo DD. . . . .  | 13  |
| 3.1 | Modelos de canais de microondas da base de dados SPIB . . . . .  | 36  |
| 3.2 | Modelos de canais de TV a cabo da base de dados SPIB . . . . .   | 37  |
| 4.1 | Sumário do algoritmo CMA aplicado à equalização de canal . . . . .   | 66  |
| 5.1 | Sumário do algoritmo utilizado no Equalizador Concorrente quando aplicado à equalização de canal . . . . . | 88  |
| 6.1 | Especificação do modelo de canal dinâmico adotado . . . . .  | 102 |
| B.1 | Constelação 16-QAM com variância unitária ( $\gamma = 1.320000$ ) . . . . .                                | 213 |
| B.2 | Constelação 64-QAM com variância unitária ( $\gamma = 1.380953$ ) . . . . .                                | 213 |
| B.3 | Constelação 256-QAM com variância unitária ( $\gamma = 1.395295$ ) . . . . .                               | 215 |

# Lista de Acrônimos

|        |  |
|--------|--|
| ATSC   | <i>Advanced Television Systems Committee</i>       |
| BERG   | <i>Blind Equalization Research Group</i>           |
| BPSK   | <i>Binary Phase Shift Keying</i>                   |
| CAG    | Controle Automático de Ganho                       |
| CMA    | <i>Constant Modulus Algorithm</i>                  |
| D/A    | <i>Digital to Analog</i>                           |
| DD     | <i>Direct Decision</i>                             |
| DENTEL | Departamento Nacional de Telecomunicações          |
| DFE    | <i>Decision Feedback Equalizer</i>                 |
| DPSK   | <i>Differential Phase Shift Keying</i>             |
| 8-PAM  | <i>Pulse Amplitude Modulation em 8 níveis</i>      |
| 8-VSB  | <i>Vestigial Side Band em 8 níveis</i>             |
| FFT    | <i>Fast Fourier Transform</i>                      |
| FIR    | <i>Finite Impulse Response</i>                     |
| HF     | <i>High Frequency</i>                              |
| IFFT   | <i>Inverse Fast Fourier Transform</i>              |
| ISI    | <i>Inter-Symbol Interference</i>                   |
| LMS    | <i>Least Mean Square</i>                           |
| MLSD   | <i>Maximum Likelihood Sequence Detection</i>       |
| MMSE   | <i>Minimum Mean Square Error</i>                   |
| M-PSK  | <i>Phase Shift Keying em M níveis</i>              |
| M-QAM  | <i>Quadrature Amplitude Modulation em M níveis</i> |
| MSE    | <i>Mean Square Error</i>                           |
| PLL    | <i>Phase Locked Loop</i>                           |
| QAM    | <i>Quadrature Amplitude Modulation</i>             |
| RBF    | <i>Radial Basis Function</i>                       |
| RF     | <i>Radio Frequency</i>                             |
| SER    | <i>Symbol Error Rate</i>                           |

|      |   |
|------|---|
| SNR  | <i>Signal-to-Noise Ratio</i>              |
| SPIB | <i>Signal Processing Information Base</i> |
| VFO  | <i>Variable Frequency Oscillator</i>      |
| ZF   | <i>Zero Forcing</i>                       |

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Motivação

Um dos maiores obstáculos para a confiabilidade de comunicações digitais é a interferência entre símbolos (ISI – *Inter-Symbol Interference*) acompanhada de ruído, ambos inerentemente presentes em todos os canais dispersivos, classe à que pertence a suprema maioria dos canais de transmissão. É imperativa, portanto, a desconvolução do canal no receptor, sob ruído, com o objetivo de equalizá-lo.

No cenário de desconvolução autodata, o algoritmo CMA (*Constant Modulus Algorithm*) é universalmente utilizado, seja para canais eletromagnéticos ou acústicos. Tem havido um imenso interesse da comunidade de pesquisadores neste algoritmo, desde sua proposição em 1980 por Godard, em parte devido ao seu baixo custo computacional e em parte devido à sua capacidade de desconvoluir canais para os quais os demais algoritmos para desconvolução autodata flagrantemente falham.

A capacidade autodata e a versatilidade do algoritmo CMA é amplamente reconhecida quanto à tarefa de desconvoluir o conjunto de símbolos recebidos a partir de uma situação inicial de alto ISI, conhecida como “olho fechado”, até a convergência do algoritmo, situação de baixo ISI conhecida como “olho aberto”. No entanto, o requerimento de alta velocidade de transmissão dos sistemas digitais atuais tem levado ao uso de constelações de símbolos cada vez mais densas. Para tais constelações densas, o erro de regime permanente do algoritmo CMA é insuficiente para que a probabilidade de erro nos símbolos recebidos, ou SER (*Symbol Error Rate*), reduza-se a níveis aceitáveis.

Devido à excelente performance autodata do algoritmo CMA, a comunidade de pesquisadores tem preferido conviver com o problema de alto erro de regime permanente

deste algoritmo. A solução universalmente proposta para contornar este problema é utilizar o algoritmo CMA até a ISI atingir a melhor condição de “olho aberto” possível e então comutar para um algoritmo auto-supervisionado denominado Decisão Direta (DD – *Direct Decision*). O algoritmo DD é incapaz de desconvoluir o conjunto de símbolos a partir de uma situação inicial de “olho fechado”. Mas, uma vez inicializado a partir de uma situação de ISI relativamente baixa, é capaz de atingir níveis de erro de regime permanente muito menores que o algoritmo CMA. Outra solução proposta para minimização do erro de regime permanente é a utilização de equalizadores DFE (*Decision Feedback Equalizers*) em conjunto com o algoritmo CMA. Esta solução, no entanto, é reconhecidamente problemática, pois equalizadores DFE inerentemente apresentam o chamado erro de propagação, o qual causa, de maneira imprevisível, a elevação da SER a níveis inaceitáveis durante longos intervalos de tempo.

Torna-se evidente, portanto, que a proposta de utilização do algoritmo DD após a convergência do CMA – amplamente utilizada – apresenta um problema básico: O algoritmo CMA deve ser capaz de atingir um erro de regime permanente suficientemente baixo para que a ISI resultante permita a transferência para o algoritmo DD. No entanto, quanto mais densa a constelação, maior será o número de iterações necessárias ao algoritmo CMA, tal que seja alcançado um nível de ISI suficientemente baixo para a transferência ao algoritmo DD (se este nível sequer puder vir a ser atingido para o canal e constelação em questão). Assim, a convergência da seqüência de algoritmos CMA–DD, se atingida, será tanto mais lenta quanto mais densa for a constelação.

Esta tese propõe a operação concorrente entre algoritmos CMA e DD, através do estabelecimento de um elo não-linear entre eles, objetivando atingir baixo erro de regime permanente e minimizar os problemas de convergência inerentes à seqüência CMA–DD. O termo concorrente é aqui entendido conforme sua definição etimológica, emprestada do Grande Dicionário Larousse de 1999, e confirmada pelo veterano Dicionário Aurélio: concorrente – do latim *concurrentes* – “Que ou quem converge para um mesmo ponto, um mesmo fim”. Com base nesta definição, o equalizador autodidata proposto nesta tese é concorrente devido à sua arquitetura. É também concorrente devido a seu modo de



operação, pois é estabelecido um elo não-linear entre os dois algoritmos, tal que possam operar de modo cooperativo na busca do fim comum – a desconvolução autodidata do canal.

## 1.2 Equalização de Canais - O Cenário Atual

Em comunicações digitais, a informação a ser transmitida, aqui representada pela seqüência de símbolos originais  $s(n)$ , é usualmente enviada através de um canal dispersivo  $C$ , o que resulta em interferência entre os símbolos (ISI – *Inter-Symbol Interference*) do sinal recebido  $u(n)$ , onde  $n$  é um número inteiro. A cada instante  $nT$ , o transmissor envia o símbolo  $s(nT) \in A$  através de  $C$ , sendo  $A = \{s_0, s_1, \dots, s_{M-1}\}$  o alfabeto da informação a ser transmitida, constituído por  $M$  possíveis símbolos, e  $T$  o intervalo de amostragem dos símbolos ou intervalo de *Baud*. Conectado ao transmissor através do canal  $C$ , o receptor deverá ser capaz de identificar a quais símbolos do alfabeto  $A$  pertencem as amostras do sinal recebido  $u(n)$ , de acordo com a seqüência originalmente transmitida  $s(n)$ .

A dispersão de um canal é medida pelo intervalo de  $L_c$  amostras não nulas que resultam em resposta a uma excitação impulsiva imposta ao canal. A existência da ISI no sinal recebido, resultante da dispersão de  $C$ , é observada através do fato de  $u(n)$  assumir inúmeros valores tal que  $u(n) \notin A$ , mesmo sob ausência total de ruído. Portanto, ao transmitir  $s(n)$  através de  $C$ ,  $u(n) \notin A$  como conseqüência da convolução da fonte original  $s(n)$  com a resposta ao impulso  $c(n)$  de  $C$ . Cada elemento da seqüência recebida  $u(n)$  consiste em uma soma ponderada de todos os elementos prévios de  $s(n)$ , com ponderação determinada por  $c(n)$ . Sob o ponto de vista humano-acústico, a ISI pode ser percebida ao se estabelecer diálogo em um ambiente fechado com paredes de material reflexivo, como rocha polida. A reverberação acústica – ou ISI – pode atingir tal nível de incômodo a ponto de não se compreender as palavras (símbolos) do interlocutor.

Uma solução para a distorção causada pela superposição de símbolos recebidos é adicionar ao receptor um sistema capaz de compensar ou reduzir a ISI no sinal proveniente

do canal. Tal sistema compensador é denominado de equalizador. Como a operação geradora de ISI é uma convolução, o equalizador deve realizar a operação inversa, a desconvolução [61]. Em conseqüência, um equalizador é considerado eficaz em atender ao objetivo a que se destina, se a convolução da resposta ao impulso do canal  $c(n)$  com a resposta ao impulso do equalizador  $f(n)$  resultar em uma resposta impulsiva conjunta  $h(n)$  definida por um único impulso  $\delta(n-d)$  em algum instante  $d$ . A resposta  $\delta(n-d)$  caracteriza uma resposta impulsiva conjunta sem nenhuma dispersão. No domínio freqüência, esta situação é expressa por

$$H(z) = C(z)F(z) = z^{-d} \quad (1.1)$$

É amplamente aceito, tendo sido sugerido por Bello em [46], que um canal dispersivo, ou multi-percurso, pode ser modelado através de uma função de transferência  $C(z)$  do tipo FIR [55]. Assim, de (1.1), a função  $F(z)$  do equalizador deve realizar, a menos do termo  $z^{-d}$  que define o atraso  $d$  da resposta conjunta  $\delta(n-d)$  desejada, a inversa de  $C(z)$ . De fato, se  $d=0$ ,  $F(z)$  realiza exatamente  $C^{-1}(z)$ . A Figura 1.1 mostra o diagrama de blocos simplificado resultante do sistema no domínio freqüência, onde  $Y(z) = Z\{y(n)\}$  é a resposta à excitação  $S(z) = Z\{s(n)\}$  e  $U(z) = Z\{u(n)\}$  é a seqüência recebida  $u(n)$  no domínio  $z$ , sendo  $Z\{\cdot\}$  o operador Transformada Z [55].

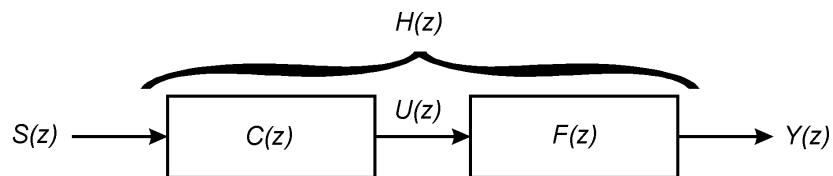


Figura 1.1: Modelo do canal e equalizador no domínio freqüência.

No domínio tempo, a remoção de ISI efetuada por um equalizador de canal pode ser melhor compreendida através do exemplo mostrado na Figura 1.2. A Figura 1.2a mostra o alfabeto  $A$ , ou constelação, dos símbolos complexos referentes a uma fonte  $s(n)$  cuja modulação (ou sinalização) é 256-QAM (QAM – *Quadrature Amplitude Modulation*) com

variância unitária [37].  $N_a = 50000$  símbolos do alfabeto  $A$  da fonte de informação  $s(n)$ , gerados sequencialmente com probabilidade uniforme, são enviados através do canal  $C$ , caracterizado por dimensão de dispersão  $L_c = 128$ , cujo  $|c(n)|$  é mostrado na Figura 1.2d, resultando no conjunto de  $N_a$  amostras  $u$  recebidas mostrado na Figura 1.2b. Ao ser submetido ao equalizador, o conjunto de amostras  $u$  transforma-se no conjunto de amostras equalizadas  $y$  mostradas na Figura 1.2c, próximo, portanto, da constelação original mostrada na Figura 1.2a. A resposta impulsiva conjunta  $h(n)$  do equalizador e canal é mostrada na Figura 1.2e, resultando em  $h(n) \approx \delta(n - 64)$ , onde  $\delta(n)$  é a função impulso unitário discreta. Sempre que  $h(n) \rightarrow \delta(n - d)$  diz-se que o equalizador atingiu a condição (ou situação) ZF (*zero forcing*), quando então,  $ISI \rightarrow 0$  [37][61]. Esta situação também é conhecida como condição de “olho completamente aberto”, devido ao sinal equalizado  $y(t)$  assemelhar-se a um olho aberto na tela de um osciloscópio quando o alfabeto  $A$  é constituído por símbolos reais (não complexos).

A tarefa de desconvolução do canal é dificultada pela presença inevitável de ruído e reflexões, inerentes a todo canal físico. À medida que a dispersão do canal torna-se severa, a ponto de incluir componentes originados por reflexão múltipla, poderá haver diversas frequências definidas sobre o círculo de raio unitário no plano  $z$ , nas quais o canal apresenta ganho zero. Assim, o equalizador apresentará um alto nível de ruído nestas frequências, o que poderá impedir a sua convergência para a condição ZF. Esta situação é explicada nos parágrafos a seguir.

Existem frequências específicas que dependem dos parâmetros físicos do canal, para as quais, se o sinal do transmissor fosse nelas transmitido, daria origem a múltiplos componentes refletidos [3][28][42][66]. Nestas frequências, os componentes refletidos, ao se combinarem na chegada ao receptor, somam-se com fase  $180^\circ$  ao sinal direto, anulando-o. Estas frequências, portanto, quando resultam ocorrer na banda de Nyquist,

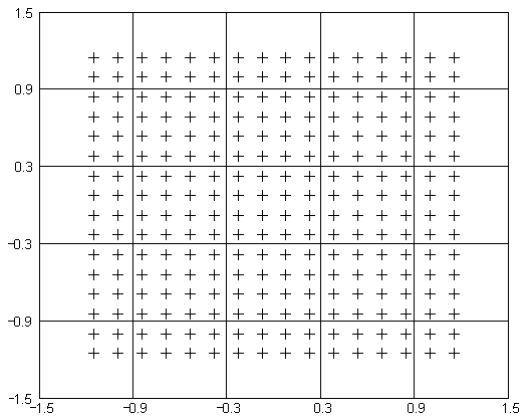


Fig. 1.2a: Constelação 256-QAM.

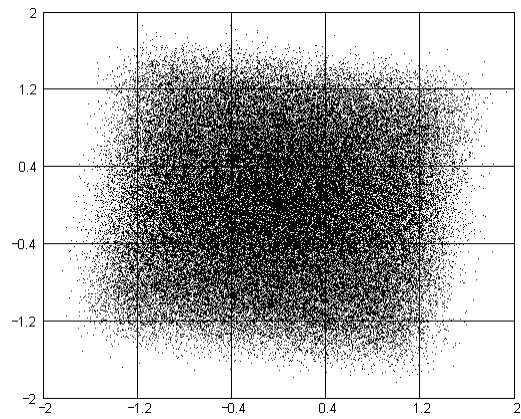


Fig. 1.2b: Conjunto  $u$  na entrada do equalizador.

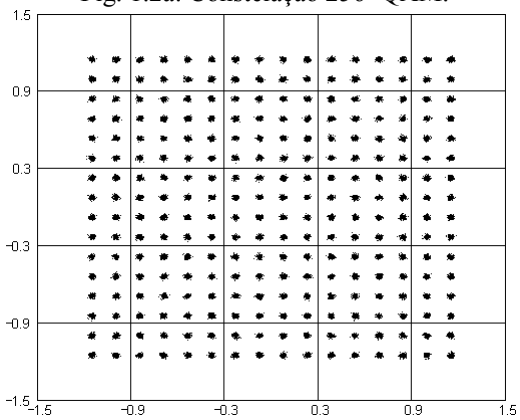


Fig. 1.2c: Conjunto  $y$  na saída do equalizador.

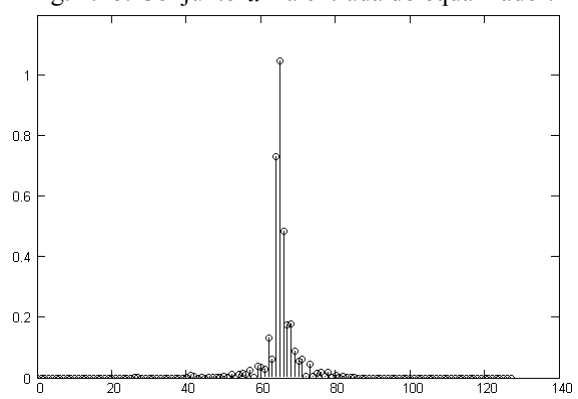


Fig. 1.2d: Resposta impulsiva  $|c(n)|$  do canal .

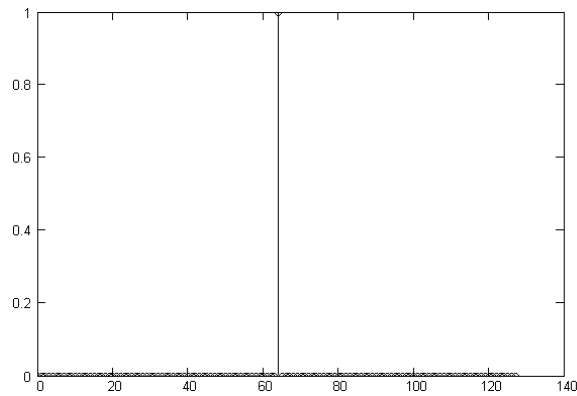


Fig. 1.2e: Módulo da resposta impulsiva combinada do canal e equalizador.

Figura 1.2: Exemplo do processo de desconvolução de um canal de comunicações.

constituem uma parcela dos zeros de  $C(z)$ . Note que os sinais aqui referidos forçosamente encontram-se em regime permanente, caso contrário não poderiam ser identicamente anulados por soma fasorial. Tais sinais têm sua representação espectral definida sobre o círculo de raio unitário no plano  $z$  [55].

Como estes zeros de  $C(z)$  originam-se do cancelamento de sinal por reflexão, e como cancelamento de sinal por reflexão implica em sinais em regime permanente, as frequências destes zeros jazem forçosamente sobre o círculo de raio unitário no plano  $z$ .

Da Equação (1.1), ao atingir a condição ZF, a função de transferência  $F(z)$  do equalizador aproxima-se do inverso da função de transferência  $C(z)$  do canal. Portanto, as frequências em que o canal  $C(z)$  tem ganho nulo tenderão a ser infinitamente amplificadas por  $F(z)$  no equalizador. Como o ruído em geral é espectralmente branco, e está presente ao longo de todo percurso do canal, inclusive na entrada do receptor, as frequências de ruído que coincidirem com os zeros de  $C(z)$  originados por reflexão múltipla tenderão a ser amplificadas por  $F(z)$  até a eventual saturação do sistema equalizador.

O processo de equalização descrito na Figura 1.2 é tal que ruído Gaussiano proveniente do canal é adicionado à  $u(n)$  na entrada do receptor, resultando em uma relação sinal-ruído SNR (SNR – *Signal to Noise Ratio*) de 35dB. A Figura 1.3 mostra os zeros do canal. Como se verifica, o canal apresenta apenas alguns zeros próximos ao círculo de raio unitário e, portanto, a equalização atinge precisamente a condição ZF, apesar da presença de ruído. Até porque, o equalizador utilizado no processo de equalização da Figura 1.2 é um equalizador baseado no algoritmo LMS [61], e portanto não é autodidata. Como será visto nos parágrafos que seguem, um equalizador não-autodidata ou supervisionado tem acesso à seqüência de símbolos originais  $s(n)$ , o que torna o processo de desconvolução supervisionado muito mais fácil do que o processo de desconvolução autodidata. No entanto, esta facilidade implica na resultante penalidade de reduzir a banda passante do sistema digital como um todo.

Na grande maioria dos sistemas de comunicação digital de alta velocidade a função de transferência  $C(z)$  do canal de propagação  $C$  não é conhecida *a priori*. Além do canal não ser conhecido, a sua caracterização varia com o tempo, devido à alterações nas condições ambientais do percurso do canal ou devido ao movimento relativo entre transmissor e receptor. Portanto, é bastante desejável que o equalizador seja implementado

baseado em técnicas adaptativas, de forma a poder acompanhar as variações de  $C(z)$  ao longo do tempo.

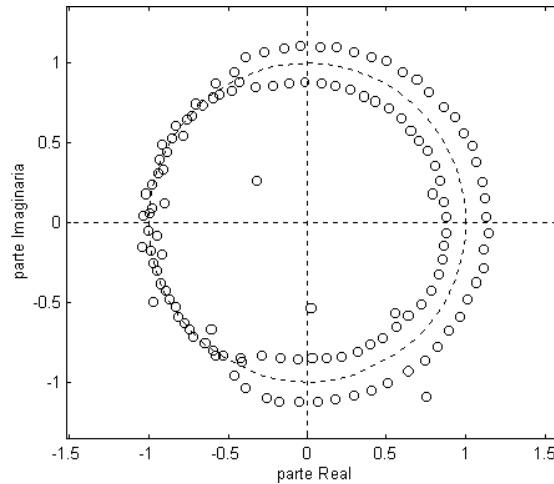


Figura 1.3: Raízes no plano  $z$  do canal utilizado no exemplo da Figura 1.2.

Uma técnica clássica em equalização adaptativa é utilizar a transmissão de uma seqüência de treinamento preestabelecida [6], a qual é conhecida *a priori* tanto no transmissor como no receptor. No receptor, o equalizador utiliza a seqüência de treinamento conhecida para adaptar  $F(z)$  de modo supervisionado, em geral através do algoritmo LMS [61], buscando atingir a condição ZF. É claro que, se o transmissor tivesse que enviar somente esta seqüência de supervisão, não haveria necessidade de equalizar o canal, já que este sinal de treinamento definido *a priori* não carrega informação útil. Na prática, no entanto, a seqüência de treinamento é transmitida somente na fase inicial do estabelecimento de comunicações ponto a ponto ou periodicamente para sistemas que operem em modo *broadcast*. Após a convergência do algoritmo LMS, situação em que o valor do erro médio quadrático (MSE – *Mean Squared Error*) da saída com relação à seqüência de treino é baixo, é usual transferir o processo de equalização para o chamado algoritmo DD (DD – *Direct Decision*) [54]. O algoritmo DD dispensa a seqüência de treino enquanto nenhuma alteração súbita e significativa ocorrer no canal.

No algoritmo DD, a saída  $y$  do equalizador é aplicada a um quantizador  $Q$ , que é um dispositivo de decisão que estima a qual símbolo do alfabeto  $A$  mais próximo se encontra

o valor de  $y$ . A Figura 1.4 mostra o diagrama da operação em seqüência dos algoritmos LMS e DD. Após o algoritmo LMS atingir um nível de MSE suficientemente baixo, a chave comuta da seqüência de treino  $d(n)$  para a estimativa da seqüência originalmente transmitida  $\hat{s}(n) = Q\{y(n)\}$ . O algoritmo Gradiente Estocástico [61] adapta  $F(z)$  objetivando minimizar a função de custo  $J$ , a qual mede o erro quadrático instantâneo entre a seqüência de saída  $y(n)$  do equalizador e  $\hat{s}(n)$  (ou mede o erro quadrático instantâneo entre  $y(n)$  e a seqüência de treino  $d(n)$  quando a chave está na posição “LMS”). Note que se  $\hat{s}(n) = s(n)$  então o algoritmo DD torna-se idêntico ao LMS. Em [44] é mostrado que equalizadores com base no algoritmo DD convergem para a condição ZF quando inicializados em uma condição de “olho parcialmente aberto”. Assim, como corolário, o algoritmo DD é capaz de acompanhar, de modo adaptativo, lentas variações em  $C(z)$  sem a necessidade explícita de se retransmitir novamente o sinal de treinamento.

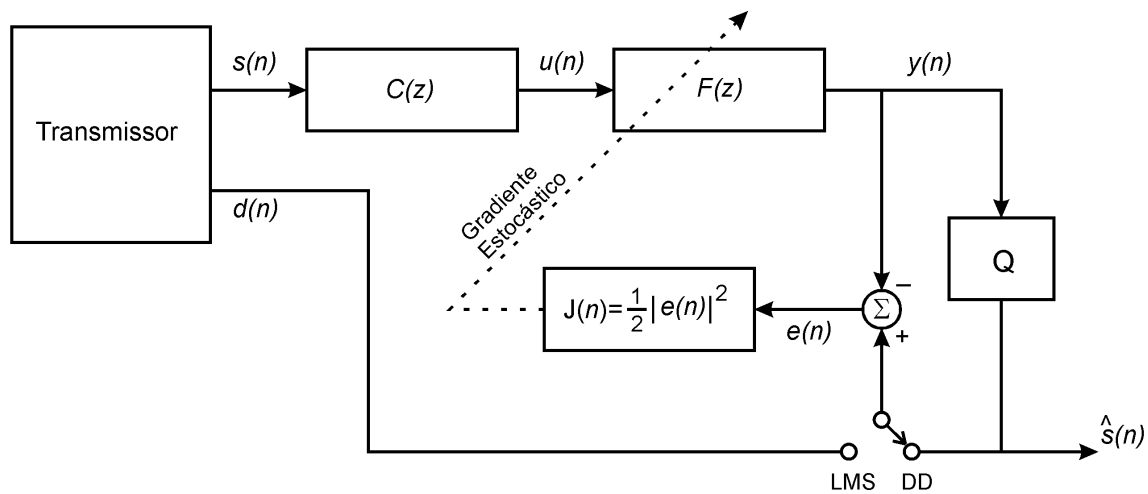


Figura 1.4: Equalizador LMS–DD.

No entanto, o uso de uma seqüência de treinamento para o equalizador constitui desperdício de banda passante, já que seqüências de treinamento não transportam informação útil. A necessidade imperiosa de sistemas de comunicação digital de alta velocidade não se coaduna com a não otimização da ocupação de banda. Mesmo para comunicações ponto a ponto, em que a seqüência de treinamento necessitaria ser transmitida somente na fase inicial, não é raro alguma variação drástica no canal

(possivelmente pequenas aeronaves na linha de visada entre antenas ou pássaros na região de campo próximo [28] de uma das antenas ) obrigar a parada momentânea do sistema para que seja efetuada a reinicialização do equalizador LMS–DD pelo algoritmo LMS. É imperativo, portanto, a concepção de equalizadores que operem com base no sinal recebido e com base em alguma característica estatística da fonte  $s(n)$ , mas não necessariamente com base na seqüência de símbolos originais  $s(n)$  (implícita na seqüência de treino  $d(n)$ ). Tal classe de equalizadores é denominada autodidata. Um equalizador autodidata, portanto, efetua a desconvolução autodidata do canal sem a necessidade de conhecer a seqüência  $s(n)$  originalmente transmitida, ao contrário dos algoritmos supervisionados LMS e LMS–DD, que forçosamente precisam desta referência (dada pela seqüência de treino  $d(n)$ ) para que a condição ZF seja alcançada. Os equalizadores autodidatas, ou não-supervisionados, são também conhecidos como equalizadores cegos (*blind equalizers*), pela maneira como buscam atingir a condição ZF.

Existe uma variedade de técnicas para equalização autodidata de canal que utilizam distintas filosofias em sua implementação. Endres, em [64], faz uma exaustiva análise entre as diversas filosofias atuais, incluindo vários exemplos comparativos de equalização autodidata de canais comprovadamente encontrados na prática de transmissão digital. A conclusão a que chega Endres em [64] e que se alinha com o observado no atual cenário de equalização autodidata é: o algoritmo CMA (*Constant Modulus Algorithm*), proposto independentemente por Godard [13] e Treichler [36], sob amostragem fracionária de canal [37], apresenta desempenho superior em relação às demais técnicas e filosofias autodidatas, principalmente no que diz respeito à velocidade de convergência. Comparativamente, o CMA necessita poucas amostras recebidas para atingir o ponto de convergência. Até porque, nas raras situações em que a performance do algoritmo CMA é suplantada, tal melhora de performance é obtida às custas de um custo computacional proibitivo. Por estas razões, esta tese utilizará o algoritmo CMA como termo de referência.

Um exemplo de classe de algoritmos de alta performance mas de custo proibitivamente alto são os chamados detetores de máxima verossimilhança ou detetores MLSD (MLSD – *Maximum Likelihood Sequence Detection*) [19]. O equalizador de um



detetor MLSD é um decodificador em treliça baseado no algoritmo de Viterbi [20]. Para cada símbolo a ser decodificado, o algoritmo de Viterbi precisa computar as métricas de  $M^{L_c+1}$  caminhos distintos na treliça, onde  $M$  é o número de símbolos do alfabeto  $A$  da fonte de informação e  $L_c$  é a dimensão da dispersão do canal. Pode-se ter uma idéia do grau de complexidade desta classe de algoritmos ao se constatar que, para um canal com dispersão de  $L_c = 16$  amostras, utilizando uma corriqueira modulação 16-QAM, a cada símbolo recebido o equalizador necessita computar  $16^{17} = 2.95 \times 10^{20}$  métricas.

Uma outra classe de algoritmo que aparece com alguma frequência na prática de equalização autodidata são os algoritmos por decomposição em sub-espacos, os quais exploram a ortogonalidade entre os sub-espacos de sinal e ruído, obtidos da matriz de correlação do sinal recebido. Exemplos desta classe de algoritmos podem ser encontrados em [15], [25] e [39]. Apresentando um custo computacional considerado moderado, esta classe de algoritmos sofre do inconveniente de ser impossível estabelecer uma delimitação clara entre os sub-espacos de sinal e ruído, o que freqüentemente resulta em alto MSE residual após um longo processo de convergência [64].

Como último exemplo, cita-se ainda os chamados equalizadores DFE (DFE – *Decision Feedback Equalizer*). Equalizadores DFE somam ao sinal recebido uma realimentação negativa da filtragem das estimativas  $\hat{s}(n) = Q\{y(n)\}$  dos símbolos originalmente transmitidos, na esperança de anular a dispersão do canal pela subtração da dispersão estimada pelo filtro. Não importando ser o filtro adaptado pelo algoritmo LMS ou pelo algoritmo CMA, equalizadores DFE inerentemente apresentam o chamado erro de propagação [49][50], o qual causa, de maneira imprevisível, a elevação da probabilidade de erro nos símbolos recebidos SER (SER – *Symbol Error Rate*) a níveis inaceitáveis durante longos intervalos de tempo. Isto acontece porque, ao ocorrer uma estimativa errada  $\hat{s}(n) = Q\{y(n)\}$ , o erro se propagará pelo filtro durante vários intervalos amostrais, realimentando-se sobre si mesmo. As recentes tentativas de minimizar o erro de propagação em equalizadores DFE têm apresentado resultados apenas moderados [31].

Seria necessário um capítulo inteiro desta tese, possivelmente mais, para que fossem comentadas as diversas técnicas de equalização propostas atualmente. Assim, limitou-se à breve exposição dos métodos mais comuns atualmente encontrados, de forma a apenas situar no presente cenário o Equalizador Concorrente aqui proposto.

O procedimento universalmente adotado no cenário de equalização autodidata com relação ao algoritmo CMA é, uma vez atingida a situação de “olho parcialmente aberto”, comuta-se para o algoritmo DD, de modo semelhante ao algoritmo LMS-DD. Este procedimento é amplamente aceito como solução para um problema inerente ao algoritmo CMA: o MSE residual relativamente alto após a convergência, o qual impede o uso direto do equalizador CMA em sistemas digitais com constelações densas. Quanto mais densa a constelação maior a velocidade de transmissão possível ao sistema, mas, simultaneamente, menor é o MSE de regime permanente exigido do equalizador [37][64]. No entanto, a transferência para o algoritmo DD somente é possível quando o MSE, após a convergência do algoritmo CMA, atinge um nível suficientemente baixo, conforme a seguir será visto. Portanto, o êxito de um equalizador CMA-DD é condicionado por um suficientemente baixo MSE residual do algoritmo CMA.

Esta dissertação propõe uma possível solução para o inerente problema do algoritmo CMA caracterizado por um MSE residual relativamente alto após a convergência – algumas vezes proibitivamente alto para determinados tipos de canais. Para que a transferência para o algoritmo DD tenha êxito, o algoritmo CMA deve ser capaz de atingir um MSE de regime permanente suficientemente baixo para que a ISI resultante permita a transferência. Ocorre que os atuais sistemas digitais de alta velocidade tendem a usar constelações cada vez mais densas. Quanto mais densa a constelação mais baixo será o valor do MSE a ser alcançado, valor este necessário para a transferência ao algoritmo DD, conforme mostra a Tabela 1.1 [64].

Como será visto, o algoritmo CMA é um algoritmo adaptativo que depende de um parâmetro denominado passo de adaptação. Para que a estabilidade da delicada dinâmica do processo de convergência do algoritmo não fique comprometida, o passo de adaptação deve

| <b>Modulação:</b> | <b>Nível máximo de MSE para transferência:</b> |
|-------------------|--|
| 16-QAM            | 0.076  |
| 64-QAM            | 0.0182   |
| 256-QAM           | 0.0045   |
| 1024-QAM          | 0.0011   |

Tabela 1.1: Nível máximo de MSE para transferência ao algoritmo DD.

ficar restrito à uma estreita faixa de valores, como um compromisso entre velocidade de convergência e MSE de regime permanente [33][64][70]. Diminuir o passo de adaptação, em geral, diminui o MSE final, mas inevitavelmente aumenta, de modo considerável, o número necessário de amostras recebidas para que a convergência se estabeleça. Aumentar o passo de adaptação aumenta a velocidade de convergência, mas implica em um considerável aumento do MSE durante a adaptação – o que pode levar o algoritmo a divergir. Ainda, o aumento do passo de adaptação implica também em um inevitável aumento do MSE após a convergência, se esta for alcançada. Com esta restrição inerente imposta, o resultado é que quanto mais densa a constelação, maior será o número de amostras necessário ao algoritmo CMA, tal que seja alcançado um nível de ISI suficientemente baixo para a transferência ao algoritmo DD, se este nível sequer possa ser atingido para o canal e constelação em questão. Assim, a convergência da seqüência de algoritmos CMA-DD, se ocorrer, será tanto mais lenta quanto mais densa for a constelação. A tentativa de efetuar a transferência do algoritmo CMA para o algoritmo DD sob um MSE de regime maior que o mostrado na Tabela 1.1 usualmente implica na não-convergência do algoritmo DD.

Esta tese propõe a operação concorrente dos algoritmos CMA e DD, objetivando atingir rápida convergência e baixo erro de regime permanente, contribuindo para a solução dos problemas inerentes à tradicional seqüência de operação CMA-DD. A tese encontra-se organizada conforme explicitado nos parágrafos a seguir.

O Capítulo 2 formula o problema de desconvoluir um canal de comunicações de modo autodidata. São definidos os conceitos básicos e os meios utilizados para que se

alcance a desconvolução do canal. São definidos também os indicadores de performance e as características de canal que nela influenciam.

O Capítulo 3 define e caracteriza o conjunto de canais a serem utilizados para teste do Equalizador Concorrente proposto nesta tese.

O Capítulo 4 descreve o algoritmo de equalização adaptativa autodidata conhecido como CMA (*Constant Modulus Algorithm*). São apresentados resultados de operação deste algoritmo na equalização de canais práticos.

O Capítulo 5 deduz o conjunto de equações que descrevem o Equalizador Concorrente, e apresenta a sua origem conceitual. São comentados trabalhos prévios que tentaram amenizar os problemas de convergência do algoritmo CMA.

O Capítulo 6 avalia o desempenho do Equalizador Concorrente com referência ao equalizador CMA. São apresentados resultados comparativos destes algoritmos na equalização de canais encontrados na prática de equalização, bem como na equalização de canais considerados de difícil desconvolução, inclusive o caso de canal variante no tempo.

O Apêndice A apresenta os resultados completos de simulação do Equalizador Concorrente para 19 canais diferentes, com modulações 16-QAM, 64-QAM e 256-QAM, e SNR 15dB, 25dB, 35dB e 100dB.

# Capítulo 2

## Equalização Autodidata de Canal

Em um sistema de transmissão digital, o problema de equalização autodidata do canal é apenas um em uma miríade. Respectivo a cada problema a ser resolvido, há pelo menos um sub-sistema destinado a resolvê-lo. Como exemplo, cita-se aqui apenas o sub-sistema de sincronismo, por estar intimamente associado ao equalizador. A solução do problema de equalização de canal em um receptor exige, como pré-requisito, a solução dos problemas de sincronismo de portadora e de sincronismo de símbolo. A representação de um sistema digital em banda base, a ser utilizada ao longo de toda esta tese, só é possível caso receptor e transmissor estejam em perfeito sincronismo. Assim, até por ser um aspecto fascinante da transmissão digital, o sistema de sincronismo mereceria um capítulo específico. No entanto, a vastidão do assunto inviabiliza tal intento. Recomenda-se a leitura de [26] e [69] quanto a este interessante e clássico aspecto da transmissão digital.

### 2.1 Descrição do Problema

Muito do trabalho analítico envolvendo algoritmos de desconvolução autodidata considera a representação em banda base do equalizador com a seqüência de entrada definida por amostras do canal espaçadas no tempo de um intervalo igual ao intervalo de amostragem  $T$  utilizado no transmissor. Tal forma de amostragem é denominada amostragem não-fracionária e qualquer sistema de equalização nela baseado é dito ser não-fracionário [37]. É possível mostrar formalmente que equalizadores CMA não-fracionários são globalmente convergentes desde que a fonte de informação tenha distribuição uniforme e independente e desde que o equalizador tenha uma dimensão tal que considere as infinitas amostras passadas do canal [13][22][56]. Obviamente, esta é uma

situação limite irrealizável. Para contornar esta limitação teórica, a prática faz uso de um número suficientemente grande de amostras passadas do canal tal que condicione a convergência do equalizador a um bom termo.

Este desagradável sentimento despertado pelo termo “infinitas amostras passadas” associado ao universo dos equalizadores não-fractionários é totalmente dissipado quando considera-se, em contrapartida, a classe de equalizadores ditos fractionários ou super-amostrados. Equalizadores baseados em amostragem fractionária foram historicamente desenvolvidos visando o problema de sincronização [24][51]. No entanto, mais recentemente, Gardner [68] mostrou que a amostragem fractionária tem a propriedade de transformar o processo estocástico associado ao sinal recebido, convertendo-o de estacionário no sentido amplo para ciclo-estacionário. No contexto de equalização, esta transformação permite que um equalizador fractionário atinja perfeitamente a condição ZF “conhecendo” apenas um número finito de amostras passadas do canal [33], sob determinadas condições ideais, a serem definidas na Seção 2.4.

A Figura 2.1 mostra o diagrama de blocos de um equalizador baseado em amostragem fractionária. O caminho entre a fonte de informação discreta  $s(n)$  do transmissor, com intervalo de *Baud* dado por  $T$ , até o sinal analógico recebido  $u(t)$ , é modelado através de um conversor D/A (D/A – *digital to analog*) que envia o sinal contínuo  $s(t)$  através de um canal  $C$  com função de transferência  $C(s) = \Lambda\{c(t)\}$ , onde  $\Lambda\{\}$  é o operador Transformada de Laplace [16] e  $c(t)$  é a resposta ao impulso do canal  $C$ .

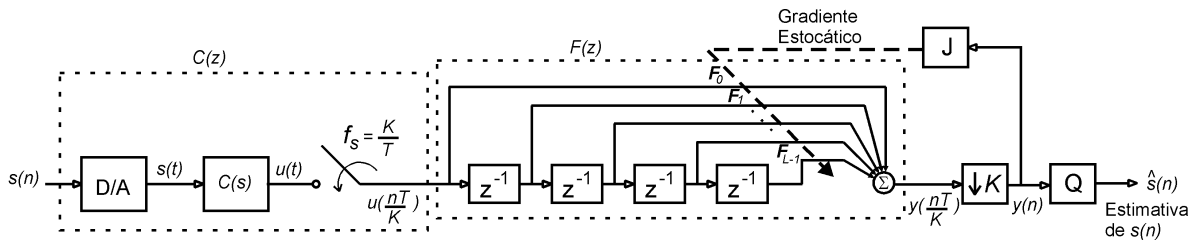


Figura 2.1: Diagrama de um sistema para equalização de canal em transmissão digital.

O sinal recebido  $u(t)$  é amostrado a intervalos de  $T/K$  segundos, onde  $K$  é um inteiro positivo. A seqüência  $u(\frac{nT}{K})$  resultante é submetida ao equalizador, com função de transferência  $F(z)$ , cuja saída  $y(\frac{nT}{K})$  é decimada<sup>1</sup> por  $K$ , gerando a seqüência de saída equalizada  $y(n)$ . Por ser resultante da decimação por  $K$  de  $y(\frac{nT}{K})$ , o intervalo de *Baud* associado a  $y(n)$  é o intervalo  $T$  originalmente usado no transmissor. O quantizador  $Q$  é um dispositivo de decisão que estima a qual símbolo do alfabeto da fonte  $s(n)$  mais se aproxima o valor de  $y(n)$ . Seguindo a tendência da suprema maioria das implementações práticas atuais, a função de transferência  $F(z)$  é implementada por um filtro FIR transversal com  $L$  coeficientes  $F_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, L-1$ , onde  $L$  é denominado dimensão do equalizador. A função de custo  $J$  gera a informação de erro necessária ao algoritmo adaptativo dos coeficientes ou pesos  $F_i$ , sendo usualmente minimizada pelo algoritmo Gradiente Estocástico [61]. Por exemplo, no caso de um equalizador supervisionado com base no algoritmo LMS, a função de custo minimizada pelo algoritmo Gradiente Estocástico é dada por  $J(n) = \frac{1}{2} |d(n) - y(n)|^2$ , onde  $d(n)$  é a seqüência de treino transmitida pelo transmissor, conforme já visto no Capítulo 1.

## 2.2 Equalizadores Não-Fracionários

Para  $K = 1$  o equalizador torna-se pertencente à classe de equalizadores não-fracionários. É instrutivo analisar esta classe de equalizadores quanto à viabilidade de convergência, antes de se analisar a classe fracionária. Seja  $\underline{C} = [C_0 \ C_1 \ \dots \ C_{L_c-1}]^T$  o vetor com dimensão igual à da dispersão de canal  $L_c$  contendo as amostras da resposta ao

---

<sup>1</sup> Decimação no sentido de sub-amostragem.

impulso  $c(n)$  do canal  $C$  tal que  $C_n = c(n)$ ,  $n = 0, 1, \dots, L_c - 1$ . Note que o equalizador, representado por  $F(z)$ , “enxerga” o canal através do amostrador, e portanto “enxerga” a resposta impulsiva discreta  $c(n)$  e não a resposta contínua  $c(t)$ . Seja  $\underline{F} = [F_0 \ F_1 \ \dots \ F_{L-1}]^T$  o vetor com dimensão  $L$  definido pelos coeficientes  $F_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, L-1$ , do filtro FIR transversal que representa o equalizador, conforme a Figura 2.1. Como a resposta ao impulso  $f(n)$  de um filtro FIR é definida pelo valor de seus coeficientes  $F_i$  [55], a resposta ao impulso do equalizador é dada por  $f(n) = F_i$ ,  $i = n = 0, 1, \dots, L-1$ . Note que, como a amostragem é não-fracionária, elementos adjacentes no vetor  $\underline{C}$  encontram-se com uma separação  $T$  relativa ao domínio tempo contínuo. Mesma observação vale para elementos adjacentes no vetor  $\underline{F}$ .

A resposta impulsiva combinada do canal e equalizador  $h(n)$  no domínio tempo pode ser representada no domínio frequência por  $H(z) = C(z)F(z)$ , onde  $H(z) = Z\{h(n)\}$ ,  $C(z) = Z\{c(n)\}$  e  $F(z) = Z\{f(n)\}$ , sendo  $Z\{\}$  o operador Transformada Z [55]. No domínio tempo,  $h(n)$  é dada pela convolução das respostas impulsivas individuais  $c(n)$  – do canal – e  $f(n)$  – do equalizador:

$$h(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)c(n-i) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c(i)f(n-i) \quad (2.1)$$

Como  $c(n)$  é limitado a  $L_c$  amostras e como  $f(n)$  é limitado a  $L$  amostras, a resposta impulsiva combinada  $h(n)$  pode ser representada pelo vetor  $\underline{H} = [H_0 \ H_1 \ \dots \ H_{L_c+L-2}]^T$  tal que  $H_i = h(n)$ ,  $i = n = 0, 1, \dots, L_c + L - 2$ , com  $\underline{H}$  dado pelo produto da matriz de convolução do canal  $\mathcal{X}$  pelo vetor  $\underline{F}$  representativo da resposta ao impulso do equalizador:



$$\underline{H} = \begin{bmatrix} H_0 \\ H_1 \\ \vdots \\ H_{L_c+L-2} \end{bmatrix} = \mathcal{X} \cdot \underline{F} = \begin{bmatrix} C_0 & 0 & 0 & 0 \\ C_1 & C_0 & \ddots & 0 \\ \vdots & C_1 & \ddots & 0 \\ C_{L_c-1} & \vdots & \ddots & C_0 \\ 0 & C_{L_c-1} & \ddots & C_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & C_{L_c-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_{L-1} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

onde  $C_0, C_1, \dots, C_{L_c-1}$  são os elementos do vetor  $\underline{C}$ .

Observe que  $\mathcal{X}$  é uma matriz Töeplitz [27], com  $L_c + L - 1$  linhas e  $L$  colunas, que é uma consequência natural de (2.1) na medida em que  $L_c$  e  $L$  são finitos. Conforme já visto no Capítulo 1, a condição ZF é definida por  $h(n) = h_d(n) = \delta(n - d)$ , para algum  $d$  inteiro não negativo. Em (2.2) a condição ZF implica que  $\underline{H} = \underline{H}_d$  onde  $\underline{H}_d$  é um vetor de dimensão  $L_c + L - 1$  cujos componentes são todos nulos, exceto o de valor unitário na posição  $d$ , isto é

$$\underline{H}_d = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]^T \quad (2.3)$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \uparrow & & & \\ & & & H_0 & & & \\ & & & & \uparrow & & \\ & & & & H_d & & \\ & & & & & \uparrow & \\ & & & & & & H_{L_c+L-2} \end{array}$$

onde  $0 \leq d \leq L_c + L - 2$ .

A conclusão imediata da Equação (2.2) com  $\underline{H} = \underline{H}_d$  é que, como  $L_c + L - 1 > L$ , o sistema de equações resultante é sobre-determinado com relação às incógnitas  $F_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, L - 1$ . Portanto, para um equalizador não-fractionário não existe uma solução  $\underline{F}$  tal que a situação ZF possa ser atingida exceto quando  $L \rightarrow \infty$ . Note que nesta discussão não foi incluído o efeito do ruído, quando então a solução do sistema é mais condicionada ainda. Este caso é discutido em [9].

A prática de equalizadores não-fracionários faz uso de  $L$  suficientemente grande tal que o sistema definido por (2.2) apresente um erro quadrático  $|\underline{H}_d - \underline{\mathcal{X}} \cdot \underline{F}|^2$  aceitável para a operação do equalizador com o canal a ser equalizado. Matematicamente, a melhor solução  $\underline{F}_{otimo}$  do sistema sobre-determinado (2.2), sob o ponto de vista da minimização do MSE  $\frac{1}{L_c + L} |\underline{H}_d - \underline{\mathcal{X}} \cdot \underline{F}|^2$ , é dada pela chamada Solução de Wiener [61],

$$\underline{F}_{otimo} = \underline{\mathcal{X}}^+ \cdot \underline{H}_d \quad (2.4)$$

onde o operador  $\{\}^+$  representa a pseudo-inversa de Moore-Penrose da matriz argumento.

Equalizadores cujo filtro FIR é obtido de (2.4) são denominados de equalizadores MMSE (MMSE – *Minimum Mean Squared Error*), porque o erro médio quadrático é minimizado pela pseudo-inversa de Moore-Penrose [27][71]. Esta classe de equalizadores não é adaptativa, o que a torna não muito popular por exigir o conhecimento *a priori* da resposta impulsiva do canal para a obtenção de  $\underline{\mathcal{X}}$ . No entanto, equalizadores MMSE constituem o limite teórico para a minimização do MSE de equalizadores adaptativos, visto que os últimos apresentam o efeito denominado MSE de Excesso [61].

## 2.3 Equalizadores Fracionários

Para  $K > 1$  na Figura 2.1, o sinal recebido  $u(t)$  é amostrado a uma razão maior que  $1/T$ , que é a razão de amostragem utilizada no transmissor para enviar os símbolos da fonte  $s$  sob um intervalo de *Baud*  $T$  através do canal. Nesta situação, o equalizador é chamado fracionário ou super-amostrado. A seqüência  $u(\frac{nT}{K})$ , obtida por amostragem fracionária, resulta em um processo ciclo-estacionário para qualquer  $K$  inteiro desde que  $K > 1$  [68]. Sob este ponto de vista, utilizar  $K > 2$  constitui um desperdício inútil, pois forçosamente

implicaria no aumento da frequência do *clock* dos circuitos digitais empregados, e em consequência, no aumento de seu custo. Assim, esta tese limitar-se-á ao estudo do caso em que  $K = 2$ , situação em que o equalizador passa a ser referido como equalizador sob amostragem fracionária  $T/2$ , ou simplesmente equalizador fracionário  $T/2$ .

O sinal analógico transmitido  $s(t)$  é aproximado no tempo contínuo por

$$s(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a(i)\delta(t-iT) \quad (2.5)$$

onde  $a(i) \in A \forall i$ , sendo  $A = \{s_0, s_1, \dots, s_{M-1}\}$  o alfabeto da informação a ser transmitida, constituído por  $M$  possíveis símbolos,  $\delta(t)$  é a Função Delta de Dirac [73] e  $T$  é o intervalo de amostragem dos símbolos ou intervalo de *Baud* do transmissor [37].

Na ausência de ruído, o sinal analógico recebido  $u(t)$  é dado pela convolução da resposta ao impulso  $c(t)$  do canal com o sinal analógico transmitido  $s(t)$ :

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)c(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \sum_{i=-\infty}^{\infty} a(i)\delta(\tau-iT) \right) c(t-\tau)d\tau \quad (2.6)$$

Mas, como o canal é um sistema linear, pelo princípio da superposição, a resposta a uma soma de excitações aplicadas ao canal é a soma das respostas individuais a cada uma delas. A partir deste fato, e utilizando as propriedades da Função Delta [73], têm-se:

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \sum_{i=-\infty}^{\infty} a(i)\delta(\tau-iT) \right) c(t-\tau)d\tau = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a(i)\delta(\tau-iT)c(t-\tau)d\tau = \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} a(i) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau-iT)c(t-\tau)d\tau = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a(i)c(t-iT) \end{aligned} \quad (2.7)$$

No receptor, o sinal  $u(t)$  é amostrado a cada intervalo  $T/2$ , gerando a seqüência

$$u\left(n\frac{T}{2}\right) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a(i)c\left(n\frac{T}{2}-iT\right) \quad (2.8)$$

Note que valores pares de  $n$  em (2.8) definem a seqüência  $u^{\text{PAR}}(k)$ , com espaçamento  $T$  entre amostras de índice  $k$ , espaçamento imposto pelo fato de  $n = 2k = 0, 2, 4, \dots$  para  $k = 0, 1, 2, \dots$ , e dada por

$$u^{\text{PAR}}(k) = u(kT) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a(i)c((k-i)T) \quad (2.9)$$

Da mesma forma, note também que valores ímpares de  $n$  em (2.8) definem a seqüência  $u^{\text{IMPAR}}(k)$ , com espaçamento  $T$  entre amostras de índice  $k$ , espaçamento imposto pelo fato de  $n = 2k - 1 = 1, 3, 5, \dots$  para  $k = 1, 2, 3, \dots$ , e dada por

$$u^{\text{IMPAR}}(k) = u(kT - \frac{T}{2}) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a(i)c\left((k-i)T - \frac{T}{2}\right) \quad (2.10)$$

O transmissor emite o símbolo  $s(nT) \in A$ , aguarda  $T$  segundos, e então emite o símbolo  $s((n+1)T) \in A$ . Como a chave do amostrador na Figura 2.1 fecha a cada  $T/2$  segundos, e como o receptor é assumido estar em sincronismo com o transmissor, dois tipos de amostras  $u$  podem ser gerados da operação da chave:

- I. Amostras  $u$  geradas em um instante de amostragem da chave que coincida com o instante de emissão de um símbolo  $s(nT)$  pelo transmissor.
- II. Amostras  $u$  geradas em um instante de amostragem da chave que coincida com o instante localizado na metade do intervalo entre a emissão dos símbolos  $s(nT)$  e  $s((n+1)T)$  pelo transmissor.

Amostras do tipo I têm um conteúdo de informação predominante associado aos símbolos emitidos pelo transmissor, enquanto que amostras do tipo II têm um conteúdo de informação predominante associado à dispersão do canal. Note que, se não houvesse dispersão, as amostras do tipo I seriam iguais aos símbolos transmitidos e as amostras do tipo II seriam identicamente nulas, por não haver “reverberação” (ISI) no canal. Nesta tese assume-se que o sincronismo seja tal que a seqüência  $u^{\text{PAR}}(k)$  represente o conjunto de amostras do tipo I e a seqüência  $u^{\text{IMPAR}}(k)$  represente o conjunto de amostras do tipo II. Portanto, amostras recebidas do canal com índice par referem-se a instantes em que o

transmissor emite símbolos e amostras recebidas do canal com índice ímpar referem-se a instantes localizados na metade do intervalo entre a emissão de símbolos pelo transmissor. As amostras da resposta impulsiva dos canais a serem descritos no Capítulo 3 obedecem a este critério, isto é, amostras pares referem-se a instantes de emissão de símbolos pelo transmissor.

As Equações (2.9) e (2.10) sugerem que a representação da resposta ao impulso  $c$  do canal  $C$  também pode ser subdividida em componentes pares e componentes ímpares. Seja, então,  $\underline{C} = [C_0 \ C_1 \ \dots \ C_{L_c-1}]^T$  o vetor com dimensão igual à da dispersão de canal  $L_c$  contendo as amostras resultantes da amostragem fracionária  $T/2$  da resposta ao impulso  $c(t)$  do canal  $C$  tal que  $C_n = c(\frac{nT}{2})$ ,  $n = 0, 1, \dots, L_c - 1$ . Sejam dois vetores,  $\underline{C}^{\text{PAR}}$  e  $\underline{C}^{\text{ÍMPAR}}$ , ambos com espaçamento  $T$  entre seus elementos, obtidos de  $\underline{C}$  tal que um vetor mantenha um espaçamento relativo  $T/2$  em relação ao outro:

$$\underline{C}^{\text{PAR}} = [C_0 \ C_2 \ C_4 \ \dots]^T, \quad \underline{C}^{\text{ÍMPAR}} = [0 \ C_1 \ C_3 \ \dots]^T \quad (2.11)$$

Como a resposta ao impulso de um sistema FIR define os coeficientes de sua função de transferência [55],  $\underline{C}^{\text{PAR}}$  define  $C^{\text{PAR}}(z)$  e  $\underline{C}^{\text{ÍMPAR}}$  define  $C^{\text{ÍMPAR}}(z)$ . Assim, a Equação (2.11) sugere o modelo multi-canal mostrado na Figura 2.2.

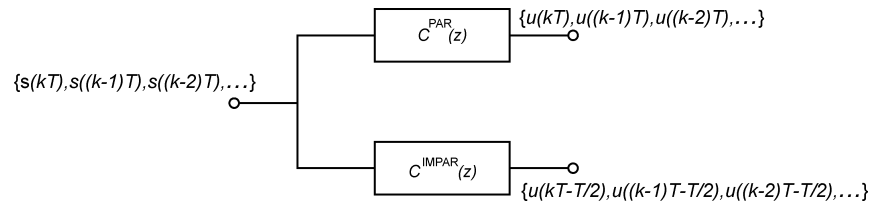


Figura 2.2: Modelo com dois sub-canais (par e ímpar) resultante da amostragem fracionária  $T/2$  do canal original.

Semelhantemente, o equalizador – sob amostragem fracionária  $T/2$  – também terá uma representação subdividida em componentes pares e ímpares. Da Figura 2.1, seja  $f(i) = F_i$  a resposta ao impulso do filtro FIR do equalizador,  $i = 0, 1, \dots, L - 1$ . No domínio

tempo super-amostrado, a saída  $y(\frac{nT}{2})$  é dada pela convolução das amostras recebidas do canal  $u(\frac{nT}{2})$  com a resposta ao impulso  $f(\frac{nT}{2})$  do equalizador:

$$y(\frac{nT}{2}) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(\frac{iT}{2})u(\frac{nT}{2} - \frac{iT}{2}) = \sum_{i=0}^{L-1} f(\frac{iT}{2})u((n-i)\frac{T}{2}) \quad (2.12)$$

Para cada  $n$ , na convolução definida em (2.12), o indexador  $i$  do somatório ora refere-se a instantes associados a amostras pares da seqüência recebida super-amostrada  $u(\frac{nT}{2})$ , ora refere-se a instantes associados a amostras ímpares de  $u(\frac{nT}{2})$ . Portanto, a saída super-amostrada  $y(\frac{nT}{2})$  pode ser convertida em uma seqüência  $y(kT)$ , com espaçamento  $T$  entre amostras, decomponível em duas seqüências  $y^{\text{PAR}}(kT)$  e  $y^{\text{IMPAR}}(kT)$  definidas conforme os parágrafos que seguem.

Seja  $i = 2j$  e  $n = 2k$  em (2.12). Então,

$$y^{\text{PAR}}(kT) = \sum_{j=0}^{\frac{L-1}{2}} f(jT)u((k-j)T) \quad (2.13)$$

Seja  $i = 2j+1$  e  $n = 2k$  em (2.12). Então,

$$y^{\text{IMPAR}}(kT) = \sum_{i=0}^{L-1} f(\frac{(2j+1)T}{2})u((2k - (2j+1))\frac{T}{2}) = \sum_{j=0}^{\frac{L-1}{2}} f(jT + \frac{T}{2})u((k-j)T - \frac{T}{2}) \quad (2.14)$$

Portanto, a representação total é dada por

$$y(k) = y^{\text{PAR}}(k) + y^{\text{IMPAR}}(k) = \sum_{i=0}^{\frac{L-1}{2}} \left( f(iT)u((k-i)T) + f(iT + \frac{T}{2})u((k-i)T - \frac{T}{2}) \right) \quad (2.15)$$

Dependendo do sistema, o bloco decimador  $K$  na Figura 2.1 pode manter as amostras pares e eliminar as amostras ímpares da saída super-amostrada  $y(\frac{nT}{2})$ , ou pode

manter as amostras ímpares e eliminar as amostras pares de  $y(\frac{nT}{2})$ . Como  $u^{\text{PAR}}(k)$  representa o conjunto de amostras do tipo I, o decimador  $K$  manterá as amostras para  $n$  par e eliminará as amostras para  $n$  ímpar na saída super-amostrada  $y(\frac{nT}{2})$ . Portanto, a saída após o decimador  $K$  é dada por  $y(n) = y^{\text{PAR}}(k)$ .

A Equação (2.15) sugere que o vetor  $\underline{F} = [F_0 \ F_1 \ \dots \ F_{L-1}]^T$  de coeficientes do filtro FIR do equalizador, os quais são definidos pela sua resposta ao impulso  $f(\frac{nT}{2})$ , isto é,  $F_n = f(\frac{nT}{2})$ ,  $n = 0, 1, \dots, L-1$ , pode ser decomposto em  $\underline{F}^{\text{PAR}} = f(kT)$  e  $\underline{F}^{\text{IMPAR}} = f(kT - \frac{T}{2})$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Ou seja,

$$\underline{F}^{\text{PAR}} = [f(0) \ f(T) \ f(2T) \ \dots]^T, \quad \underline{F}^{\text{IMPAR}} = \left[ f\left(\frac{T}{2}\right) \ f\left(\frac{3T}{2}\right) \ f\left(\frac{5T}{2}\right) \ \dots \right]^T \quad (2.16)$$

Como os coeficientes de um filtro FIR definem os coeficientes de sua função de transferência [55],  $\underline{F}^{\text{PAR}}$  define  $F^{\text{PAR}}(z)$  e  $\underline{F}^{\text{IMPAR}}$  define  $F^{\text{IMPAR}}(z)$ . Isto sugere o modelo multi-canal para o equalizador mostrado na Figura 2.3.

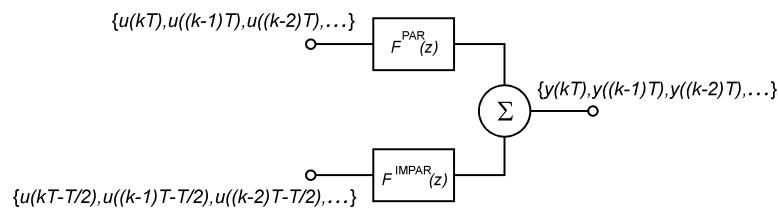


Figura 2.3: Modelo em dois sub-filtros (par e ímpar) para o equalizador, resultante da operação sob amostragem fracionária  $T/2$  do canal.

Combinando as Figuras 2.2 e 2.3, obtêm-se o modelo não-fracionário (espaçamento  $T$  entre amostras adjacentes em  $s$  e  $y$ ) equivalente para o sistema de equalização:

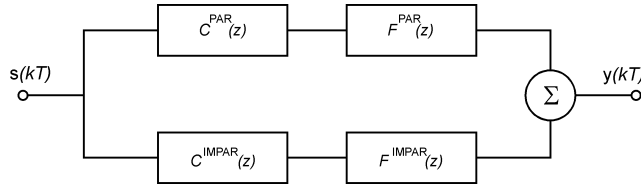


Figura 2.4: Modelo equivalente não-fractionário para um sistema de equalização com amostragem fractionária  $T/2$ . O espaçamento entre amostras adjacentes em  $s$  e  $y$  é  $T$ .

Algum cuidado é necessário na interpretação do equalizador fractionário através do sistema equivalente mostrado na Figura 2.4. A fonte  $s(kT)$  emite símbolos com espaçamento temporal  $T$ . No entanto, ao encontrar a bifurcação, o fluxo de sinal da fonte  $s$  é dividido em dois fluxos, par e ímpar. A partir da bifurcação, o fluxo par transporta os símbolos  $s(kT)$  efetivamente emitidos pela fonte  $s$ , o qual origina amostras do tipo I no receptor. O fluxo ímpar transporta símbolos fictícios, gerados na bifurcação, o qual origina amostras do tipo II no receptor. Estes símbolos fictícios são gerados na bifurcação em instantes de tempo que coincidem com instantes de tempo localizados na metade do intervalo entre a emissão dos símbolos  $s(kT)$  e  $s((k+1)T)$ . Este é o motivo de o decimador  $K$  eliminar as amostras do tipo II, mantendo as amostras do tipo I, já que é desejado equalizar o fluxo de símbolos efetivamente emitidos por  $s$  e não o fluxo de símbolos fictícios associados à “reverberação” no canal. Em consequência, o procedimento de determinação do filtro  $F$  do equalizador será feito objetivando equalizar o fluxo de sinal par. Assim, a  $H(z)$  equivalente no domínio frequência é dada por

$$H(z) = C^{\text{PAR}}(z)F^{\text{PAR}}(z) + C^{\text{IMPAR}}(z)F^{\text{IMPAR}}(z) \quad (2.17)$$

Sob condição ZF, têm-se que  $h(n) = h_d(n) = \delta(n-d)$ , o que implica em  $H(z) = H_d(z) = Z\{h_d(n)\}$ , onde  $Z\{\cdot\}$  é o operador Transformada Z. É interessante observar que, ao impor  $H(z) = H_d(z)$  em (2.17), a equação é transformada na conhecida Identidade de Bezout [11], no contexto da Análise de Sistemas Lineares.

Utilizando o conceito de matriz de convolução, a Equação (2.17) é dada no domínio tempo por,



$$\underline{H} = \mathcal{X}^{\text{PAR}} \underline{F}^{\text{PAR}} + \mathcal{X}^{\text{IMPAR}} \underline{F}^{\text{IMPAR}} \quad (2.18)$$

Comparando a Equação (2.18) com a Equação (2.2) verifica-se que, se o filtro  $\underline{F}$  de um equalizador não-fracionário sob ZF aproxima a inversa do canal através de  $\mathcal{X}^+$ , um equalizador fracionário sob ZF não necessariamente o faz, visto que dois termos envolvendo as matrizes de convolução de cada sub-canal, distintas da matriz do canal, definem a resposta impulsiva  $\underline{H}$  em (2.18).

O procedimento para determinação do filtro  $\underline{F}$  de um equalizador fracionário é análogo ao caso não-fracionário, isto é, faz-se  $\underline{H} = \underline{H}_d$  na Equação (2.18) objetivando que o equalizador atinja ZF. No entanto, como o decimador  $K$  elimina as amostras ímpares, a determinação de  $\underline{F}$  é tal que o termo  $\mathcal{X}^{\text{PAR}} \underline{F}^{\text{PAR}}$ , com  $\underline{F}^{\text{PAR}} = \underline{F}$ , seja o responsável por forçar  $\underline{H} = \underline{H}_d$  na interpretação multi-canal dada por (2.18). Isto é,  $\underline{F}$  é determinado de forma que apenas as componentes pares de  $\underline{H}$  sejam forçadas a igualarem  $\underline{H}_d$ . Como consequência, o termo  $\mathcal{X}^{\text{IMPAR}} \underline{F}^{\text{IMPAR}}$  resultante de  $\underline{F}$  assim determinado – isto é, para  $\underline{F}^{\text{IMPAR}} = \underline{F}$  – é um vetor que resulta do processo de equalização do fluxo de sinal par na Figura 2.4, mas que não tem nenhuma influência direta sobre tal processo.

Para que se proceda a determinação de  $\underline{F}$ , faz-se necessário um conjunto de definições preliminares. Seja  $\underline{C} = [C_0 \ C_1 \ \dots \ C_{L_c-1}]^T$  o vetor com dimensão igual à da dispersão de canal  $L_c$  contendo as amostras resultantes da amostragem fracionária  $T/2$  da resposta ao impulso  $c(t)$  do canal  $C$  tal que  $C_n = c(\frac{nT}{2})$ ,  $n = 0, 1, \dots, L_c - 1$ . Seja  $L_c$  um número inteiro positivo par, de modo que  $\underline{C}$  inclua todas as amostras pares e ímpares (condição não obrigatória na prática) da resposta impulsiva. Seja  $\underline{F} = [F_0 \ F_1 \ \dots \ F_{L-1}]^T$  o vetor de coeficientes do filtro FIR do equalizador fracionário, contendo as amostras da resposta ao impulso fracionária  $f(\frac{nT}{2})$  do equalizador, isto é,  $F_n = f(\frac{nT}{2})$ ,  $n = 0, 1, \dots, L - 1$ .



$$\underline{H} = \begin{bmatrix} H_0 \\ H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \\ H_5 \\ H_6 \end{bmatrix} = \mathcal{X} \cdot \underline{F} = \begin{bmatrix} C_0 & 0 & 0 & 0 \\ C_1 & C_0 & 0 & 0 \\ C_2 & C_1 & C_0 & 0 \\ C_3 & C_2 & C_1 & C_0 \\ 0 & C_3 & C_2 & C_1 \\ 0 & 0 & C_3 & C_2 \\ 0 & 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

A matriz  $\mathcal{X}$ , ao ser referida à saída do decimador  $K$ , dá origem ao sistema de equações

$$\underline{H}^\downarrow = \begin{bmatrix} H_0 \\ H_2 \\ H_4 \\ H_6 \end{bmatrix} = \mathcal{X}^\downarrow \cdot \underline{F} = \begin{bmatrix} C_0 & 0 & 0 & 0 \\ C_2 & C_1 & C_0 & 0 \\ 0 & C_3 & C_2 & C_1 \\ 0 & 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Observe que  $\mathcal{X}^\downarrow$  é uma matriz com  $\left\lceil \frac{L_c + L - 1}{2} \right\rceil$  linhas e  $L$  colunas. A condição ZF aplicada em (2.21) implica que  $\underline{H}^\downarrow = \underline{H}_d^\downarrow$  onde  $\underline{H}_d^\downarrow$  é um vetor de dimensão  $\left\lceil \frac{L_c + L - 1}{2} \right\rceil$  cujos componentes são todos nulos exceto o de valor unitário na posição  $d$ .

Para que o sistema de equações (2.21) tenha pelo menos uma solução para o vetor de incógnitas  $\underline{F}$ , solução que objetiva determinar  $\underline{F}$  para que o equalizador atinja ZF, é necessário que  $\left\lceil \frac{L_c + L - 1}{2} \right\rceil \leq L$ , ou equivalentemente,  $L \geq L_c - 1$ . Esta é uma exigência radicalmente mais factível do que a exigência  $L \rightarrow \infty$  necessária à classe de equalizadores não-fractionários.

Note que a obtenção de  $\underline{F}$  através de (2.21) para  $\underline{H}^\downarrow = \underline{H}_d^\downarrow$  implica que o termo  $\chi^{\text{PAR}} \underline{F}^{\text{PAR}}$ , com  $\underline{F}^{\text{PAR}} = \underline{F}$ , força as componentes pares de  $\underline{H}$  a igualarem  $\underline{H}_d$  na interpretação multi-canal dada por (2.18).

Sempre que  $C^{\text{PAR}}(z)$  e  $C^{\text{IMPAR}}(z)$  apresentarem zeros comuns, (2.17) pode ser escrita como

$$H(z) = C^{\text{ZCOM}}(z) \left( C_r^{\text{PAR}}(z) F^{\text{PAR}}(z) + C_r^{\text{IMPAR}}(z) F^{\text{IMPAR}}(z) \right) \quad (2.22)$$

onde  $C^{\text{ZCOM}}(z)$  é o polinômio em  $z$  resultante do produto de todos os monômios  $(z - z_m)$ , sendo  $z_m$ ,  $m = 0, 1, \dots, N_{zc} - 1$ , a  $m$ -ésima frequência do conjunto de  $N_{zc}$  zeros comuns a  $C^{\text{PAR}}(z)$  e  $C^{\text{IMPAR}}(z)$ , com  $C_r^{\text{PAR}}(z) = \frac{C^{\text{PAR}}(z)}{C^{\text{ZCOM}}(z)}$  e  $C_r^{\text{IMPAR}}(z) = \frac{C^{\text{IMPAR}}(z)}{C^{\text{ZCOM}}(z)}$ .

Utilizando o conceito de matriz de convolução, (2.22) é dada no domínio tempo por,

$$\underline{H} = \chi^{\text{ZCOM}} \left( \chi_r^{\text{PAR}} \underline{F}^{\text{PAR}} + \chi_r^{\text{IMPAR}} \underline{F}^{\text{IMPAR}} \right) \quad (2.23)$$

Observe que a matriz de convolução fracionária equivalente do sistema de equações (2.23) não é mais identicamente separável em componentes pares e ímpares, como o é (2.18). Portanto, ao referir-se tal matriz à saída do decimador  $K$ , por não haver mais um conjunto de linhas pares separável do conjunto de linhas ímpares, o sistema de equações resultante não é mais factível de ser reduzido à forma dada em (2.19). Nesta situação, a condição ZF não é mais garantida apenas fazendo-se  $L \geq L_c - 1$ . No entanto, é mostrado em [8] que um equalizador CMA fracionário destinado a equalizar um canal físico que apresente zeros comuns aos sub-canais  $C^{\text{PAR}}(z)$  e  $C^{\text{IMPAR}}(z)$  pode convergir para a condição ZF desde que  $L$  seja “suficientemente grande”, mas não necessariamente infinito. A prática mostra que isto é verdadeiro, muito embora a convergência de um equalizador CMA fique algo dificultada quando os sub-canais apresentam muitos zeros comuns. Em [64] é mostrado que o único algoritmo a convergir satisfatoriamente com este tipo de canal, dentre os presentes no atual cenário e para SNR=35dB, é o LMS cíclico [21]. O LMS cíclico

minimiza a função de custo  $J_{\text{LMS}}(n) = |y(n) - s(n-d)|^2$ , onde  $y(n)$  é a saída do equalizador e  $s(n-d)$  é a seqüência originalmente transmitida com um atraso  $d$ . O LMS cíclico apresenta o inconveniente de necessitar da estimativa *a priori* do coeficiente  $C_0$  do canal e da variância da fonte no sinal recebido. Como isto não é possível na prática,  $J_{\text{LMS}}$  é minimizada com um grau de liberdade tal que ocorre redução de ISI, mas com magnitude e fase da constelação de saída desconhecidas. Aliás, [64] dá indício que este é o único caso em que o LMS cíclico apresenta desempenho melhor que o CMA. De fato, o desempenho do LMS cíclico é, em geral, sofrível se comparado com o elenco de algoritmos atuais.

É possível mostrar que zeros comuns aos sub-canais  $C^{\text{PAR}}(z)$  e  $C^{\text{IMPAR}}(z)$  equivalem a pares de zeros de  $C(z)$  situados em posições equidistantes da origem do plano  $z$  sobre uma reta que a contém [14][30][32][40]. No jargão de equalização, é dito que a condição ZF é perfeitamente alcançável se há disparidade (nenhuma raiz comum) entre os sub-canais ou, equivalentemente, se não há pares de raízes refletidas de  $C(z)$  com relação à origem. A Figura 2.5 mostra a equivalência entre raízes de  $C(z)$  refletidas e raízes comuns aos sub-canais  $C^{\text{PAR}}(z)$  e  $C^{\text{IMPAR}}(z)$ .

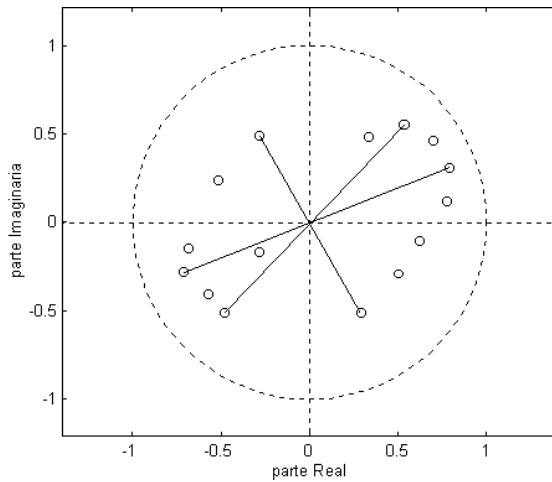


Fig. 2.5a: Zeros de  $C(z)$ .

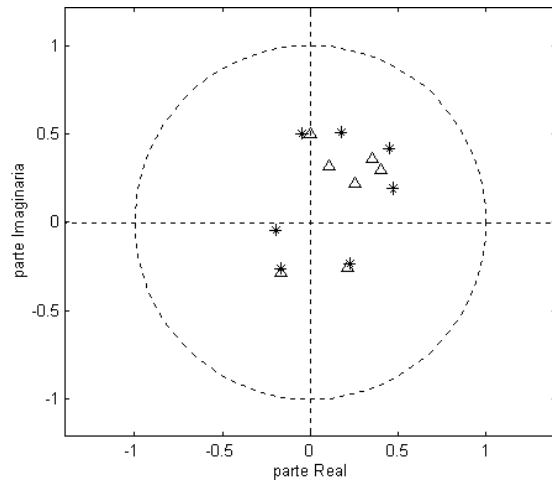


Fig. 2.5b: Zeros de  $C^{\text{PAR}}(z) - \Delta$  e  $C^{\text{IMPAR}}(z) - *$ .

Figura 2.5: Equivalência entre pares de raízes de  $C(z)$  refletidas com relação à origem e pares de raízes comuns entre os sub-canais  $C^{\text{PAR}}(z)$  e  $C^{\text{IMPAR}}(z)$ . Para cada par de raízes aproximadamente refletidas sobre a origem na Figura 2.5a existe um par de raízes próximas na Figura 2.5b.

## 2.4 Condições Ideais para ZF em um equalizador CMA

Tendo em vista a discussão anterior em toda a sua extensão, é possível, então, definir as condições ideais para que um equalizador CMA super-amostrado atinja perfeitamente a situação ZF. É importante ressaltar que o conjunto destas condições constitui uma idealização não encontrada em nenhum caso prático, servindo apenas de referência para uma primeira avaliação do ambiente operacional em que um equalizador CMA fracionário deverá funcionar. Quanto mais próximo o ambiente operacional estiver das referidas condições, mais facilidade terá o equalizador em atingir um ponto de convergência próximo à situação ZF. As condições operacionais ideais para ZF são:

- I. Característica estatística da fonte de informação: A seqüência que representa a fonte de informação possui média zero, distribuição uniforme, e apresenta independência estatística entre amostras. Em [33] Le Blanc faz um exaustivo estudo do comportamento de equalizadores fracionários CMA quanto à correlação e quanto à distribuição estatística da fonte. O resultado que emerge de [33] é que, para fontes cuja distribuição apresenta valor de curtose  $\kappa$  entre a da distribuição uniforme ( $\kappa = 1$ ) e a da distribuição Gaussiana ( $\kappa = 3$ ), os mínimos da função de custo  $J_G$  do algoritmo CMA resultam factíveis de serem alcançados pelo Gradiente Estocástico (à medida que  $\kappa$  aproxima-se de 3, menor torna-se o gradiente de  $J_G$  na direção dos mínimos), e, portanto, a convergência do CMA é possível para esta situação. Para fontes cuja distribuição apresenta  $\kappa > 3$  o CMA diverge. É mostrado também que a correlação da fonte influencia o desempenho do CMA na medida em que altera a posição dos mínimos – o que não impede a convergência. No entanto, para fontes altamente correlacionadas, falsos mínimos são acrescentados à  $J_G$ , o que pode impedir a convergência do CMA.
- II. Ruído aditivo: Não há ruído aditivo no canal de transmissão. Obviamente esta é uma situação ideal que jamais é encontrada na prática.
- III. Disparidade de sub-canais: Não existem raízes comuns às funções de transferência FIR  $C^{\text{PAR}}(z)$  e  $C^{\text{IMPAR}}(z)$  que representam os sub-canais. Esta condição estende-se também a sistemas que utilizam múltiplos canais originados por diversidade espacial (super-amostragem é considerada diversidade temporal), como por exemplo, sistemas que utilizam um conjunto de múltiplas antenas receptoras [12][30]. No Capítulo 3 será visto que esta condição é violada em muitos canais práticos.

- IV. Dimensão do equalizador: O equalizador apresenta um dimensão  $L$  tal que  $L \geq L_c - 1$ , onde  $L_c$  é a dimensão da dispersão de canal. Em [64] é apresentado um estudo de considerável abrangência sobre a sensibilidade de um equalizador fracionário CMA quanto à violação desta condição.

## 2.5 Algumas Definições Operacionais

Muito se falou em ISI nesta tese até o presente momento, associando-a à idéia de “reverberação” no canal, mas não foi sugerida ainda uma definição quantitativa da mesma. Uma possível definição, que será adotada nesta tese, é denominada de ISI de pico [52], e é dada por

$$\text{ISI} = \frac{\sum_k |H_k^\downarrow| - \max_k |H_k^\downarrow|}{\max_k |H_k^\downarrow|} \quad (2.24)$$

onde  $H_k^\downarrow$  é o  $k$ -ésimo componente do vetor  $\underline{H}^\downarrow$  definido em (2.19).

Ainda resta determinar a forma de implementação do bloco decimador  $K$  na Figura 2.1. Embora a representação da operação de decimação por um bloco específico seja instrutiva, na prática ela não é implementada desta forma. Ao invés disto, utiliza-se o conceito de regressor fracionário de canal. O  $n$ -ésimo regressor fracionário do canal é o vetor  $\underline{r}(n) \in \mathbb{C}^L$ ,  $n = 0, 1, \dots, N_r - 1$ ,  $\mathbb{C}$  é o conjunto dos números complexos, vetor dado por

$$r_k(n) = u(L - 1 - k + i), \quad k = 0, 1, \dots, L - 1 \quad (2.25)$$

onde:

$L$  é a dimensão do equalizador,

$u$  é a seqüência de amostras recebida por amostragem fracionária  $\frac{T}{2}$  do canal, com

$i = 1, 3, \dots, N_a - 1$  variando na medida em que  $n = 0, 1, \dots, N_r - 1$  tal que  $i = 2n + 1$ ,

$N_a$  é o número total de amostras a serem recebidas por amostragem fracionária do canal,

$N_r = \left\lfloor \frac{N_a - L - 1}{2} \right\rfloor + 1$  é o número total de regressores a serem obtidos do canal ,

$T$  é o intervalo entre os símbolos gerados no transmissor,

$\lfloor \cdot \rfloor$  é o operador que resulta no inteiro mais próximo e menor que o argumento.

Desta maneira, a saída  $y(n)$ , no instante  $n$ , é simplesmente dada por

$$y(n) = \underline{F}^T(n) \cdot \underline{r}(n) \quad (2.26)$$

onde  $\underline{F}(n)$  é o vetor  $\underline{F} = [F_0 \ F_1 \ \dots \ F_{L-1}]^T$  que define os coeficientes do filtro do equalizador no instante  $n$ . Note que o intervalo de tempo contínuo associado ao intervalo entre os instantes discretos  $n$  e  $n+1$  é o intervalo de *Baud* do transmissor, ou  $T$ . Assim, a cada símbolo  $s(n)$  transmitido pelo transmissor é gerado um correspondente regressor de canal  $\underline{r}(n)$  no receptor, ficando, portanto, implicitamente implementada a operação de decimação. No entanto, o intervalo de tempo contínuo associado ao intervalo entre os componentes de cada regressor  $\underline{r}$  é  $\frac{T}{2}$ , garantindo a convolução fracionária realizada pelo filtro.



# Capítulo 3

## Modelos de Canais

Objetivando testar o Equalizador Concorrente em situações mais próximas possíveis da operação real, são utilizados nesta tese os modelos de canais disponíveis na base de dados da Universidade de Rice, Houston, Texas, USA. Esta base de dados é conhecida como *Signal Processing Information Base* (SPIB) e pode ser acessada em <http://spib.rice.edu/>. A SPIB tem sido bastante utilizada como referência em muitos trabalhos recentes que procuram evitar o cunho de serem apenas acadêmicos. Informações adicionais, incluindo estudos e artigos com base na SPIB, podem ser encontradas no site do *Blind Equalization Research Group* (BERG) em <http://backhoe.ee.cornell.edu/BERG/>, pertencente à Universidade de Cornell, Ithaca, New York, USA.

A operação do Equalizador Concorrente também é avaliada sob variação temporal no canal, situação que caracteriza a operação sob canal dinâmico. Na análise em questão são utilizados os canais sugeridos por M. Gosh em “*Blind Decision Feedback Equalization for Terrestrial Television Receivers*”, referência [43].

### 3.1 Descrição da Base de Dados

Os modelos de canais de microondas a serem utilizados podem ser acessados em <http://spib.rice.edu/spib/microwave.html>. Estes modelos constituem a resposta ao impulso, medida em campo, de diversos canais de microondas reais. Muito embora seja apresentada nesta tese a caracterização completa de cada canal, tanto no domínio tempo como no domínio frequência, informações adicionais podem ser obtidas em [10], [35] e [65].

A resposta ao impulso dos canais de microondas da SPIB é obtida sob uma razão de amostragem alta, da ordem de dezenas de megabauds por segundo, resultando em respostas impulsivas com centenas de amostras. Isto permite que cada pesquisador decime a seqüência resultante por um fator adequado ao seu caso de particular interesse, sem que se perca informação significativa. A suprema maioria dos trabalhos raramente utiliza uma resposta impulsiva de canal com mais de algumas dezenas de amostras. Nesta tese, para que se mantenha termo de comparação com recentes trabalhos na área [33][64][70], os canais de microondas SPIB serão decimados para 16 amostras. A Tabela 3.1 identifica os canais SPIB utilizados e estabelece a respectiva designação a ser doravante aqui adotada. Por exemplo, ao referir-se ao canal M2 nesta tese, entenda-se: o canal cuja resposta ao impulso resulta da decimação para 16 amostras da seqüência de amostras do arquivo chan2.mat da base de dados SPIB referente a canais de microondas.

| Arquivo SPIB:<br>(microondas) | Razão de amostragem $1/T$ do transmissor em Mbauds/s (conforme <a href="http://spib.rice.edu/spib/microwave.html">http://spib.rice.edu/spib/microwave.html</a> ): | Número de amostras no arquivo SPIB resultante da amostragem fracionária $T/2$ da resposta impulsiva recebida do canal: | Designação, nesta tese, da respectiva resposta impulsiva gerada por decimação do arquivo SPIB para 16 amostras: |
|-------------------------------|---|--|---|
| chan1.mat                     | 30  | 300  | M1  |
| chan2.mat                     | 22.5  | 230  | M2  |
| chan3.mat                     | 30  | 300  | M3  |
| chan4.mat                     | 30  | 300  | M4  |
| chan5.mat                     | 22.5  | 206  | M5  |
| chan6.mat                     | 30  | 300  | M6  |
| chan7.mat                     | 30  | 300  | M7  |
| chan8.mat                     | 30  | 300  | M8  |
| chan9.mat                     | 30  | 300  | M9  |
| chan10.mat                    | 30  | 300  | M10   |
| chan11.mat                    | 30  | 300  | M11   |
| chan12.mat                    | 22.5  | 227  | M12   |
| chan13.mat                    | 22.5  | 200  | M13   |
| chan14.mat                    | 30  | 600  | M14   |
| chan15.mat                    | 30  | 586  | M15   |

Tabela 3.1: Modelos de canais de microondas da base de dados SPIB.

Para que a localização dos zeros da função de transferência FIR de um canal SPIB não seja alterada, utiliza-se decimação no domínio frequência [55][64]. Especificamente, o número de amostras em um arquivo SPIB é estendido para a próxima potência inteira de 2 mediante o acréscimo de amostras nulas em seqüência. A seguir é aplicada a FFT (FFT – *Fast Fourier Transform*) sobre a seqüência estendida e a resultante seqüência no domínio frequência é decimada para 16 amostras. Aplica-se então a IFFT (IFFT – *Inverse Fast Fourier Transform*) sobre a seqüência decimada no domínio frequência resultando em uma seqüência de 16 amostras no domínio tempo, correspondente à resposta impulsiva decimada. Caso fosse utilizada decimação no domínio tempo, seriam gerados efeitos de *aliasing* [55], alterando, em especial, a posição das raízes refletidas e das raízes próximas ao círculo de raio unitário, o que poderia transformar os canais SPIB em um conjunto de canais “acadêmicos”.

Outro tipo de modelo de canal utilizado nesta tese é o representativo de canais para TV a cabo, os quais podem ser acessados em <http://spib.rice.edu/spib/cable.html>. A razão de amostragem utilizada para estes canais da SPIB é a usualmente utilizada em decodificadores de TV a cabo práticos. Assim, para que se mantenha termo de comparação com trabalhos na área, estes canais não serão decimados. A Tabela 3.2 identifica os canais de TV a cabo SPIB utilizados e estabelece a respectiva designação a ser doravante aqui adotada. Por exemplo, ao referir-se ao canal C2 nesta tese, entenda-se: o canal cuja resposta ao impulso é dada pela seqüência de amostras do arquivo `chan2.mat` da base de dados SPIB referente a canais de TV a cabo.

| Arquivo SPIB:<br>(TV a cabo) | Número de amostras no arquivo SPIB resultante da amostragem fracionária $T/2$ da resposta impulsiva recebida do canal:<br>(conforme <a href="http://spib.rice.edu/spib/cable.html">http://spib.rice.edu/spib/cable.html</a> .) | Designação, nesta tese, da respectiva resposta impulsiva associada: |
|------------------------------|--|---|
| chan1.mat                    | 128  | C1  |
| chan2.mat                    | 128  | C2  |

Tabela 3.2: Modelos de canais de TV a cabo da base de dados SPIB.

E, finalmente, as duas classes de canais FIR considerados “vilões”, quais sejam, canais com pares de raízes de  $C(z)$  refletidas sobre a origem (ou raízes comuns aos sub-canais  $C^{\text{PAR}}(z)$  e  $C^{\text{IMPAR}}(z)$ ), e canais com raízes de  $C(z)$  sobre o círculo de raio unitário, onde  $C(z)$  é a Transformada Z da resposta impulsiva do canal resultante de amostragem fracionária  $T/2$ . A serem caracterizados adiante, o canal representativo da classe de canais com raízes refletidas será referido nesta tese como canal RR e o canal representativo da classe de canais com raízes de raio unitário será referido nesta tese como canal RU. As respostas impulsivas dos canais RR e RU foram obtidas do conjunto de raízes no plano  $z$  sugerida em [64] para caracterização destes dois canais, com a subsequente aplicação da Transformada Z Inversa sobre cada respectivo conjunto.

## 3.2 Caracterização dos Canais

Nesta tese, os canais M1 a M15, C1,C2, RR e RU serão caracterizados por:

- 1- Módulo  $|c(n)|$  e fase  $\angle c(n)$  (em graus) da resposta impulsiva  $c(n)$  resultante da amostragem fracionária  $T/2$  da resposta ao impulso  $c(t)$  do canal.
- 2- O lugar no plano  $z$  dos zeros de  $C(z)$ .
- 3- O lugar no plano  $z$  dos zeros de  $C^{\text{PAR}}(z)$  e  $C^{\text{IMPAR}}(z)$ .

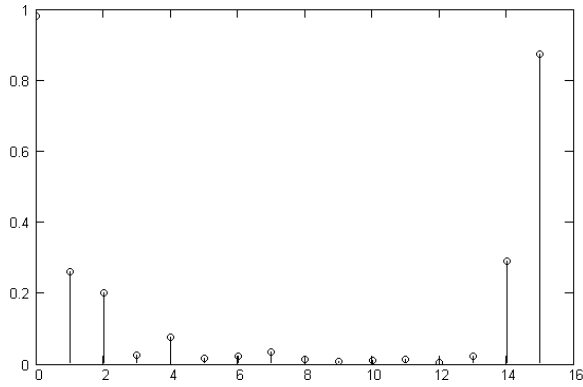


Fig. 3.1a:  $|c(n)|$ .

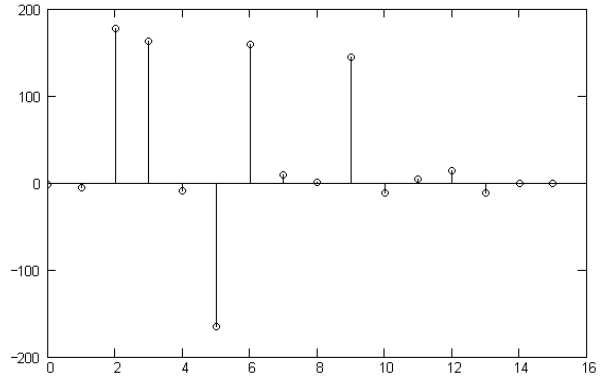


Fig. 3.1b:  $\angle c(n)$  em graus.

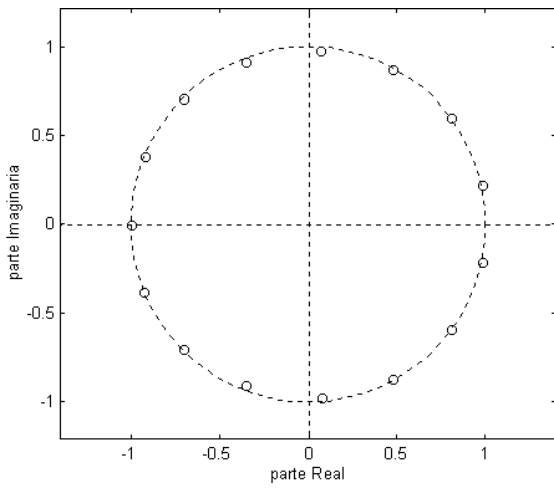


Fig. 3.1c: Zeros de  $C(z)$ .

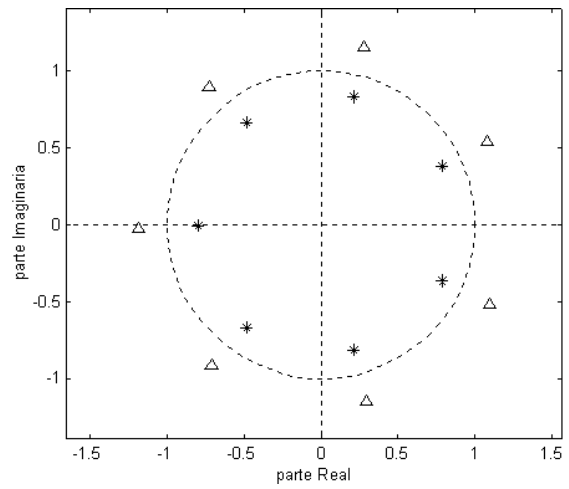


Fig. 3.1d: Zeros de  $C^{\text{PAR}}(z) - \Delta$  e  $C^{\text{IMPAR}}(z) - *$ .

Figura 3.1: Caracterização do canal M1.

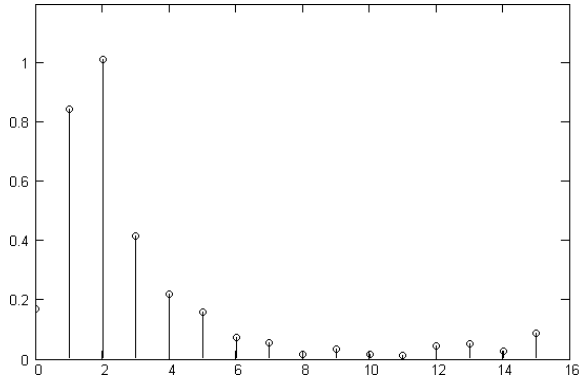


Fig. 3.2a:  $|c(n)|$ .

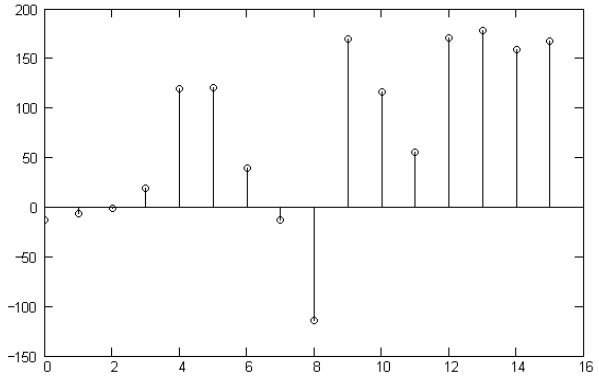


Fig. 3.2b:  $\angle c(n)$  em graus.

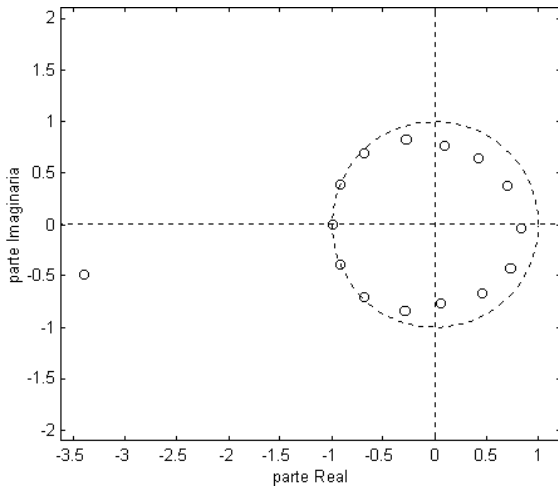


Fig. 3.2c: Zeros de  $C(z)$ .

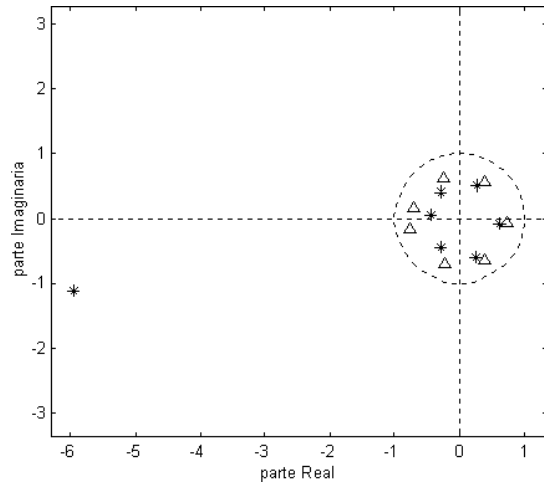


Fig. 3.2d: Zeros de  $C^{\text{PAR}}(z) - \Delta$  e  $C^{\text{IMPAR}}(z) - *$ .

Figura 3.2: Caracterização do canal M2.

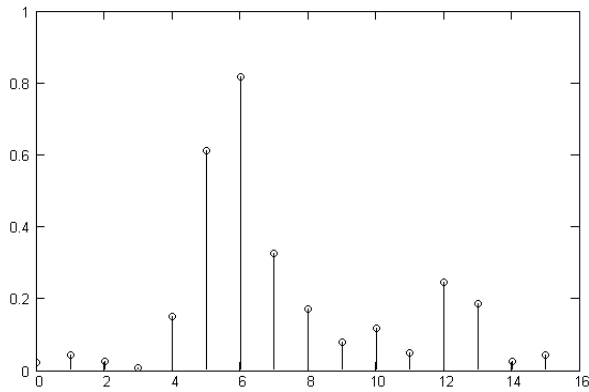


Fig. 3.3a:  $|c(n)|$ .

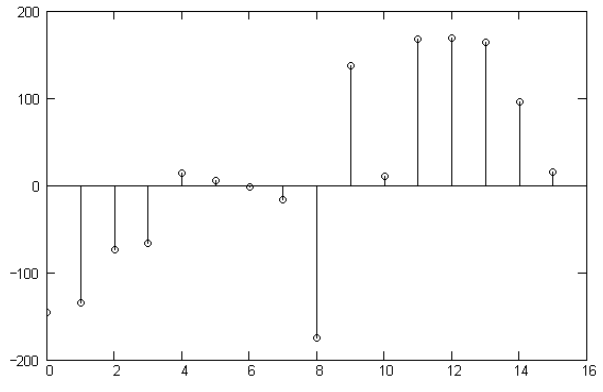


Fig. 3.3b:  $\angle c(n)$ .

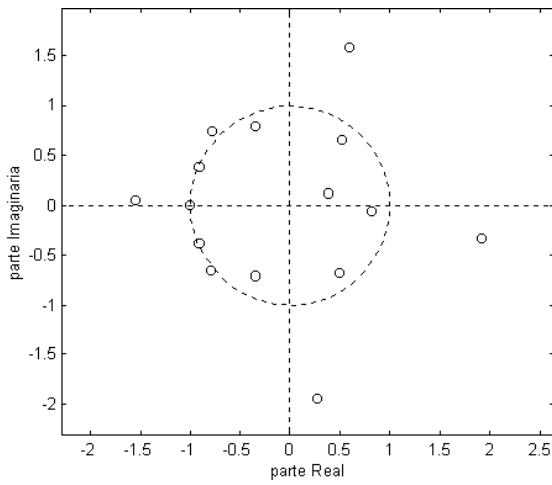


Fig. 3.3c: Zeros de  $C(z)$ .

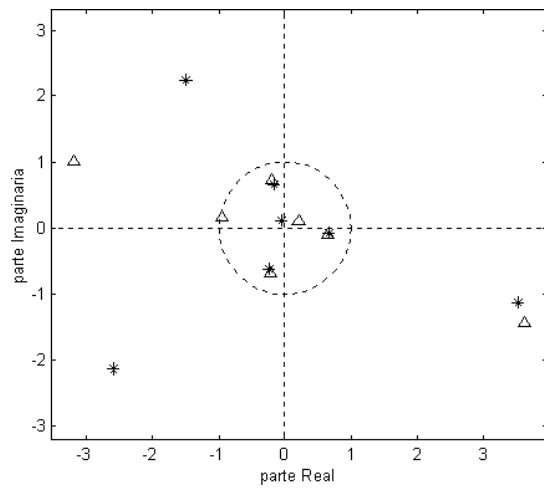


Fig. 3.3d: Zeros de  $C^{\text{PAR}}(z) - \Delta$  e  $C^{\text{IMPAR}}(z) - *$ .

Figura 3.3: Caracterização do canal M3.

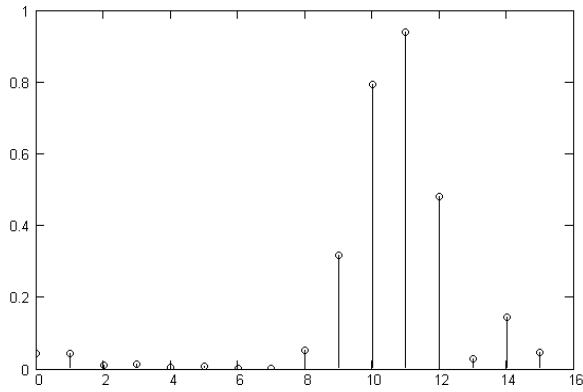


Fig. 3.4a:  $|c(n)|$ .

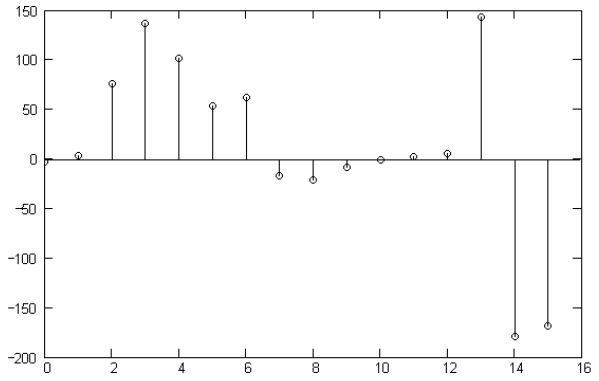


Fig. 3.4b:  $\angle c(n)$ .

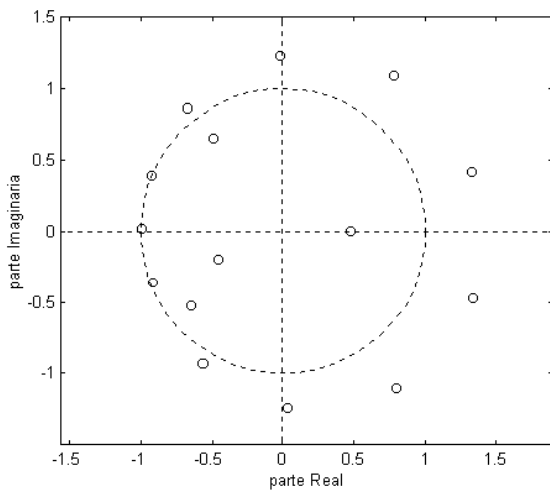


Fig. 3.4c: Zeros de  $C(z)$ .

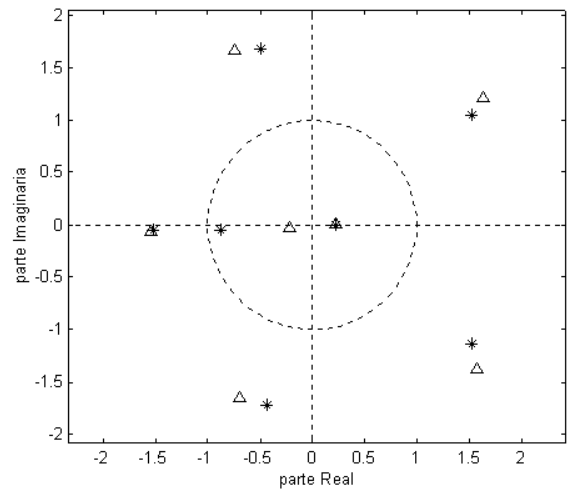


Fig. 3.4d: Zeros de  $C^{\text{PAR}}(z) - \Delta$  e  $C^{\text{IMPAR}}(z) - *$ .

Figura 3.4: Caracterização do canal M4.



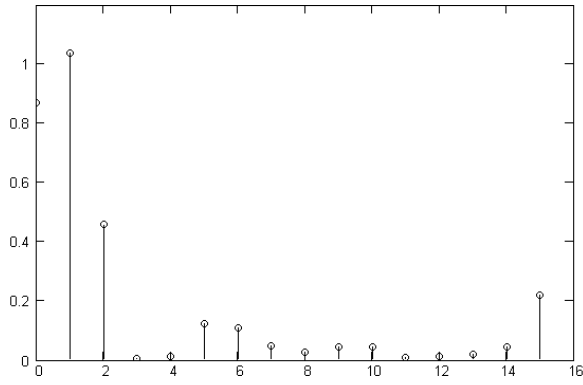


Fig. 3.5a:  $|c(n)|$ .

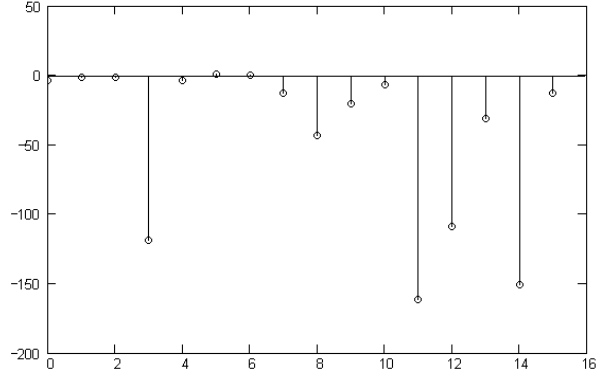


Fig. 3.5b:  $\angle c(n)$  em graus.

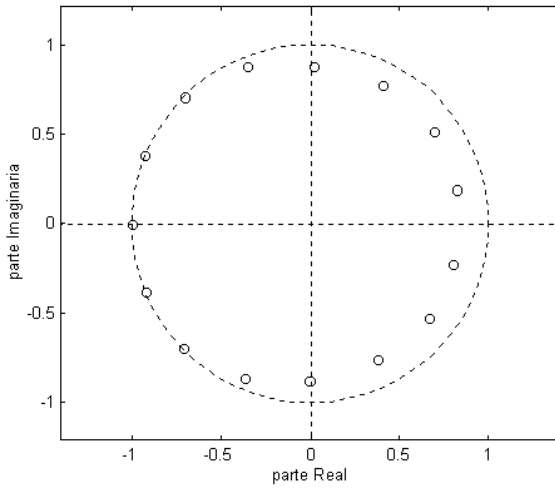


Fig. 3.5c: Zeros de  $C(z)$ .

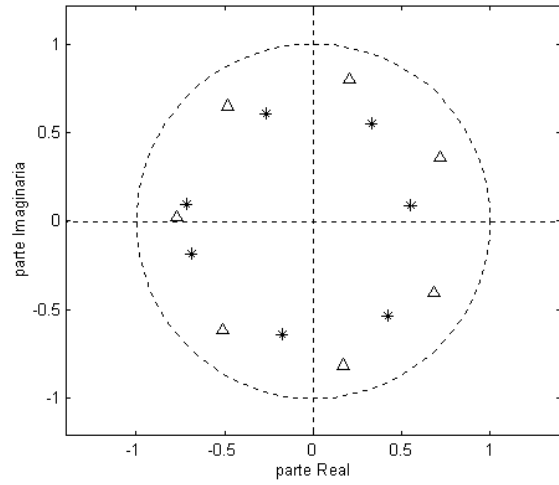


Fig. 3.5d: Zeros de  $C^{\text{PAR}}(z) - \Delta$  e  $C^{\text{IMPAR}}(z) - *$ .

Figura 3.5: Caracterização do canal M5.

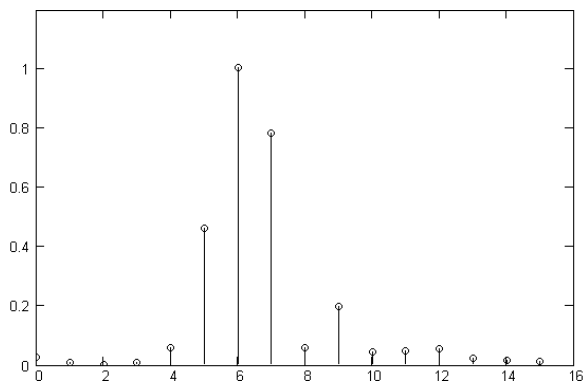


Fig. 3.6a:  $|c(n)|$ .

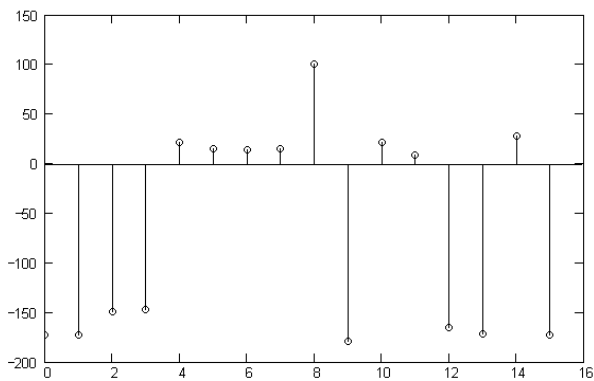


Fig. 3.6b:  $\angle c(n)$  em graus.

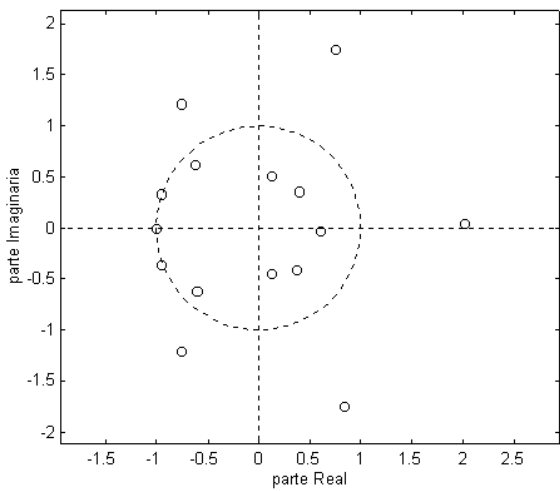


Fig. 3.6c: Zeros de  $C(z)$ .

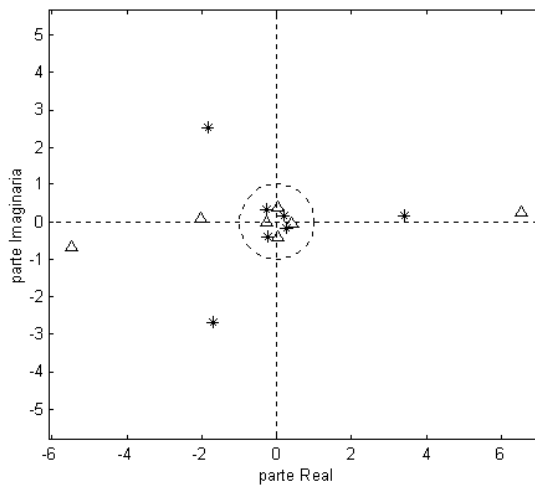


Fig. 3.6d: Zeros de  $C^{\text{PAR}}(z) - \Delta$  e  $C^{\text{IMPAR}}(z) - *$ .

Figura 3.6: Caracterização do canal M6.

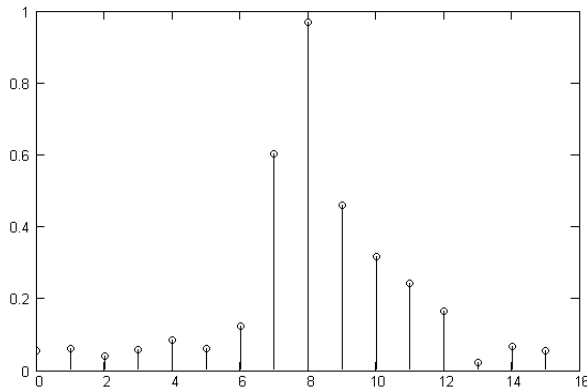


Fig. 3.7a:  $|c(n)|$ .

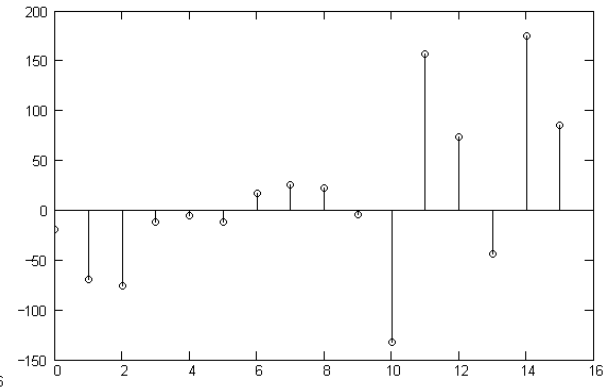


Fig. 3.7b:  $\angle c(n)$  em graus.

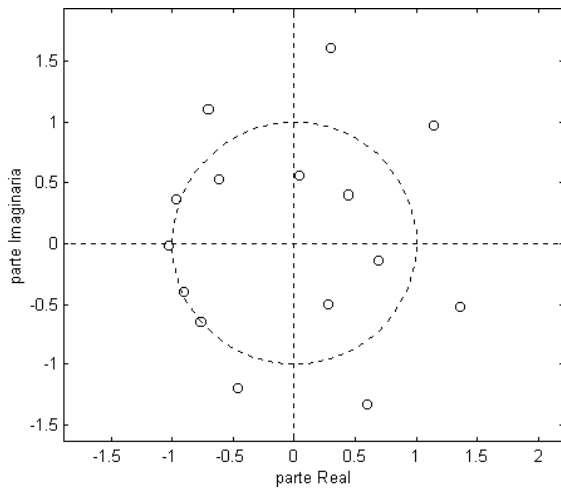


Fig. 3.7c: Zeros de  $C(z)$ .

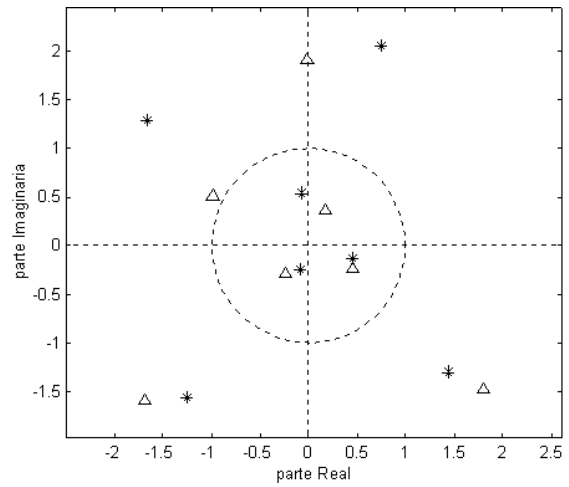


Fig. 3.7d: Zeros de  $C^{\text{PAR}}(z) - \Delta$  e  $C^{\text{IMPAR}}(z) - *$ .

Figura 3.7: Caracterização do canal M7.

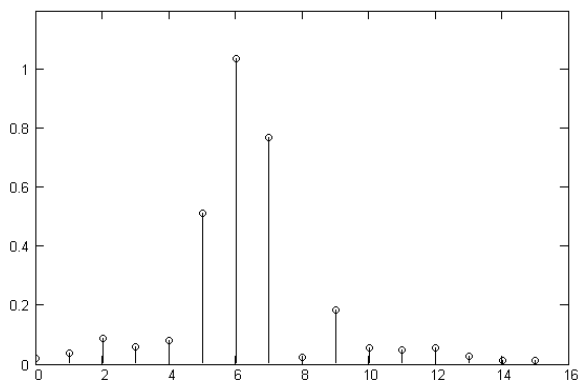


Fig. 3.8a:  $|c(n)|$ .

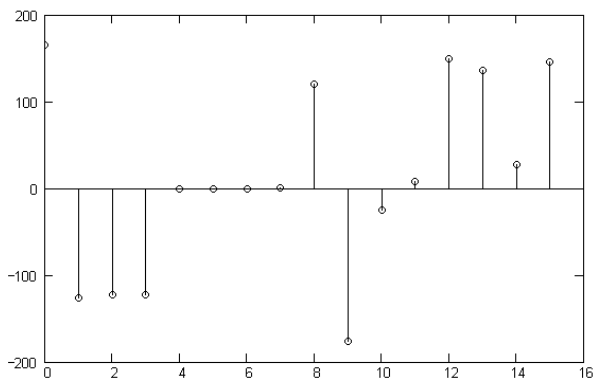


Fig. 3.8b:  $\angle c(n)$  em graus.

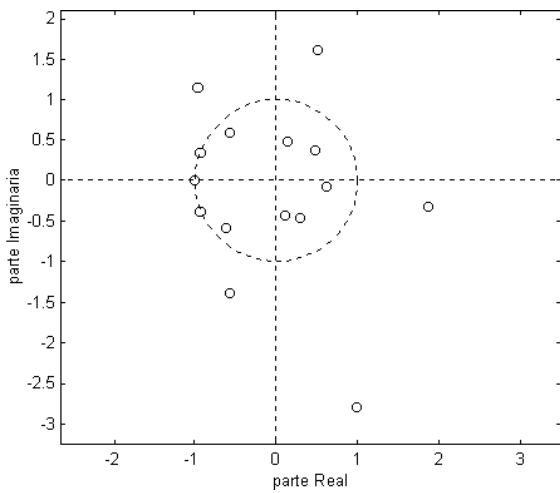


Fig. 3.8c: Zeros de  $C(z)$ .

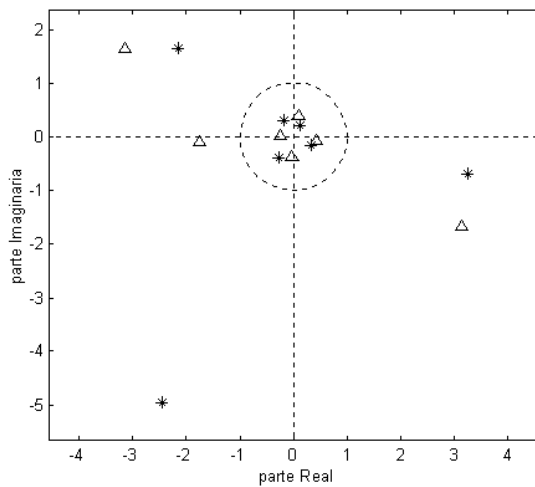


Fig. 3.8d: Zeros de  $C^{\text{PAR}}(z) - \Delta$  e  $C^{\text{IMPAR}}(z) - *$ .

Figura 3.8: Caracterização do canal M8.

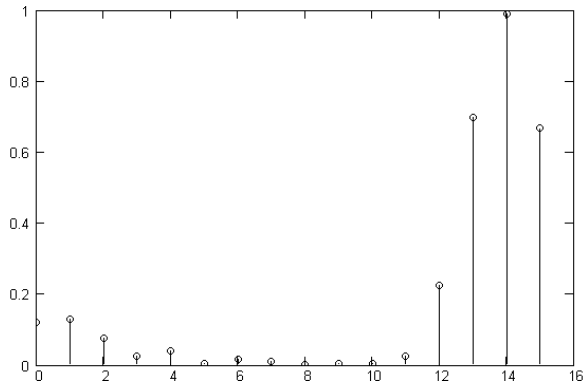


Fig. 3.9a:  $|c(n)|$ .

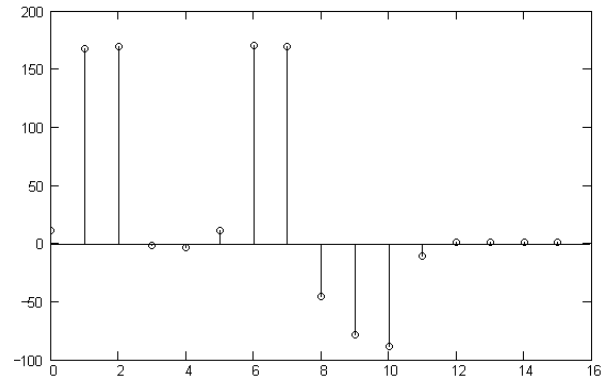


Fig. 3.9b:  $\angle c(n)$  em graus.

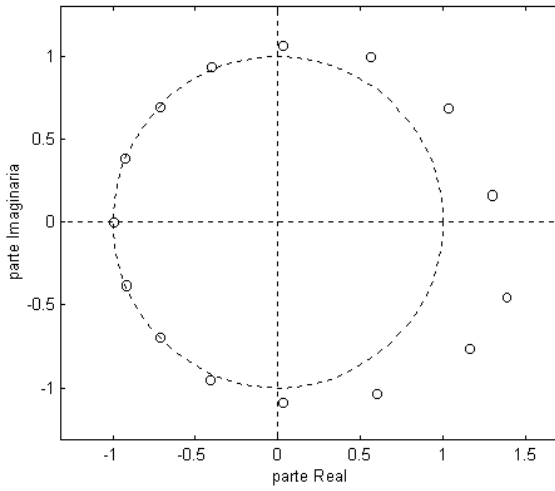


Fig. 3.9c: Zeros de  $C(z)$ .

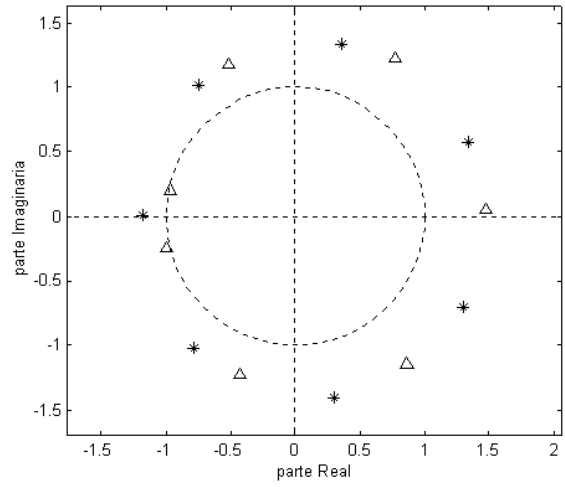


Fig. 3.9d: Zeros de  $C^{\text{PAR}}(z) - \Delta$  e  $C^{\text{IMPAR}}(z) - *$ .

Figura 3.9: Caracterização do canal M9.

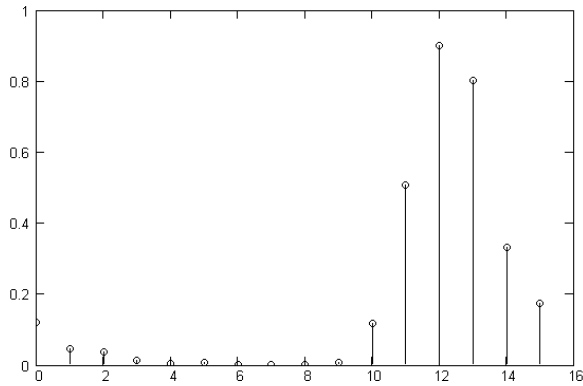


Fig. 3.10a:  $|c(n)|$ .

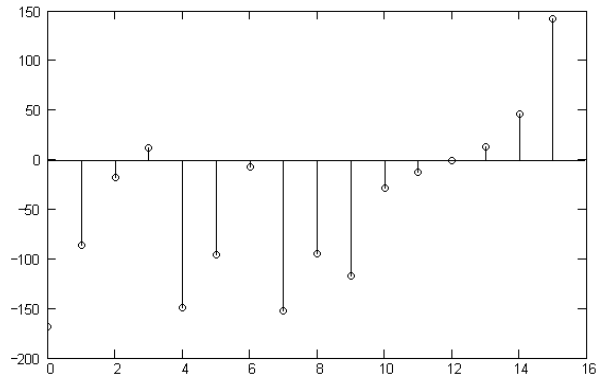


Fig. 3.10b:  $\angle c(n)$  em graus.

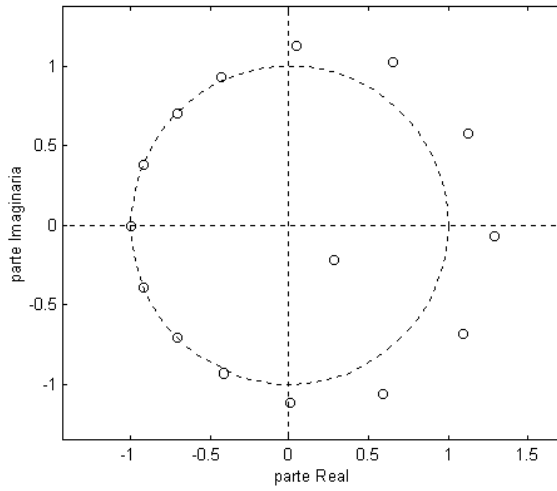


Fig. 3.10c: Zeros de  $C(z)$ .

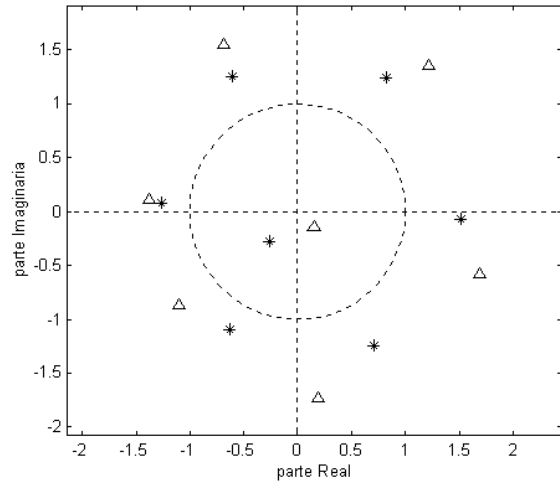


Fig. 3.10d: Zeros de  $C^{\text{PAR}}(z) - \Delta$  e  $C^{\text{IMPAR}}(z) - *$ .

Figura 3.10: Caracterização do canal M10.

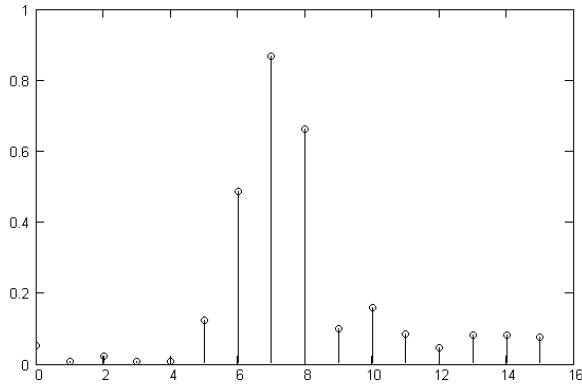


Fig. 3.11a:  $|c(n)|$ .

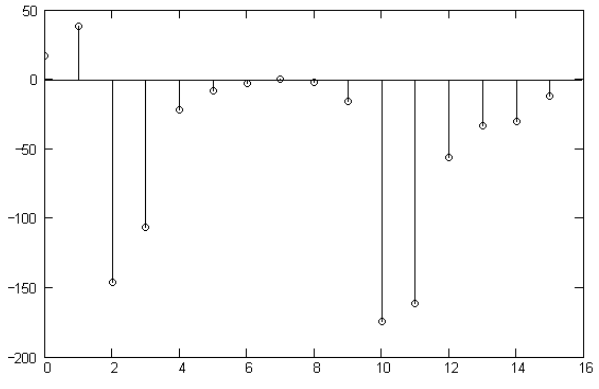


Fig. 3.11b:  $\angle c(n)$  em graus.

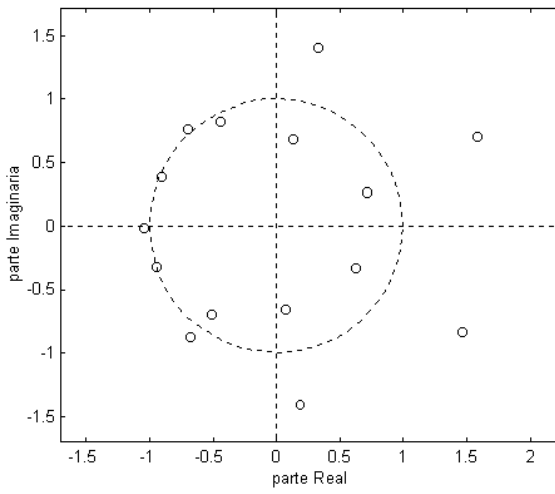


Fig. 3.11c: Zeros de  $C(z)$ .

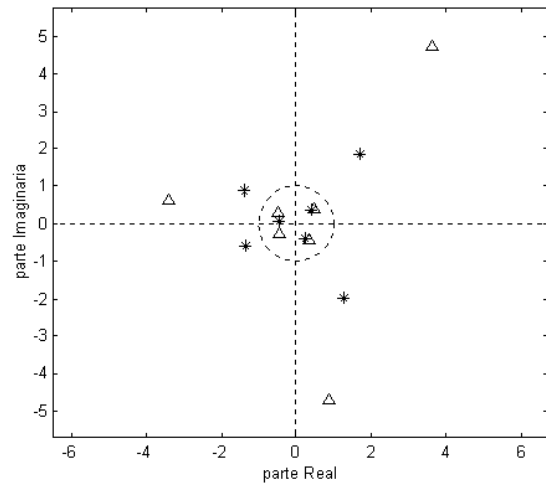


Fig. 3.11d: Zeros de  $C^{\text{PAR}}(z) - \Delta$  e  $C^{\text{IMPAR}}(z) - *$ .

Figura 3.11: Caracterização do canal M11.

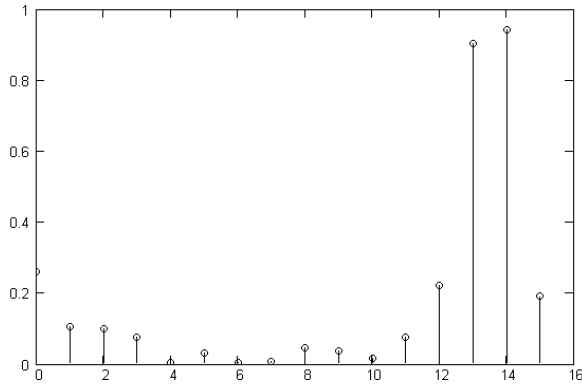


Fig. 3.12a:  $|c(n)|$ .

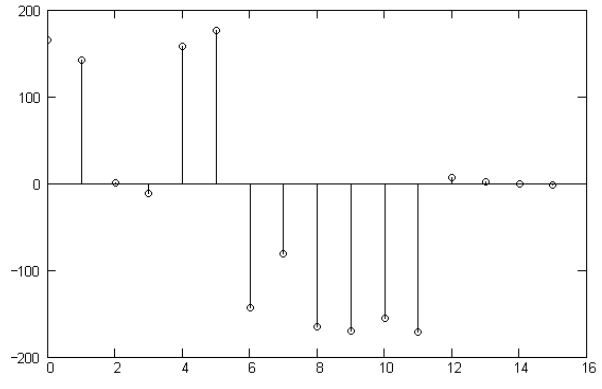


Fig. 3.12b:  $\angle c(n)$  em graus.

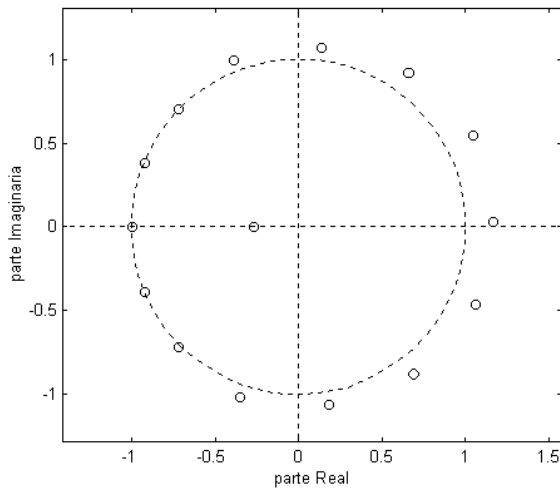


Fig. 3.12c: Zeros de  $C(z)$ .

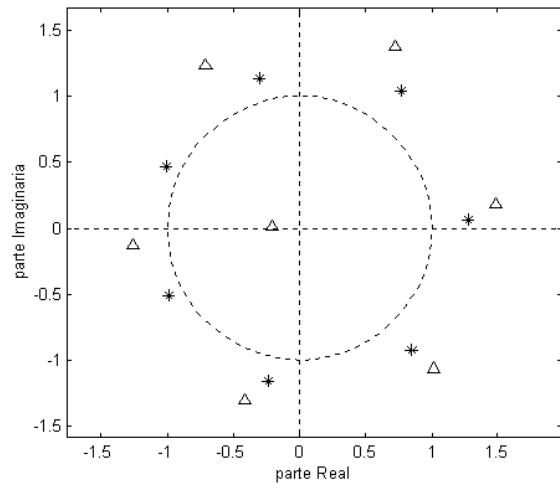


Fig. 3.12d: Zeros de  $C^{\text{PAR}}(z) - \Delta$  e  $C^{\text{IMPAR}}(z) - *$ .

Figura 3.12: Caracterização do canal M12.



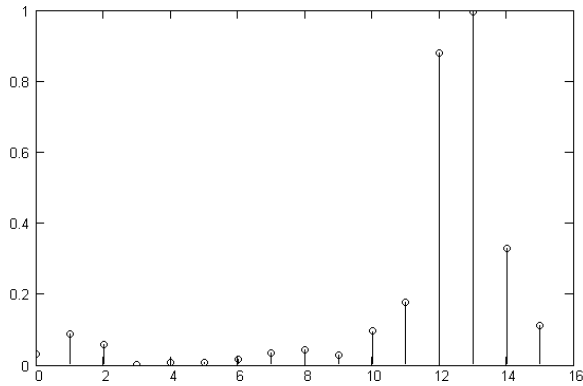


Fig. 3.13a:  $|c(n)|$ .

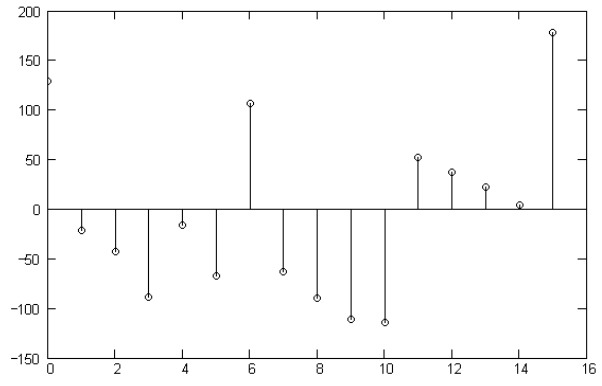


Fig. 3.13b:  $\angle c(n)$  em graus.

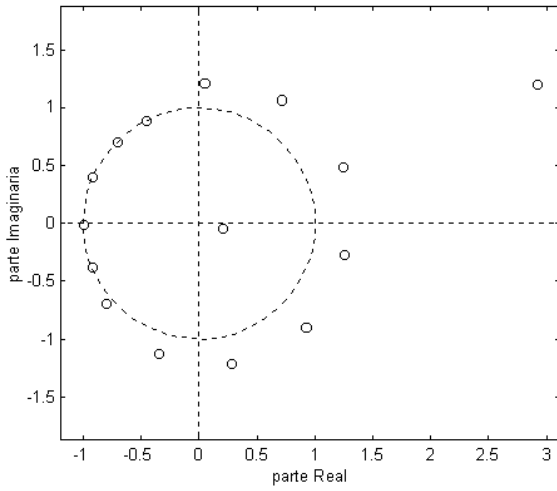


Fig. 3.13c: Zeros de  $C(z)$ .

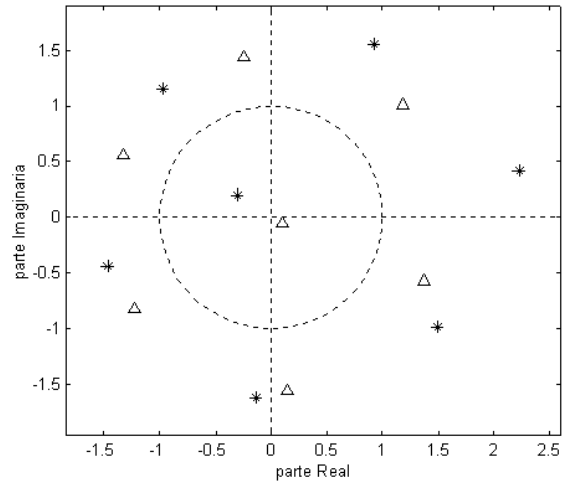


Fig. 3.13d: Zeros de  $C^{\text{PAR}}(z) - \Delta$  e  $C^{\text{IMPAR}}(z) - *$ .

Figura 3.13: Caracterização do canal M13.

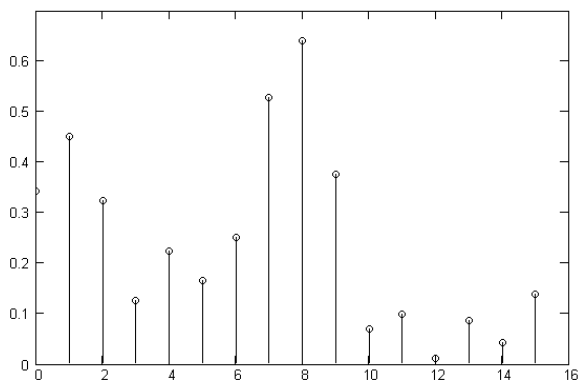


Fig. 3.14a:  $|c(n)|$ .

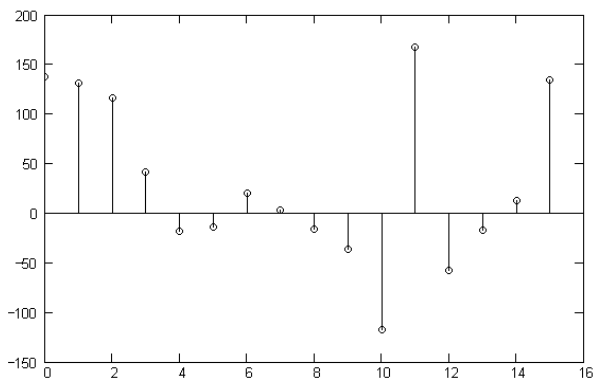


Fig. 3.14b:  $\angle c(n)$  em graus.

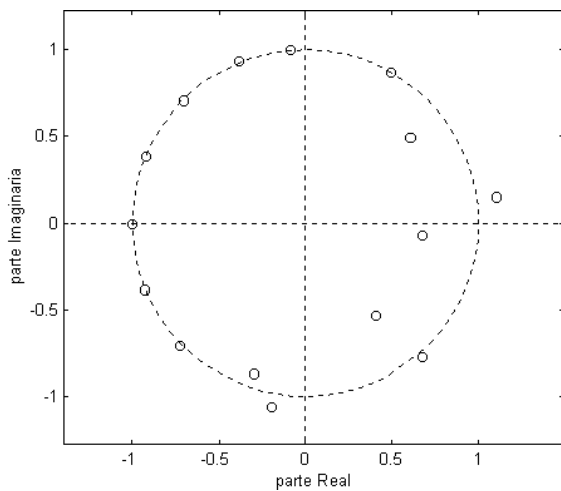


Fig. 3.14c: Zeros de  $C(z)$ .

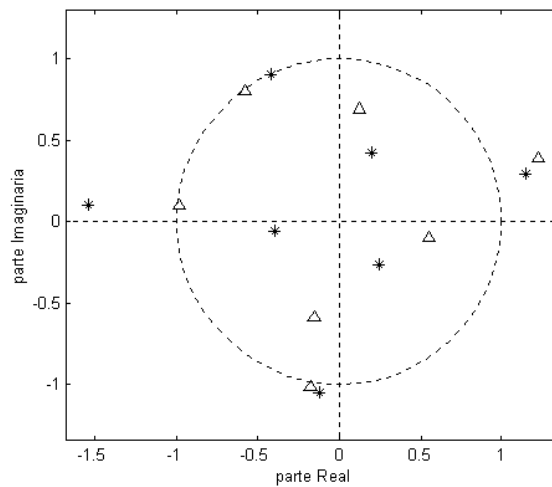


Fig. 3.14d: Zeros de  $C^{\text{PAR}}(z) - \Delta$  e  $C^{\text{IMPAR}}(z) - *$ .

Figura 3.14: Caracterização do canal M14.

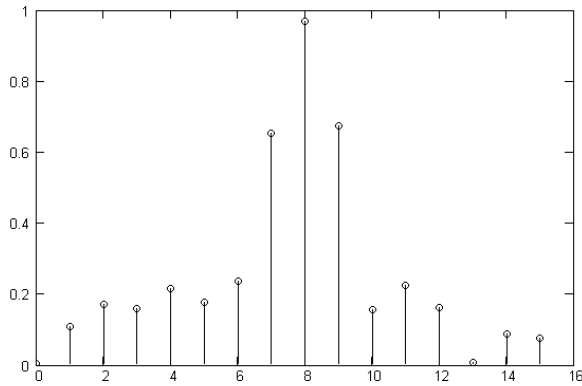


Fig. 3.15a:  $|c(n)|$ .

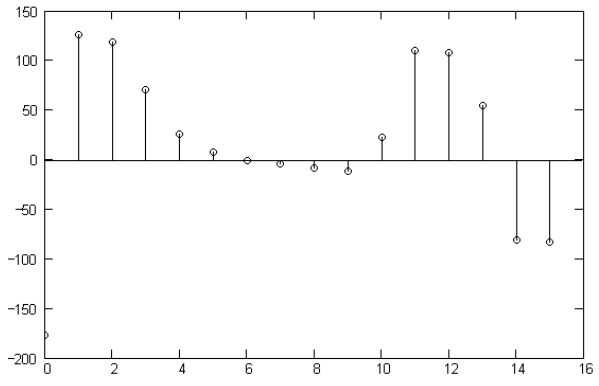


Fig. 3.15b:  $\angle c(n)$  em graus.

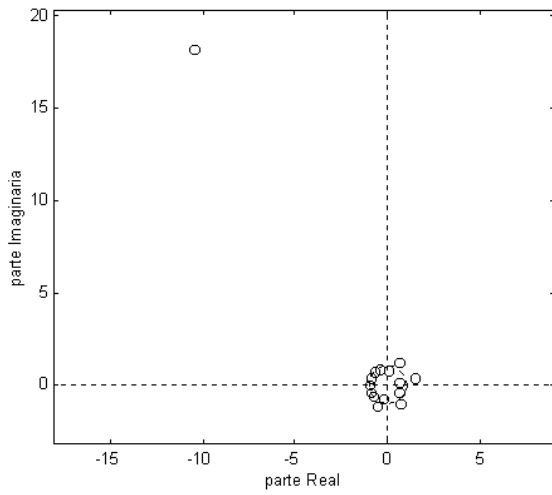


Fig. 3.15c: Zeros de  $C(z)$ .

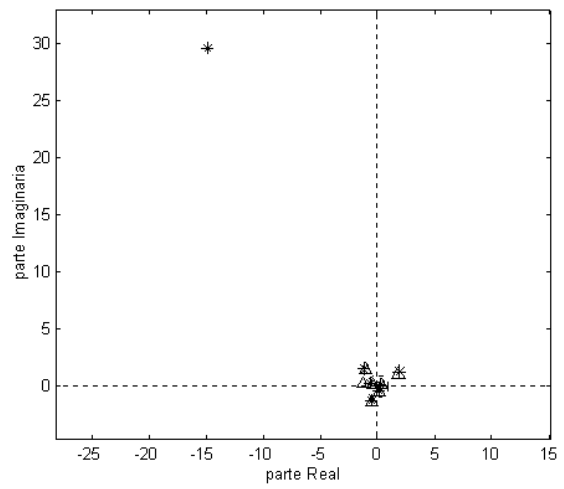


Fig. 3.15d: Zeros de  $C^{\text{PAR}}(z) - \Delta$  e  $C^{\text{IMPAR}}(z) - *$ .

Figura 3.15: Caracterização do canal M15.

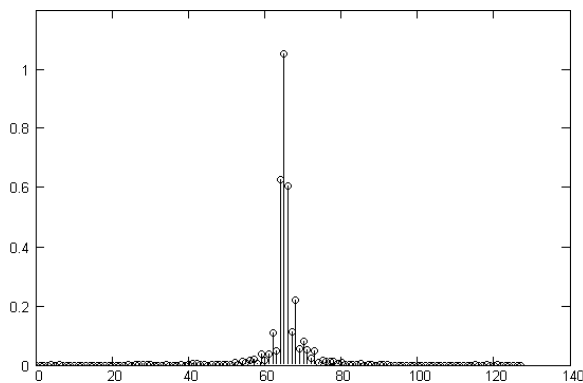


Fig. 3.16a:  $|c(n)|$ .

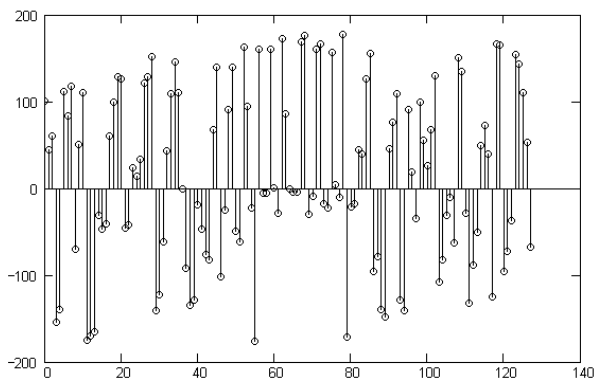


Fig. 3.16b:  $\angle c(n)$  em graus.

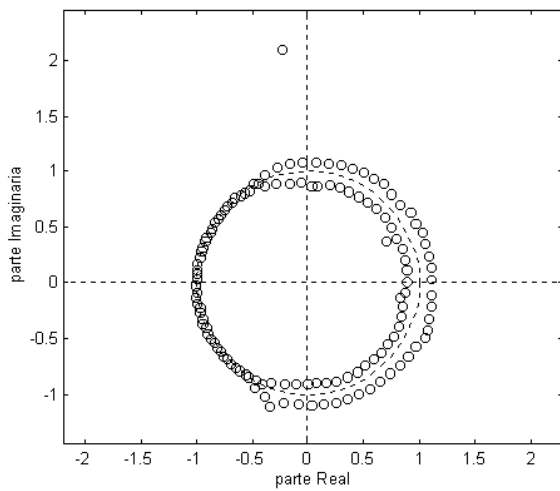


Fig. 3.16c: Zeros de  $C(z)$ .

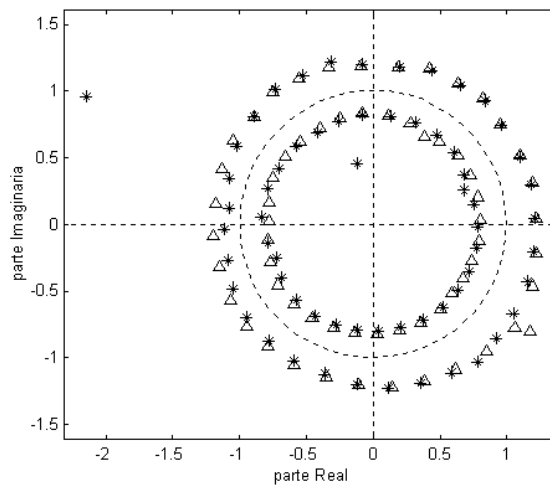


Fig. 3.16d: Zeros de  $C^{\text{PAR}}(z) - \Delta$  e  $C^{\text{IMPAR}}(z) - *$ .

Figura 3.16: Caracterização do canal C1.

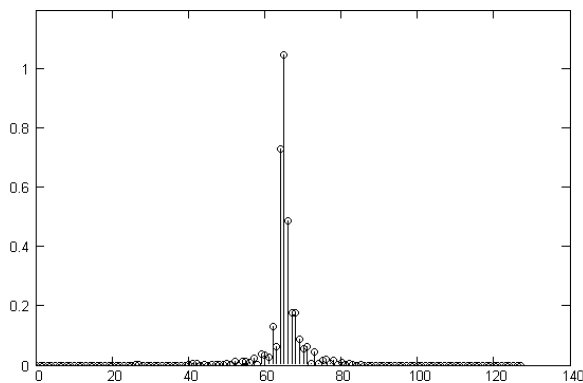


Fig. 3.17a:  $|c(n)|$ .

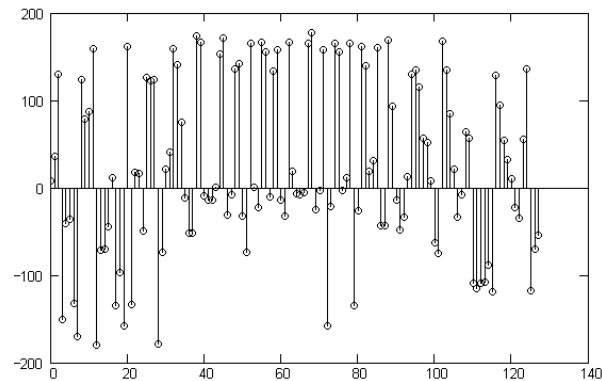


Fig. 3.17b:  $\angle c(n)$  em graus.

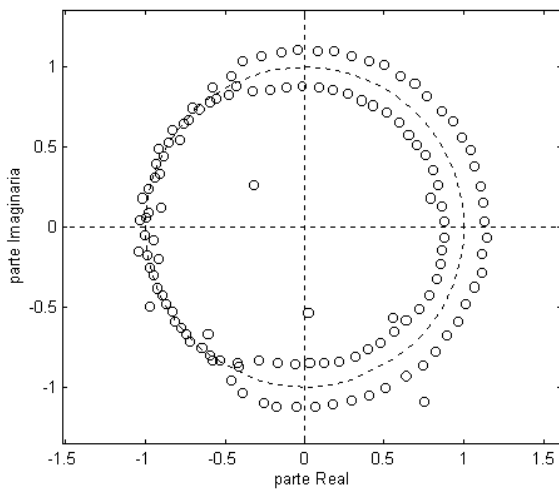


Fig. 3.17c: Zeros de  $C(z)$ .

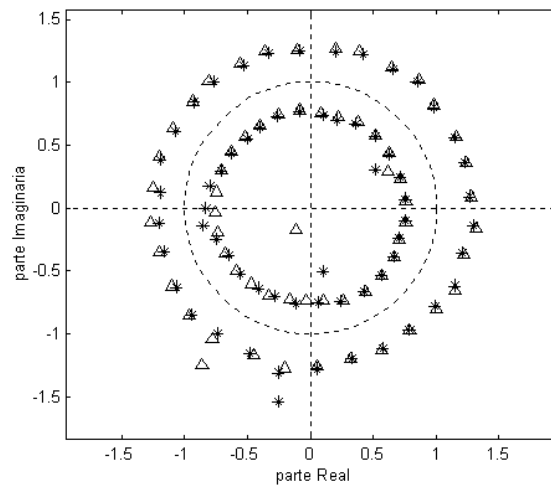


Fig. 3.17d: Zeros de  $C^{\text{PAR}}(z) - \Delta$  e  $C^{\text{IMPAR}}(z) - *$ .

Figura 3.17: Caracterização do canal C2.

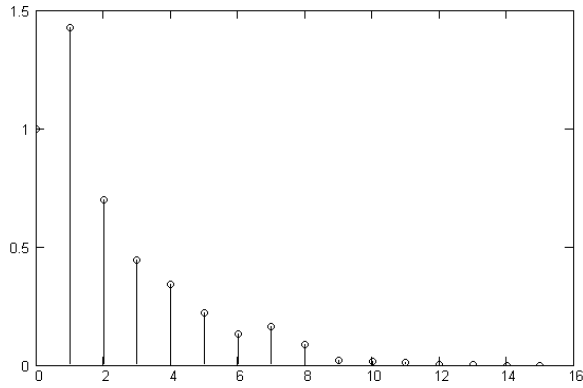


Fig. 3.18a:  $|c(n)|$ .

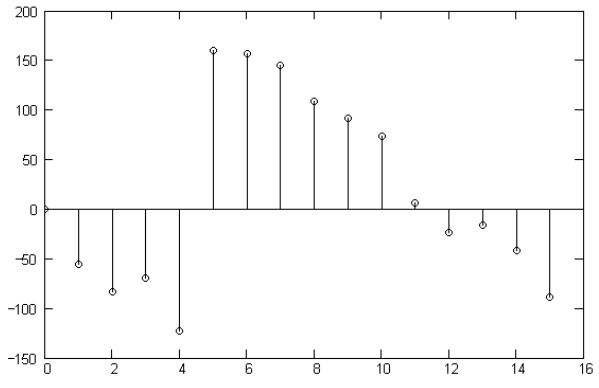


Fig. 3.18b:  $\angle c(n)$  em graus.

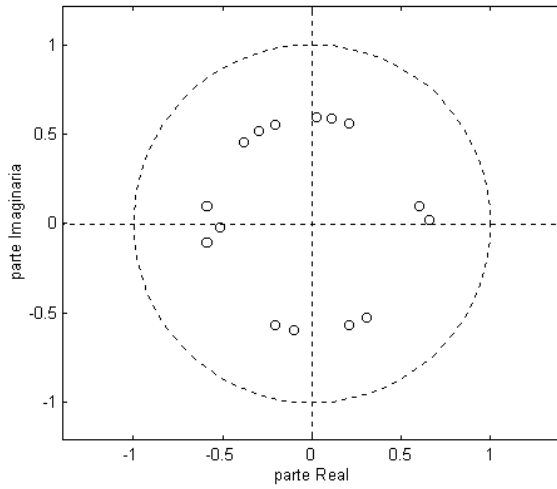


Fig. 3.18c: Zeros de  $C(z)$ .

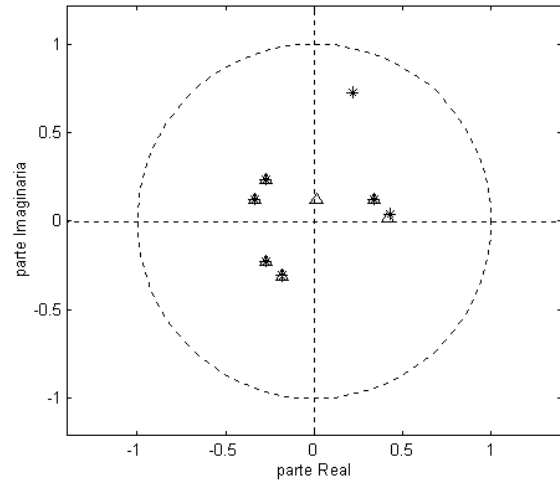


Fig. 3.18d: Zeros de  $C^{\text{PAR}}(z) - \Delta$  e  $C^{\text{IMPAR}}(z) - *$ .

Figura 3.18: Caracterização do canal RR.

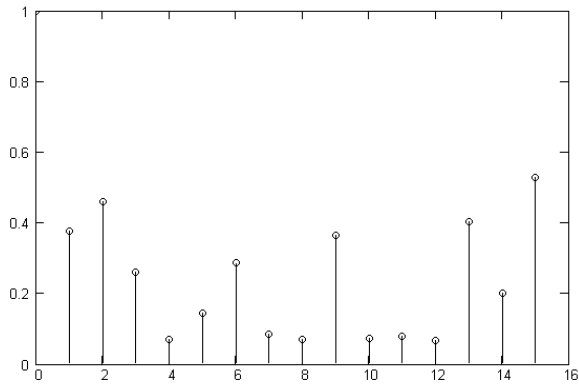


Fig. 3.19a:  $|c(n)|$ .

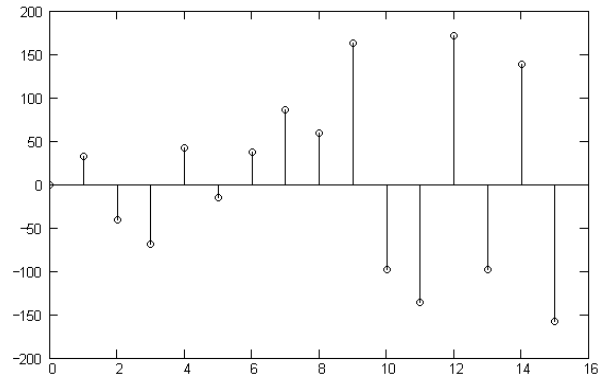


Fig. 3.19b:  $\angle c(n)$  em graus.

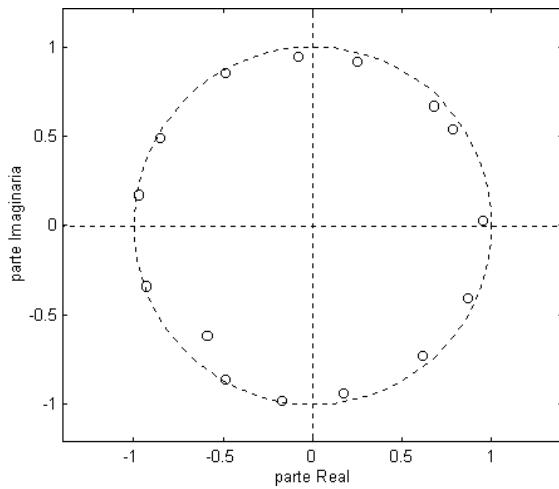


Fig. 3.19c: Zeros de  $C(z)$ .

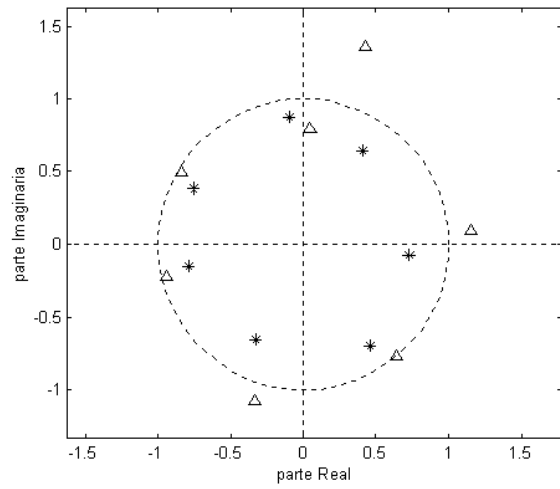


Fig. 3.19d: Zeros de  $C^{\text{PAR}}(z) - \Delta$  e  $C^{\text{IMPAR}}(z) - *$ .

Figura 3.19: Caracterização do canal RU.

# Capítulo 4

## Equalização com o Algoritmo CMA

O algoritmo de equalização adaptativa autodidata conhecido como CMA (*Constant Modulus Algorithm*) foi desenvolvido independentemente por Godard [13] e Treichler [36], e baseia-se na minimização de uma função de custo  $J_{CM}$  que objetiva ajustar uma potência  $P$  inteira do conjunto de saídas do equalizador a uma constante real e positiva  $R_P$ . Esta constante é escolhida de modo a projetar sobre um círculo todos os pontos da constelação de saída do equalizador. Em [13]  $J_{CM}$  é definida como

$$J_{CM} = \frac{1}{4} E \left\{ \left( |y|^P - R_P \right)^2 \right\} \quad (4.1)$$

para algum inteiro  $P$ . Note que  $J_{CM}$  é uma dispersão estatística de ordem  $P$  [47] e que inerentemente utiliza estatísticas de ordem superior do conjunto de saídas  $y$  do equalizador.

Quando  $P = 1$ ,  $J_{CM}$  reduz-se à função de custo utilizada no pioneiro trabalho de Sato [74], em 1975. Embora  $P$  possa teoricamente assumir qualquer valor inteiro, a suprema maioria das implementações de equalizadores autodidatas atuais aplica o algoritmo CMA com a função de custo  $J_{CM}$  para  $P = 2$ , minimizada pelo Gradiente Estocástico [34][37][61]. Assim, na presente tese, a função  $J_{CM}$  para  $P = 2$  será referida como Função de Custo CMA ou Função de Custo de Godard, representada por  $J_G$ , e dada por

$$J_G = \frac{1}{4} E \left\{ \left( |y|^2 - \gamma \right)^2 \right\} \quad (4.2)$$

onde  $\gamma$  é a constante de dispersão do algoritmo CMA definida por



$$\gamma = \frac{E\{|A|^4\}}{E\{|A|^2\}} \quad (4.3)$$

sendo  $A = \{s_0, s_1, \dots, s_{M-1}\}$  o conjunto de  $M$  possíveis símbolos, ou alfabeto, referente ao tipo de modulação utilizada. Godard mostra em [13] que  $\gamma$ , assim definido, minimiza  $J_G$ .

## 4.1 Características do Algoritmo CMA

A função  $J_G$ , definida em (4.2), é uma função não-convexa, e portanto possui mínimos locais. Isto condiciona a minimização de  $J_G$  até o mínimo global à trajetória percorrida pelo Gradiente Estocástico. É possível que a trajetória do gradiente fique presa em um mínimo local não significativo, quando a convergência para o mínimo global jamais é alcançada [75]. Isto faz com que a convergência de equalizadores CMA com base em filtros FIR transversais seja fortemente dependente da inicialização dos coeficientes (ou pesos) do filtro [70]. Ainda, para que a estabilidade da delicada dinâmica do processo de minimização de  $J_G$  não seja comprometida, o passo de adaptação deve ficar nas vizinhanças do valor  $1 \times 10^{-3}$ , como um compromisso entre velocidade de convergência e erro de regime permanente [64]. Como será visto, o Equalizador Concorrente proposto nesta tese é bastante insensível aos mínimos locais de  $J_G$ , apresentando uma velocidade de convergência muito maior e um erro de regime permanente consideravelmente menor do que o universalmente utilizado equalizador CMA.

Observe também de (4.2) que a minimização de  $J_G$  é um procedimento que, em última análise, procura minimizar a variância da diferença entre o quadrado da norma Euclidiana  $|\cdot|^2$  do conjunto de saídas  $y$  do equalizador e a constante de dispersão  $\gamma$ . Ocorre que a norma Euclidiana impõe uma ambigüidade de fase para  $|y|^2$ , ou seja,  $|y \cdot e^{j\varphi}|^2 = |y|^2 \cdot |e^{j\varphi}|^2 = |y|^2$ . Assim, para qualquer rotação de fase  $\varphi$ ,  $J_G(y) = J_G(y \cdot e^{j\varphi})$ .

Portanto, ao se utilizar modulação cujo alfabeto de símbolos seja complexo, como  $M$ -PSK e  $M$ -QAM, a saída de um equalizador CMA pode convergir para a constelação de símbolos originalmente transmitida, mas girada de um ângulo  $\varphi$  dependente da inicialização, da dinâmica de atualização e também do próprio canal [41]. Para  $M$ -PSK esta convergência espúria do algoritmo CMA é contornada utilizando-se codificação diferencial DPSK [1]. Para  $M$ -QAM o efeito desta convergência espúria não é tão severa, mas, para certas situações é necessário utilizar um circuito adicional separado para girar a saída do equalizador após a sua convergência [41][53]. O Equalizador Concorrente aqui proposto, como será visto, resolve o problema associado a este grau de liberdade adicional de  $J_G$  quanto à fase e conduz a sua minimização desde o instante inicial para que esta ambigüidade seja resolvida.

Neste momento, é oportuno lembrar que a minimização de  $J_G$  busca projetar sobre um círculo todos os pontos da constelação de saída do equalizador, tal que  $|y|^2 = \gamma$  para todo  $y$ . Se este resultado representa a equalização correta para modulação  $M$ -PSK, pois todos os símbolos deste alfabeto possuem módulo constante, para  $M$ -QAM seria considerado uma completa falha do processo de equalização. Por que, então, o algoritmo CMA é universalmente utilizado para desconvolução de canais com sinalização  $M$ -QAM, já que os símbolos do alfabeto  $M$ -QAM não apresentam módulo constante? Ocorre que a minimização de  $J_G$  é feita com base em uma estrutura adaptativa cuja arquitetura é a de um simples filtro FIR transversal. Quando a minimização de  $J_G$  é feita com base na adaptação dos parâmetros livres de tal estrutura específica, como efeito secundário do processo de minimização de  $J_G$ , obtém-se o processo de desconvolução do canal [36]. É interessante notar que, se um equalizador CMA com arquitetura FIR transversal desconvoluir o canal com  $\gamma$  dado por (4.3), o mesmo processo de desconvolução será obtido para qualquer outro valor de  $\gamma$ : Para um equalizador com  $\gamma$  não definido por (4.3) – portanto com  $\gamma$  não ótimo – a única diferença observada na constelação de saída será um fator de escala real [33]. Desta maneira, o canal é desconvoluído pelo ajuste do filtro FIR transversal mesmo quando  $J_G$  é parametrizada por um valor não ótimo de  $\gamma$  para a constelação dada.

Portanto, nem toda estrutura adaptativa – mesmo aquelas consideradas poderosas o suficiente para aprender o processo estocástico subjacente ao sinal recebido – conduzirá ao êxito o processo de desconvolução autodidata do canal. O autor da presente tese experimentou a minimização de  $J_G$  com base no ajuste via Gradiente Estocástico dos parâmetros livres de estruturas adaptativas denominadas redes neurais RBF (*Radial Basis Function*) [62]. Para as várias arquiteturas experimentadas [29][48][57][58], o único resultado obtido foi a projeção de todos os pontos da constelação de saída do equalizador no único ponto do plano complexo  $\sqrt{\gamma} \cdot e^{j\theta}$ , onde  $\theta$  depende da inicialização da estrutura. A lição aprendida aqui é que de nada adianta utilizar arquiteturas poderosas (redes neurais RBF são consideradas aproximadores não-lineares universais [61]) para minimização de uma função de custo se o mínimo desta função de custo não expressa exatamente o resultado que se almeja.

## 4.2 O Algoritmo CMA

Apesar de todos estes condicionantes e detalhes específicos, o equalizador CMA FIR transversal é o mais amplamente utilizado e testado na implementação de equalizadores autodidatas [59], pois, em sistemas práticos, seu desempenho tem sido comprovadamente superior ao dos demais métodos de desconvolução autodidata vigentes [33][64].

A Figura 4.1 mostra um típico equalizador CMA FIR transversal no instante  $n$ . Como o instante é definido, não explicitar-se-á o indexador  $n$  para as variáveis envolvidas, a menos que  $n$  não seja inequivocamente definido pelo contexto. Este procedimento será adotado visando a compacidade das equações no desenvolvimento que segue.

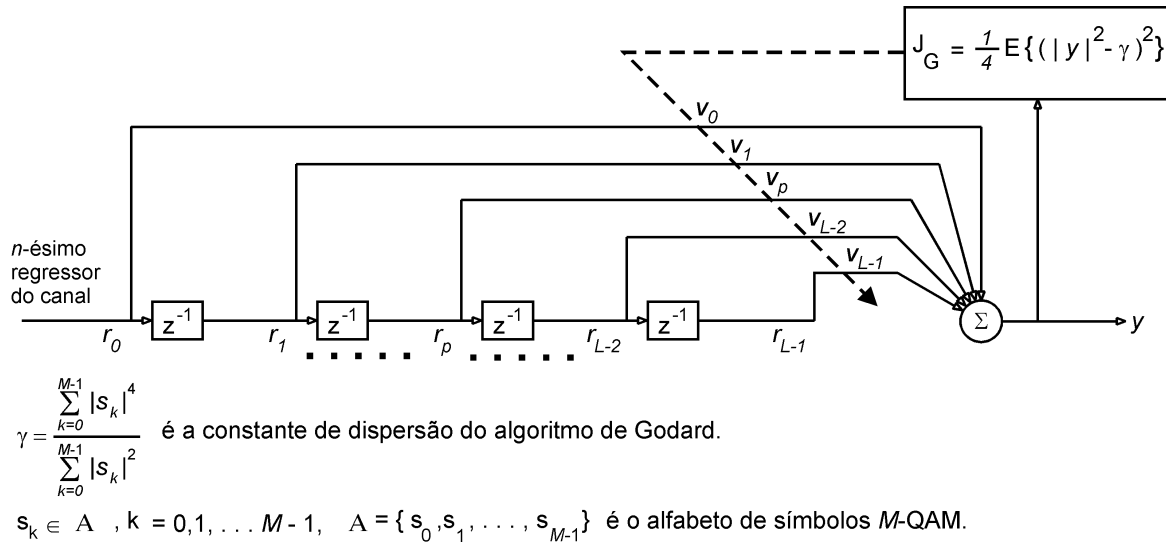


Figura 4.1: Equalizador CMA com filtro FIR transversal.

A partir de sua inicialização, o vetor de pesos  $\underline{V} = [V_0 \ V_1 \ \dots \ V_{L-1}]^T$  é atualizado pelo Gradiente Estocástico [61] objetivando minimizar a função de custo de Godard  $J_G$ .

Seja o  $n$ -ésimo regressor do canal  $r(n)$ ,  $n = 0, 1, \dots, N_r - 1$ , definido por

$$r_k(n) = u(L-1-k+i), \quad k = 0, 1, \dots, L-1 \quad (4.4)$$

onde:

$L$  é a dimensão do equalizador,

$u$  é a seqüência de amostras recebida por amostragem fracionária  $\frac{T}{2}$  do canal, com

$i = 1, 3, \dots, N_a - 1$  variando na medida em que  $n = 0, 1, \dots, N_r - 1$  tal que  $i = 2n + 1$ ,

$N_a$  é o número total de amostras a serem recebidos por amostragem fracionária do canal,

$N_r = \left\lfloor \frac{N_a - L - 1}{2} \right\rfloor + 1$  é o número total de regressores a serem obtidos do canal,

$T$  é o intervalo entre os símbolos gerados no transmissor,

$\lfloor \cdot \rfloor$  é o operador que resulta no inteiro mais próximo e menor que o argumento.

A saída do equalizador é dada por

$$y = \underline{V}^T \cdot \underline{r} \quad (4.5)$$

ou

$$y = \sum_{k=0}^{L-1} V_k \cdot r_k \quad (4.6)$$

que é identicamente equivalente à

$$\begin{aligned} y &= \left\{ \sum_{k=0}^{L-1} [\operatorname{Re}\{V_k\} \operatorname{Re}\{r_k\} - \operatorname{Im}\{V_k\} \operatorname{Im}\{r_k\}] \right\} + j \left\{ \sum_{k=0}^{L-1} [\operatorname{Re}\{V_k\} \operatorname{Im}\{r_k\} + \operatorname{Im}\{V_k\} \operatorname{Re}\{r_k\}] \right\} = \quad (4.7) \\ &= \operatorname{Re}\{y\} + j \operatorname{Im}\{y\}, \quad j = \sqrt{-1} \end{aligned}$$

A minimização da função de custo  $J_G$  é feita através de sucessivos ajustes do vetor  $\underline{V}$  pelo algoritmo Gradiente Estocástico [61], à medida que  $n$  é incrementado:

$$J_G = \frac{1}{4} \mathbb{E} \left\{ \left( |y|^2 - \gamma \right)^2 \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} J_G(n) \quad (4.8)$$

$$J_G(n) = \frac{1}{4} \left\{ \left( |y(n)|^2 - \gamma \right)^2 \right\} \quad (4.9)$$

$$V_p(n+1) = V_p(n) + \eta \cdot (-\nabla_p J_G(n)), \quad p = 0, 1, \dots, L-1 \quad (4.10)$$

onde  $V_p$  é o  $p$ -ésimo peso do vetor de pesos  $\underline{V}$ ,  $\eta$  é o passo de adaptação,  $\eta > 0$ , e

$$\nabla_p J_G = \nabla_p^R J_G + j \nabla_p^I J_G = \frac{\partial J_G}{\partial \operatorname{Re}\{V_p\}} + j \frac{\partial J_G}{\partial \operatorname{Im}\{V_p\}} \quad (4.11)$$

é o  $p$ -ésimo componente do gradiente complexo de  $J_G$  tomado com relação à variação do  $p$ -ésimo componente do vetor  $\underline{V}$ .

Substituindo (4.9) em (4.11),

$$\nabla_p J_G = \frac{1}{2} (|y|^2 - \gamma) \left[ \frac{\partial |y|^2}{\partial \text{Re}\{V_p\}} + j \frac{\partial |y|^2}{\partial \text{Im}\{V_p\}} \right] \quad (4.12)$$

Mas de (4.7),

$$|y|^2 = (\text{Re}\{y\})^2 + (\text{Im}\{y\})^2 = \quad (4.13)$$

$$= \left\{ \sum_{k=0}^{L-1} [\text{Re}\{V_k\} \text{Re}\{r_k\} - \text{Im}\{V_k\} \text{Im}\{r_k\}] \right\}^2 + \left\{ \sum_{k=0}^{L-1} [\text{Re}\{V_k\} \text{Im}\{r_k\} + \text{Im}\{V_k\} \text{Re}\{r_k\}] \right\}^2$$

De (4.13), com referência à (4.12),

$$\frac{\partial |y|^2}{\partial \text{Re}\{V_p\}} = 2(\text{Re}\{y\} \text{Re}\{r_p\} + \text{Im}\{y\} \text{Im}\{r_p\}) \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial |y|^2}{\partial \text{Im}\{V_p\}} = 2(\text{Im}\{y\} \text{Re}\{r_p\} - \text{Re}\{y\} \text{Im}\{r_p\}) \quad (4.15)$$

Substituindo (4.14) e (4.15) em (4.12) e multiplicando por  $-1$ ,

$$-\nabla_p J_G = (\gamma - |y|^2) [(\text{Re}\{y\} \text{Re}\{r_p\} + \text{Im}\{y\} \text{Im}\{r_p\}) + j(\text{Im}\{y\} \text{Re}\{r_p\} - \text{Re}\{y\} \text{Im}\{r_p\})] \quad (4.16)$$

mas

$$(\text{Re}\{y\} \text{Re}\{r_p\} + \text{Im}\{y\} \text{Im}\{r_p\}) + j(\text{Im}\{y\} \text{Re}\{r_p\} - \text{Re}\{y\} \text{Im}\{r_p\}) = y \cdot r_p^* \quad (4.17)$$

e substituindo (4.17) em (4.16)

$$-\nabla_p J_G = y (\gamma - |y|^2) r_p^* \quad (4.18)$$

Substituindo (4.18) em (4.10), obtém-se a equação de atualização do vetor  $\underline{V}$  para a minimização da função de custo  $J_G$  através do Gradiente Estocástico:

$$\underline{V}(n+1) = \underline{V}(n) + \eta \cdot y(n) (\gamma - |y(n)|^2) \underline{r}^*(n) \quad (4.19)$$

sendo  $e_{cma}(n) = y(n) \left( \gamma - |y(n)|^2 \right)$  denominado de Função de Erro do algoritmo CMA [33].

A Tabela 4.1 esquematiza o algoritmo CMA aplicado à equalização de canal:

| Etapa | Procedimento   |
|-------|--|
| 1     | <p>Inicializar o vetor <math>\underline{V}</math>:</p> $V_k = \begin{cases} 0 + j0, & k = 0, 1, \dots, L-1, \quad k \neq \xi \\ 1 + j0, & k = \xi \end{cases}$ <p>onde <math>j = \sqrt{-1}</math>, <math>L</math> é a dimensão do vetor <math>\underline{V}</math> (dimensão do equalizador) e <math>\xi</math>, <math>0 &lt; \xi &lt; L-1</math>, é o índice do único peso do vetor de pesos <math>\underline{V}</math> a ser inicializado com o valor <math>1+j0</math>. Esta inicialização é amplamente utilizada na prática de equalizadores CMA e é denominada de inicialização <i>single spike</i> [33][63][64][70].</p>   |
| 2     | Inicializar o indexador de amostras recebidas por amostragem fracionária do canal:<br>$i = 1$  |
| 3     | Inicializar o indexador de regressor do canal (ou indexador de instante/iteração):<br>$n = 0$  |
| 4     | <p>Obter o <math>n</math>-ésimo regressor do canal <math>\underline{r}(n)</math>:</p> $r_k(n) = u(L-1-k+i), \quad k = 0, 1, \dots, L-1$ <p>onde <math>u</math> é a seqüência de amostras recebida por amostragem fracionária <math>\frac{T}{2}</math> do canal, com <math>i = 1, 3, \dots, N_a - 1</math> variando na medida em que <math>n = 0, 1, \dots, N_r - 1</math>, sendo <math>N_a</math> o número total de amostras a serem recebidas por amostragem fracionária do canal, <math>N_r = \left\lfloor \frac{N_a - L - 1}{2} \right\rfloor + 1</math> é o número total de regressores a serem obtidos do canal e <math>T</math> é o intervalo entre os símbolos gerados no transmissor. <math>\lfloor \cdot \rfloor</math> é o operador que resulta no inteiro mais próximo e menor que o argumento.</p> |
| 5     | <p>Obter a saída do equalizador no instante <math>n</math>:</p> $y(n) = \underline{V}^T(n) \cdot \underline{r}(n)$   |
| 6     | <p>Atualizar o vetor de pesos <math>\underline{V}</math>:</p> $\underline{V}(n+1) = \underline{V}(n) + \eta \cdot y(n) \left( \gamma -  y(n) ^2 \right) \cdot \underline{r}^*(n)$ <p>onde <math>\eta</math> é o passo de adaptação do vetor <math>\underline{V}</math>, <math>\eta &gt; 0</math>.</p>  |
| 7     | <p>Incrementar indexadores:</p> $i = i + 2$ $n = n + 1$  |
| 8     | <p>Testar fim de loop:</p> <p>Se <math>L + i &gt; N_a \Rightarrow</math> FIM</p> <p>caso contrário repetir etapas 4 a 8.</p>   |

Tabela 4.1: Sumário do algoritmo CMA aplicado à equalização de canal.

### 4.3 Exemplos de Operação do Algoritmo CMA

Nos exemplos que seguem, a fonte de informação  $s$  possui média zero, variância unitária, distribuição uniforme e independente e é transmitida através do canal por meio de modulação 16-QAM. Os dois canais de microondas a serem equalizados, M2 e M6, apresentam SNR=35dB – ruído branco Gaussiano é adicionado na entrada do equalizador tal que a razão entre a variância do sinal e a variância do ruído seja 35dB. A dimensão do equalizador  $L$  é igual à dimensão da dispersão de canal  $L_c$  tal que  $L=L_c=16$ . A inicialização do vetor  $\underline{V}$  segue a estratégia denominada *single spike* [70], que consiste em inicializar  $\underline{V}$  com  $1+j0$  na posição  $\xi=L/2$ , mantendo nulos os elementos nas demais posições. Em caso de não convergência, o equalizador faz novas tentativas em torno de  $\xi=L/2$ , isto é,  $\xi=L/2\pm\lambda$ ,  $\lambda=1,2,\dots$  [63]. O passo de adaptação  $\eta$  do filtro do equalizador CMA é experimentalmente ajustado objetivando atender o compromisso entre rápida convergência e baixo MSE de regime permanente.

São apresentados os seguintes resultados:

- 1- Gráfico da constelação  $\Gamma$  na saída  $y$  do equalizador após a convergência, tendo como referência a constelação do alfabeto  $A$  da fonte, sendo  $A$  representado no gráfico pelo conjunto de símbolos  $+$ .
- 2- Gráfico da constelação  $\Phi$  na entrada  $u$  do equalizador que resulta na constelação  $\Gamma$  na saída  $y$ , tendo como referência a constelação do alfabeto  $A$  da fonte, sendo  $A$  representado no gráfico pelo conjunto de símbolos  $+$ .
- 3- Gráfico da curva  $ISI(i)$ ,  $i=0,2,\dots,N_a-1$ , onde  $N_a$  é o número total de amostras recebidas por amostragem fracionária  $T/2$  do canal, e  $ISI(i)$  é a medida de “reverberação” no sinal equalizado  $y$  no instante  $i$ , obtida pela Equação (2.24) calculada para este instante.



- 4- Gráfico da curva  $MSE(i)$ ,  $i = 0, 2, \dots, N_a - 1$ , sendo  $MSE(i)$  o erro médio quadrático entre a saída equalizada  $y$  e a seqüência original transmitida  $s$ , considerando-se para a média o intervalo de amostras que inclui o instante  $i$  e as  $L + L_c - 1$  amostras anteriores ao mesmo. Adicionalmente, este gráfico mostra a reta horizontal NT que define o nível de MSE máximo permissível (ver Tabela 1.1) para que a transferência do algoritmo CMA ao algoritmo DD seja possível, caso se deseje efetuar esta operação.
- 5- Gráfico do módulo  $|h^\downarrow(n)|$  e fase  $\angle h^\downarrow(n)$ , em graus, da resposta impulsiva combinada do canal e equalizador  $h^\downarrow(n)$  definida pelos componentes do vetor  $\underline{H}^\downarrow$  obtido da Equação (2.19) computada após a convergência.

A Figura 4.2 mostra os resultados obtidos para a equalização do canal de microondas M2, canal considerado "comportado", pois não possui muitas raízes sobre o círculo de raio unitário e nenhum par de raízes exatamente refletidas sobre a origem. A Figura 4.3 mostra os resultados para o canal de microondas M6. Note que, para este canal, a  $ISI(i)$  é menor e o  $MSE(i)$  é maior do que para o canal M2. Isto ocorre porque o cursor (elemento de maior módulo) de  $h^\downarrow(n)$ , para quaisquer  $\eta$  e  $\xi$ , apresenta um ângulo de fase não nulo ( $\approx 14^\circ$  na Fig. 4.3e) após a convergência, implicando no giro correspondente da constelação  $\Gamma$ .

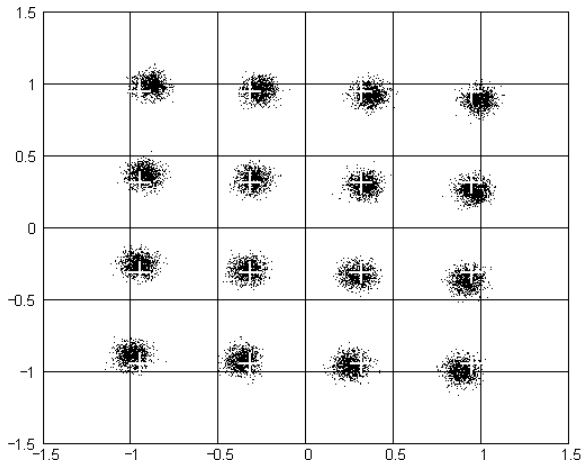


Fig. 4.2a:  $\Gamma$

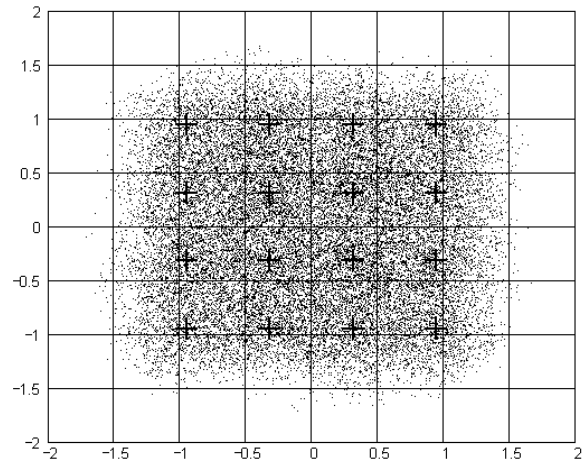


Fig. 4.2b:  $\Phi$

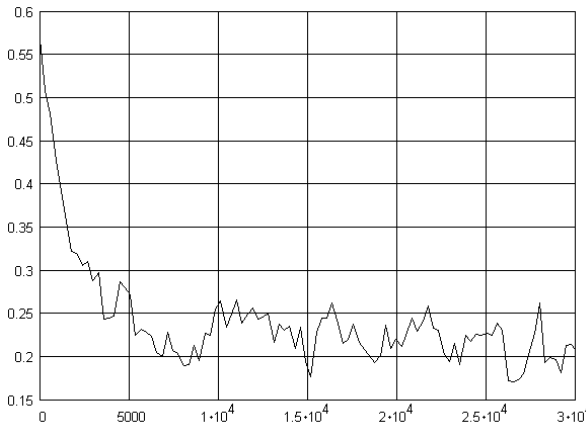


Fig. 4.2c: ISI( $i$ )

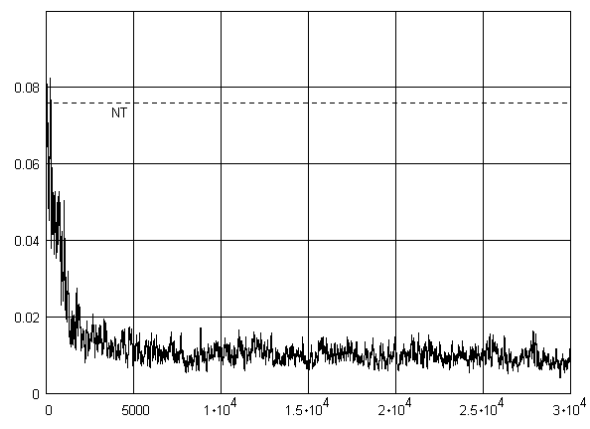


Fig. 4.2d: MSE( $i$ )

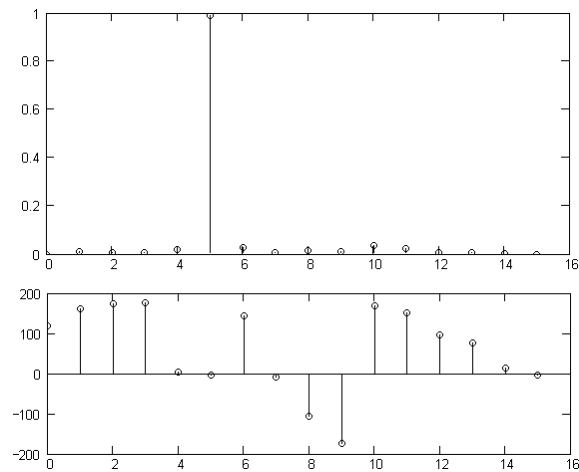


Fig. 4.2e:  $|h^{\downarrow}(n)|$  e  $\angle h^{\downarrow}(n)$  [°]

Figura 4.2: Resultados obtidos para o canal M2, modulação 16-QAM ( $\gamma=1.32$ ), SNR=35dB. Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$  e  $\xi = 8$ .

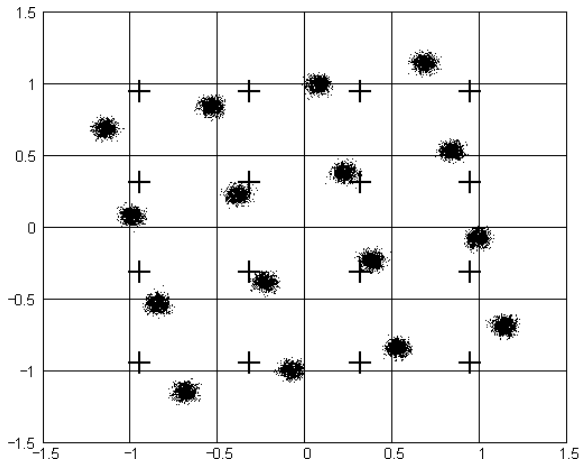


Fig. 4.3a:  $\Gamma$

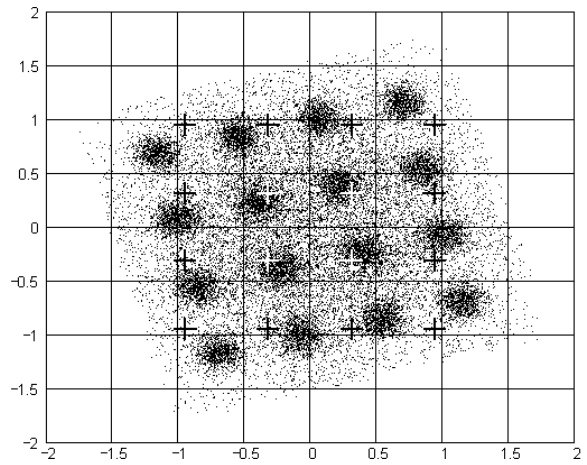


Fig. 4.3b:  $\Phi$

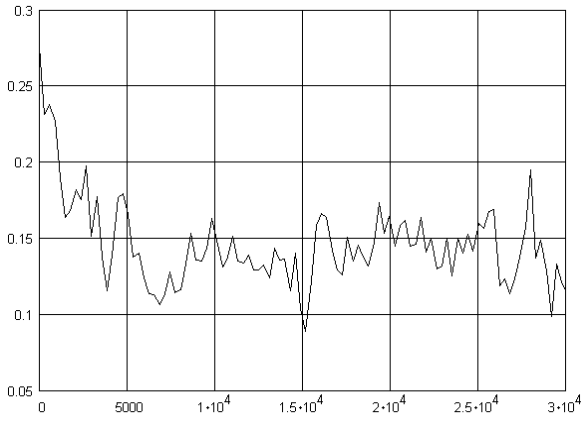


Fig. 4.3c: ISI(*i*)

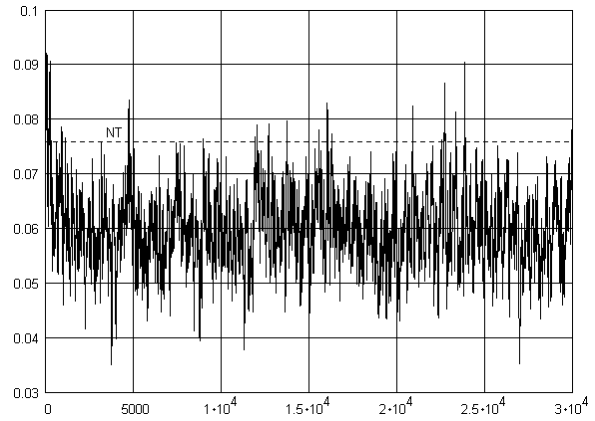


Fig. 4.3d: MSE(*i*)

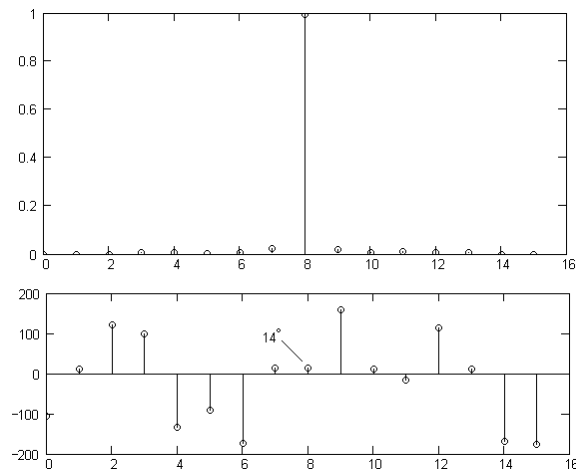


Fig. 4.3e:  $|h^{\downarrow}(n)|$  e  $\angle h^{\downarrow}(n)$  [ $^{\circ}$ ]

Figura 4.3: Resultados obtidos para o canal M6, modulação 16-QAM ( $\gamma=1.32$ ), SNR=35dB. Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$  e  $\xi = 10$ .

# Capítulo 5

## O Equalizador Concorrente

Nos idos anos 70, o autor desta tese, ainda adolescente e recém diplomado como técnico em eletrônica pelo pioneiro Instituto Universal Brasileiro, adquiria um fascínio quase místico por transmissores de rádio em HF.

A faixa do cidadão em 27MHz, ou faixa dos 11m, atingia seu auge devido à influência do filme “Comboio”, com o ator Dennis Weaver. Como todo jovem que expressa sua desconformidade com a ordem vigente, perpetrando pequenas – e construtivas – transgressões, o autor desta tese procurava transgredir o limite máximo de 5W de potência imposto pelo antigo (e saudoso!) DENTEL (Departamento Nacional de Telecomunicações) a todos os operadores da faixa dos 11m.

Na época, e com os recursos financeiros disponíveis a um adolescente, o aumento de potência de transmissão em 27MHz implicava na utilização de excitadores de RF à válvula. Havia um popular circuito, utilizando em sua maioria válvulas de aparelhos de televisão, comprovadamente eficiente para operação em frequências até metade do espectro de HF [72]. Uma das variantes deste circuito transmissor tinha como etapa de RF um VFO (*variable frequency oscillator*) Colpitts [72] com uma válvula 12BY7, excitando um pré amplificador final com uma 6DQ6, que, por sua vez, excitava o amplificador final constituído por duas 6146B em *push-pull*, obtendo-se com isto aproximadamente 200W em amplitude modulada e em 7MHz. Ao tentar converter este transmissor para 27MHz, recalculando as redes LC de acoplamento, a frustrante conclusão foi que para esta faixa de frequência a válvula 6DQ6 tinha sua eficiência reduzida. Isto implicava no acréscimo de mais um estágio excitador ou na utilização de outro tipo de válvula.

Por não haver espaço para mais um estágio no chassis do transmissor e como a 6DQ6 estava disponível no televisor da sala, resolveu-se investir na mesma. A idéia foi

fazer a válvula 6DQ6 excitar-se a si mesma, transformando-a de excitadora em osciladora utilizando-se uma configuração Hartley [72], e esta, por sua vez, excitando o par de 6146B. Embora o problema do baixo nível de excitação tenha sido resolvido, a instabilidade de frequência do VFO feito com a 6DQ6 resultou dramática, como era de se esperar.

A idéia para a solução da instabilidade de frequência deste oscilador surgiu de maneira insólita. Como todo adolescente em busca dos porquês do universo, este autor lia na época o livro Egito Secreto, de Paul Brunton, e outras obras congêneres, e se fascinava com a interpretação esotérica do conceito de vibração. Em uma destas obras lidas, referência era feita ao fato de que, ao se colocar vários relógios em uma sala, após certo tempo, todos entravam em sincronismo, como se um elo invisível unisse todos a um regente.

De volta à bancada de trabalho, cristalizou-se esta idéia com o experimento que a seguir descreve-se. Havia uma válvula pentodo de pequena potência, mas de baixo ruído, denominada 6BA6, que era usualmente aplicada como pré amplificadora de RF em receptores de HF. Um oscilador com ela construído teria uma razoável estabilidade de frequência em 27MHz. A potência gerada por um oscilador feito com uma 6BA6, da ordem de centenas de miliwatts, seria totalmente insuficiente para excitar um amplificador com uma 6DQ6. No entanto, surgiu a idéia de que, assim como no caso dos relógios síncronos, ao se impor um elo entre os dois osciladores – o de baixa potência mas estável feito com a 6BA6 e o de alta potência mas instável feito com a 6DQ6 – de alguma forma se estabeleceria o sincronismo entre ambos após algum tempo de operação.

Construiu-se, então, um oscilador Colpitts com a 6BA6 e aplicou-se a sua saída, através de um capacitor  $C$ , à grade auxiliar (*screen*) de uma 6DQ6 oscilando na configuração Hartley. Os níveis de potência de RF envolvidos eram algumas centenas de miliwatts de saída para a 6BA6, aproximadamente 5W na grade auxiliar da 6DQ6 e mais de 30W na placa da 6DQ6. O que seria de se esperar era que os 5W de potência na grade auxiliar da 6DQ6 destruíssem o delicado equilíbrio dinâmico das poucas centenas de miliwatts de oscilação na 6BA6. Surpreendentemente, desde que a 6BA6 fosse polarizada de modo a operar na região linear (classe A) e desde que a 6DQ6 fosse fortemente

polarizada na região não-linear (classe C), para um valor crítico do capacitor  $C$  e para uma faixa estreita de valores de polarização negativa na grade da 6DQ6, o par de osciladores operava de modo concorrente e cooperativo, reproduzindo o efeito dos relógios síncronos. Na realidade, observou-se que a fase da oscilação senoidal de mais de 30W na saída do oscilador com a 6DQ6 amarrava-se, após alguns milissegundos de operação, à fase da fraca oscilação da 6BA6, representando esta última, então, o “regente”. Hoje, este autor compreende que o experimento feito pode ser explicado como um PLL (*phase locked loop*) gerado com base em harmônicos de intermodulação [26].

Mais de vinte anos se passaram, e novamente os relógios síncronos voltam à mente do autor desta tese, quando, ao acordar-se em uma manhã, ocorre-lhe que talvez os problemas de má convergência e instabilidade dos equalizadores CMA possam ser minimizados se um “regente” for a ele concedido. Esta idéia é a origem conceitual do Equalizador Concorrente proposto nesta tese e apresentado neste capítulo. No entanto, antes de descrevê-lo, é instrutivo comentar brevemente, sob o ponto de vista histórico, as tentativas realizadas no sentido de minimizar a lenta (e possivelmente má) convergência do algoritmo CMA.

## 5.1 Algumas Tentativas Prévia de Melhora do Desempenho do Algoritmo CMA

Em 1987, Picchi e Prati [23] sugerem uma função de erro (a função de erro é a derivada da função de custo  $J$  [33]) que não causa adaptação ao vetor de pesos do equalizador sempre que a saída do mesmo encontra-se excessivamente afastada de qualquer símbolo pertencente ao alfabeto. A idéia básica deste algoritmo é fazer com que somente aquelas saídas que sejam próximas com um certo grau de confiabilidade a um símbolo do alfabeto sejam utilizadas na atualização do vetor de pesos. Devido ao comportamento resultante, o algoritmo recebeu a denominação de *stop-and-go*. A cada iteração, a saída do equalizador aproxima-se cada vez mais da vizinhança dos símbolos do alfabeto, e, após um

número suficiente de iterações, o algoritmo *stop-and-go* termina por igualar-se ao tradicional algoritmo DD. Para toda iteração na qual a saída do equalizador resulta afastada de qualquer símbolo pertencente ao alfabeto, o vetor de pesos do equalizador é mantido inalterado. Isto resulta em uma baixa velocidade de convergência, pois, inicialmente, a grande maioria das saídas do equalizador encontra-se nesta condição. O grau de confiabilidade para o qual o algoritmo deixa de atualizar o vetor de pesos é controlado por uma constante  $\beta$ , que estabelece um compromisso entre velocidade de convergência e erro de regime permanente. Picchi e Prati reconhecem em [23] que o valor de  $\beta$  é crucial no desempenho do equalizador, e sugerem que  $\beta$  deveria ser variado a cada iteração, embora não o façam nem indiquem como fazê-lo.

Ainda que o algoritmo *stop-and-go* proposto em [23] não envolva relação direta com o algoritmo CMA, e até seja comprovadamente de performance inferior à do algoritmo CMA [33], considerou-se de valia a sua breve descrição, pois efeito de certa forma semelhante surge no Equalizador Concorrente proposto na presente tese. Até porque, Picchi e Prati testaram com sucesso o algoritmo *stop-and-go* para uma modulação 64-QAM, cuja constelação era considerada algo densa para as técnicas de equalização autodidata vigentes na década de 80. Cabe aqui ressaltar que Picchi e Prati impõem de modo deliberado a decisão do grau de confiabilidade à equação de atualização do vetor de pesos do equalizador, enquanto que, como veremos, tal comportamento surge naturalmente na dedução das equações de atualização do Equalizador Concorrente aqui proposto. Ainda, como será visto, o efeito *stop-and-go* ocorre dependente da dinâmica de atualização dos estados do Equalizador Concorrente enquanto que no algoritmo de Picchi e Prati este efeito é unicamente dependente da constante arbitrária  $\beta$ .

Em 1991, Ross e Taylor [18] propõem um algoritmo semelhante ao algoritmo *stop-and-go*, mas que, a princípio, pode ser aplicado à qualquer algoritmo de equalização autodidata para efeito de aumento de performance. Em síntese, o algoritmo divide o plano complexo da constelação de símbolos em 9 regiões de confiabilidade dependentes do sinal das partes real e imaginária do símbolo gerado na saída do equalizador. A decisão entre atualizar ou não o vetor de pesos é feita com base em qual região o símbolo gerado

encontra-se. Ross e Taylor apresentam em [18] os resultados de seu algoritmo, aplicando-o a um equalizador *stop-and-go* para uma modulação 64-QAM, conseguindo uma redução de 17% no tempo de convergência. Apesar de a redução no tempo de convergência obtida ser apenas moderada, e apesar do algoritmo de Ross e Taylor depender da definição arbitrária da delimitação entre as regiões de confiabilidade, também considerou-se de valia a sua breve descrição. Isto porque, embora não aplicado especificamente ao algoritmo CMA, o trabalho de Ross e Taylor propõe um dos primeiros algoritmos com potencial de operar construtivamente com o mesmo.

Em 1994, Weerackody e Kassam [67] apresentam uma técnica dual que usa o nível de erro médio da saída do equalizador para comutar automaticamente entre o algoritmo CMA e o algoritmo DD. A idéia consiste em definir em torno de cada símbolo da constelação regiões aproximadamente retangulares cujo centro é o respectivo símbolo. O lado de cada retângulo aproximado mede  $2d$ , onde  $d$  é uma constante a ser obtida experimentalmente. Em toda iteração em que a saída resultante do equalizador situa-se dentro de uma das regiões, o algoritmo DD é aplicado na atualização dos pesos, caso contrário é usado o algoritmo CMA. Weerackody e Kassam obtêm substancial redução do tempo de convergência aplicando o seu algoritmo dual a um equalizador CMA para uma modulação 16-QAM. No entanto, os autores reconhecem em [67] que seu algoritmo falha ao ser aplicado com modulação 64-QAM ou mais densa e relação sinal-ruído menor que 60dB. Apesar deste fato, e apesar do tamanho  $d$  das regiões ser constante e arbitrário, o trabalho de Weerackody e Kassam é digno de menção pois, historicamente, pela primeira vez é apresentada a idéia de uma ação cooperativa, embora ainda não-concorrente, entre o algoritmo CMA e o algoritmo DD.

Em 1997 Papadias e Slock [7] tentam propor um algoritmo no qual o processo de atualização do vetor de pesos do equalizador depende de modo simultâneo parcialmente do algoritmo CMA e parcialmente do grau de equilíbrio atingido pela evolução do algoritmo. A saída do equalizador, no entanto, não é obtida de modo concorrente, resultando do único vetor de pesos comum à atualização pelas duas parcelas. A idéia é estabilizar a convergência de um equalizador CMA minimizando a função de custo de Godard (Equação



(4.2)), mas com a restrição de que a trajetória de minimização apresente uma inércia dependente dos estados anteriores do equalizador.

Existem vários problemas com esta proposta de Papadias e Slock. A argumentação apresentada em [7] propõe a minimização de uma função de custo que mede a variação no vetor de pesos entre iterações, sujeita à restrição de que o módulo de todos os símbolos do alfabeto seja constante. Isto descarta, a princípio, qualquer modulação  $M$ -QAM exceto 4-QAM, o que torna o algoritmo adequado apenas para  $M$ -PSK. Apesar de Papadias e Slock darem indicação ao final de seu trabalho de como o seu algoritmo deveria ser alterado para se adequar à constelações com símbolos de módulo não-constante, o artigo em [7] apresenta simulações unicamente utilizando modulações 4-QAM e BPSK. De fato, embora os canais utilizados em simulação sejam diferentes, os resultados apresentados por Papadias e Slock para 4-QAM quanto à melhora da convergência podem ser classificados como sofríveis se comparados com os de Weerackody e Kassam para 16-QAM sob mesma relação sinal ruído. Ainda, a minimização da função de custo proposta por Papadias e Slock resulta em um processo de atualização do vetor de pesos do equalizador realizada através de uma janela de filtragem aplicada sobre os regressores prévios do canal. Os autores em [7] apontam para o fato de que a velocidade de convergência do algoritmo aumenta à medida que o tamanho desta janela de filtragem aproxima-se do tamanho do vetor de pesos do equalizador, mas reconhecem que à medida que esta situação é atingida a amplificação de ruído torna-se severa. Apesar de todos estes inconvenientes, e apesar de não ser um algoritmo concorrente, o trabalho de Papadias e Slock tem a primazia em propor a minimização da função de custo de Godard levando em conta os estados anteriores do equalizador. Como veremos, o Equalizador Concorrente proposto nesta tese lança mão de recurso semelhante, fazendo com que o processo de atualização dependa de modo não-linear da dinâmica de variação dos estados do equalizador.

## 5.2 O Equalizador Autodidata Concorrente

A Figura 5.1 detalha o Equalizador Concorrente proposto nesta tese, o qual é mostrado no instante  $n$  naquela figura. Portanto, como o instante é definido, visando a compacidade das equações no desenvolvimento que segue, continuaremos não explicitando o indexador  $n$  para as variáveis envolvidas a menos que  $n$  não seja inequivocamente definido pelo contexto, conforme já feito em capítulos anteriores.

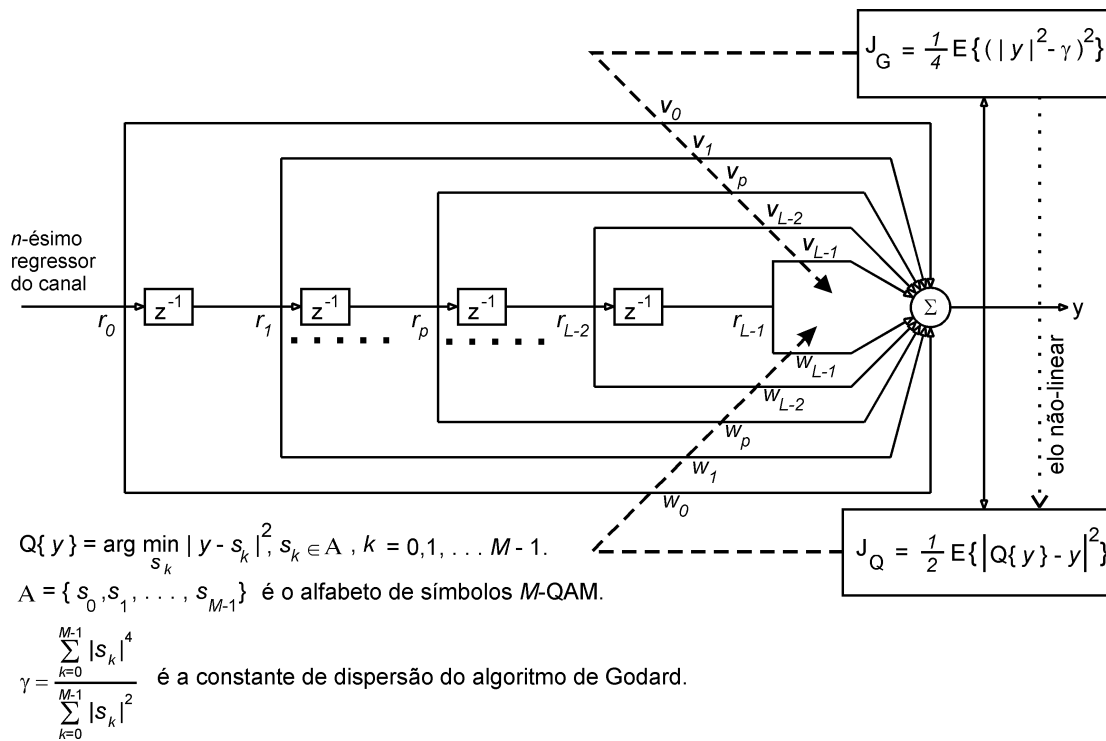


Figura 5.1: Diagrama do Equalizador Concorrente.

A partir de sua inicialização, o vetor de pesos  $\underline{V} = [V_0 \ V_1 \ \dots \ V_{L-1}]^T$  é atualizado pelo algoritmo Gradiente Estocástico [61] objetivando minimizar a função de custo de Godard  $J_G$ . Da mesma forma, a partir de sua inicialização, o vetor de pesos  $\underline{W} = [W_0 \ W_1 \ \dots \ W_{L-1}]^T$  é atualizado pelo Gradiente Estocástico, visando minimizar a função de custo  $J_Q$ . Observe que  $J_Q$  mede o quadrado da norma Euclidiana entre a saída do

equalizador e o símbolo do alfabeto mais próximo. Note também que, pela definição das funções de custo, se  $J_Q$  é minimizada, obrigatoriamente  $J_G$  também o será. No entanto, a recíproca não é verdadeira.

Para que o processo de minimização de  $J_Q$  não destrua a estabilidade da delicada dinâmica do processo de minimização de  $J_G$ , pois ambos compartilham a mesma saída comum  $y$ , é estabelecido um elo entre eles, conforme mostrado na Figura 5.1. Este elo permite que o processo de  $J_G$  informe quão equilibrado ele se encontra ao processo de  $J_Q$ . O equilíbrio do processo de  $J_G$  deve ser entendido não somente associado ao conceito de estabilidade, mas também associado ao grau do efeito resultante desta estabilidade, isto é, ao grau em que o processo de minimização de  $J_G$  simultaneamente minimiza  $J_Q$ , já que o equalizador é concebido para operar de modo concorrente. Este critério é crucial, visto que a minimização de  $J_G$ , por definição, não necessariamente minimiza  $J_Q$ . Este elo consiste em um operador não-linear que inibe o processo de  $J_Q$  quando o processo de minimização de  $J_G$  simultaneamente não minimiza  $J_Q$ . Assim, embora compartilhem a saída comum  $y$  – o que torna os processos concorrentes devido à arquitetura resultante, ao processo de  $J_Q$  somente é permitido interferir de modo cooperativo no processo de minimização de  $J_G$ .

Como será visto a seguir, este operador não-linear surge naturalmente na dedução das equações de atualização do equalizador, ao manter-se em mente que o equalizador é concebido para operar de modo concorrente e cooperativo.

Seja o  $n$ -ésimo regressor do canal  $r(n)$ ,  $n = 0, 1, \dots, N_r - 1$ , definido por

$$r_k(n) = u(L - 1 - k + i), \quad k = 0, 1, \dots, L - 1 \quad (5.1)$$

onde:

$L$  é a dimensão do equalizador,

$u$  é a seqüência de amostras recebida por amostragem fracionária  $\frac{T}{2}$  do canal, com

$i = 1, 3, \dots, N_a - 1$  variando na medida em que  $n = 0, 1, \dots, N_r - 1$  tal que  $i = 2n + 1$ ,

$N_a$  é o número total de amostras a serem recebidos por amostragem fracionária do canal,

$N_r = \left\lfloor \frac{N_a - L - 1}{2} \right\rfloor + 1$  é o número total de regressores a serem obtidos do canal ,

$T$  é o intervalo entre os símbolos gerados no transmissor,

$\lfloor \cdot \rfloor$  é o operador que resulta no inteiro mais próximo e menor que o argumento.

A saída do equalizador é dada por

$$y = \underline{W}^T \cdot \underline{r} + \underline{V}^T \cdot \underline{r} \quad (5.2)$$

ou

$$y = \sum_{k=0}^{L-1} W_k \cdot r_k + \sum_{k=0}^{L-1} V_k \cdot r_k \quad (5.3)$$

que é identicamente equivalente à

$$\begin{aligned} y &= \left\{ \sum_{k=0}^{L-1} [\operatorname{Re}\{W_k\}\operatorname{Re}\{r_k\} - \operatorname{Im}\{W_k\}\operatorname{Im}\{r_k\}] + \sum_{k=0}^{L-1} [\operatorname{Re}\{V_k\}\operatorname{Re}\{r_k\} - \operatorname{Im}\{V_k\}\operatorname{Im}\{r_k\}] \right\} + \\ & j \left\{ \sum_{k=0}^{L-1} [\operatorname{Re}\{W_k\}\operatorname{Im}\{r_k\} + \operatorname{Im}\{W_k\}\operatorname{Re}\{r_k\}] + \sum_{k=0}^{L-1} [\operatorname{Re}\{V_k\}\operatorname{Im}\{r_k\} + \operatorname{Im}\{V_k\}\operatorname{Re}\{r_k\}] \right\} = \\ & = \operatorname{Re}\{y\} + j \operatorname{Im}\{y\}, \quad j = \sqrt{-1} \end{aligned} \quad (5.4)$$

A minimização da função de custo  $J_G$  é feita através de sucessivos ajustes do vetor  $\underline{V}$  pelo algoritmo Gradiente Estocástico, à medida que  $n$  é incrementado:

$$J_G = \frac{1}{4} \operatorname{E} \left\{ \left( |y|^2 - \gamma \right)^2 \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} J_G(n) \quad (5.5)$$

$$J_G(n) = \frac{1}{4} \left\{ \left( |y(n)|^2 - \gamma \right)^2 \right\} \quad (5.6)$$

$$V_p(n+1) = V_p(n) + \eta_v \cdot \left( -\nabla_p J_G(n) \right), \quad p = 0, 1, \dots, L-1 \quad (5.7)$$

onde  $V_p$  é o  $p$ -ésimo peso do vetor de pesos  $\underline{V}$ ,  $\eta_v$  é o passo de adaptação,  $\eta_v > 0$ , e

$$\nabla_p J_G = \nabla_p^R J_G + j \nabla_p^I J_G = \frac{\partial J_G}{\partial \text{Re}\{V_p\}} + j \frac{\partial J_G}{\partial \text{Im}\{V_p\}} \quad (5.8)$$

é o  $p$ -ésimo componente do gradiente complexo de  $J_G$  tomado com relação à variação do  $p$ -ésimo componente do vetor  $\underline{V}$ .

Substituindo (5.6) em (5.8),

$$\nabla_p J_G = \frac{1}{2} (|y|^2 - \gamma) \left[ \frac{\partial |y|^2}{\partial \text{Re}\{V_p\}} + j \frac{\partial |y|^2}{\partial \text{Im}\{V_p\}} \right] \quad (5.9)$$

Mas de (5.4),

$$\begin{aligned} |y|^2 &= (\text{Re}\{y\})^2 + (\text{Im}\{y\})^2 = & (5.10) \\ &= \left\{ \sum_{k=0}^{L-1} [\text{Re}\{W_k\} \text{Re}\{r_k\} - \text{Im}\{W_k\} \text{Im}\{r_k\}] + \sum_{k=0}^{L-1} [\text{Re}\{V_k\} \text{Re}\{r_k\} - \text{Im}\{V_k\} \text{Im}\{r_k\}] \right\}^2 + \\ &+ \left\{ \sum_{k=0}^{L-1} [\text{Re}\{W_k\} \text{Im}\{r_k\} + \text{Im}\{W_k\} \text{Re}\{r_k\}] + \sum_{k=0}^{L-1} [\text{Re}\{V_k\} \text{Im}\{r_k\} + \text{Im}\{V_k\} \text{Re}\{r_k\}] \right\}^2 \end{aligned}$$

De (5.10), com referência à (5.9),

$$\frac{\partial |y|^2}{\partial \text{Re}\{V_p\}} = 2(\text{Re}\{y\} \text{Re}\{r_p\} + \text{Im}\{y\} \text{Im}\{r_p\}) \quad (5.11)$$

$$\frac{\partial |y|^2}{\partial \text{Im}\{V_p\}} = 2(\text{Im}\{y\} \text{Re}\{r_p\} - \text{Re}\{y\} \text{Im}\{r_p\}) \quad (5.12)$$

Substituindo (5.11) e (5.12) em (5.9) e multiplicando por  $-1$ ,

$$-\nabla_p J_G = (\gamma - |y|^2) [(\text{Re}\{y\} \text{Re}\{r_p\} + \text{Im}\{y\} \text{Im}\{r_p\}) + j(\text{Im}\{y\} \text{Re}\{r_p\} - \text{Re}\{y\} \text{Im}\{r_p\})] \quad (5.13)$$

mas

$$(\text{Re}\{y\}\text{Re}\{r_p\} + \text{Im}\{y\}\text{Im}\{r_p\}) + j(\text{Im}\{y\}\text{Re}\{r_p\} - \text{Re}\{y\}\text{Im}\{r_p\}) = y \cdot r_p^* \quad (5.14)$$

e substituindo (5.14) em (5.13)

$$-\nabla_p J_G = y(\gamma - |y|^2)r_p^* \quad (5.15)$$

Substituindo (5.15) em (5.7), obtém-se a equação de atualização do vetor  $\underline{V}$  para a minimização da função de custo  $J_G$  através do Gradiente Estocástico:

$$\underline{V}(n+1) = \underline{V}(n) + \eta_v \cdot y(n) (\gamma - |y(n)|^2) \underline{r}^*(n) \quad (5.16)$$

De modo semelhante à função  $J_G$ , a minimização da função de custo  $J_Q$  é feita através de sucessivos ajustes do vetor  $\underline{W}$  pelo algoritmo Gradiente Estocástico, à medida que  $n$  é incrementado:

$$J_Q = \frac{1}{2} E\{|Q\{y\} - y|^2\} = \lim_{n \rightarrow \infty} J_Q(n) \quad (5.17)$$

$$J_Q(n) = \frac{1}{2} \{|Q\{y(n)\} - y(n)|^2\} \quad (5.18)$$

$$W_p(n+1) = W_p(n) + \eta_w \cdot (-\nabla_p J_Q(n)), \quad p = 0, 1, \dots, L-1 \quad (5.19)$$

onde  $W_p$  é o  $p$ -ésimo peso do vetor de pesos  $\underline{W}$ ,  $\eta_w$  é o passo de adaptação,  $\eta_w > 0$ ,  $Q\{y\}$  representa o resultado da operação de quantização aplicada à saída  $y$  do equalizador, e

$$\nabla_p J_Q = \nabla_p^R J_Q + j \nabla_p^I J_Q = \frac{\partial J_Q}{\partial \text{Re}\{W_p\}} + j \frac{\partial J_Q}{\partial \text{Im}\{W_p\}} \quad (5.20)$$

é o  $p$ -ésimo componente do gradiente complexo de  $J_Q$  tomado com relação à variação do  $p$ -ésimo componente do vetor  $\underline{W}$ .

Substituindo (5.18) em (5.20),

$$\nabla_p J_Q = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial |Q\{y\} - y|^2}{\partial \operatorname{Re}\{W_p\}} + j \frac{\partial |Q\{y\} - y|^2}{\partial \operatorname{Im}\{W_p\}} \right] \quad (5.21)$$

Mas de (5.4) e (5.10),

$$\begin{aligned} |Q\{y\} - y|^2 &= (\operatorname{Re}\{Q\{y\}\} - \operatorname{Re}\{y\})^2 + (\operatorname{Im}\{Q\{y\}\} - \operatorname{Im}\{y\})^2 = \\ &= \left\{ \operatorname{Re}\{Q\{y\}\} - \left[ \sum_{k=0}^{L-1} [\operatorname{Re}\{W_k\} \operatorname{Re}\{r_k\} - \operatorname{Im}\{W_k\} \operatorname{Im}\{r_k\}] + \sum_{k=0}^{L-1} [\operatorname{Re}\{V_k\} \operatorname{Re}\{r_k\} - \operatorname{Im}\{V_k\} \operatorname{Im}\{r_k\}] \right] \right\}^2 + \\ &+ \left\{ \operatorname{Im}\{Q\{y\}\} - \left[ \sum_{k=0}^{L-1} [\operatorname{Re}\{W_k\} \operatorname{Im}\{r_k\} + \operatorname{Im}\{W_k\} \operatorname{Re}\{r_k\}] + \sum_{k=0}^{L-1} [\operatorname{Re}\{V_k\} \operatorname{Im}\{r_k\} + \operatorname{Im}\{V_k\} \operatorname{Re}\{r_k\}] \right] \right\}^2 \end{aligned} \quad (5.22)$$

De (5.22), com referência à (5.21),

$$\frac{\partial |Q\{y\} - y|^2}{\partial \operatorname{Re}\{W_p\}} = 2 \left( \begin{array}{l} [\operatorname{Re}\{Q\{y\}\} - \operatorname{Re}\{y\}] \left[ \frac{\partial \operatorname{Re}\{Q\{y\}\}}{\partial \operatorname{Re}\{W_p\}} - \operatorname{Re}\{r_p\} \right] + \\ [\operatorname{Im}\{Q\{y\}\} - \operatorname{Im}\{y\}] \left[ \frac{\partial \operatorname{Im}\{Q\{y\}\}}{\partial \operatorname{Re}\{W_p\}} - \operatorname{Im}\{r_p\} \right] \end{array} \right) \quad (5.23)$$

$$\frac{\partial |Q\{y\} - y|^2}{\partial \operatorname{Im}\{W_p\}} = 2 \left( \begin{array}{l} [\operatorname{Re}\{Q\{y\}\} - \operatorname{Re}\{y\}] \left[ \frac{\partial \operatorname{Re}\{Q\{y\}\}}{\partial \operatorname{Im}\{W_p\}} + \operatorname{Im}\{r_p\} \right] + \\ [\operatorname{Im}\{Q\{y\}\} - \operatorname{Im}\{y\}] \left[ \frac{\partial \operatorname{Im}\{Q\{y\}\}}{\partial \operatorname{Im}\{W_p\}} - \operatorname{Re}\{r_p\} \right] \end{array} \right) \quad (5.24)$$

Substituindo (5.23) e (5.24) em (5.21), trocando o operador diferencial  $\partial\{\}$  pelo operador diferença  $\Delta\{\}$  – pois  $Q\{y\}$  não é uma função contínua – e multiplicando por  $-1$ ,

$$\begin{aligned}
-\nabla_p J_Q \approx & \left( \begin{aligned} & \left[ \operatorname{Re}\{Q\{y\}\} - \operatorname{Re}\{y\} \right] \left[ \operatorname{Re}\{r_p\} - \frac{\Delta \operatorname{Re}\{Q\{y\}\}}{\Delta \operatorname{Re}\{W_p\}} \right] + \\ & \left[ \operatorname{Im}\{Q\{y\}\} - \operatorname{Im}\{y\} \right] \left[ \operatorname{Im}\{r_p\} - \frac{\Delta \operatorname{Im}\{Q\{y\}\}}{\Delta \operatorname{Re}\{W_p\}} \right] \end{aligned} \right) + \\
& \left( \begin{aligned} & \left[ \operatorname{Im}\{Q\{y\}\} - \operatorname{Im}\{y\} \right] \left[ \operatorname{Re}\{r_p\} - \frac{\Delta \operatorname{Im}\{Q\{y\}\}}{\Delta \operatorname{Im}\{W_p\}} \right] + \\ & - \left[ \operatorname{Re}\{Q\{y\}\} - \operatorname{Re}\{y\} \right] \left[ \operatorname{Im}\{r_p\} + \frac{\Delta \operatorname{Re}\{Q\{y\}\}}{\Delta \operatorname{Im}\{W_p\}} \right] \end{aligned} \right) \quad (5.25)
\end{aligned}$$

A troca do operador diferencial  $\partial\{\}$  pelo operador diferença  $\Delta\{\}$ , por  $Q\{y\}$  não ser uma função contínua, implica em (5.25) tornar-se uma aproximação. É necessário, portanto, avaliar as razões entre diferenças em cada termo de (5.25) sob um critério tal que minimize a imprecisão do operador  $\Delta\{\}$  no contexto operacional do Equalizador Concorrente.

O termo  $\frac{\Delta \operatorname{Re}\{Q\{y\}\}}{\Delta \operatorname{Re}\{W_p\}}$  em (5.25) pode ser expandido em

$$\frac{\Delta \operatorname{Re}\{Q\{y\}\}}{\Delta \operatorname{Re}\{W_p\}} = \frac{\operatorname{Re}\{\Delta Q\{y\}\}}{\Delta \operatorname{Re}\{W_p\}} = \operatorname{Re}\left\{ \frac{\Delta Q\{y\}}{\Delta \operatorname{Re}\{W_p\}} \right\} = \operatorname{Re}\left\{ \frac{\Delta Q\{y\}}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta \operatorname{Re}\{W_p\}} \right\} \quad (5.26)$$

mas, de (5.3), verifica-se que  $y$  é contínua com relação a  $W_p$ , e portanto o operador  $\Delta\{\}$

pode ser substituído pelo operador  $\partial\{\}$  no termo  $\frac{\Delta y}{\Delta \operatorname{Re}\{W_p\}}$  de (5.26), resultando em (ver

(5.4)):

$$\frac{\Delta \operatorname{Re}\{Q\{y\}\}}{\Delta \operatorname{Re}\{W_p\}} = \operatorname{Re}\left\{ \frac{\Delta Q\{y\}}{\Delta y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \operatorname{Re}\{W_p\}} \right\} = \operatorname{Re}\left\{ \frac{\Delta Q\{y\}}{\Delta y} \cdot [\operatorname{Re}\{r_p\} + j \operatorname{Im}\{r_p\}] \right\} \quad (5.27)$$



O termo  $\frac{\Delta Q\{y(n)\}}{\Delta y(n)}$  em (5.27) expressa a sensibilidade do quantizador à variação na saída do equalizador no instante  $n$ . Para computar a sensibilidade  $\frac{\Delta Q\{y(n)\}}{\Delta y(n)}$  deve-se perturbar de alguma forma o sistema no instante  $n$ , medir as resultantes variações  $\Delta y(n)$  e  $\Delta Q\{y(n)\}$ , e computar a razão

$$\frac{\Delta Q\{y(n)\}}{\Delta y(n)} = \frac{Q\{y(n)\} - Q\{\tilde{y}(n)\}}{y(n) - \tilde{y}(n)} \quad (5.28)$$

onde  $y(n)$  é a saída do equalizador e  $\tilde{y}(n)$  é a saída do equalizador resultante da imposição de uma perturbação  $\wp$  ao sistema, no instante  $n$ .

Existem infinitas possíveis definições para a perturbação  $\wp$ . No entanto, a definição de  $\wp$  deveria obedecer a um conjunto de restrições que atendessem ao contexto da operação de modo concorrente do equalizador proposto. Assim, seja  $\wp$  tal que:

- I. mantenha o sistema perturbado o mais próximo possível de seu estado no instante  $n$ , para que a imprecisão de (5.25) seja minimizada.
- II. quantitativamente e qualitativamente defina o elo entre os processos de minimização das funções de custo  $J_G$  e  $J_Q$ , para que se estabeleça o caráter concorrente da operação do sistema.

Embora devam existir inúmeras definições para  $\wp$  que atendam às restrições I e II, uma possível e simples definição é: Seja  $\wp$  a perturbação imposta ao sistema no instante  $n$ , tal que a saída perturbada  $\tilde{y}(n)$  seja

$$\tilde{y}(n) = [\underline{V}(n) + \Delta \underline{V}(n)]^T \cdot \underline{r}(n) + \underline{W}^T(n) \cdot \underline{r}(n) = \underline{V}^T(n+1) \cdot \underline{r}(n) + \underline{W}^T(n) \cdot \underline{r}(n) \quad (5.29)$$

onde  $\Delta \underline{V}(n)$  é a perturbação  $\wp$  dada por

$$\Delta \underline{V}(n) = \underline{V}(n+1) - \underline{V}(n) \quad (5.30)$$

Desta maneira definida, a perturbação  $\wp$  é gerada como consequência da atualização do vetor  $\underline{V}$  no instante  $n$ , atualização que é dada por (5.16). A nível de procedimento, isto impõe apenas que o vetor  $\underline{W}$  seja atualizado após o vetor  $\underline{V}$ . Portanto,  $\wp$  implicitamente depende do estado *a priori* do sistema. Na prática de implementação de equalizadores,  $0 < \eta_v \ll 1$  em (5.16), pois caso contrário o erro de regime permanente do algoritmo CMA resulta elevado. Isto faz com que a restrição I fique satisfeita, pois a variação  $\Delta y(n)$  resultante de  $\wp$  é pequena. Observe também que (5.29) a (5.26) dependem explicitamente ou implicitamente de  $\underline{V}$ , cuja atualização por (5.16) minimiza  $J_G$ . Como esta cadeia de equações define (5.25), e como (5.25) diz respeito à minimização de  $J_Q$ , a restrição II fica satisfeita.

Uma vez definida a saída perturbada  $\tilde{y}(n)$  resultante da perturbação  $\Delta \underline{V}(n)$ , é necessário avaliar (5.28) quantitativamente. Sejam  $y(n)$  e  $\tilde{y}(n)$  arbitrariamente próximos, respectivamente, aos símbolos QAM  $s_i$  e  $s_j$  tal que  $y(n) = s_i + \delta$  e  $\tilde{y}(n) = s_j + \varepsilon$ , onde  $\delta$  e  $\varepsilon$  são números complexos distintos de módulo arbitrariamente pequeno, com  $i, j = 0, 1, \dots, M-1$ , sendo  $M$  o número de símbolos presentes no alfabeto  $M$ -QAM. Tão mais próximos  $y(n)$  e  $\tilde{y}(n)$  estarão respectivamente de  $s_i$  e  $s_j$  quanto mais efetiva tenha sido a minimização concorrente e simultânea das funções de custo  $J_G$  e  $J_Q$  até o instante arbitrário  $n$ .

Se a perturbação  $\Delta \underline{V}(n)$  resulta em  $|\Delta y(n)| \rightarrow 0$  então podemos afirmar que  $(y(n) = s_i + \delta) \approx (\tilde{y}(n) = s_j + \varepsilon)$  e, por inferência,  $s_i = s_j$ . Nesta situação, considerando que  $|s_i| \gg |\delta|$  e  $|s_i| \gg |\varepsilon|$ , (5.28) resulta em

$$\frac{\Delta Q\{y(n)\}}{\Delta y(n)} = \frac{Q\{s_i + \delta\} - Q\{s_i + \varepsilon\}}{(s_i + \delta) - (s_i + \varepsilon)} = \frac{s_i - s_i}{\delta - \varepsilon} = 0 \quad (5.31)$$

Portanto  $\frac{\Delta Q\{y(n)\}}{\Delta y(n)} = 0$  para  $Q\{y(n)\} = Q\{\tilde{y}(n)\}$ .

Se a perturbação  $\Delta V(n)$  resulta em  $|\Delta y(n)| \gg 0$  então podemos afirmar que  $(y(n) = s_i + \delta) \neq (\tilde{y}(n) = s_j + \varepsilon)$  e, por inferência,  $s_i \neq s_j$ . Nesta situação, considerando que  $|s_i| \gg |\delta|$  e  $|s_j| \gg |\varepsilon|$ , (5.28) resulta em

$$\frac{\Delta Q\{y(n)\}}{\Delta y(n)} = \frac{Q\{s_i + \delta\} - Q\{s_j + \varepsilon\}}{(s_i + \delta) - (s_j + \varepsilon)} = \frac{s_i - s_j}{s_i - s_j} = 1 \quad (5.32)$$

Portanto  $\frac{\Delta Q\{y(n)\}}{\Delta y(n)} = 1$  para  $Q\{y(n)\} \neq Q\{\tilde{y}(n)\}$ .

Desta maneira, (5.28) pode ser redefinida como

$$D_Q(n) = \frac{\Delta Q\{y(n)\}}{\Delta y(n)} = \begin{cases} 0, & Q\{y(n)\} = Q\{\tilde{y}(n)\} \\ 1, & Q\{y(n)\} \neq Q\{\tilde{y}(n)\} \end{cases} \quad (5.33)$$

Substituindo (5.33) em (5.27),

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \operatorname{Re}\{Q\{y(n)\}\}}{\Delta \operatorname{Re}\{W_p(n)\}} &= \operatorname{Re}\left\{\frac{\Delta Q\{y(n)\}}{\Delta y(n)} \cdot [\operatorname{Re}\{r_p(n)\} + j \operatorname{Im}\{r_p(n)\}]\right\} = \\ &= \operatorname{Re}\{D_Q(n) \cdot [\operatorname{Re}\{r_p(n)\} + j \operatorname{Im}\{r_p(n)\}]\} = D_Q(n) \operatorname{Re}\{r_p(n)\} \end{aligned} \quad (5.34)$$

E, por procedimento semelhante, as demais razões entre diferenças em (5.25) são obtidas através de:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \operatorname{Im}\{Q\{y(n)\}\}}{\Delta \operatorname{Re}\{W_p(n)\}} &= \operatorname{Im}\left\{\frac{\Delta Q\{y(n)\}}{\Delta y(n)} \cdot \frac{\partial y(n)}{\partial \operatorname{Re}\{W_p(n)\}}\right\} = \\ &= \operatorname{Im}\{D_Q(n) [\operatorname{Re}\{r_p(n)\} + j \operatorname{Im}\{r_p(n)\}]\} = D_Q(n) \operatorname{Im}\{r_p(n)\} \end{aligned} \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \operatorname{Im}\{Q\{y(n)\}\}}{\Delta \operatorname{Im}\{W_p(n)\}} &= \operatorname{Im}\left\{\frac{\Delta Q\{y(n)\}}{\Delta y(n)} \cdot \frac{\partial y(n)}{\partial \operatorname{Im}\{W_p(n)\}}\right\} = \\ &= \operatorname{Im}\{D_Q(n) [-\operatorname{Im}\{r_p(n)\} + j \operatorname{Re}\{r_p(n)\}]\} = D_Q(n) \operatorname{Re}\{r_p(n)\} \end{aligned} \quad (5.36)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \operatorname{Re}\{Q\{y(n)\}}}{\Delta \operatorname{Im}\{W_p(n)\}} &= \operatorname{Re}\left\{ \frac{\Delta Q\{y(n)\}}{\Delta y(n)} \cdot \frac{\partial y(n)}{\partial \operatorname{Im}\{W_p(n)\}} \right\} = \\ &= \operatorname{Re}\{D_Q(n)[- \operatorname{Im}\{r_p(n)\} + j \operatorname{Re}\{r_p(n)\}]\} = -D_Q(n) \operatorname{Im}\{r_p(n)\} \end{aligned} \quad (5.37)$$

Substituindo (5.34) a (5.37) em (5.25),

$$\begin{aligned} -\nabla_p J_Q(n) &= \left( \begin{array}{l} [\operatorname{Re}\{Q\{y(n)\}} - \operatorname{Re}\{y(n)\}][1 - D_Q(n)] \operatorname{Re}\{r_p(n)\} + \\ [\operatorname{Im}\{Q\{y(n)\}} - \operatorname{Im}\{y(n)\}][1 - D_Q(n)] \operatorname{Im}\{r_p(n)\} \end{array} \right)^+ \\ &\quad \left( \begin{array}{l} [\operatorname{Im}\{Q\{y(n)\}} - \operatorname{Im}\{y(n)\}][1 - D_Q(n)] \operatorname{Re}\{r_p(n)\} + \\ -[\operatorname{Re}\{Q\{y(n)\}} - \operatorname{Re}\{y(n)\}][1 - D_Q(n)] \operatorname{Im}\{r_p(n)\} \end{array} \right)^j \end{aligned} \quad (5.38)$$

Substituindo (5.38) em (5.19), obtém-se a equação de atualização do vetor  $\underline{W}$  para a minimização da função de custo  $J_Q$  através do Gradiente Estocástico, de modo concorrente com a minimização da função de custo  $J_G$ :

$$\underline{W}(n+1) = \underline{W}(n) + \eta_w \cdot \left\{ \begin{array}{l} \left( \begin{array}{l} [\operatorname{Re}\{Q\{y(n)\}} - \operatorname{Re}\{y(n)\}][1 - D_Q(n)] \operatorname{Re}\{r(n)\} + \\ [\operatorname{Im}\{Q\{y(n)\}} - \operatorname{Im}\{y(n)\}][1 - D_Q(n)] \operatorname{Im}\{r(n)\} \end{array} \right)^+ \\ \left( \begin{array}{l} [\operatorname{Im}\{Q\{y(n)\}} - \operatorname{Im}\{y(n)\}][1 - D_Q(n)] \operatorname{Re}\{r(n)\} + \\ -[\operatorname{Re}\{Q\{y(n)\}} - \operatorname{Re}\{y(n)\}][1 - D_Q(n)] \operatorname{Im}\{r(n)\} \end{array} \right)^j \end{array} \right\} \quad (5.39)$$

ou

$$\underline{W}(n+1) = \underline{W}(n) + \eta_w [1 - D_Q(n)] [Q\{y(n)\} - y(n)] r^*(n) \quad (5.40)$$

Note, de (5.40) e (5.33), que o fator  $[1 - D_Q]$  atua como uma chave controlada pelo estado *a priori* do sistema, chave esta que permite a atualização de  $\underline{W}$  em função da atualização de  $\underline{V}$ . Note ainda que o fator  $[1 - D_Q]$  surge naturalmente do desenvolvimento das equações de atualização do equalizador, indicando a adequação da escolha da perturbação  $\wp$  (anteriormente escolhida visando obedecer ao conjunto de restrições necessárias à operação concorrente).

Observe que o fator  $[1 - D_Q]$  gera o comportamento de certa forma semelhante ao algoritmo *stop-and-go* de Picchi e Prati [23], a que nos referimos no início deste capítulo: -  $\underline{W}$  somente é atualizado se, ao se atualizar  $\underline{V}$ , a saída  $y$  permanece no mesmo nível de quantização  $Q$ . No entanto, o algoritmo *stop-and-go* não é concorrente e possui um limiar constante que não segue a dinâmica dos estados *a priori* do sistema. Uma atualização em  $\underline{V}$  que não altere o nível de quantização  $Q$  implicitamente significa uma atualização provavelmente correta, já que esta é a condição esperada após a convergência do equalizador. Portanto, o fator  $[1 - D_Q]$  controla a atualização de  $\underline{W}$  em concordância com a operação concorrente do sistema: O processo de minimização de  $J_Q$  somente é ativado quando o processo de minimização de  $J_G$  simultaneamente minimiza  $J_Q$ . Como os filtros  $\underline{W}$  e  $\underline{V}$  compartilham a mesma saída  $y$ , o fator  $[1 - D_Q]$  evita qualquer interferência não cooperativa do processo de minimização de  $J_Q$  que possa desequilibrar o processo de minimização de  $J_G$ .

A Tabela 5.1 esquematiza o procedimento adotado no Equalizador Concorrente quando aplicado à equalização de canal:

| Etapa | Procedimento   |
|-------|--|
| 1     | <p>Inicializar os vetores <math>\underline{W}</math> e <math>\underline{V}</math>:</p> $\underline{W} = 0 + j0$ <p>e</p> $V_k = \begin{cases} 0 + j0, & k = 0, 1, \dots, L-1, \quad k \neq \xi \\ 1 + j0, & k = \xi \end{cases}$ <p>onde <math>j = \sqrt{-1}</math>, <math>L</math> é a dimensão dos vetores <math>\underline{V}</math> e <math>\underline{W}</math> (dimensão do equalizador) e <math>\xi</math>, <math>0 &lt; \xi &lt; L-1</math>, é o índice do único peso do vetor de pesos <math>\underline{V}</math> a ser inicializado com o valor <math>1+j0</math>.</p> |
| 2     | Inicializar o indexador de amostras recebidas por amostragem fracionária do canal:<br>$i = 1$  |
| 3     | Inicializar o indexador de regressor do canal (ou indexador de instante/iteração):<br>$n = 0$  |

|   |   |
|---|---|
| 4 | <p>Obter o <math>n</math>-ésimo regressor do canal <math>\underline{r}(n)</math> :</p> $r_k(n) = u(L-1-k+i), \quad k = 0, 1, \dots, L-1$ <p>onde <math>u</math> é a seqüência de amostras recebida por amostragem fracionária <math>\frac{T}{2}</math> do canal, com <math>i = 1, 3, \dots, N_a - 1</math> variando na medida em que <math>n = 0, 1, \dots, N_r - 1</math>, sendo <math>N_a</math> o número total de amostras a serem recebidas por amostragem fracionária do canal, <math>N_r = \left\lfloor \frac{N_a - L - 1}{2} \right\rfloor + 1</math> é o número total de regressores a serem obtidos do canal e <math>T</math> é o intervalo entre os símbolos gerados no transmissor. <math>\lfloor \cdot \rfloor</math> é o operador que resulta no inteiro mais próximo e menor que o argumento.</p> |
| 5 | <p>Obter a saída do equalizador no instante <math>n</math>:</p> $y(n) = \underline{W}^T(n) \cdot \underline{r}(n) + \underline{V}^T(n) \cdot \underline{r}(n)$  |
| 6 | <p>Atualizar o vetor de pesos <math>\underline{V}</math> :</p> $\underline{V}(n+1) = \underline{V}(n) + \eta_v \cdot y(n) \left( \gamma -  y(n) ^2 \right) \cdot \underline{r}^*(n)$ <p>onde <math>\eta_v</math> é o passo de adaptação do vetor <math>\underline{V}</math>, <math>\eta_v &gt; 0</math>.</p>  |
| 7 | <p>Atualizar o vetor de pesos <math>\underline{W}</math> :</p> $\underline{W}(n+1) = \underline{W}(n) + \eta_w [1 - D_Q(n)] [Q\{y(n)\} - y(n)] \underline{r}^*(n)$ <p>onde <math>\eta_w</math> é o passo de adaptação do vetor <math>\underline{W}</math>, <math>\eta_w &gt; 0</math>, e</p> $D_Q(n) = \begin{cases} 0, & Q\{y(n)\} = Q\{\tilde{y}(n)\} \\ 1, & Q\{y(n)\} \neq Q\{\tilde{y}(n)\} \end{cases}$ <p>sendo</p> $\tilde{y}(n) = \underline{V}^T(n+1) \cdot \underline{r}(n) + \underline{W}^T(n) \cdot \underline{r}(n)$   |
| 8 | <p>Incrementar indexadores :</p> $i = i + 2$ $n = n + 1$  |
| 9 | <p>Testar fim de loop:</p> <p>Se <math>L + i &gt; N_a \Rightarrow</math> FIM</p> <p>caso contrário repetir etapas 4 a 9.</p>  |

Tabela 5.1: Sumário do algoritmo utilizado no Equalizador Concorrente quando aplicado à equalização de canal.

# Capítulo 6

## Resultados Experimentais

A avaliação do desempenho do Equalizador Concorrente proposto nesta tese será feita com referência ao equalizador CMA, por razões já expostas em capítulos anteriores. Os critérios de desempenho adotados baseiam-se nos seguintes resultados de simulação:

- 1- Gráfico da constelação  $\Gamma$  na saída  $y$  do equalizador CMA após a convergência, tendo como referência a constelação do alfabeto  $A$  da fonte, sendo  $A$  representado no gráfico pelo conjunto de símbolos  $\dagger$ .
- 2- Gráfico da constelação  $\Psi$  na saída  $y$  do Equalizador Concorrente após a convergência, tendo como referência a constelação do alfabeto  $A$  da fonte, sendo  $A$  representado no gráfico pelo conjunto de símbolos  $\dagger$ .
- 3- Gráfico comparativo das curvas  $ISI(i)$  para os dois equalizadores,  $i = 0, 2, \dots, N_a - 1$ , onde  $N_a$  é o número total de amostras recebidas por amostragem fracionária  $T/2$  do canal, e  $ISI(i)$  é a medida de “reverberação” no sinal equalizado  $y$  no instante  $i$ , obtida pela Equação (2.24) calculada para este instante.
- 4- Gráfico comparativo das curvas  $MSE(i)$  para os dois equalizadores,  $i = 0, 2, \dots, N_a - 1$ , sendo  $MSE(i)$  o erro médio quadrático entre a saída equalizada  $y$  e a seqüência original transmitida  $s$ , considerando-se para a média o intervalo de amostras que inclui o instante  $i$  e as  $L + L_c - 1$  amostras anteriores ao mesmo. Para simulações com SNR=15dB a curva  $MSE(i)$  considerará para a média o intervalo de  $4(L + L_c)$  amostras anteriores, ao invés de  $L + L_c$ , por questão de comodidade de visualização gráfica. Adicionalmente, este gráfico mostra a reta horizontal NT que define o nível de

MSE máximo permissível (ver Tabela 1.1) para que a transferência ao algoritmo DD seja possível.

## 6.1 Condições Operacionais

A seqüência que representa a fonte de informação  $s$  a ser transmitida através do canal possui média zero, variância unitária, distribuição uniforme, e apresenta independência estatística entre amostras.

A avaliação do equalizador para os canais de microondas M1–M15, RR e RU utilizará modulação 16–QAM e 64–QAM. Com modulação 16–QAM, a simulação considera SNR=35dB, 25dB e 15dB. Com modulação 64–QAM, a simulação considera SNR=35dB e 25dB. Para os canais de TV a cabo C1 e C2 será utilizada modulação 256–QAM, com SNR= 100dB e 35dB. O ruído adicionado na entrada do equalizador é Gaussiano, de média zero, espectralmente branco e com variância definida pela SNR.

Este capítulo apresentará apenas os exemplos que permitam estabelecer o termo comparativo entre os desempenhos do algoritmo CMA e do algoritmo Concorrente. O Apêndice A apresenta a totalidade dos casos citados no parágrafo prévio.

Alguns autores sugerem que a dimensão do equalizador  $L$  seja feita maior que a dimensão da dispersão de canal  $L_c$ , objetivando que os graus extras de liberdade assim obtidos permitam a minimização do ganho de ruído do equalizador [38]. Esta tese, no entanto, objetivando minimizar custo de *hardware* a nível de implementação, adotará  $L = L_c$  nas simulações que seguem.



## 6.2 Inicialização

A inicialização do vetor  $\underline{V}$ , tanto para o equalizador CMA como para o Equalizador Concorrente, segue a estratégia denominada *single spike*, que consiste em inicializar  $\underline{V}$  com  $1 + j0$  na posição  $\xi$ ,  $0 < \xi < L - 1$ , mantendo nulos os elementos nas demais posições. Em [64] é mostrado que o valor ótimo de  $\xi$  depende da posição do pico da resposta ao impulso do canal  $|c(n)|$ , denominado cursor do canal. No entanto, como  $c(n)$  não é conhecida *a priori*, a prática universalmente aceita é fazer-se  $\xi = L/2$ . Conforme discutido na Seção 4.3, se o equalizador não converge com  $\xi = L/2$ , é usual o sistema receptor fazer algumas poucas tentativas em torno de  $\xi = L/2$  até o equalizador convergir, isto é,  $\xi = L/2 \pm \lambda$ ,  $\lambda = 1, 2, \dots$  [63]. Esta tese adotará tal heurística no caso de falha de convergência inicial, podendo os casos em que houve necessidade de aplicá-la serem identificados por  $\xi \neq L/2$ .

## 6.3 Passo de Adaptação

O passo de adaptação do filtro do equalizador CMA é  $\eta$ , e os passos de adaptação dos filtros do Equalizador Concorrente são  $\eta_v$  e  $\eta_w$ . Estes parâmetros são experimentalmente ajustados objetivando atender o compromisso entre rápida convergência e baixo MSE de regime permanente.

Com variância unitária na fonte de informação  $s$ , para 16-QAM e 64-QAM,  $\eta$  apresenta melhores resultados na vizinhança do valor  $1 \times 10^{-3}$ , e para 256-QAM, em torno de  $1 \times 10^{-4}$ . Estes resultados concordam com os experimentos envolvendo modulação 16-QAM e 256-QAM em [64].

## 6.4 Indicadores de Desempenho

Nos gráficos que seguem, considera-se como indicação de bom desempenho os seguintes eventos:

- 1- O grau em que os pontos da constelação da saída  $y$  do equalizador ( $\Gamma$  ou  $\Psi$ ) concentram-se em torno dos símbolos  $\pm$  do alfabeto  $A$ . Sob desempenho ideal, este gráfico mostraria todos os pontos da saída  $y$  projetados no cruzamento das retas que definem os símbolos  $\pm$  do alfabeto  $A$ . A analogia com o foco de uma lente ótica não é absurda, considerando que um equalizador rearranja a fase das componentes espectrais que compõem o sinal visando anular a dispersão entre elas e visto que uma lente rearranja a fase (e direção) das frentes de onda que compõem a imagem, visando anular a dispersão entre elas no ponto focal.
- 2- A rapidez com que a curva  $ISI(i)$  decresce com  $i$  e quão baixo e invariante é o valor de  $ISI(i)$  após a convergência ( $ISI$  de regime permanente).
- 3- A rapidez com que a curva  $MSE(i)$  decresce com  $i$  e quão baixo e invariante é o valor de  $MSE(i)$  após a convergência ( $MSE$  de regime permanente).

## 6.5 Simulações

Seguem as simulações mais elucidativas do desempenho comparativo entre os algoritmos CMA e Concorrente. Os canais utilizados estão caracterizados no Capítulo 3. A operação do Equalizador Concorrente sob canal dinâmico é descrita no Seção 6.7.

Modulação 16-QAM SNR=35dB – Canal M14

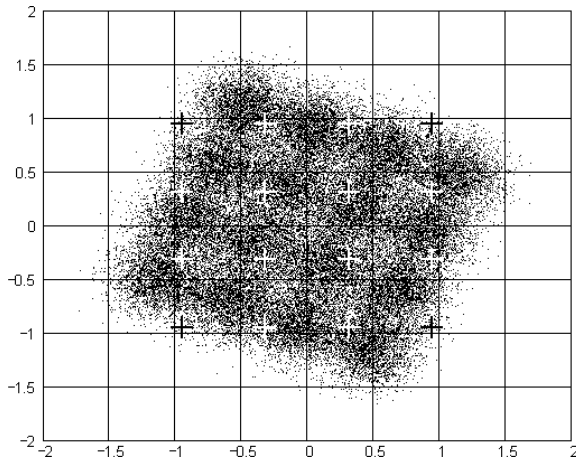


Fig. 6.1a:  $\Gamma$  (CMA)

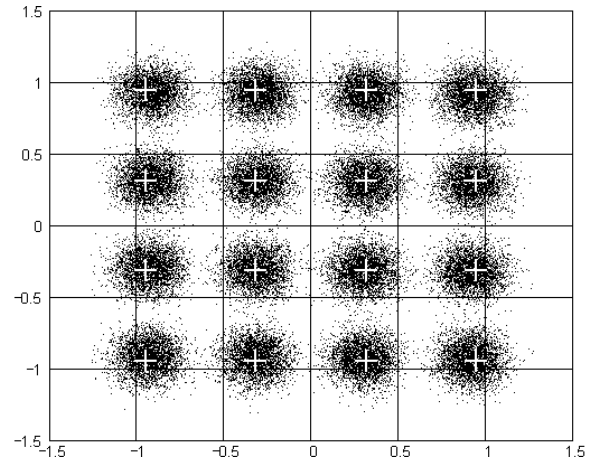


Fig. 6.1b:  $\Psi$  (CONC)

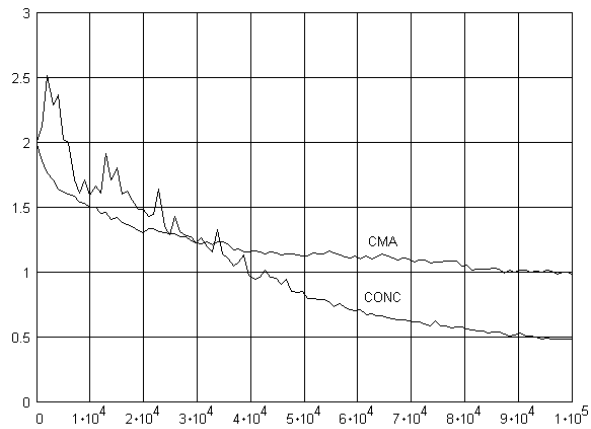


Fig. 6.1c: ISI(*i*)

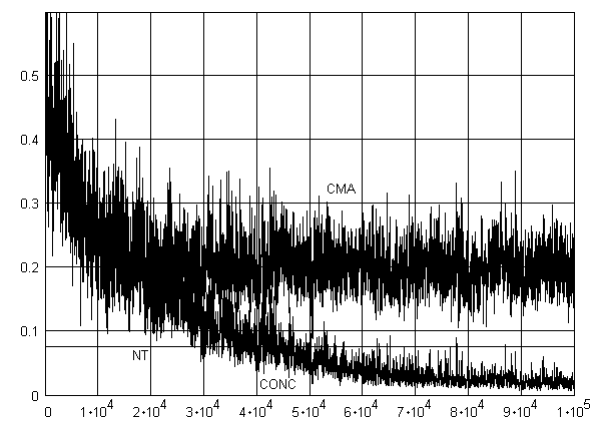


Fig. 6.1d: MSE(*i*)

Figura 6.1: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M14, modulação 16-QAM ( $\gamma=1.32$ ), SNR=35dB. Parâmetros:  $N_a = 100000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 6$ .

Modulação 64-QAM SNR=35dB – Canal M9

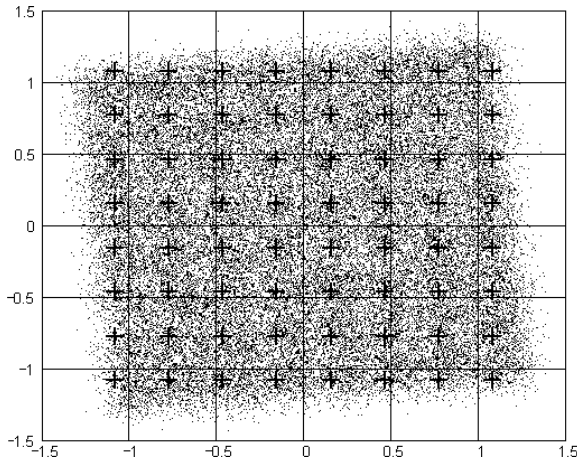


Fig. 6.2a:  $\Gamma$  (CMA)

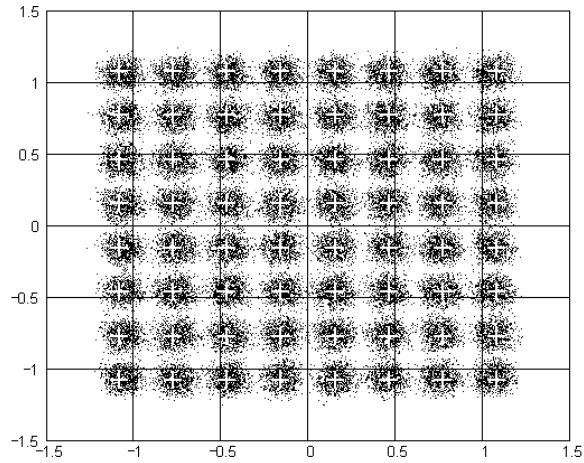


Fig. 6.2b:  $\Psi$  (CONC)

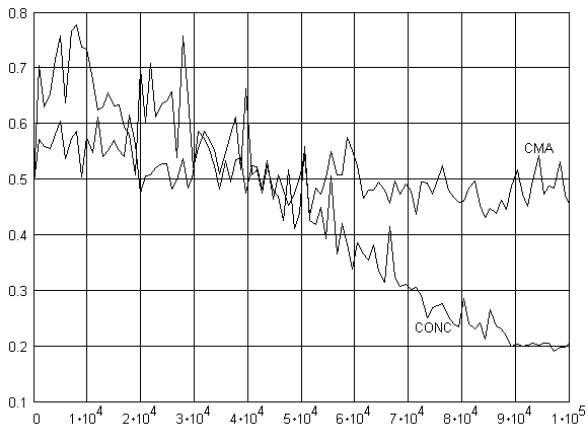


Fig. 6.2c: ISI(*i*)

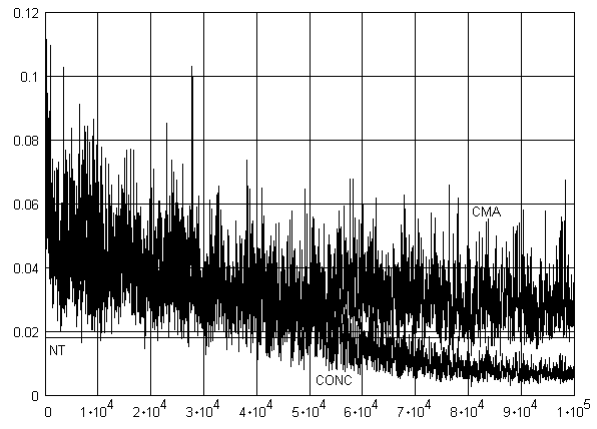


Fig. 6.2d: MSE(*i*)

Figura 6.2: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M9, modulação 64-QAM ( $\gamma=1.380953$ ), SNR=35dB. Parâmetros:  $N_a = 100000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 2$ .

Modulação 256-QAM SNR=35dB – Canal C1

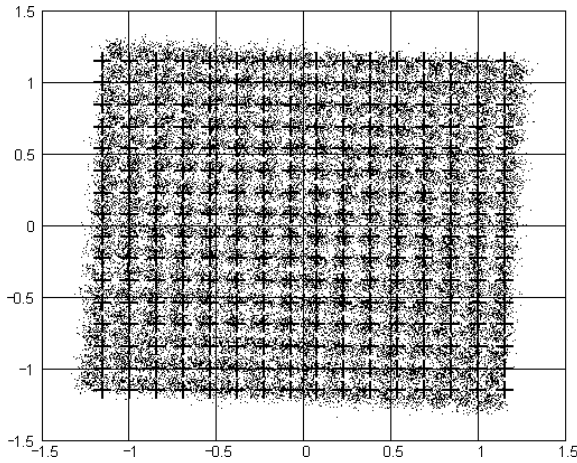


Fig. 6.3a:  $\Gamma$  (CMA)

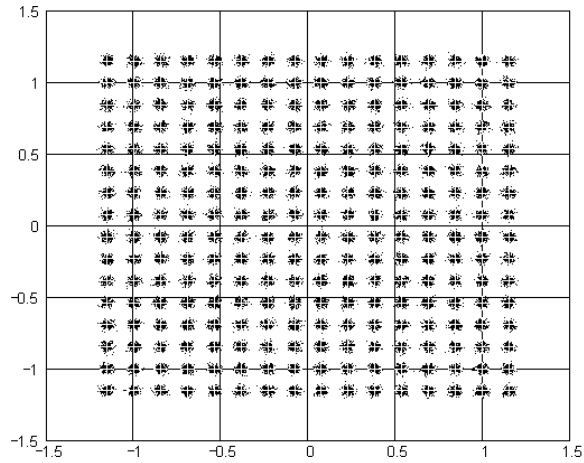


Fig. 6.3b:  $\Psi$  (CONC)

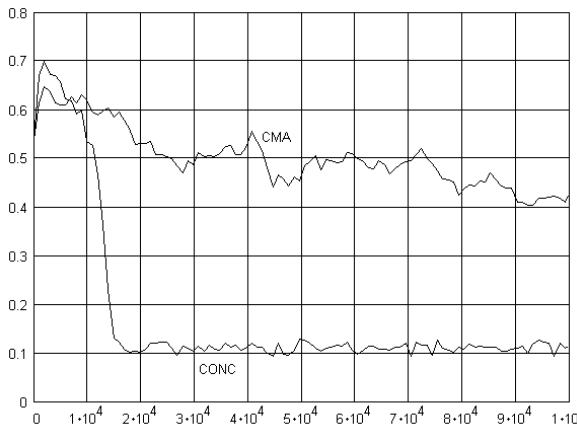


Fig. 6.3c: ISI( $i$ )

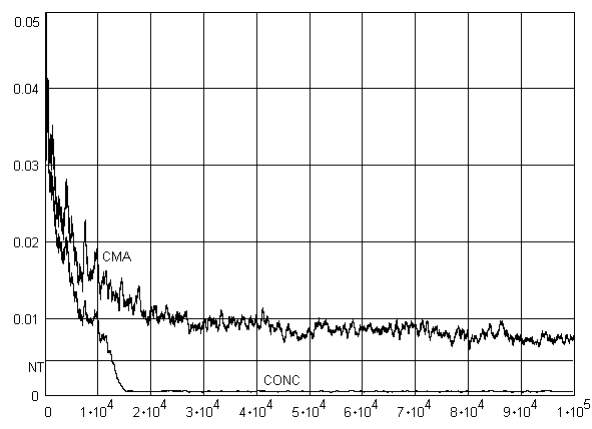


Fig. 6.3d: MSE( $i$ )

Figura 6.3: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal C1, modulação 256-QAM ( $\gamma=1.395295$ ), SNR=35dB. Parâmetros:  $N_a = 100000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-4}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-4}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-3}$ ,  $L = L_c = 128$  e  $\xi = 63$ .

## Modulação 16-QAM SNR=35dB – Canal M4

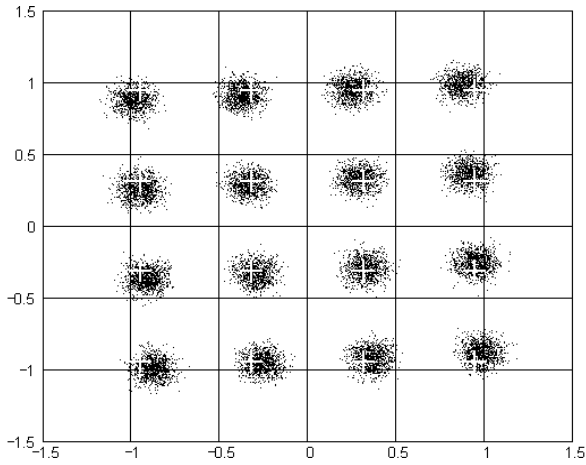


Fig. 6.4a:  $\Gamma$  (CMA)

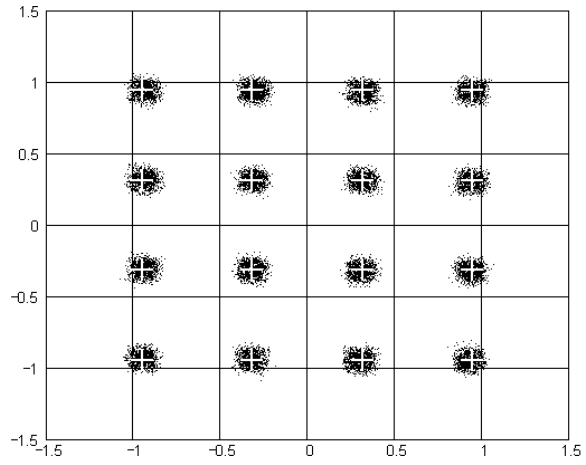


Fig. 6.4b:  $\Psi$  (CONC)

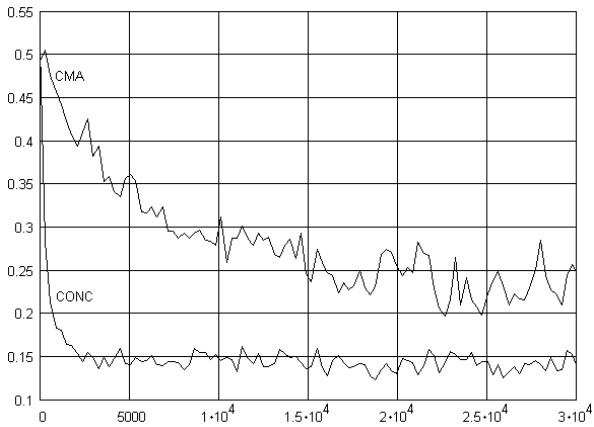


Fig. 6.4c: ISI( $i$ )

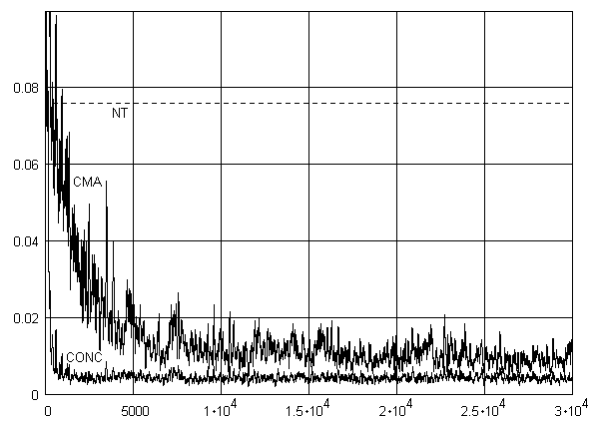


Fig. 6.4d: MSE( $i$ )

Figura 6.4: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M4, modulação 16-QAM ( $\gamma=1.32$ ), SNR=35dB. Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 8$ .

Modulação 64-QAM SNR=35dB – Canal M4

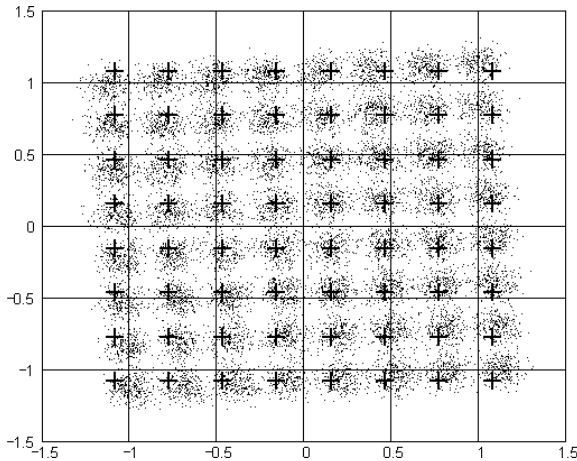


Fig. 6.5a:  $\Gamma$  (CMA)

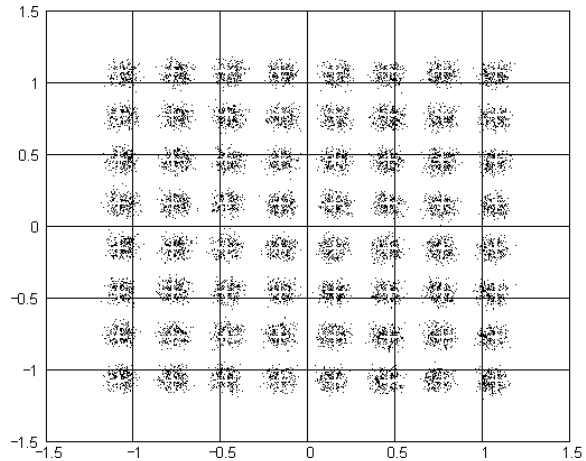


Fig. 6.5b:  $\Psi$  (CONC)

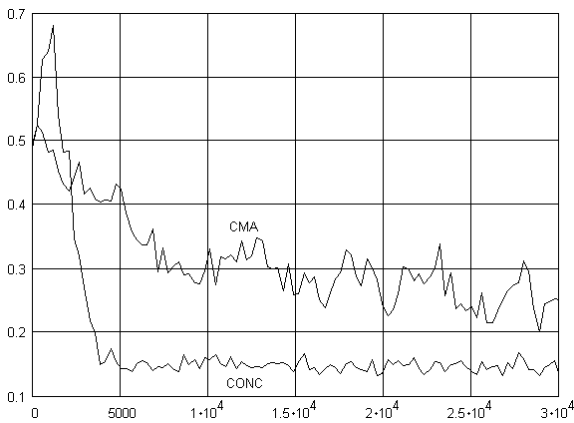


Fig. 6.5c: ISI(*i*)

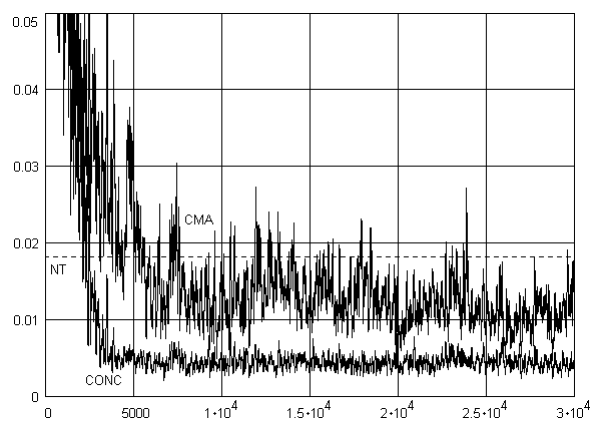


Fig. 6.5d: MSE(*i*)

Figura 6.5: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M4, modulação 64-QAM ( $\gamma=1.380953$ ), SNR=35dB. Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 6$ .

## 6.6 Interpretação dos Resultados

Note-se que, em nenhum dos primeiros três exemplos mostrados (Figuras 6.1, 6.2 e 6.3), o equalizador CMA atinge um MSE suficientemente baixo para que a transferência para o algoritmo DD seja efetuada com sucesso. Estes são casos típicos em que o popular e consagrado equalizador CMA-DD falharia em alcançar seu objetivo. Para os três referidos exemplos, o Equalizador Concorrente não só suplantou o nível de MSE para transferência como atingiu um nível de MSE muito menor e mais invariante do que o atingido pelo equalizador CMA, como pode ser comprovado nos gráficos de  $MSE(i)$  mostrados nas Figuras 6.1d, 6.2d e 6.3d. A mesma observação vale para o ISI comparativo entre os equalizadores, conforme pode ser verificado nos gráficos de  $ISI(i)$  mostrados nas Figuras 6.1c, 6.2c e 6.3c.

O Equalizador Concorrente ultrapassa a performance do equalizador CMA mesmo naquelas situações em que o CMA atinge o MSE de transferência, como, por exemplo, é mostrado na Figura 6.4 para modulação 16-QAM. Observa-se também que, para o mesmo canal e para modulação 64-QAM, o equalizador CMA atinge um MSE de regime apenas marginal, conforme mostra a Figura 6.5.

Esta habilidade do Equalizador Concorrente em atingir, sob mesma situação operacional, uma condição mais próxima da condição ZF do que o equalizador CMA permite que o Equalizador Concorrente seja utilizado para desconvoluir canais com sinalização mais densa do que o CMA permite. Assim, o Equalizador Concorrente possibilitará um aumento na velocidade de transmissão para aqueles sistemas digitais que têm sua velocidade máxima restrita pela operação do equalizador CMA.



## 6.7 Desempenho com Canal Dinâmico

No conjunto de simulações que segue, o desempenho do Equalizador Concorrente é avaliado com referência ao equalizador CMA, ambos operando sob variação temporal no canal, situação que caracteriza a operação sob canal dinâmico.

O objetivo deste estudo é determinar a sensibilidade de ambos equalizadores com relação à velocidade de variação do canal. Para tanto, a análise que segue baseia-se nos canais sugeridos por M. Gosh em *Blind Decision Feedback Equalization for Terrestrial Television Receivers* [43], cujo trabalho estuda o sistema de televisão digital ATSC 8-VSB proposto pela *Advanced Television Systems Committee* [5] quanto ao desempenho de equalização.

### 6.7.1 O Sistema ATSC 8-VSB

O sistema digital ATSC 8-VSB foi proposto em 1993 pela Zenith, entre outras companhias, visando substituir o veterano sistema analógico NTSC para *broadcast* de sinais de televisão. Utilizando o mesmo canal com largura de 6MHz do sistema NTSC, o ATSC 8-VSB foi concebido para que apresente performance superior, mesmo sob altos níveis de interferência, ruído e efeitos de *multipath* [4].

Como esta tese considera todos os sinais em banda base, já que assume sincronismo de portadora e sincronismo de símbolo, para efeito deste estudo é suficiente utilizar como fonte de informação o gerador do alfabeto 8-VSB dado por  $A = \{-1.53, -1.09, -0.66, -0.22, 0.22, 0.66, 1.09, 1.53\}$  para representação das oito possíveis amplitudes de sinal (8-PAM) geradas em banda base por um transmissor 8-VSB. Visto que o codificador de canal do transmissor ATSC 8-VSB “randomiza” com distribuição

uniforme o sinal de banda base por questões de eficiência espectral [17], a fonte  $s$  apresenta distribuição probabilística uniforme com independência estatística entre amostras. Note também, da definição do alfabeto  $A$ , que a variância de  $s$  é unitária. Assume-se variância unitária para  $s$  como representação parcial do efeito do sistema de CAG presente em qualquer sistema digital.

## 6.7.2 Modelo de Canal

O modelo de canal dinâmico adotado neste estudo é o sugerido em [43] e encontra-se especificado na Tabela 6.1.

| Componentes do Sinal Recebido | Amplitude  | Atraso [ $\mu$ s] | Atraso [amostras] |
|-------------------------------|--|-------------------|-------------------|
| Raio Principal:               | 1.000  | 0.00              | 39                |
| Eco 1:                        | 0.100  | -1.80             | 0                 |
| Eco 2:                        | 0.100  | 0.15              | 42                |
| Eco 3:                        | $0.316 \sin\left(2\pi n \frac{f}{F_s}\right), f > 0$<br>$0.316, f = 0$ | 1.80              | 77                |
| Eco 4:                        | 0.200  | 5.70              | 161               |
| Eco 5:                        | 0.126  | 18.0              | 426               |

Tabela 6.1: Especificação do modelo de canal dinâmico adotado. A coluna “Atraso [amostras]” é obtida pela divisão dos valores na coluna “Atraso [ $\mu$  s]” pelo intervalo de amostragem fracionária  $T/2$  do receptor, onde  $1/T = F_s = 10.76\text{MHz}$  é a razão de amostragem dos símbolos no transmissor ATSC 8-VSB [5][4], considerando como amostra de índice 0 aquela com menor atraso. A variável inteira  $n$  representa o índice do  $n$ -ésimo regressor de canal recebido, ou o índice do  $n$ -ésimo símbolo enviado pelo transmissor, e, portanto, apresenta espaçamento temporal  $T$  associado ao intervalo entre as amostras indexadas. A constante real  $f$  representa a velocidade de variação temporal para cada tipo de canal dinâmico a ser considerado. Por exemplo,  $0.05\text{Hz} < f < 0.5\text{Hz}$  modela canais dinâmicos resultantes da reflexão de sinal por um alto edifício cuja estrutura esteja balançando em sua frequência natural de oscilação mecânica (por ação do vento, etc...), e  $2\text{Hz} < f < 5\text{Hz}$  modela canais com desvanecimento rápido e periódico (*flutter*) gerados pela reflexão de sinal por aeronaves em movimento e em baixa altitude [43].

Portanto, da Tabela 6.1, a resposta impulsiva obtida por amostragem fracionária  $T/2$  do canal dinâmico em questão tem sua representação no domínio  $z$  dada por

$$C(z) = 0.1 + 1.0z^{-39} + 0.1z^{-42} + 0.316 \sin\left(2\pi n \frac{f}{F_s}\right) z^{-77} + 0.2z^{-161} + 0.126z^{-426}. \quad (6.1)$$

O sistema ATSC 8-VSB inclui um filtro de banda base (filtro de Nyquist) do tipo *raised-cosine* com um *roll-off* de 11.5% [5][43]. Como este filtro afeta o sinal de banda base, o modelo de canal a ser considerado deve incluir o efeito deste filtro na avaliação de desempenho do equalizador. O filtro *raised-cosine* do sistema ATSC 8-VSB é um filtro analógico que apresenta função de transferência  $H(f)$  conforme Figura 6.6.

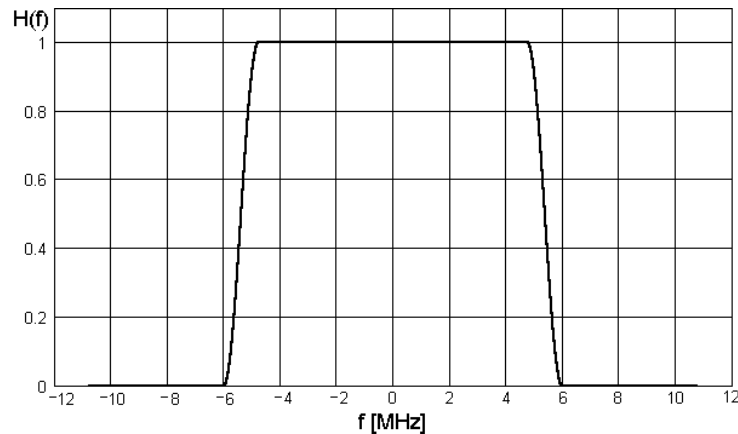


Figura 6.6: Representação gráfica da função de transferência  $H(f)$  do filtro *raised-cosine* do sistema ATSC 8-VSB.

A resposta impulsiva discreta obtida por amostragem fracionária  $T/2$  da resposta impulsiva contínua de filtro analógico definido pelo gráfico da Figura 6.6 é dada pela Equação (6.2) e é representada graficamente na Figura 6.7. A Figura 6.8 representa a resposta discreta ao degrau unitário do referido filtro, obtida sob mesmas condições.

$$h_{rc}(i) = \frac{1}{2} \operatorname{sinc} \left( \frac{\pi \left( i - \frac{N}{2} \right)}{2} \right) \left[ \frac{\cos \left( \frac{\alpha \pi \left( i - \frac{N}{2} \right)}{2} \right)}{1 - \left( \alpha \left( i - \frac{N}{2} \right) \right)^2} \right], \quad i = 0, 1, \dots, N-1 \quad (6.2)$$

Na Equação (6.2)  $N = 64$  é o número de amostras consideradas neste estudo para a resposta impulsiva  $h_{rc}(i)$ , e  $\alpha = 0.115$  é o parâmetro que define o *roll-off* de 11.5% do filtro no domínio frequência. A variável inteira  $i$  representa o índice da  $i$ -ésima amostra recebida do canal e, portanto, apresenta espaçamento temporal  $T/2$  associado ao intervalo entre as amostras indexadas.

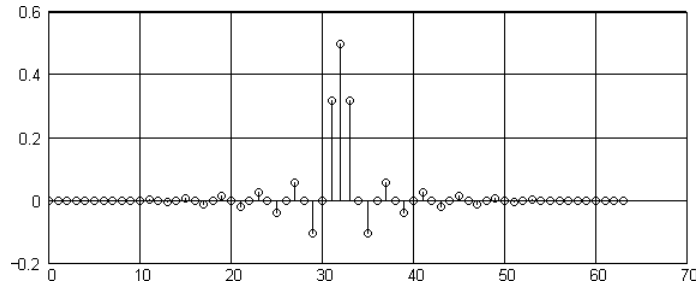


Figura 6.7: Gráfico de  $h_{rc}(i)$  para  $N = 64$  e  $\alpha = 0.115$ .

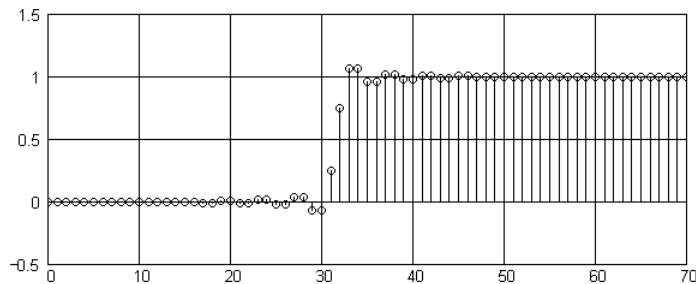


Figura 6.8: Gráfico da resposta discreta ao degrau do filtro analógico definido pelo gráfico da Figura 6.6 para  $N = 64$  e  $\alpha = 0.115$ , obtido sob amostragem fracionária  $T/2$  da resposta contínua.

No conjunto de simulações que segue, o efeito do filtro *raised-cosine* é incluído efetuando-se a convolução da resposta impulsiva do canal definida por (6.1) com a resposta impulsiva do filtro *raised-cosine* dada por (6.2). Portanto, a dimensão  $L_c$  da dispersão do canal global – incluindo o efeito do filtro *raised-cosine* – é dada pela soma da dimensão da dispersão do canal com a dimensão  $N$  da dispersão do filtro, isto é,  $L_c = 427 + 64 = 491$ .

### 6.7.3 Resultados Experimentais

Os critérios de desempenho adotados baseiam-se nos seguintes resultados de simulação:

- 1- Gráfico da saída  $y_{CMA}(n)$  do equalizador CMA, onde  $n$  é o índice do  $n$ -ésimo regressor de canal recebido, tendo como referência a constelação do alfabeto  $A$  da fonte, sendo  $A$  representado no gráfico pelo conjunto de retas tracejadas.
- 2- Gráfico da saída  $y_{CONC}(n)$  do Equalizador Concorrente, tendo como referência a constelação do alfabeto  $A$  da fonte, sendo  $A$  representado no gráfico pelo conjunto de retas tracejadas.
- 3- Gráfico da curva  $MSE_{CMA}(n)$  do equalizador CMA, sendo  $MSE_{CMA}(n)$  o erro médio quadrático entre a saída  $y_{CMA}(n)$  e  $Q\{y_{CMA}(n)\}$ ,  $Q\{\cdot\}$  é o operador que representa o quantizador 8-VSB, considerando-se para a média o intervalo de amostras que inclui o instante  $n$  e as  $L_c - 1$  amostras anteriores ao mesmo. Adicionalmente, este gráfico mostra a reta horizontal NT que define o nível de MSE máximo permissível para que a transferência para o algoritmo DD seja possível.
- 4- Gráfico da curva  $MSE_{CONC}(n)$  do Equalizador Concorrente, sendo  $MSE_{CONC}(n)$  o erro médio quadrático entre a saída  $y_{CONC}(n)$  e  $Q\{y_{CONC}(n)\}$ , considerando-se para a média

o intervalo de amostras que inclui o instante  $n$  e as  $L_c - 1$  amostras anteriores ao mesmo. Adicionalmente, este gráfico também mostra a reta horizontal NT.

Adotou-se SNR= 100dB visto que o objetivo é medir a sensibilidade do equalizador às variações de canal e não a sensibilidade ao ruído. Como o canal varia, considerou-se ser razoável adotar uma dimensão do equalizador  $L$  que exceda em 50% a dimensão  $L_c = 491$  da dispersão do canal global, isto é, adotou-se  $L = 738$ . A inicialização do vetor  $\underline{V}$ , tanto para o equalizador CMA como para o Equalizador Concorrente, segue a usual técnica *single spike*, que, neste estudo, consistiu em inicializar  $\underline{V}$  com o valor 1.0 na posição  $\xi = 65$ , mantendo nulos os elementos nas demais posições. Os passos de adaptação foram fixados em  $\eta = 2 \times 10^{-4}$  para o equalizador CMA e em  $\eta_v = 2 \times 10^{-4}$  e  $\eta_w = 2 \times 10^{-3}$  para o Equalizador Concorrente.

Seguem as simulações do desempenho comparativo entre os algoritmos CMA e Concorrente operando sob canal dinâmico para as velocidades de variação  $f = 0Hz$  (canal estático),  $f = 10Hz$ ,  $f = 20Hz$ ,  $f = 50Hz$  e  $f = 100Hz$ .

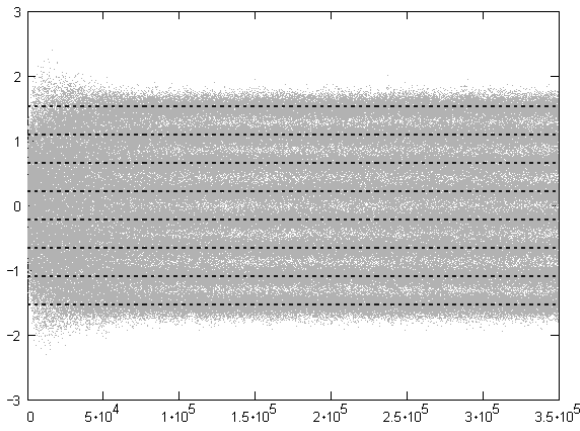


Fig. 6.9a:  $y_{CMA}(n)$

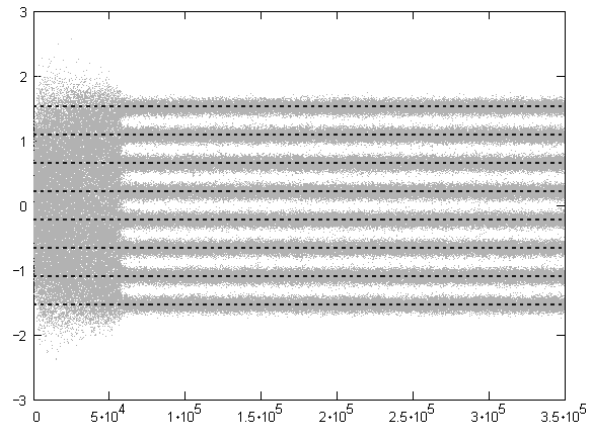


Fig. 6.9b:  $y_{CONC}(n)$

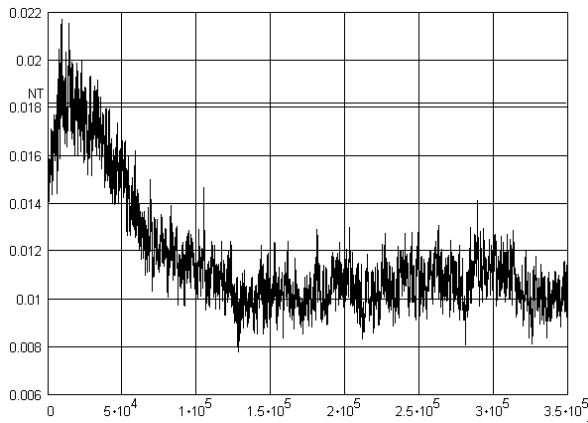


Fig. 6.9c:  $MSE_{CMA}(n)$

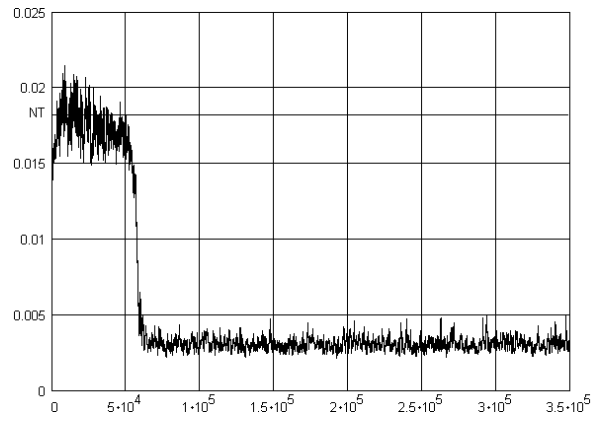


Fig. 6.9d:  $MSE_{CONC}(n)$

Figura 6.9: Resultados comparativos entre o equalizador *CMA* e o Equalizador Concorrente (*CONC*) para o canal especificado na Tabela 6.1 com  $f = 0Hz$ , incluindo o efeito do filtro *raised-cosine*.

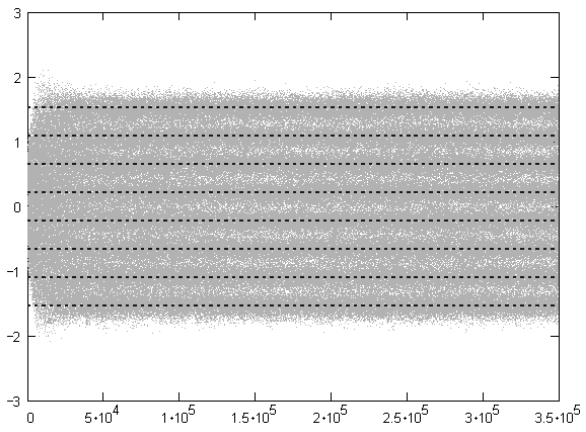


Fig. 6.10a:  $y_{CMA}(n)$

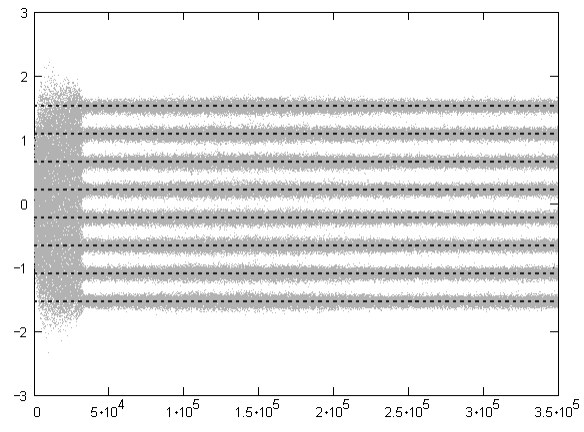


Fig. 6.10b:  $y_{CONC}(n)$

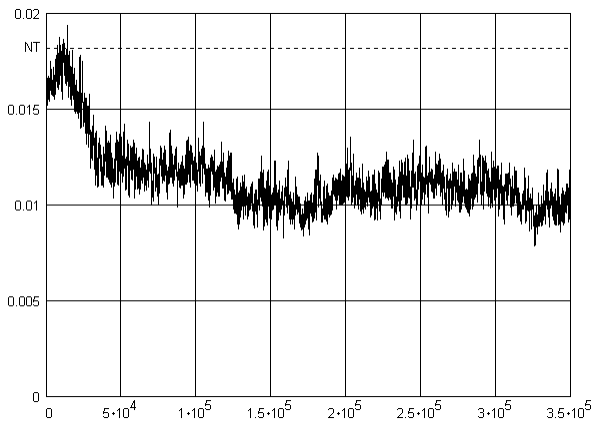


Fig. 6.10c:  $MSE_{CMA}(n)$

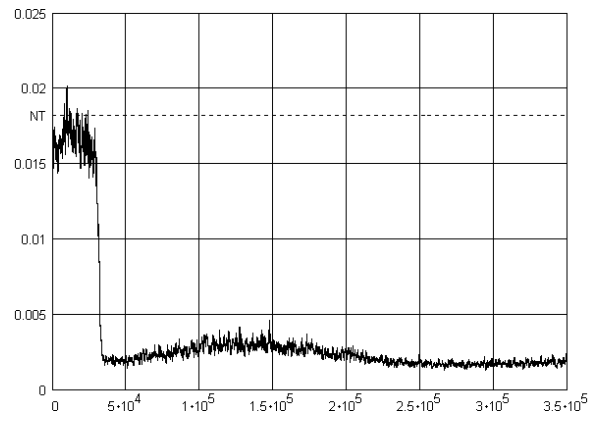


Fig. 6.10d:  $MSE_{CONC}(n)$

Figura 6.10: Resultados comparativos entre o equalizador *CMA* e o Equalizador Concorrente (*CONC*) para o canal especificado na Tabela 6.1 com  $f = 10Hz$ , incluindo o efeito do filtro *raised-cosine*.



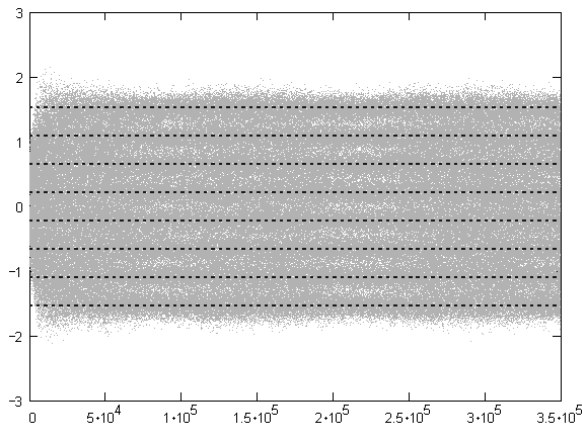


Fig. 6.11a:  $y_{CMA}(n)$

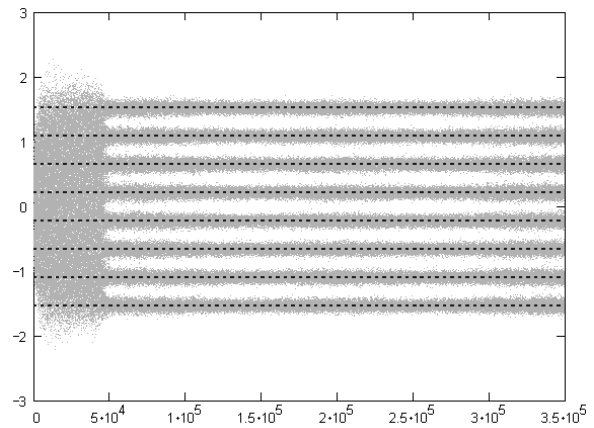


Fig. 6.11b:  $y_{CONC}(n)$

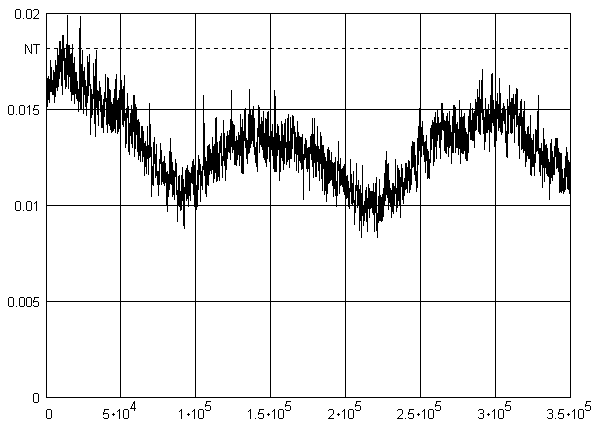


Fig. 6.11c:  $MSE_{CMA}(n)$

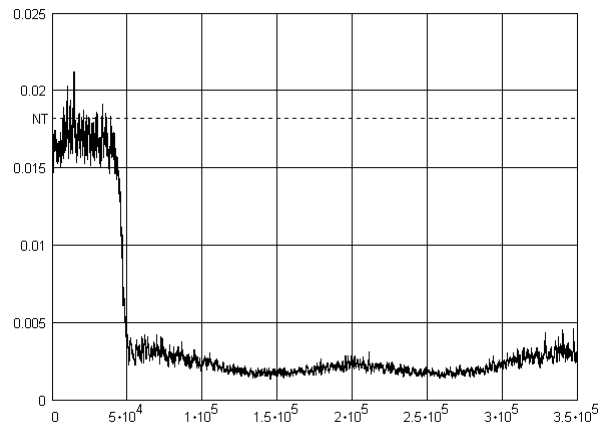


Fig. 6.11d:  $MSE_{CONC}(n)$

Figura 6.11: Resultados comparativos entre o equalizador *CMA* e o Equalizador Concorrente (*CONC*) para o canal especificado na Tabela 6.1 com  $f = 20Hz$ , incluindo o efeito do filtro *raised-cosine*.

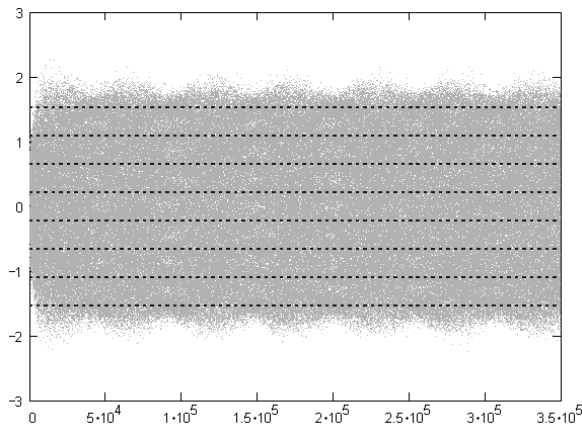


Fig. 6.12a:  $y_{CMA}(n)$

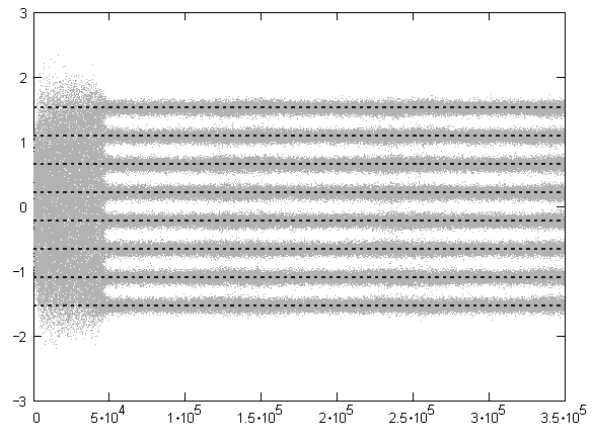


Fig. 6.12b:  $y_{CONC}(n)$

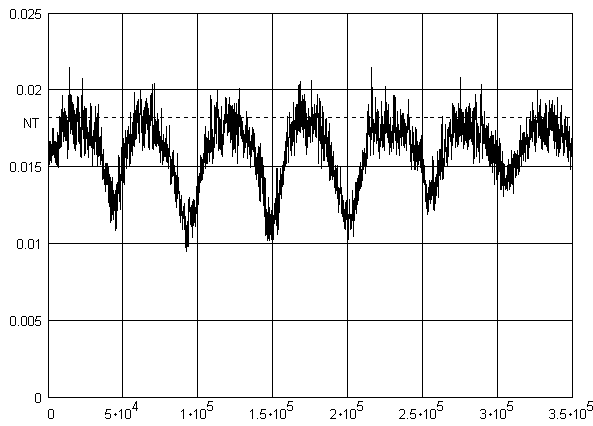


Fig. 6.12c:  $MSE_{CMA}(n)$

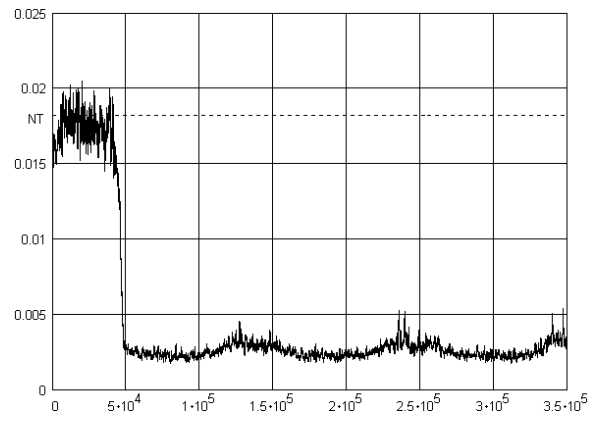


Fig. 6.12d:  $MSE_{CONC}(n)$

Figura 6.12: Resultados comparativos entre o equalizador *CMA* e o Equalizador Concorrente (*CONC*) para o canal especificado na Tabela 6.1 com  $f = 50Hz$ , incluindo o efeito do filtro *raised-cosine*.

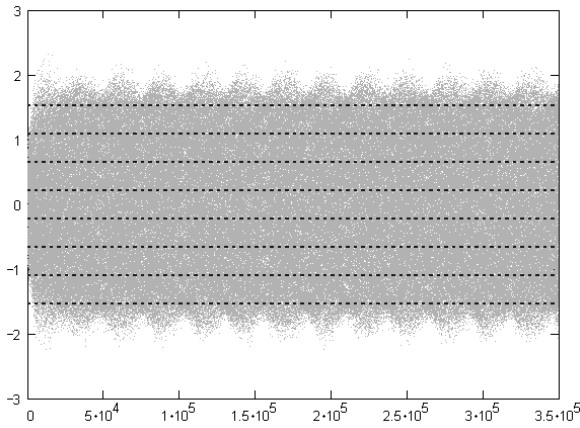


Fig. 6.13a:  $y_{CMA}(n)$

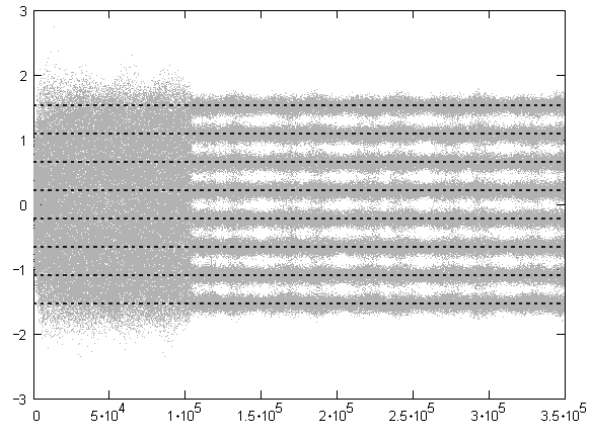


Fig. 6.13b:  $y_{CONC}(n)$

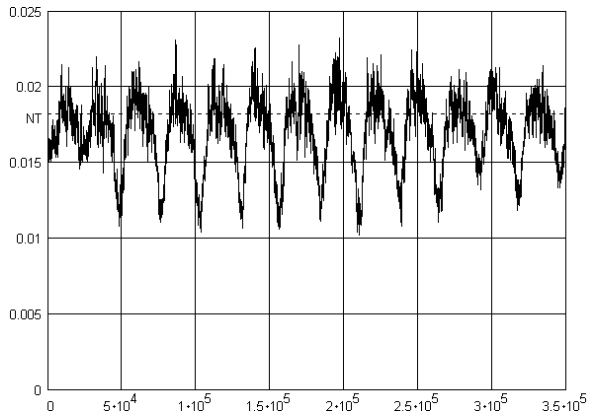


Fig. 6.13c:  $MSE_{CMA}(n)$

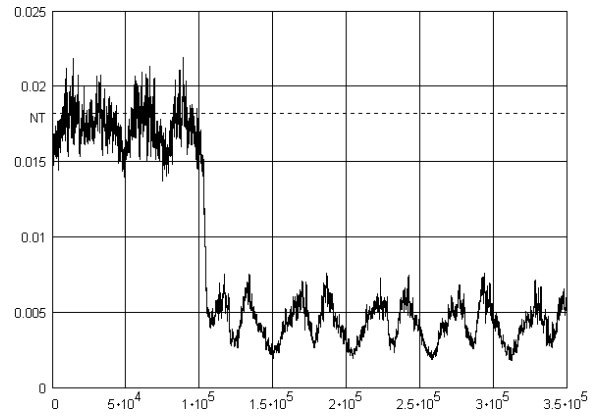


Fig. 6.13d:  $MSE_{CONC}(n)$

Figura 6.13: Resultados comparativos entre o equalizador *CMA* e o Equalizador Concorrente (*CONC*) para o canal especificado na Tabela 6.1 com  $f = 100\text{Hz}$ , incluindo o efeito do filtro *raised-cosine*.

## 6.7.4 Interpretação dos Resultados

Assim como os resultados obtidos sob operação com os canais invariantes no tempo descritos no Capítulo 3, os resultados experimentais apresentados na Seção 6.7.3 demonstram que o Equalizador Concorrente apresenta desempenho também superior ao do equalizador CMA na tarefa de desconvoluir canais que apresentam variações temporais rápidas.

Note que, ao contrário do Equalizador Concorrente, para  $f = 50\text{Hz}$  e  $f = 100\text{Hz}$  o equalizador CMA não consegue atingir e manter o nível de MSE necessário para a transferência ao algoritmo DD. Note também que, para todos os casos, o nível de MSE de regime atingido pelo Equalizador Concorrente é muito menor e mais invariante quando comparado ao atingido pelo equalizador CMA.

Estes resultados sugerem que o Equalizador Concorrente poderá contribuir para a melhora do desempenho de sistemas digitais móveis. Por exemplo, o mercado de telecomunicações vem apresentando uma alta razão de crescimento da demanda por maior complexidade – e portanto volume – de informação a ser transmitida. O sistema de 3ª Geração de Telefonia Celular baseado no conceito de "*software radio*" – em fase de desenvolvimento por vários fabricantes – é um exemplo típico desta demanda.

Para que esta maior demanda por volume de informação possa ser atendida, uma possível solução seria aumentar a densidade de símbolos da constelação do sistema, visto que uma constelação mais densa permitirá que a velocidade de transmissão não seja reduzida pela maior complexidade da informação (entropia). No entanto, uma constelação mais densa apresenta maior semelhança entre os símbolos. Isto se torna um sério problema para a performance do sistema quando o canal é dispersivo e variante no tempo, porque uma pequena ISI já é suficiente para tornar os símbolos ininteligíveis. Assim, a melhora de desempenho atingida pelo Equalizador Concorrente sob canal variante no tempo viabiliza o uso de constelações mais densas e um conseqüente aumento na velocidade de transmissão.

# Capítulo 7

## Conclusão

Esta dissertação propôs o Equalizador Concorrente como uma possível solução para as dificuldades de convergência do clássico equalizador CMA-DD, quando sob operação com constelações densas e/ou canais práticos de difícil desconvolução.

Para vários canais encontrados na prática, em que o equalizador CMA não atinge um MSE suficientemente baixo para que a transferência para o algoritmo DD seja efetuada com sucesso (casos típicos em que o popular equalizador CMA-DD falha em alcançar seu objetivo), o Equalizador Concorrente não só suplantou o desempenho necessário para a transferência, atingindo níveis de MSE inferiores ao nível necessário para a transferência, como atingiu um nível de ISI muito menor do que o equalizador CMA.

Mesmo nas situações em que o CMA conseguiu atingir o MSE de transferência, o Equalizador Concorrente ultrapassou o desempenho do equalizador CMA. Para estas situações, não só os níveis de MSE e ISI de regime alcançados pelo Equalizador Concorrente são consideravelmente menores e mais estáveis (estável no sentido de invariante) do que os alcançados pelo equalizador CMA, como também a velocidade de convergência do Equalizador Concorrente é maior.

Esta habilidade do Equalizador Concorrente em atingir, sob mesma situação operacional, uma condição mais próxima da condição *zero-forcing* do que o equalizador CMA, permite que o Equalizador Concorrente seja utilizado para desconvoluir canais com sinalização mais densa do que o CMA permite. Assim, o Equalizador Concorrente permitirá um aumento na velocidade de transmissão para aqueles sistemas digitais que têm sua velocidade máxima restrita pela operação do equalizador CMA.

Ainda, a menos que o giro imposto pelo canal à constelação original seja maior em valor absoluto do que um limiar dependente da densidade da constelação, o Equalizador

Concorrente soluciona, em geral, o problema da incerteza de fase inerente à Função de Custo de Godard. Isto evita a necessidade do subsistema adicional para correção do giro da constelação de saída, usualmente utilizado para solução deste problema.

Quanto à tarefa de desconvoluir canais variantes no tempo, os resultados experimentais demonstram que, também para este caso, o Equalizador Concorrente apresenta performance superior à do equalizador CMA. Estes resultados indicam que o Equalizador Concorrente poderá contribuir para a melhora do desempenho de sistemas digitais móveis.

Sugere-se que futuros trabalhos venham a incluir os efeitos da distribuição estatística e do grau de correlação da fonte no desempenho do Equalizador Concorrente, assim como o estudo sobre a habilidade do novo método em reduzir o erro de propagação em equalizadores DFE (*Decision Feedback Equalizers*).

# Referências Bibliográficas

- [1] A. B. Carlson, *Communication Systems*, McGraw-Hill, 1965.
- [2] A. G. Kandoian, H. P. Westman et. al., *Reference Data for Radio Engineers – ITT*, 6<sup>th</sup> ed., Howard W. Sams, 1981.
- [3] A. N. Tijonov e A. A. Samarsky, *Ecuaciones de La Fisica Matematica*, Editorial Mir, Moscow, URSS, 1980.
- [4] ATSC Document A/54, *Guide to the Use of the ATSC Digital Television Standard*.
- [5] ATSC Standard A/53, *ATSC Digital Television Standard*.
- [6] B. Widrow, J. McCool e M. Ball, “The Complex LMS Algorithm”, *Proceedings of IEEE*, vol. 63, no. 4, pp. 719-720, Abril 1975.
- [7] C. B. Papadias e D. T. M. Slock, “Normalized Sliding Window Constant Modulus and Decision-Directed Algorithms: A Link Between Blind Equalization and Classical Adaptive Filtering”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 45, no. 1, pp. 231-235, Janeiro 1997.
- [8] C. R. Johnson Jr. e B. D. O. Anderson, “Godard Blind Equalizer Error Surface Characteristics: White Zero-Mean Binary Case”, *International Journal of Adaptive Control & Signal Processing*, vl. 9, pp. 301-324, Agosto 1995.
- [9] C. R. Johnson Jr., H. J. Lee, J. P. LeBlanc, T. J. Endres, et al., “On Fractionally-Spaced Equalizer Design for Digital Microwave Radio Channels”, *Proc. Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, pp. 290-294, Pacific Grove, California, USA, Outubro 1995.
- [10] C. R. Johnson, Jr. et.al., "On Fractionally-Spaced Equalizer Design for Digital Microwave Radio Channels," *Proc. of the 29th Asilomar Conference*, Pacific Grove, CA, Novembro 1995.
- [11] Chi-Tsong Chen, *Linear System Theory and Design*, Harcourt Brace College Publishers, 1984.
- [12] D. Gesbert, P. Duhamel e S. Mayrargue, “Blind Multichannel Adaptive MMSE Equalization with Controlled Delay”, *Proc. Signal Processing Workshop on Statistical Signal and Array Processing*, pp. 172-175, Corfu, Grécia, Junho 1996.
- [13] D. N. Godard, “Self-Recovering Equalization and Carrier Tracking in Two-Dimensional Data Communication Systems”, *IEEE Transactions on Communications*, vol. COM-28, no. 11, Novembro 1980.
- [14] E. I. Jury, *Inners and Stability of Dynamic Systems*, 2<sup>nd</sup> ed., R.E. Publishing Company, 1982.

- [15] E. Moulines, P. Duhamel, J. Cardoso e S. Mayrargue, “Subspace Methods for Blind Identification of Multichannel FIR Filters”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 43, no. 2, pp. 516-525, Fevereiro 1995.
- [16] Erwin Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, John Wiley & Sons, 1967.
- [17] F. C. C. De Castro, M. C. F. De Castro, M. A. C. Fernandes and D. S. Arantes, “8-VSB Channel Coding Analysis for DTV Broadcast”, *IEEE Transactions on Consumer Electronics*, vol. 46, no. 3, pp. 539-547, Agosto 2000.
- [18] F. J. Ross e D. P. Taylor., “An Enhancement to Blind Equalization Algorithms”, *IEEE Transactions on Communications*, vol. 39, no. 5, pp. 636-639, Maio 1991.
- [19] G. D. Forney Jr., “Maximum likelihood sequence estimation of digital sequences in the presence of inter symbol interference”, *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 18, no. 3, pp. 989-995, Maio 1972.
- [20] G. D. Forney Jr., “The Viterbi Algorithm”, *Proceeding of the IEEE*, vol. 61, no. 3, pp. 268-278, Março 1973.
- [21] G. Giannakis e S. Halford, “Blind Fractionally-Spaced Equalization of Noisy FIR Channels: Optimal and Adaptive Solutions”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, submetido em Abril 1995.
- [22] G. J. Foschini, “Equalizing Without Altering or Detecting Data”, *AT&T Technical Journal*, vol. 64, no. 9, Outubro 1985.
- [23] G. Picchi e G. Prati, “Blind Equalization and Carrier Recovery Using a Stop-and-Go Decision-Directed Algorithm”, *IEEE Transactions on Communications*, vol. COM-35, no. 9, pp. 877-887, Setembro 1987.
- [24] G. Ungerboeck, “Fractional Tap-Spacing Equalizer and Consequences for Clock Recovery in Data Modems”, *IEEE Transactions on Communications*, vol. COM-24, no. 8, Agosto 1976.
- [25] G. Xu, H. Liu, L. Tong, T. Kailath, “A Least-Squares Approach to Blind Channel Identification”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 43, no. 12, pp. 2982-2993, Dezembro 1995.
- [26] Gardner, *Phase-lock Techniques*, 2<sup>nd</sup> ed., John Wiley & Sons, 1979.
- [27] Gene H. Golub e Charles F. Van Loan , *Matrix Computations*, 3<sup>rd</sup> ed., John Hopkins University Press, 1996.
- [28] H. Jasik, *Antenna Engineering Handbook*, McGraw-Hill, 1961.
- [29] I. Cha e S. Kassam, “Channel Equalization Using Adaptive Complex Radial Basis Function Networks”, *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 13, no. 1, pp. 122-131, Janeiro 1995.
- [30] I. Fijalkow, “Multichannel Equalization Lower Bound: A Function of Channel Noise and Disparity”, *Proc. Signal Processing Workshop on Statistical Signal and Array Processing*, pp. 344-347, Corfu, Grécia, Junho 1996.



- [31] J. Balakrishnan, "Mitigation of Error Propagation in Decision Feedback Equalization", *M.S. Thesis*, Cornell University, Ithaca, New York, USA, Agosto 1999.
- [32] J. K. Tugnait, "On Blind Identifiability of Multipath Channels Using Fractional Sampling and 2<sup>nd</sup> Order Cyclostationarity Statistics", *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 41, no. 1, pp. 308-311, 1995.
- [33] J. P. LeBlanc, "Effects of Source Distributions and Correlation on Fractionally Spaced Blind Constant Modulus Algorithm Equalizers", *Ph.D. Thesis*, Cornell University, Ithaca, New York, USA, Agosto 1995.
- [34] J. R. Treichler, I. Fijalkow e C.R. Johnson Jr., "Fractionally-Spaced Equalizers: How Long Should They Really Be?", *Signal Processing Magazine*, vol. 13, no. 3, pp. 65-81, Maio 1996.
- [35] J. R. Treichler, I. Fijalkow, C. R. Johnson, Jr., "Fractionally Spaced Equalizers: How Long Should They Really Be?" *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 13, No. 3, pp. 65-81, Maio 1996.
- [36] J. R. Treichler, M. G. Agee, "A New Approach to Multipath Correction of Constant Modulus Signals", *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, Abril 1983.
- [37] John G. Proakis, *Digital Communications*, 3<sup>rd</sup> ed., McGraw-Hill, 1995.
- [38] K. Abed-Merain, P. Duhamel, D. Gesbert, P. Loubaton, S. Mayrargue, E. Moulines e D. Slock, "Prediction Error Methods for Time-Domain Blind Identification of Multichannel FIR Filters", *Proc. International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, pp. 1968-1971, Detroit, USA, Maio 1995.
- [39] L. Tong, G. Xu, B. Hassibi e T. Kailath, "Blind Channel Identification Based on Second-Order Statistics: A Frequency Domain Approach", *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 41, pp. 329-334, Janeiro 1995.
- [40] L. Tong, G. Xu, e T. Kailath, "Blind Channel Identification Based on Second-Order Statistics: A Time Domain Approach", *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 40, no. 2, pp. 340-349, Março 1994.
- [41] Lee Garth, Jian Yang, e Jean-Jacques Werner, "An Introduction to Blind Equalization", *Lucent Technologies*, 1998, <http://www.vdsl.org/main1/frpap.htm>
- [42] M. Dolukhanov, *Propagation of Radio Waves*, Mir Publishers, Moscow, URSS, 1971.
- [43] M. Gosh, "Blind Decision Feedback Equalization for Terrestrial Television Receivers", *Proceedings of IEEE*, vol. 86, no. 10, pp. 2070-2081, Outubro 1998.
- [44] O. Macchi e E. Eweda, "Convergence Analysis of Self-Adaptive Equalizers", *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. IT-30, no. 2, 1984.

- [45] P. M. Embree e B. Kimble, *C Language Algorithms for Digital Signal Processing*, Prentice Hall, 1991.
- [46] P.A. Bello, "Characterization of Randomly Time-Invariant Linear Channels", *IEEE Transactions on Communications Systems*, vol. CS-11 pp. 360-393, Dezembro 1963.
- [47] Papoulis, *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, McGraw-Hill, 1965.
- [48] Q. Zhang, "Using Wavelet Network in Nonparametric Estimation", *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 8, no. 2, pp. 227-236, Março 1997.
- [49] R. A. Casas, "Blind Adaptive Decision Feedback Equalization: A Class of BAD Channels", *M.S. Thesis*, Cornell University, Ithaca, New York, USA, Maio 1996.
- [50] R. A. Kennedy, "Operational Aspects of Decision Feedback Equalizers", *Ph.D. Dissertation*, The Australian National University, Canberra, ACT, Australia, Dezembro 1988.
- [51] R. D. Gitlin e S. B. Weinstein, "Fractionally-Spaced Equalization: An Improved Digital Transversal Equalizer", *Bell Systems Technical Journal*, vol. 60, Fevereiro 1981.
- [52] R. D. Gitlin, J. F. Hayes e S. B. Weinstein, *Data Communications Principles*, Plenum Press, New York, 1992.
- [53] R. Treichler, M. G. Larimore e J. C. Harp, "Practical Implementations of Blind Demodulators", *Applied Signal Technology Inc.*, 1998, <http://www.appsig.com/technews/>
- [54] R. W. Lucky, "Techniques for Adaptive Equalization of Digital Communication Systems", *Bell Systems Technical Journal*, vol. 45, no. 2, pp. 255-286, Fevereiro 1966.
- [55] Robert D. Strum e Donald E. Kirk, *First Principles of Discrete Systems and Digital Signal Processing*, Addison-Wesley, 1989.
- [56] S. Bellini, "Blind Equalization", *Alta Frequenza*, vol. LVII, no. 7, Setembro 1988.
- [57] S. Chen, S. McLaughlin e B. Mulgrew, "Complex-Valued Radial Basis Function Network, Part I: Network Architecture and Learning Algorithms", *Signal Processing*, vol. 35, pp 19-31, 1994.
- [58] S. Chen, S. McLaughlin e B. Mulgrew, "Complex-Valued Radial Basis Function Network, Part I: Application to Digital Communications Channel Equalisation", *Signal Processing*, vol 36, pp 175-188, 1994.
- [59] S. Haykin, *Blind Deconvolution*, Prentice-Hall, 1994.
- [60] SPIB - *Signal Processing Information Base* - Base de Dados da Universidade de Rice, Houston, Texas, USA, <http://spib.rice.edu/>.

- [61] Simon Haykin, *Adaptive Filter Theory*, 3<sup>rd</sup> ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1996.
- [62] Simon Haykin, *Neural Networks*, 2<sup>nd</sup> ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1999.
- [63] Simon Haykin, *Unsupervised Adaptive Filtering*, Wiley, New York, 1999.
- [64] T. J. Endres, "Equalizing With Fractionally-Spaced Constant Modulus and Second-Order Statistics Blind Receivers", *Ph.D. Thesis*, Cornell University, Ithaca, New York, USA, Maio 1997.
- [65] T. J. Endres, S. D. Halford, C. R. Johnson, Jr., G. B. Giannakis, "Blind Adaptive Channel Equalization Using Fractionally-Spaced Receivers: A Comparison Study," *Proc. Conf. on Info. Sciences and Systems*, Princeton, NJ, Março 1996.
- [66] V. V. Nikolski, *Electrodinámica y Propagación de Ondas de Radio*, Editorial Mir, Moscow, URSS, 1976.
- [67] V. Weerackody e S. Kassam, "Dual-Mode Type Algorithms for Blind Equalization", *IEEE Transactions on Communications*, vol. 42, no. 1, pp. 22-28, Janeiro 1994.
- [68] W. A. Gardner, "A New Method of Channel Identification", *IEEE Transactions on Communications*, vol. 39, no. 6, pp. 813-817, Junho 1991.
- [69] W. C. Lindsey e M. K. Simon, *Telecommunication Systems Engineering*, New York, Dover Publications Inc. , 1973.
- [70] W. Chung, "Geometrical Understanding of the Constant Modulus Algorithm: Adaptive Blind Equalization and Cross-Polarized Source Separation" , *M.S. Thesis*, Cornell University, Ithaca, New York, USA, Maio 1999.
- [71] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling e B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C*, 2<sup>nd</sup> ed., Cambridge University Press, 1992.
- [72] William I. Orr, *Radio Handbook*, 20<sup>a</sup> ed., Marcombo, Barcelona, Espanha, 1977.
- [73] Y. B. Zeldovich e A. D. Myskis, *Elements of Applied Mathematics*, Mir Publishers, Moscow, URSS, 1976.
- [74] Y. Sato, "A Method of Self-Recovering Equalization for Multilevel Amplitude Modulated Systems", *IEEE Transactions on Communications*, vol. COM-23, no. 6, Junho 1975.
- [75] Z. Ding, R. A. Kennedy, B. D. O. Anderson e C. R. Johnson Jr., "Ill-Convergence of Godard Blind Equalizers in Data Communication Systems", *IEEE Transactions on Communications*, vol. 39, no. 9, pp. 1313-1327, Setembro 1991.

# Apêndice A

## Simulações Compreendendo toda a Base de Dados SPIB

No conjunto de simulações que segue, o desempenho do Equalizador Concorrente é avaliado com referência ao equalizador CMA para todos os canais da base de dados SPIB, descrita no Capítulo 3. Conforme já explicitado no Capítulo 6, os critérios de desempenho adotados baseiam-se nos seguintes resultados de simulação:

- 1- Gráfico da constelação  $\Gamma$  na saída  $y$  do equalizador CMA após a convergência, tendo como referência a constelação do alfabeto  $A$  da fonte, sendo  $A$  representado no gráfico pelo conjunto de símbolos  $\dagger$ .
- 2- Gráfico da constelação  $\Psi$  na saída  $y$  do Equalizador Concorrente após a convergência, tendo como referência a constelação do alfabeto  $A$  da fonte, sendo  $A$  representado no gráfico pelo conjunto de símbolos  $\dagger$ .
- 3- Gráfico comparativo das curvas  $ISI(i)$  para os dois equalizadores,  $i = 0, 2, \dots, N_a - 1$ , onde  $N_a$  é o número total de amostras recebidas por amostragem fracionária  $T/2$  do canal, e  $ISI(i)$  é a medida de “reverberação” no sinal equalizado  $y$  no instante  $i$ , obtida pela Equação (2.24) calculada para este instante.
- 4- Gráfico comparativo das curvas  $MSE(i)$  para os dois equalizadores,  $i = 0, 2, \dots, N_a - 1$ , sendo  $MSE(i)$  o erro médio quadrático entre a saída equalizada  $y$  e a seqüência original transmitida  $s$ , considerando-se para a média o intervalo de amostras que inclui o instante  $i$  e as  $L + L_c - 1$  amostras anteriores ao mesmo. Para simulações com SNR=15dB a curva  $MSE(i)$  considerará para a média o intervalo de  $4(L + L_c)$

amostras anteriores, ao invés de  $L + L_c$ , por questão de comodidade de visualização gráfica. Adicionalmente, este gráfico mostra a reta horizontal NT que define o nível de MSE máximo permissível (ver Tabela 1.1) para que a transferência ao algoritmo DD seja possível.

A seqüência que representa a fonte de informação  $s$  a ser transmitida através do canal possui média zero, variância unitária, distribuição uniforme, e apresenta independência estatística entre amostras.

A avaliação do equalizador para os canais de microondas M1–M15, RR e RU utilizará modulação 16–QAM e 64–QAM. Com modulação 16–QAM a simulação considera SNR=35dB, 25dB e 15dB. Com modulação 64–QAM a simulação considera SNR=35dB e 25dB. Para os canais de TV a cabo C1 e C2 será utilizada modulação 256–QAM com SNR= 100dB e 35dB. O ruído adicionado na entrada do equalizador é Gaussiano, de média zero, espectralmente branco e com variância definida pela SNR.

Objetivando minimizar custo de *hardware*, adotar-se-á  $L = L_c$ , conforme Capítulo 6. A inicialização do vetor  $\underline{V}$ , tanto para o equalizador CMA como para o Equalizador Concorrente, segue a estratégia *single spike*, brevemente descrita no Capítulo 6. O passo de adaptação do filtro do equalizador CMA  $\eta$ , e os passos de adaptação dos filtros do Equalizador Concorrente  $\eta_v$  e  $\eta_w$  são experimentalmente ajustados objetivando atender o compromisso entre rápida convergência e baixo MSE de regime permanente.

## Modulação 16-QAM SNR=35dB – Canal M1

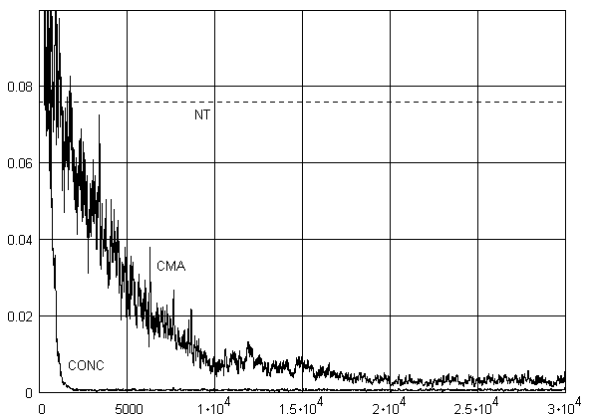
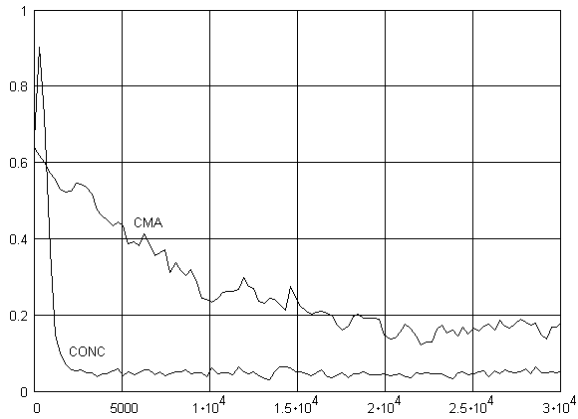
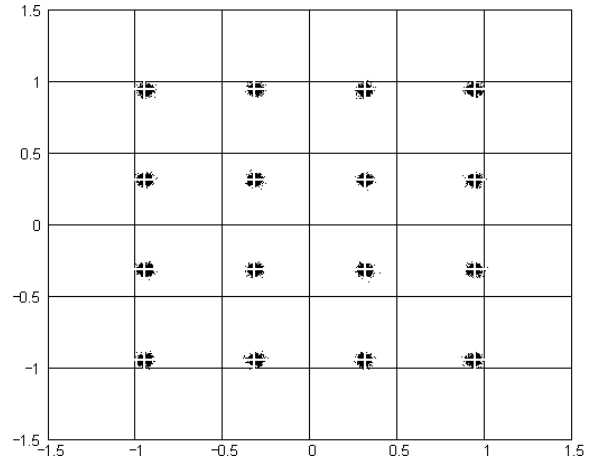
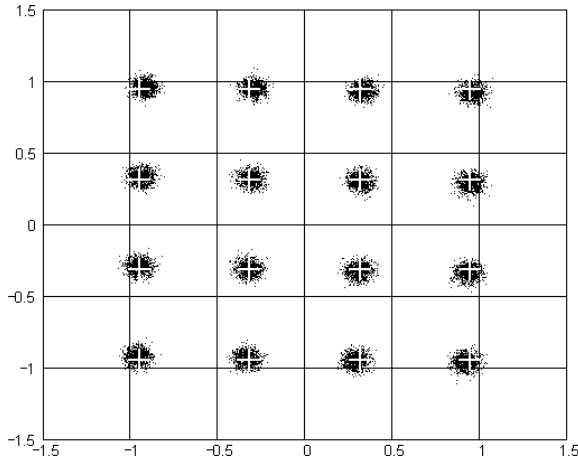


Figura A.1: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M1, modulação 16-QAM ( $\gamma=1.32$ ), SNR=35dB. Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 8$ .

## Modulação 16-QAM SNR=35dB – Canal M2

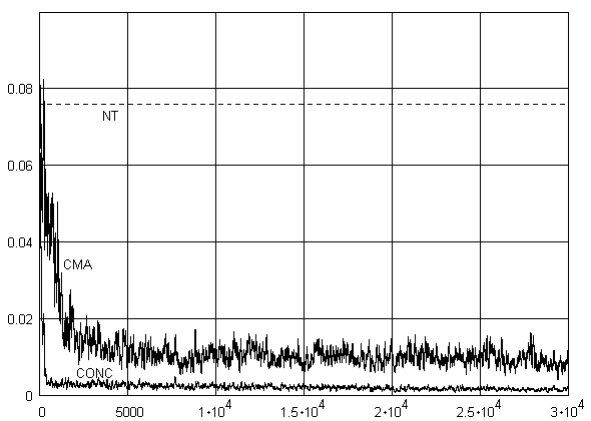
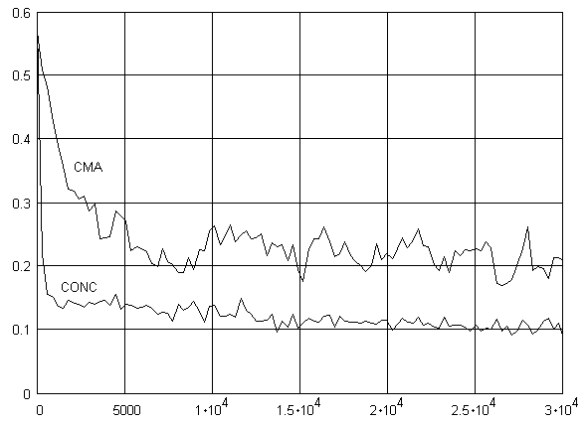
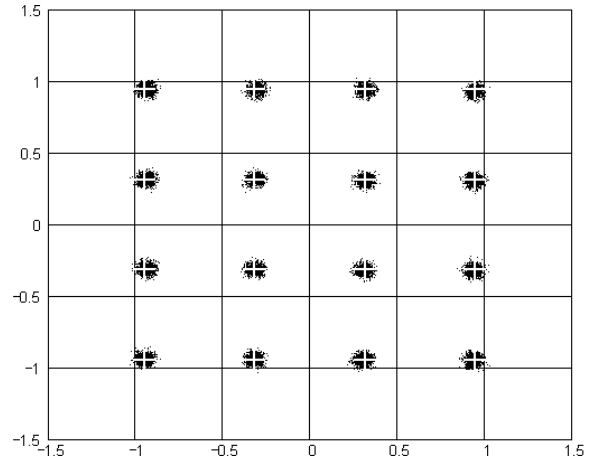
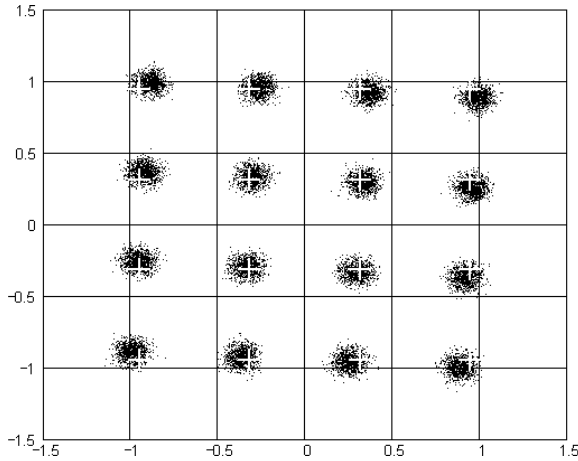


Figura A.2: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M2, modulação 16-QAM ( $\gamma=1.32$ ), SNR=35dB. Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 8$ .

## Modulação 16-QAM SNR=35dB – Canal M3

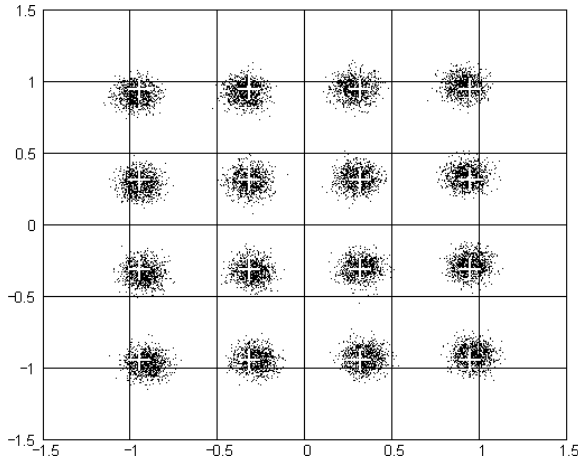


Fig. A.3a:  $\Gamma$  (CMA)

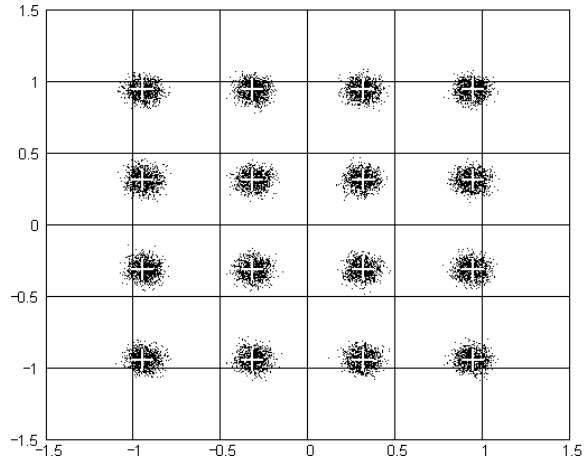


Fig. A.3b:  $\Psi$  (CONC)

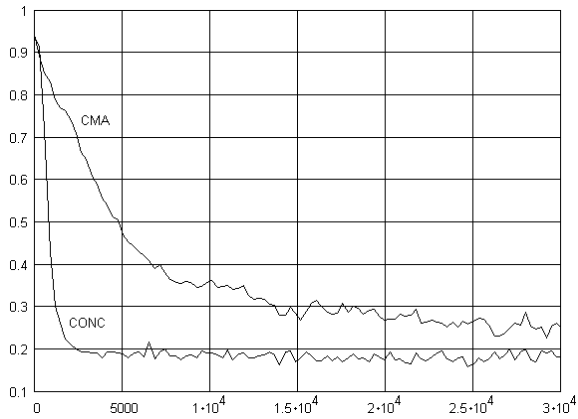


Fig. A.3c: ISI( $i$ )

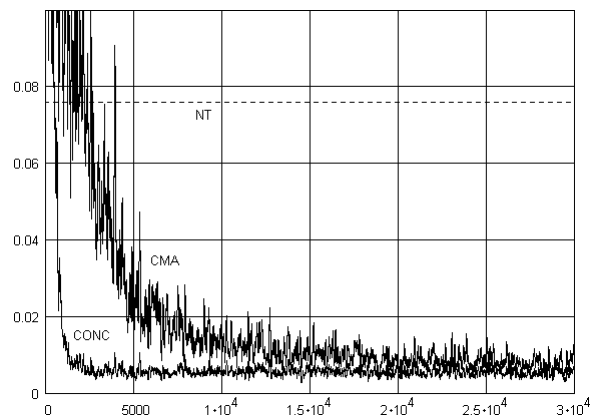


Fig. A.3d: MSE( $i$ )

Figura A.3: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M3, modulação 16-QAM ( $\gamma=1.32$ ), SNR=35dB. Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 8$ .



## Modulação 16-QAM SNR=35dB – Canal M4

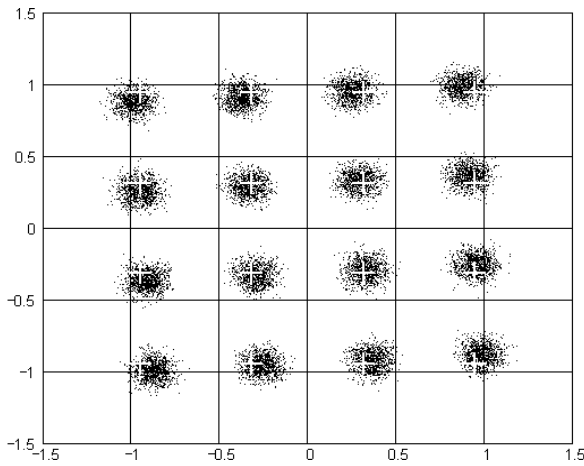


Fig. A.4a:  $\Gamma$  (CMA)

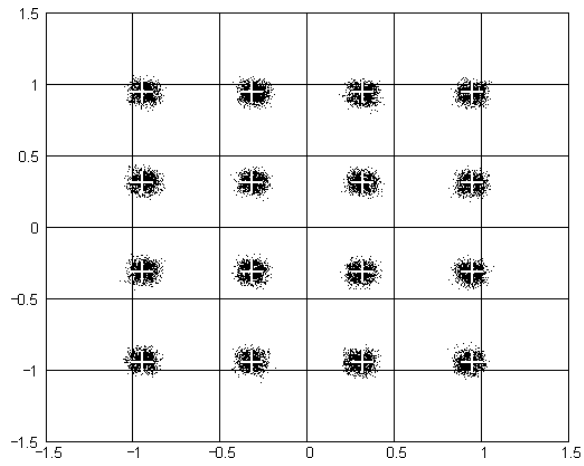


Fig. A.4b:  $\Psi$  (CONC)

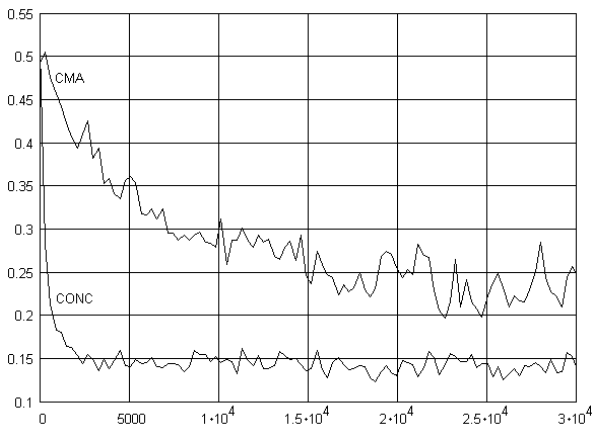


Fig. A.4c: ISI( $i$ )

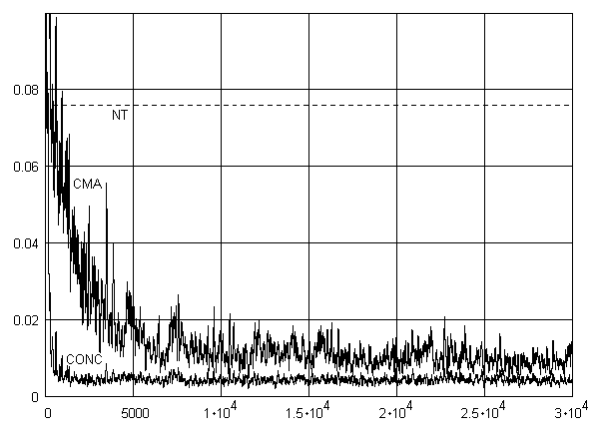


Fig. A.4d: MSE( $i$ )

Figura A.4: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M4, modulação 16-QAM ( $\gamma=1.32$ ), SNR=35dB. Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 8$ .

## Modulação 16-QAM SNR=35dB – Canal M5

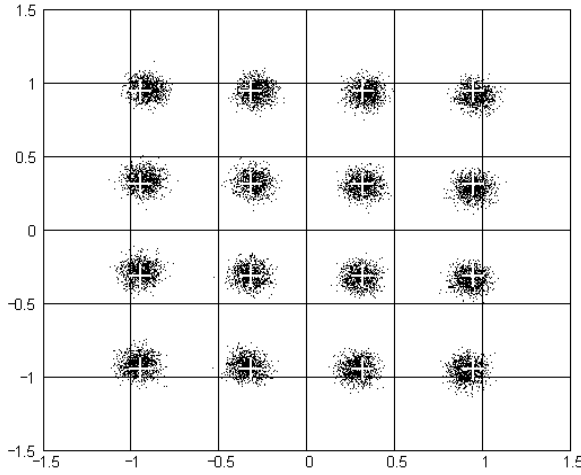


Fig. A.5a:  $\Gamma$  (CMA)

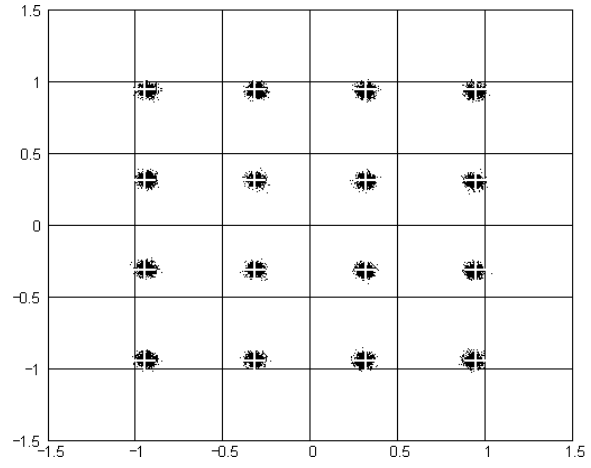


Fig. A.5b:  $\Psi$  (CONC)

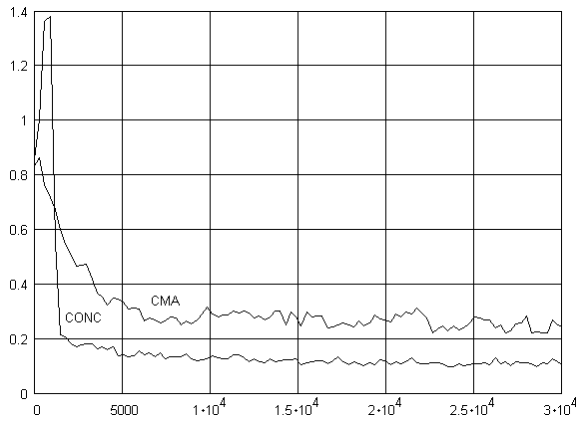


Fig. A.5c: ISI( $i$ )

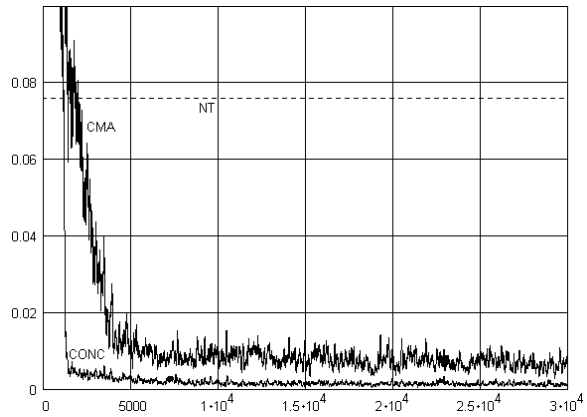


Fig. A.5d: MSE( $i$ )

Figura A.5: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M5, modulação 16-QAM ( $\gamma=1.32$ ), SNR=35dB. Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 8$ .

## Modulação 16-QAM SNR=35dB – Canal M6

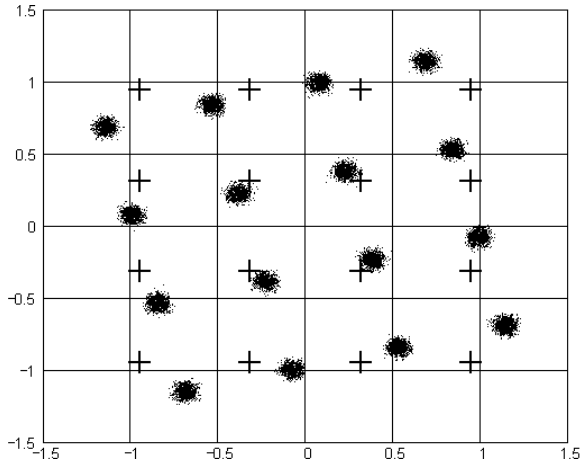


Fig. A.6a:  $\Gamma$  (CMA)

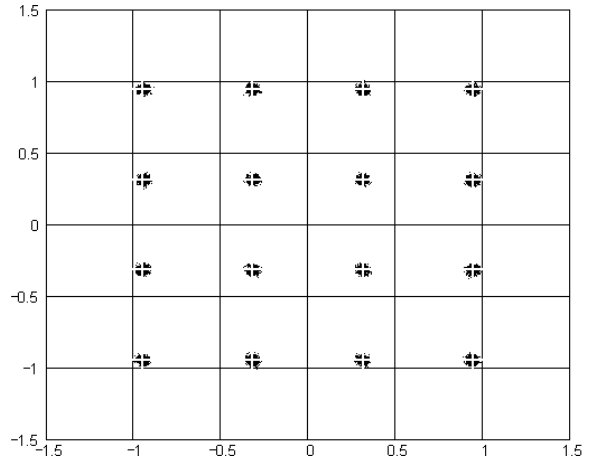


Fig. A.6b:  $\Psi$  (CONC)

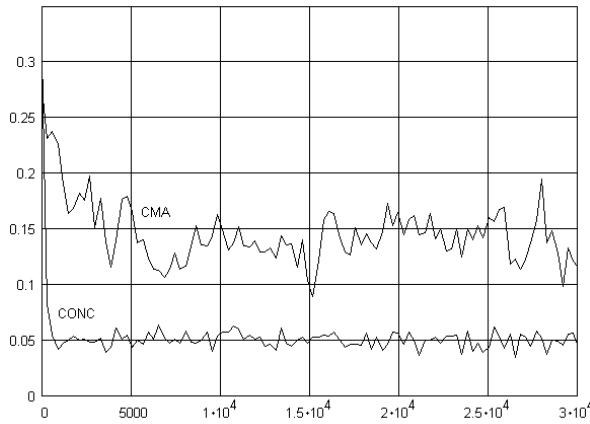


Fig. A.6c: ISI(*i*)

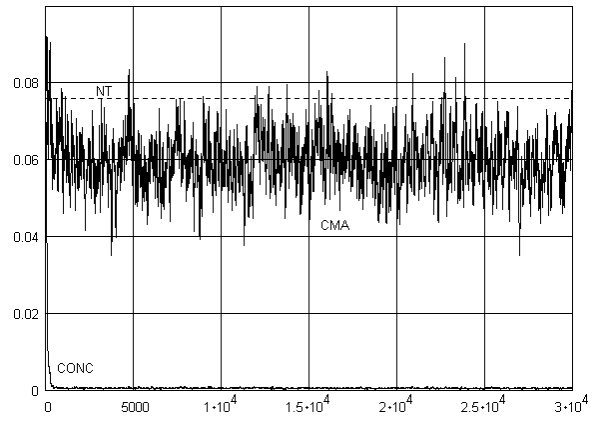


Fig. A.6d: MSE(*i*)

Figura A.6: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M6, modulação 16-QAM ( $\gamma=1.32$ ), SNR=35dB. Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 10$ .

## Modulação 16-QAM SNR=35dB – Canal M7

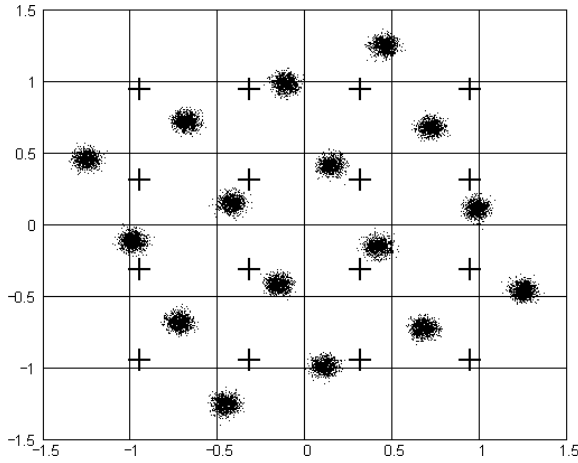


Fig. A.7a:  $\Gamma$  (CMA)

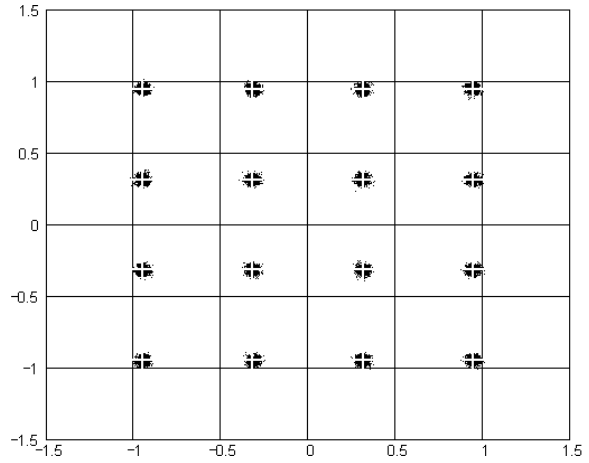


Fig. A.7b:  $\Psi$  (CONC)

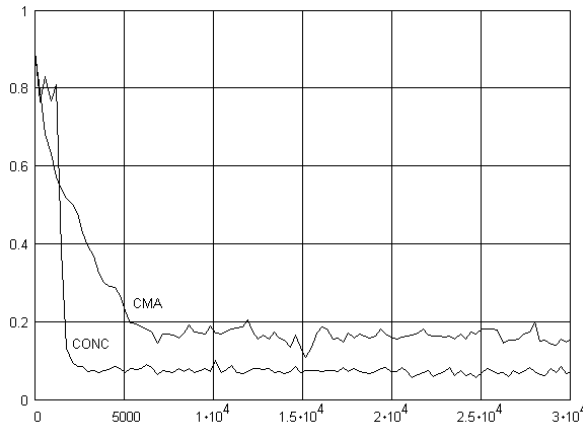


Fig. A.7c: ISI(*i*)

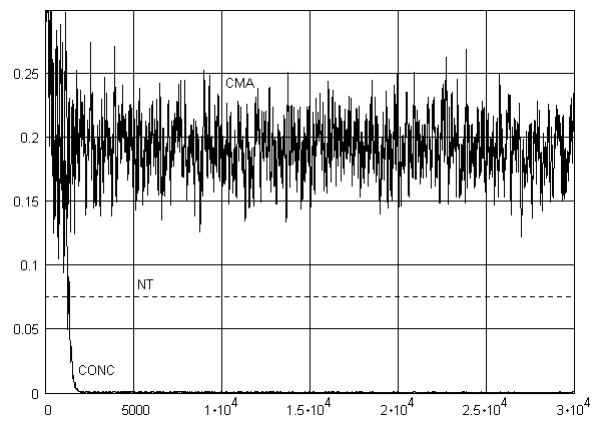


Fig. A.7d: MSE(*i*)

Figura A.7: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M7, modulação 16-QAM ( $\gamma=1.32$ ), SNR=35dB. Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 8$ .

## Modulação 16-QAM SNR=35dB – Canal M8

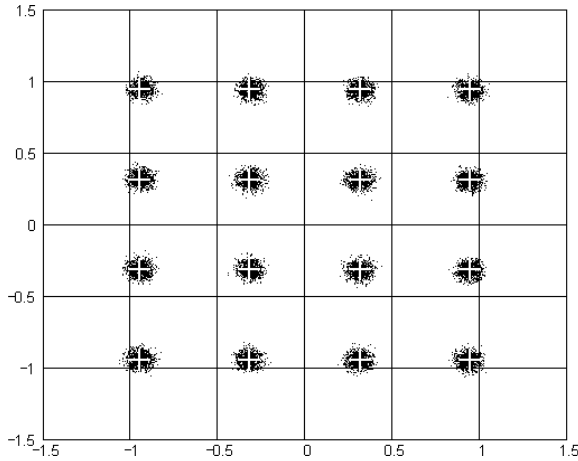


Fig. A.8a:  $\Gamma$  (CMA)

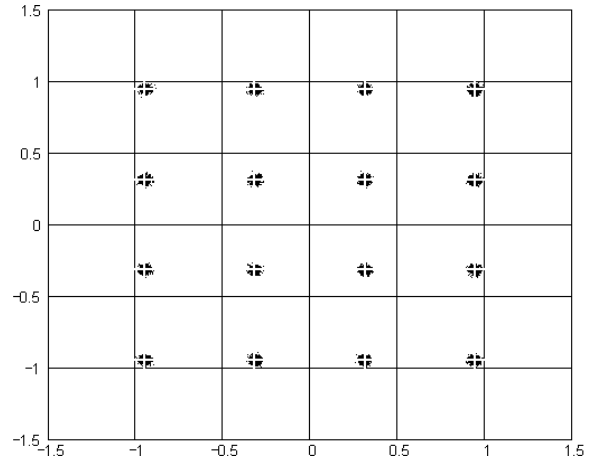


Fig. A.8b:  $\Psi$  (CONC)

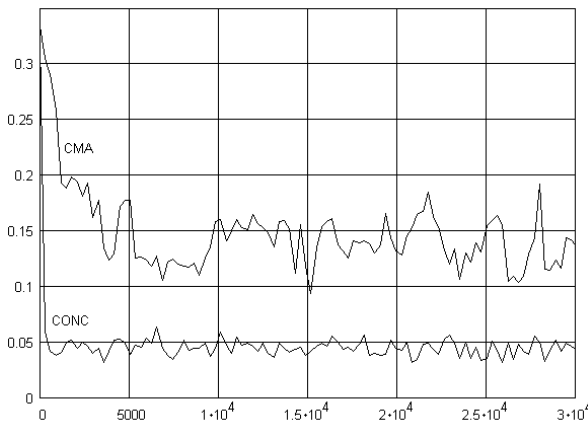


Fig. A.8c: ISI(*i*)

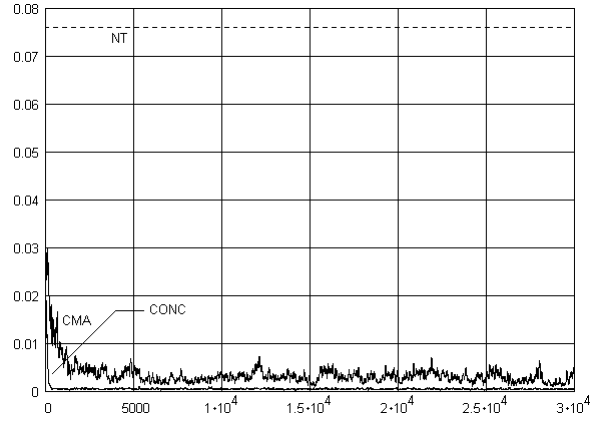


Fig. A.8d: MSE(*i*)

Figura A.8: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M8, modulação 16-QAM ( $\gamma=1.32$ ), SNR=35dB. Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 8$ .

Modulação 16-QAM SNR=35dB – Canal M9

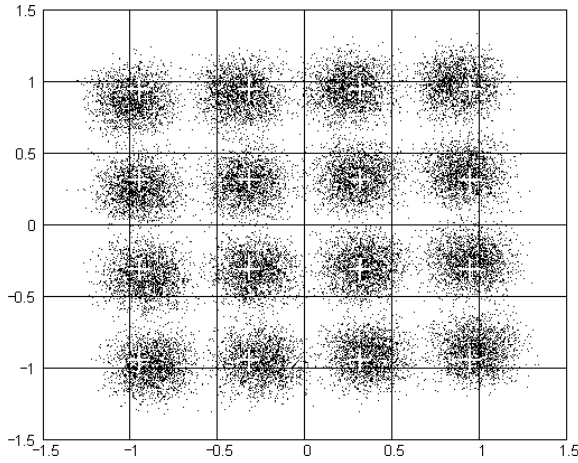


Fig. A.9a:  $\Gamma$  (CMA)

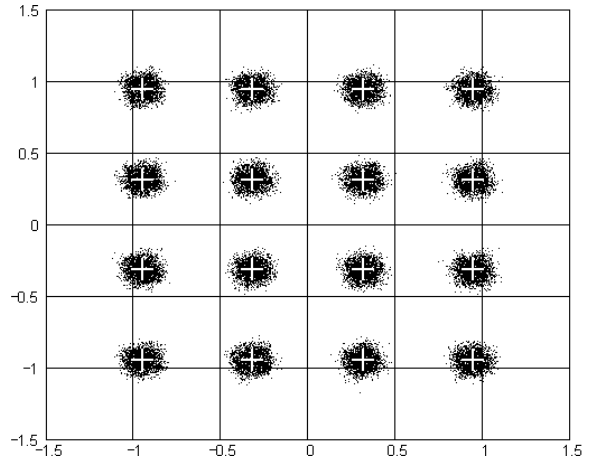


Fig. A.9b:  $\Psi$  (CONC)

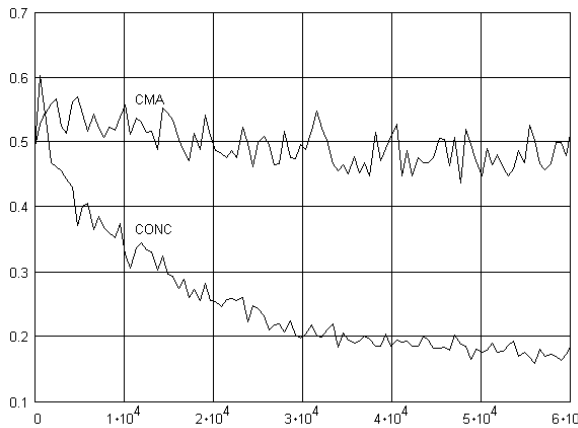


Fig. A.9c: ISI(*i*)

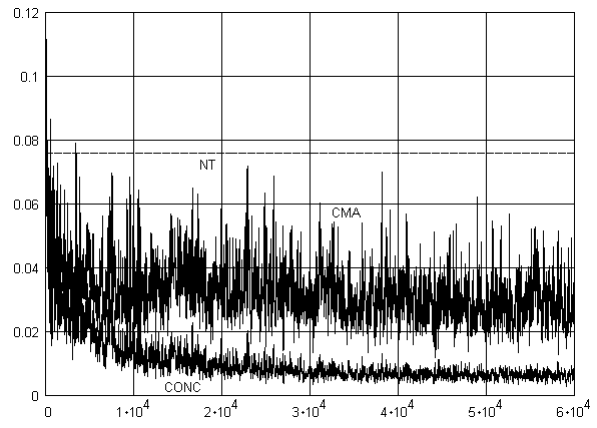


Fig. A.9d: MSE(*i*)

Figura A.9: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M9, modulação 16-QAM ( $\gamma=1.32$ ), SNR=35dB. Parâmetros:  $N_a = 60000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 2$ .

## Modulação 16-QAM SNR=35dB – Canal M10

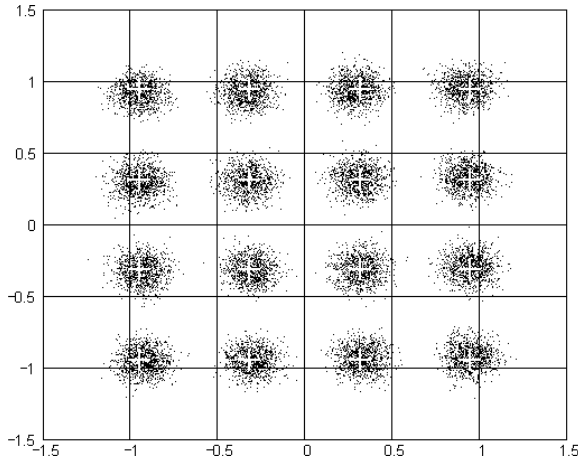


Fig. A.10a:  $\Gamma$  (CMA)

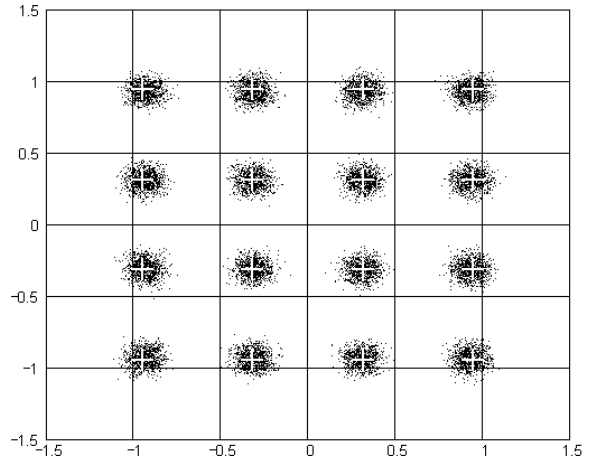


Fig. A.10b:  $\Psi$  (CONC)

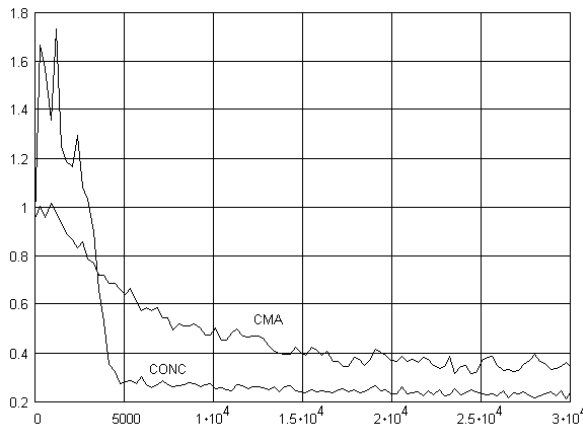


Fig. A.10c: ISI( $i$ )

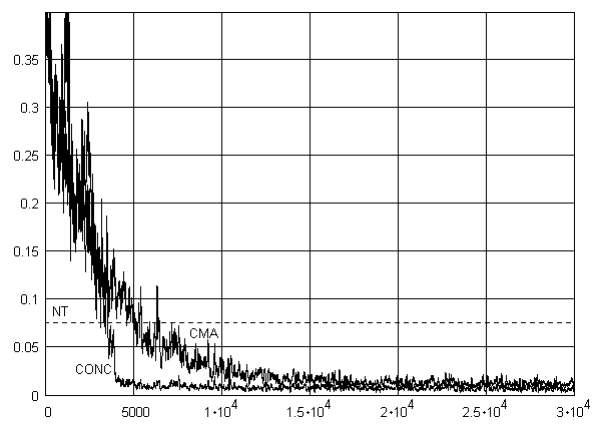


Fig. A.10d: MSE( $i$ )

Figura A.10: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M10, modulação 16-QAM ( $\gamma=1.32$ ), SNR=35dB. Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 3$ .

## Modulação 16-QAM SNR=35dB – Canal M11

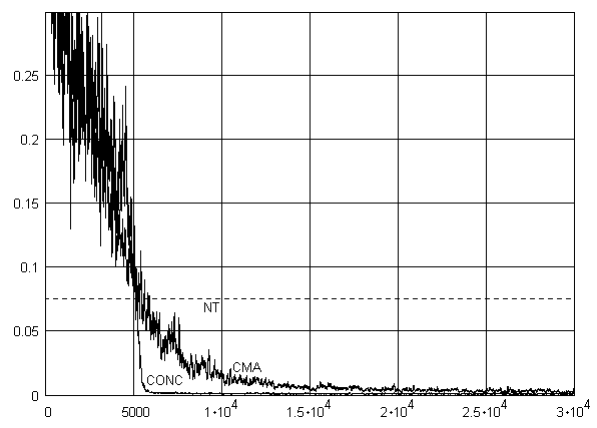
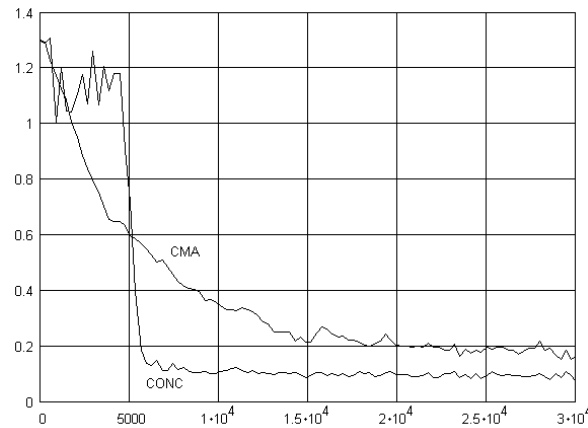
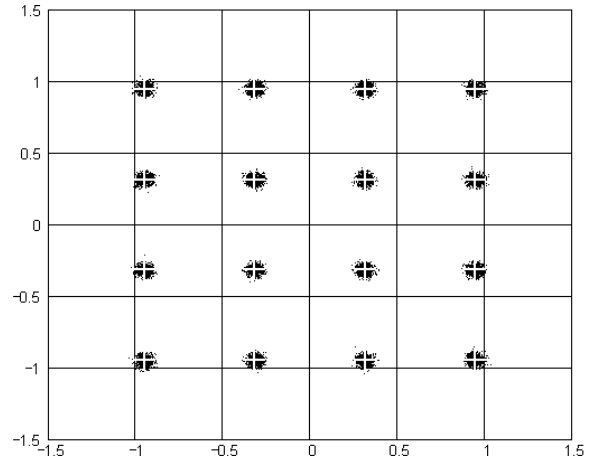
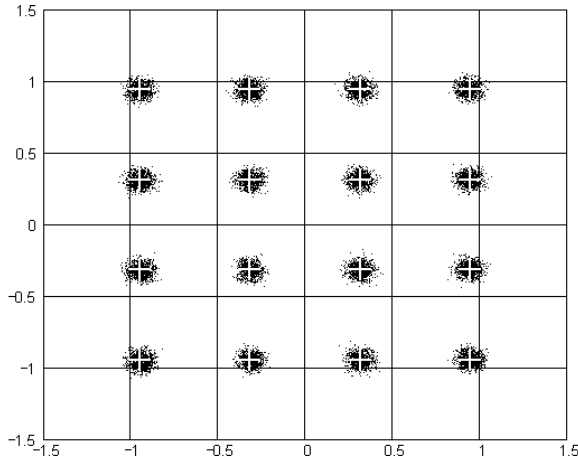


Figura A.11: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M11, modulação 16-QAM ( $\gamma=1.32$ ), SNR=35dB. Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 8$ .



## Modulação 16-QAM SNR=35dB – Canal M12

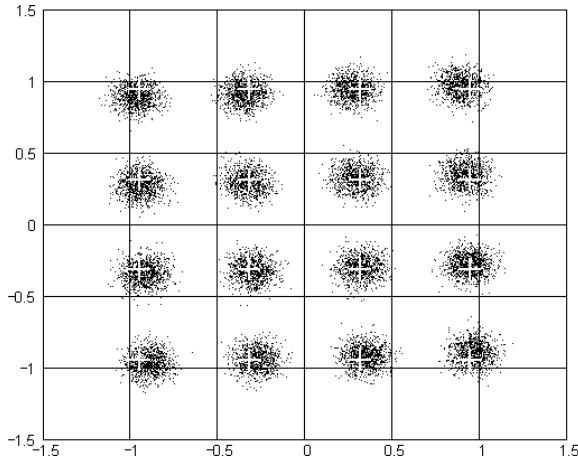


Fig. A.12a:  $\Gamma$  (CMA)

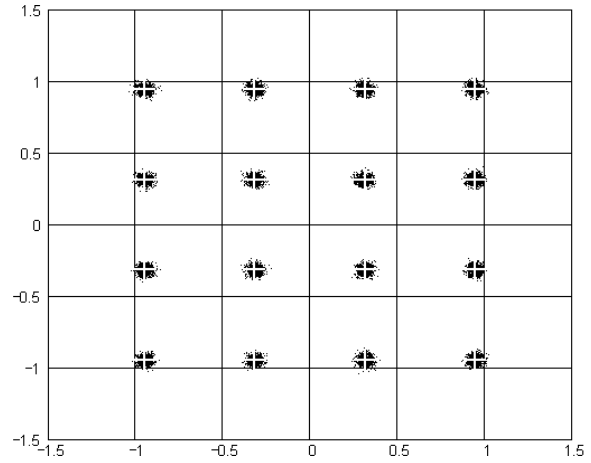


Fig. A.12b:  $\Psi$  (CONC)

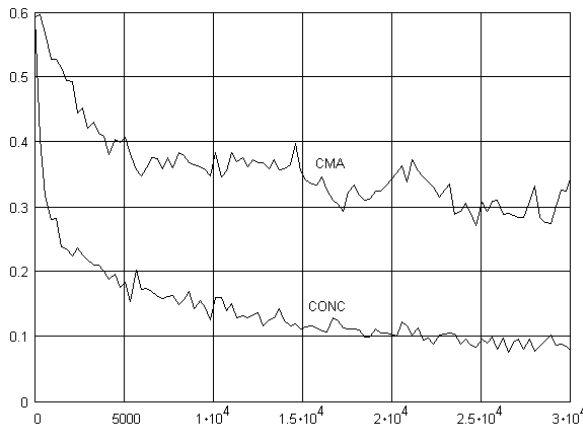


Fig. A.12c: ISI( $i$ )

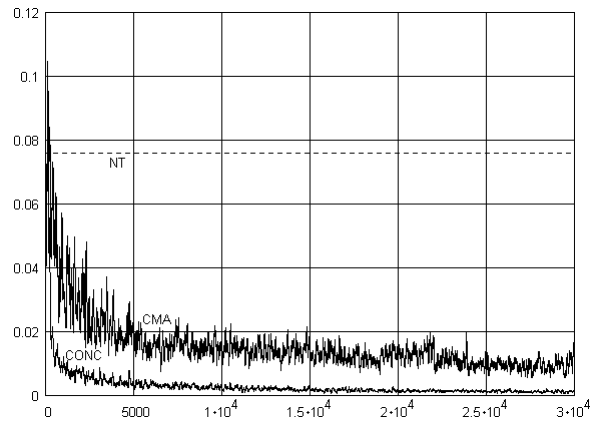


Fig. A.12d: MSE( $i$ )

Figura A.12: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M12, modulação 16-QAM ( $\gamma=1.32$ ), SNR=35dB. Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 3$ .

Modulação 16-QAM SNR=35dB – Canal M13

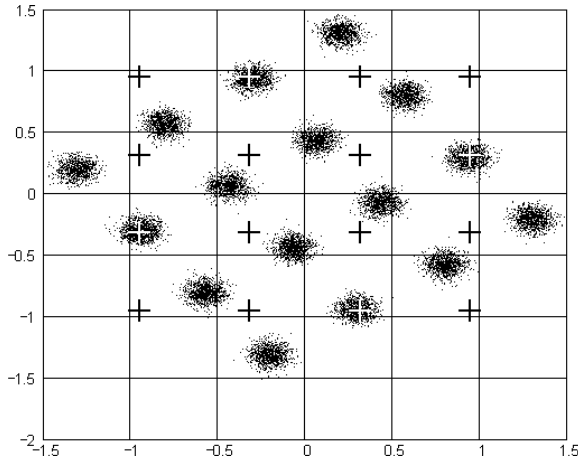


Fig. A.13a:  $\Gamma$  (CMA)

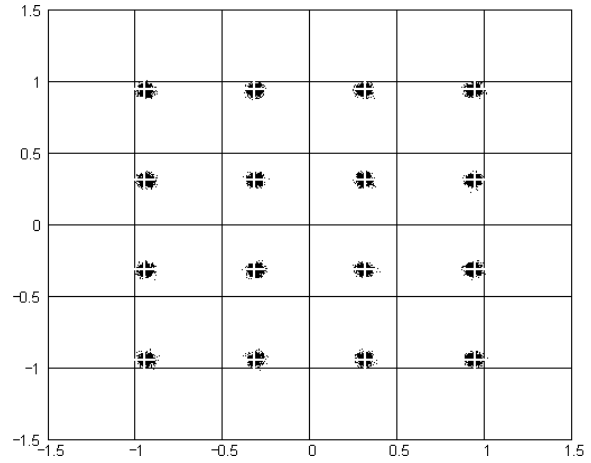


Fig. A.13b:  $\Psi$  (CONC)

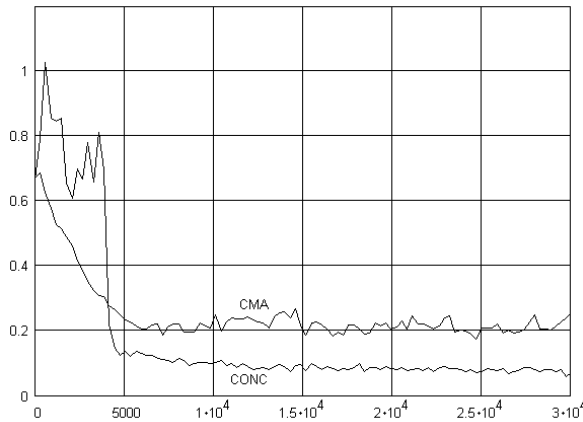


Fig. A.13c: ISI(*i*)

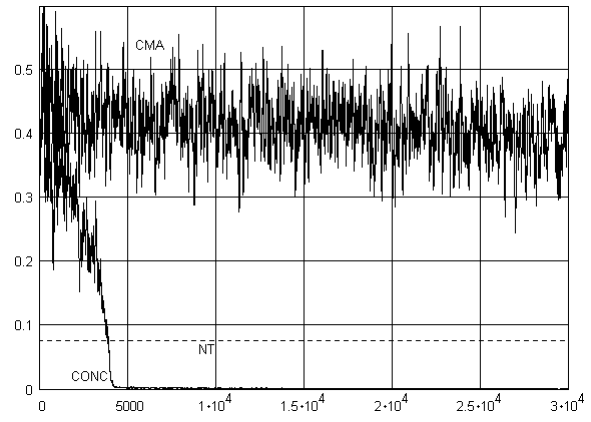


Fig. A.13d: MSE(*i*)

Figura A.13: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M2, modulação 16-QAM ( $\gamma=1.32$ ), SNR=35dB. Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 4$ .

## Modulação 16-QAM SNR=35dB – Canal M14

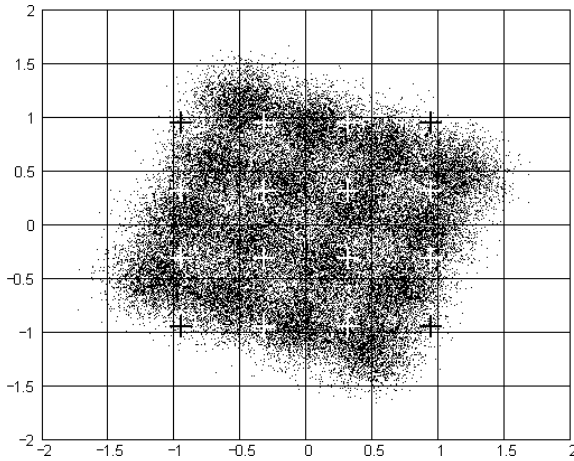


Fig. A.14a:  $\Gamma$  (CMA)

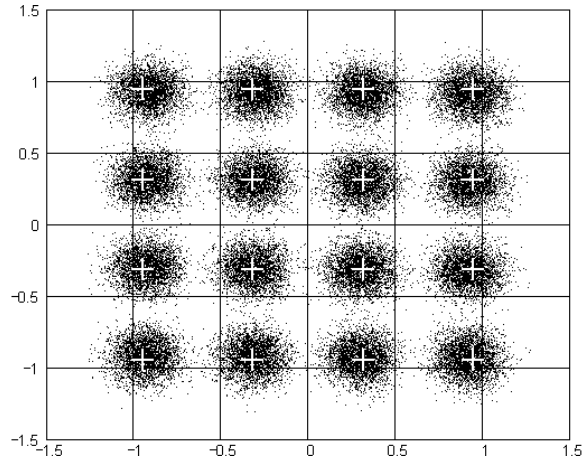


Fig. A.14b:  $\Psi$  (CONC)

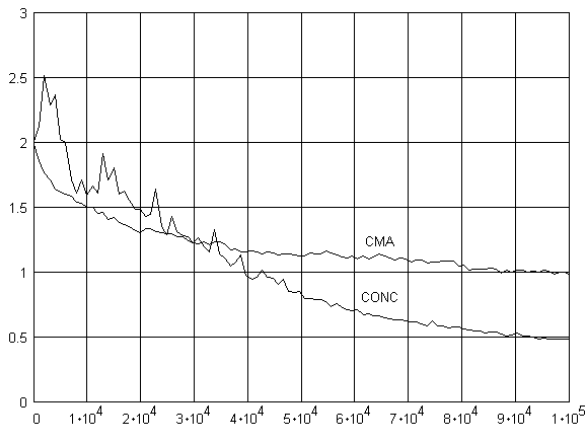


Fig. A.14c: ISI(*i*)

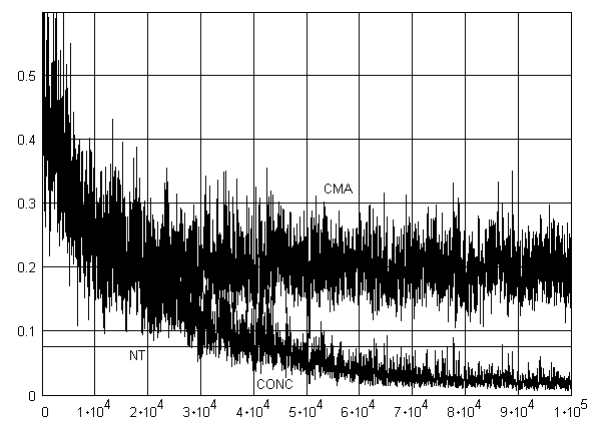


Fig. A.14d: MSE(*i*)

Figura A.14: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M14, modulação 16-QAM ( $\gamma=1.32$ ), SNR=35dB. Parâmetros:  $N_a = 100000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 6$ .

## Modulação 16-QAM SNR=35dB – Canal M15

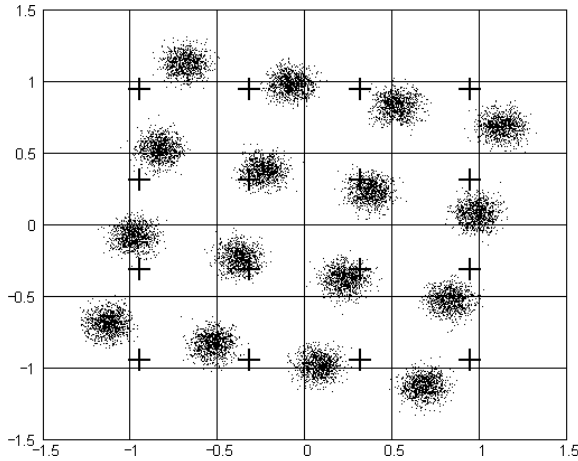


Fig. A.15a:  $\Gamma$  (CMA)

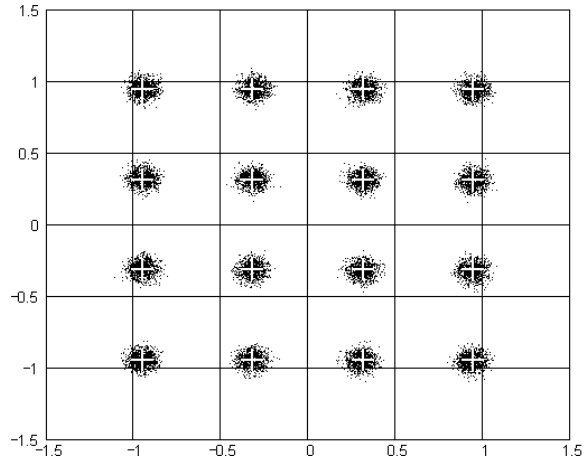


Fig. A.15b:  $\Psi$  (CONC)

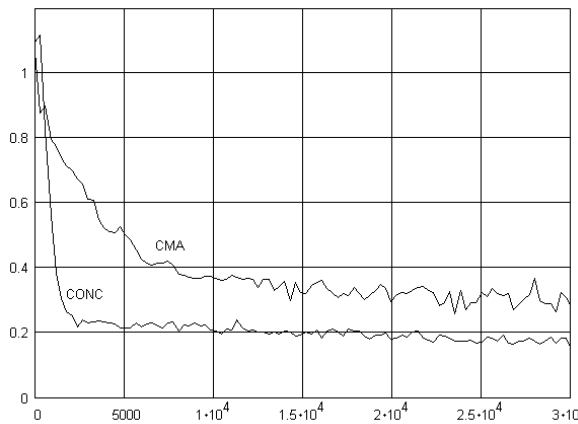


Fig. A.15c: ISI(*i*)

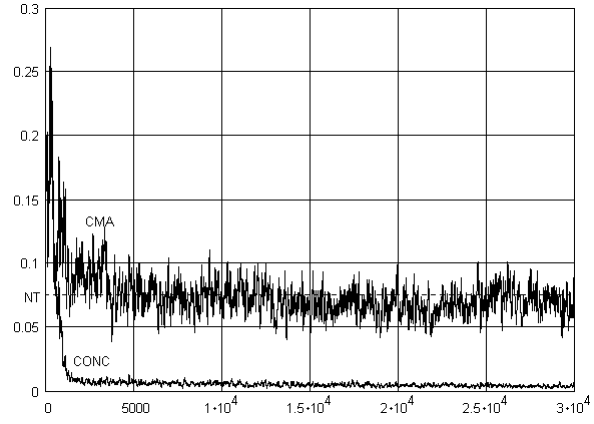


Fig. A.15d: MSE(*i*)

Figura A.15: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M15, modulação 16-QAM ( $\gamma=1.32$ ), SNR=35dB. Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 8$ .

## Modulação 16-QAM SNR=25dB – Canal M1

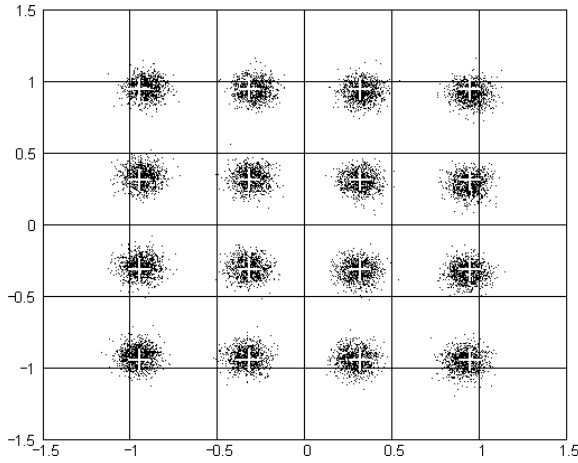


Fig. A.16a:  $\Gamma$  (CMA)

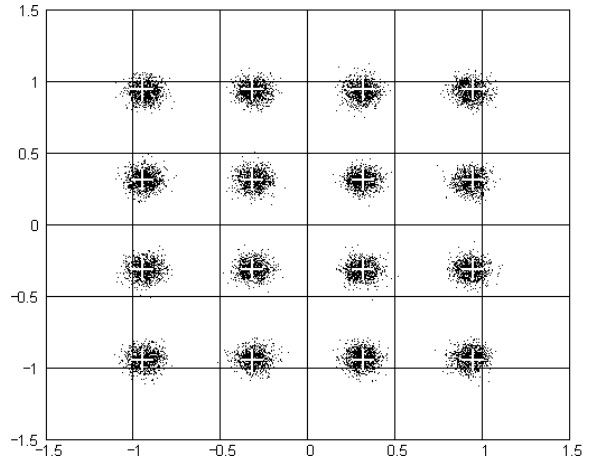


Fig. A.16b:  $\Psi$  (CONC)

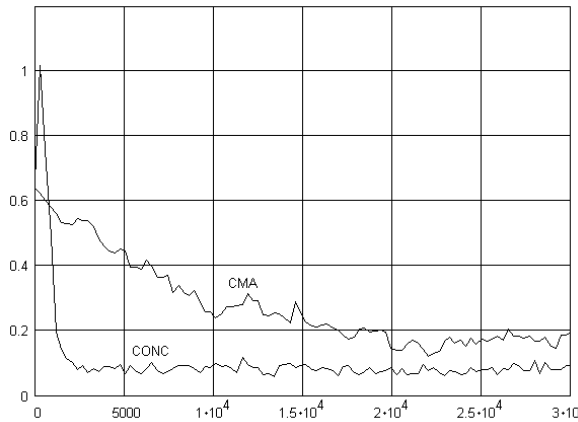


Fig. A.16c: ISI(*i*)

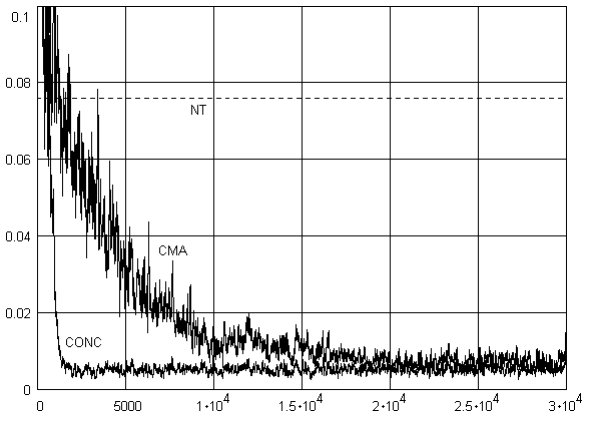


Fig. A.16d: MSE(*i*)

Figura A.16: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M1, modulação 16-QAM ( $\gamma=1.32$ ), SNR=25dB.

Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 8$ .

## Modulação 16-QAM SNR=25dB – Canal M2

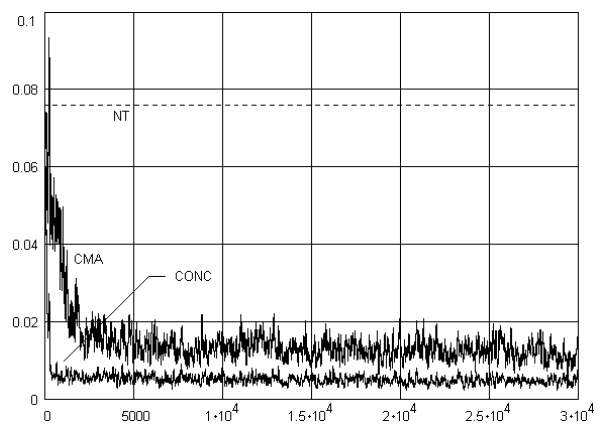
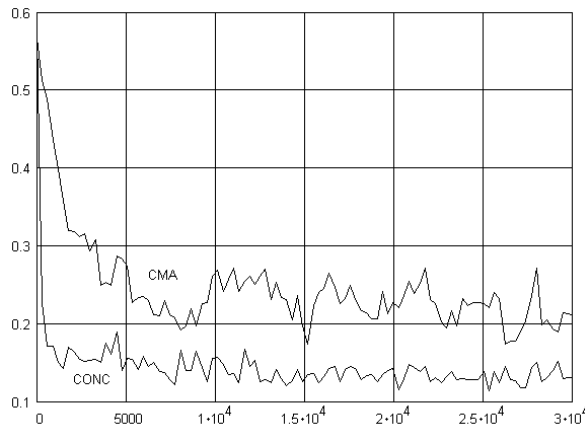
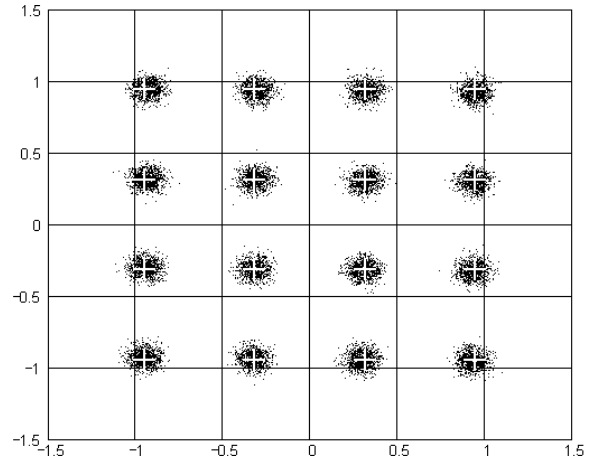
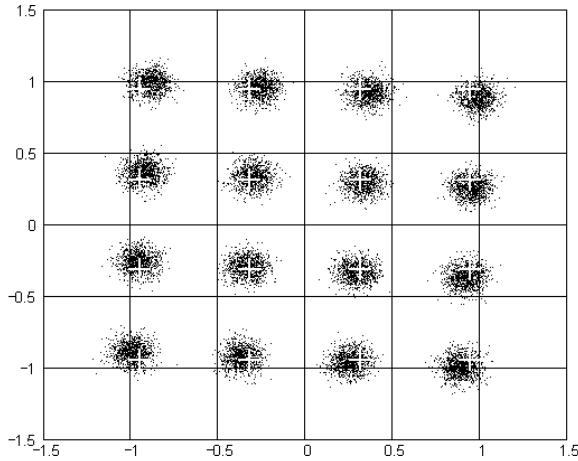


Figura A.17: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M2, modulação 16-QAM ( $\gamma=1.32$ ), SNR=25dB. Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 8$ .

## Modulação 16-QAM SNR=25dB – Canal M3

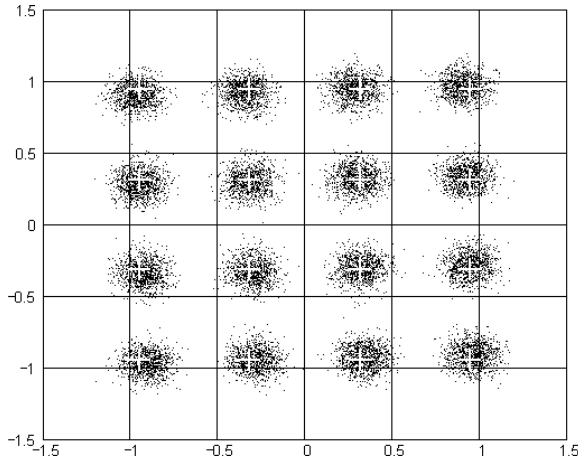


Fig. A.18a:  $\Gamma$  (CMA)

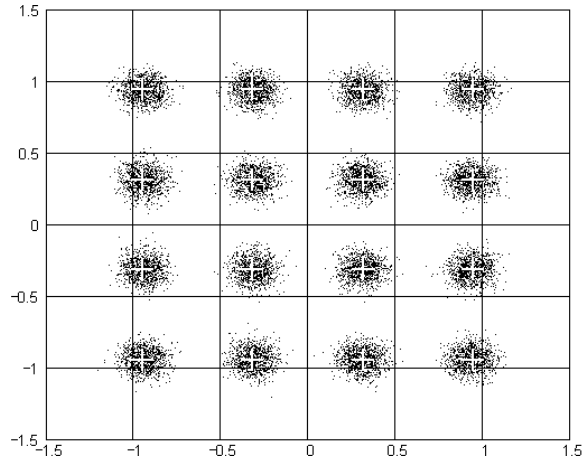


Fig. A.18b:  $\Psi$  (CONC)

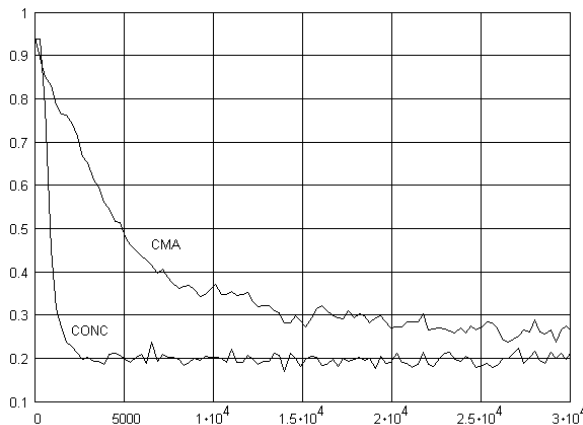


Fig. A.18c: ISI(*i*)

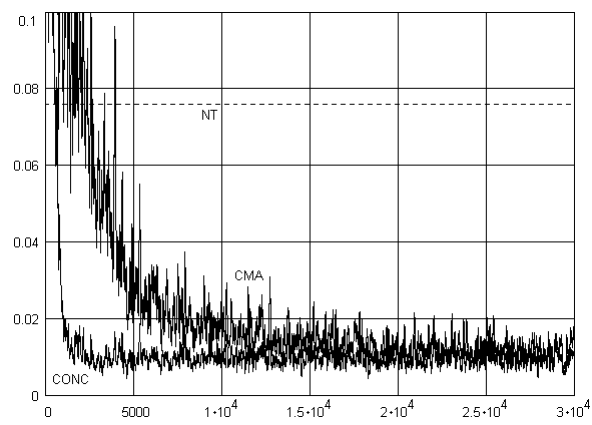


Fig. A.18d: MSE(*i*)

Figura A.18: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M3, modulação 16-QAM ( $\gamma=1.32$ ), SNR=25dB. Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 8$ .

## Modulação 16-QAM SNR=25dB – Canal M4

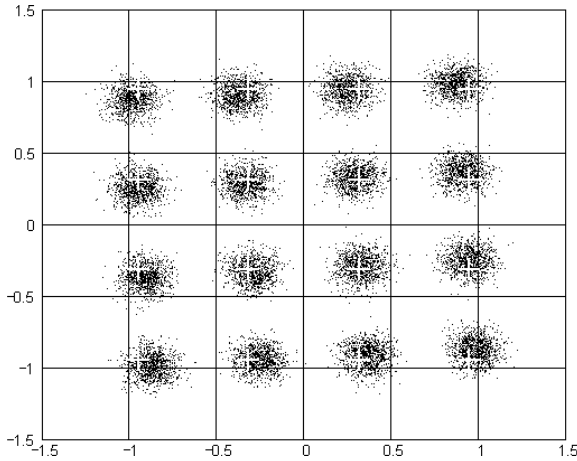


Fig. A.19a:  $\Gamma$  (CMA)

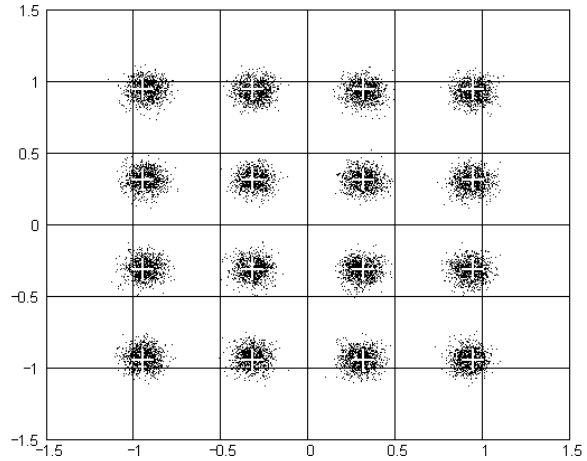


Fig. A.19b:  $\Psi$  (CONC)

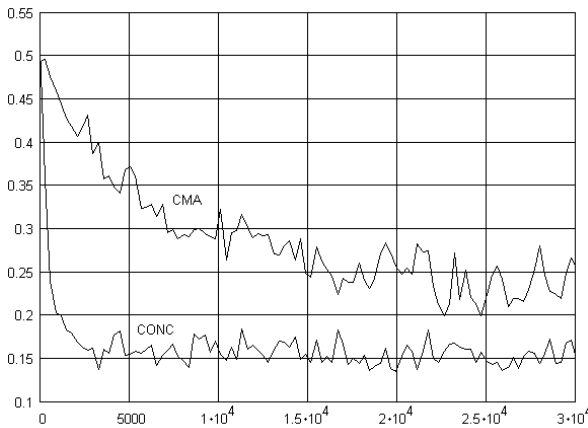


Fig. A.19c: ISI(*i*)

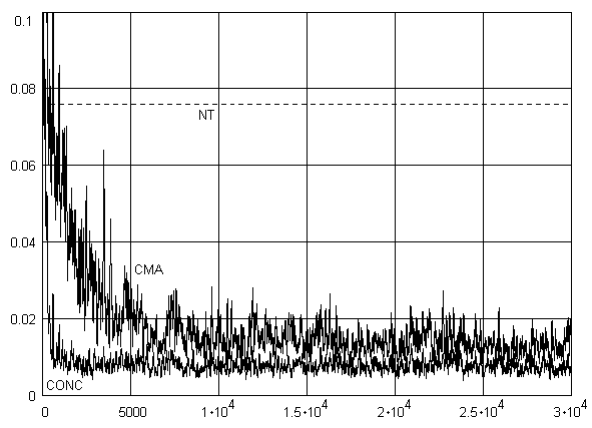


Fig. A.19d: MSE(*i*)

Figura A.19: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M4, modulação 16-QAM ( $\gamma=1.32$ ), SNR=25dB. Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 6$ .



## Modulação 16-QAM SNR=25dB – Canal M5

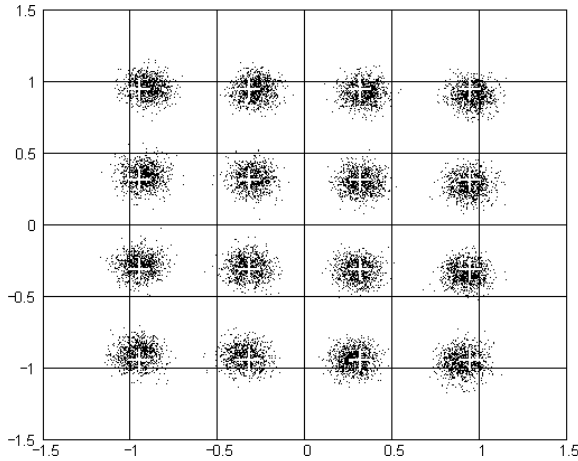


Fig. A.20a:  $\Gamma$  (CMA)

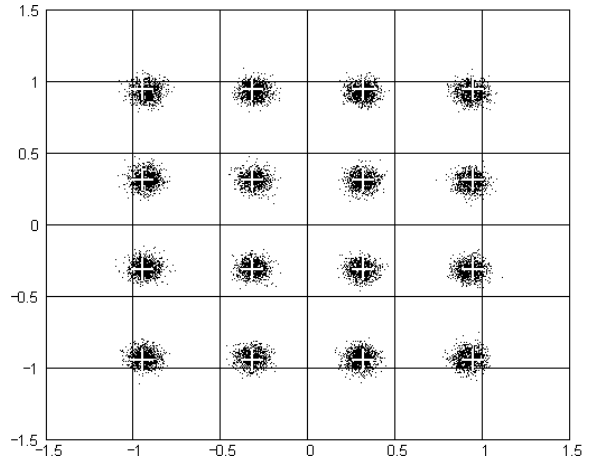


Fig. A.20b:  $\Psi$  (CONC)

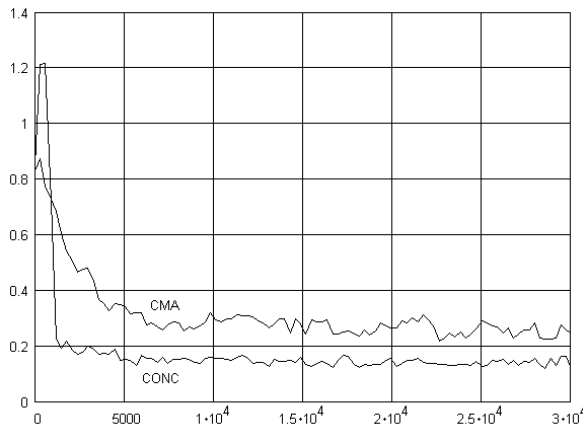


Fig. A.20c: ISI(*i*)

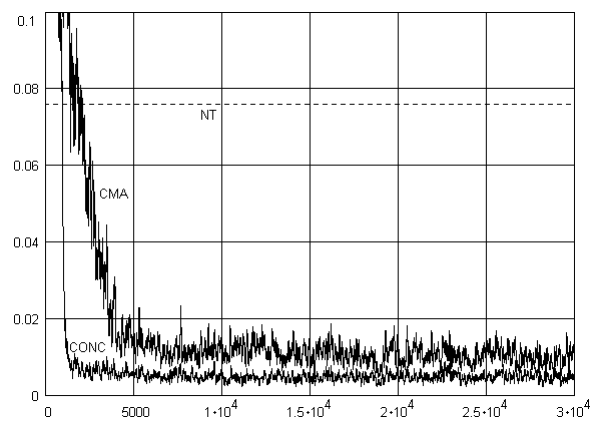


Fig. A.20d: MSE(*i*)

Figura A.20: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M5, modulação 16-QAM ( $\gamma=1.32$ ), SNR=25dB. Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 8$ .

## Modulação 16-QAM SNR=25dB – Canal M6

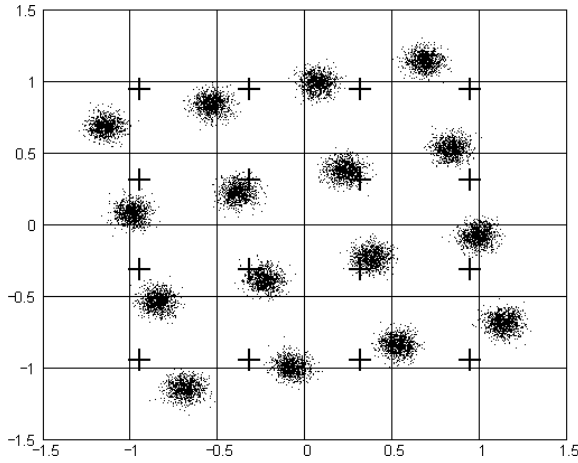


Fig. A.21a:  $\Gamma$  (CMA)

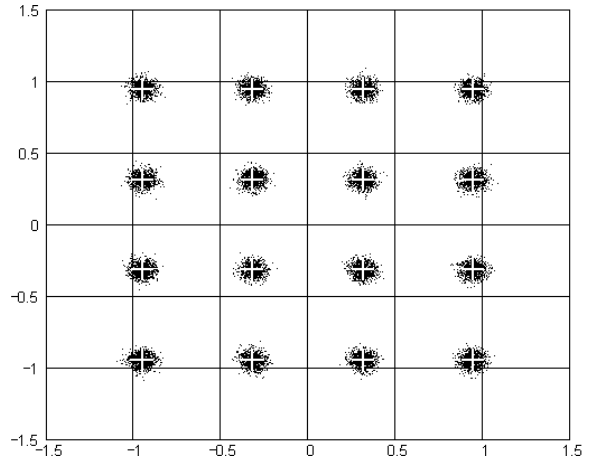


Fig. A.21b:  $\Psi$  (CONC)

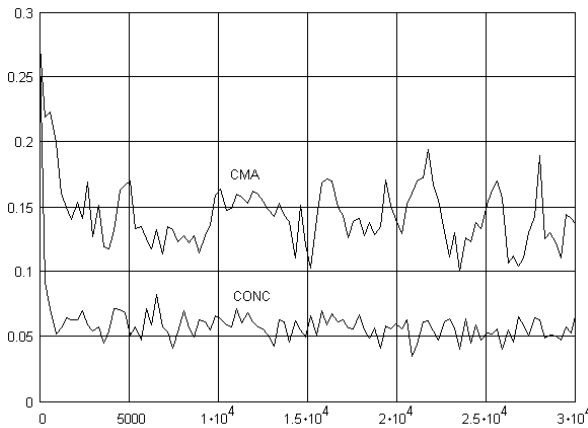


Fig. A.21c: ISI( $i$ )

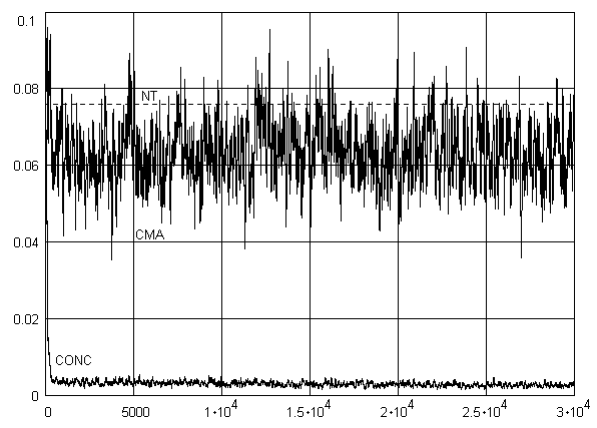


Fig. A.21d: MSE( $i$ )

Figura A.21: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M6, modulação 16-QAM ( $\gamma=1.32$ ), SNR=25dB. Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 8$ .

Modulação 16-QAM SNR=25dB – Canal M7

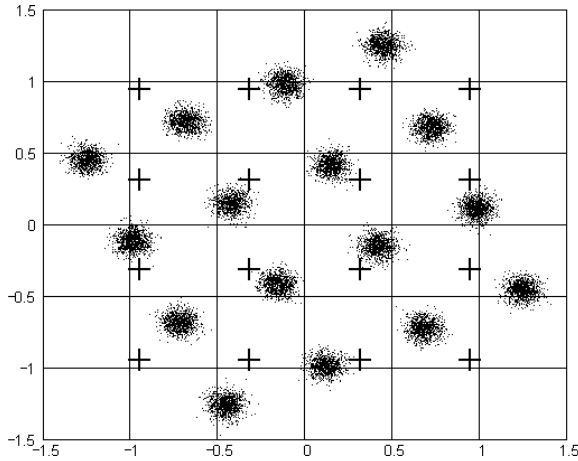


Fig. A.22a:  $\Gamma$  (CMA)

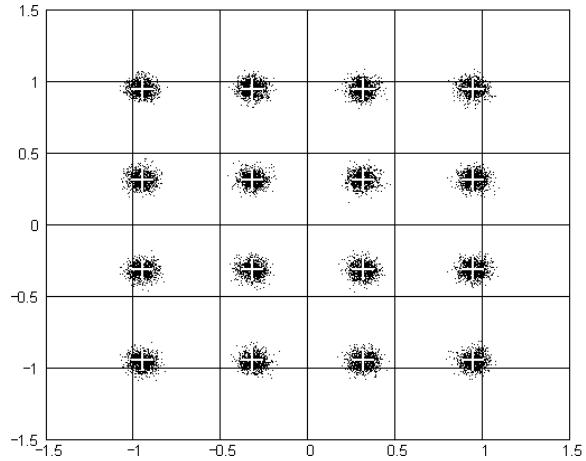


Fig. A.22b:  $\Psi$  (CONC)

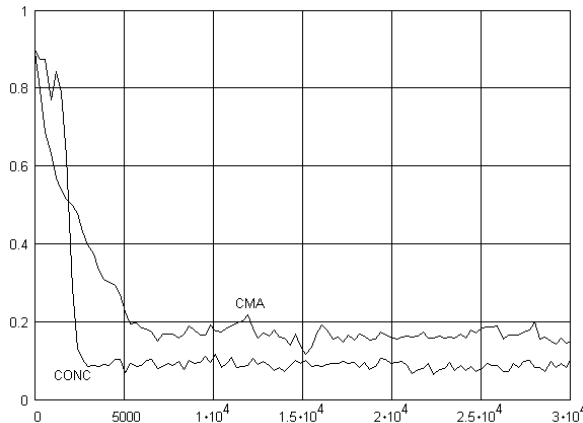


Fig. A.22c: ISI(i)

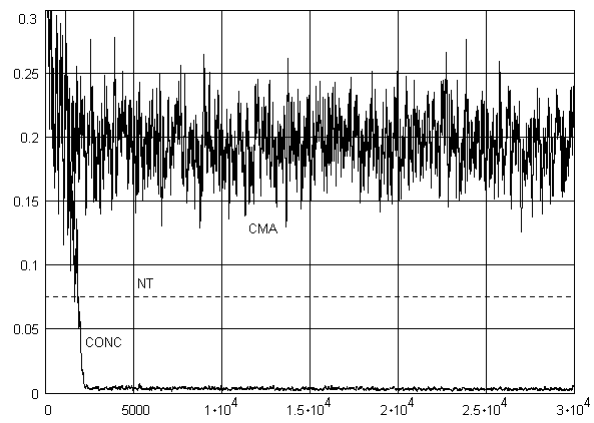


Fig. A.22d: MSE(i)

Figura A.22: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M7, modulação 16-QAM ( $\gamma=1.32$ ), SNR=25dB. Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 8$ .

## Modulação 16-QAM SNR=25dB – Canal M8

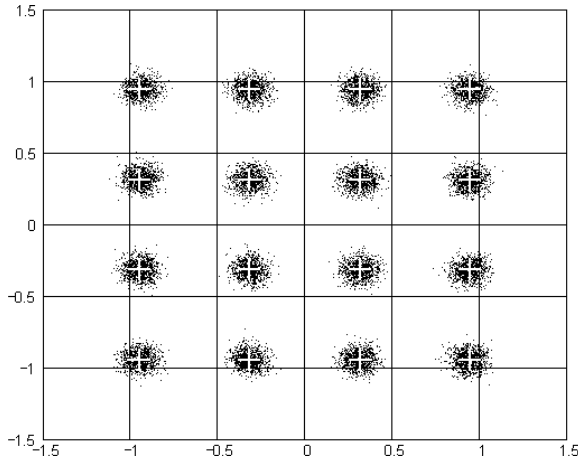


Fig. A.23a:  $\Gamma$  (CMA)

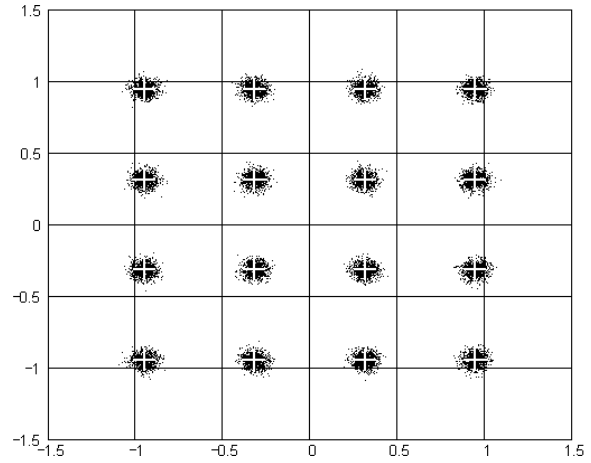


Fig. A.23b:  $\Psi$  (CONC)

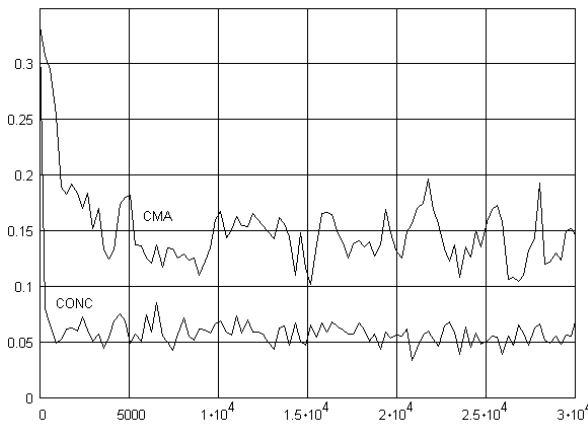


Fig. A.23c: ISI(*i*)

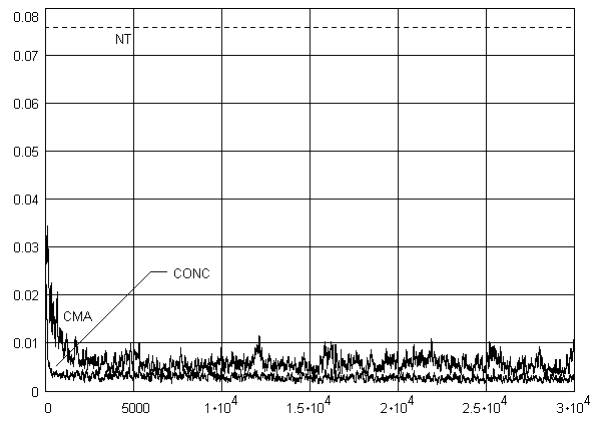


Fig. A.23d: MSE(*i*)

Figura A.23: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M8, modulação 16-QAM ( $\gamma=1.32$ ), SNR=25dB. Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 8$ .

Modulação 16-QAM SNR=25dB – Canal M9

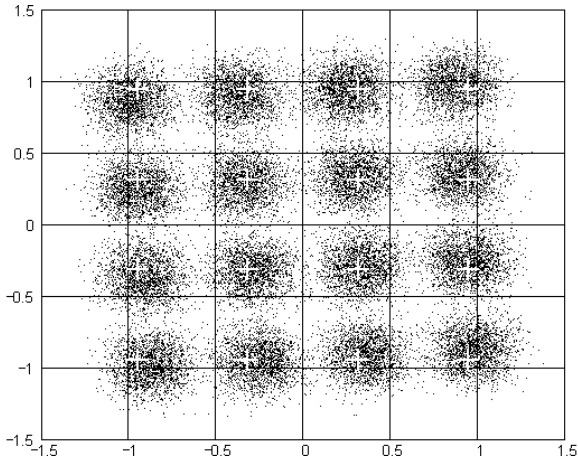


Fig. A.24a:  $\Gamma$  (CMA)

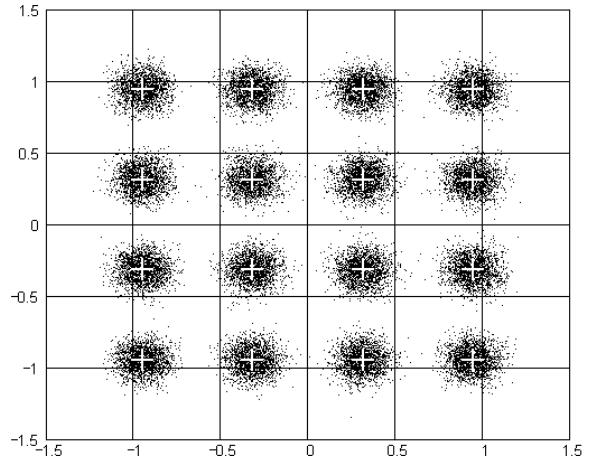


Fig. A.24b:  $\Psi$  (CONC)

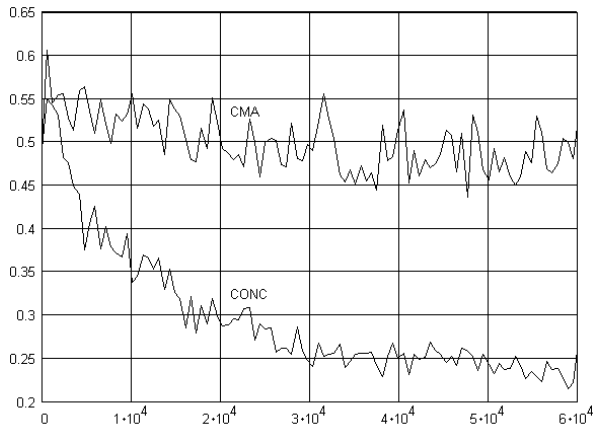


Fig. A.24c: ISI( $i$ )

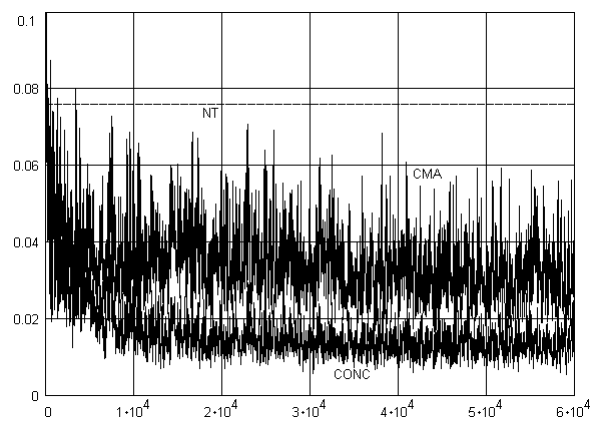


Fig. A.24d: MSE( $i$ )

Figura A.24: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M9, modulação 16-QAM ( $\gamma=1.32$ ), SNR=25dB. Parâmetros:  $N_a = 60000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 2$ .

## Modulação 16-QAM SNR=25dB – Canal M10

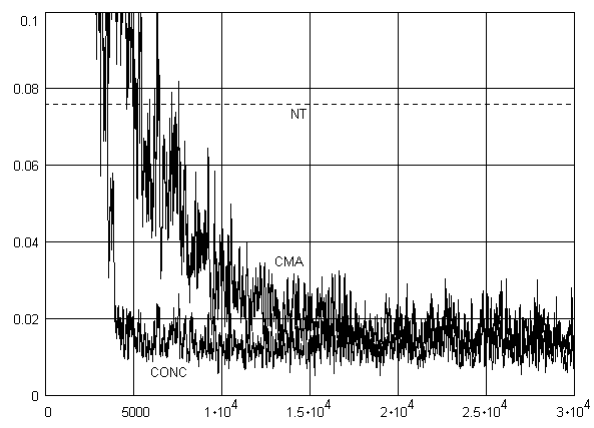
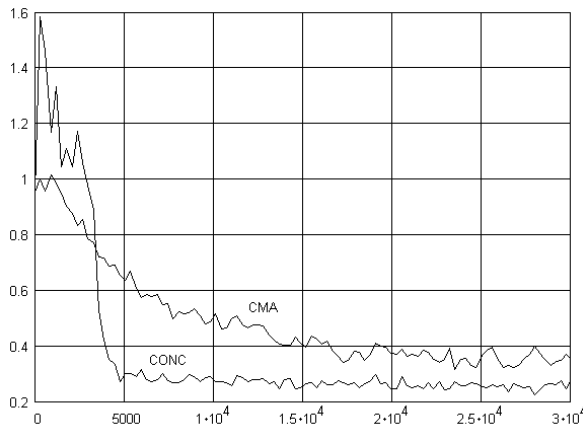
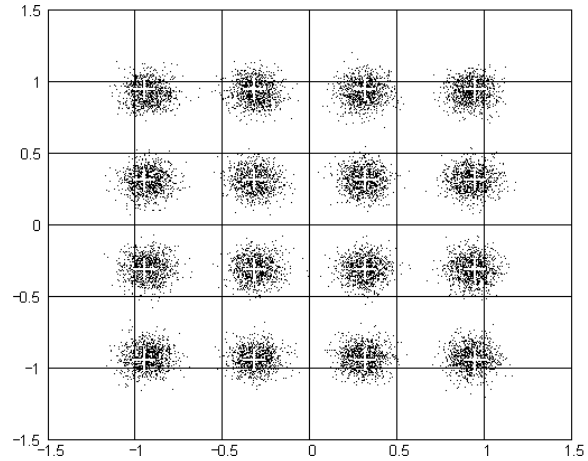
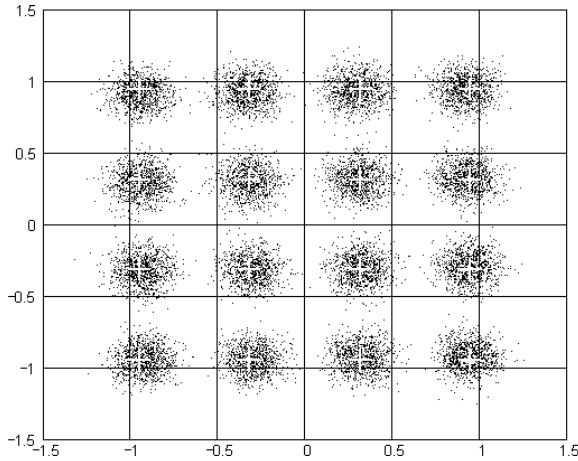


Figura A.25: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M10, modulação 16-QAM ( $\gamma=1.32$ ), SNR=25dB. Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 3$ .

Modulação 16-QAM SNR=25dB – Canal M11

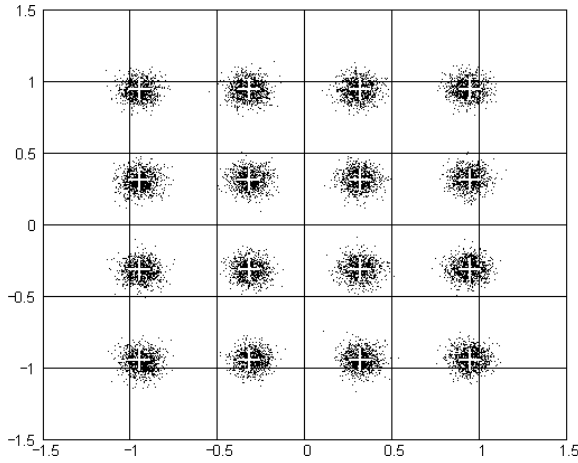


Fig. A.26a:  $\Gamma$  (CMA)

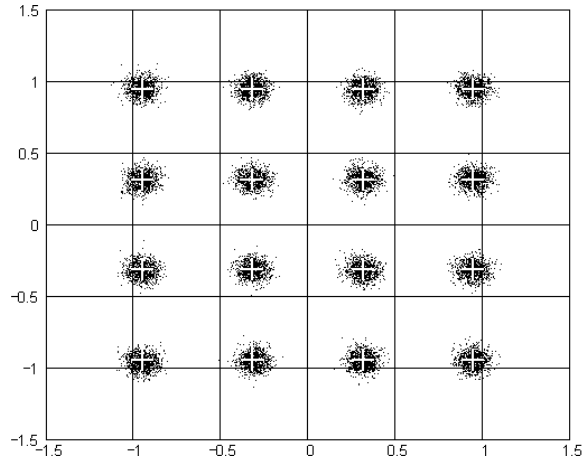


Fig. A.26b:  $\Psi$  (CONC)

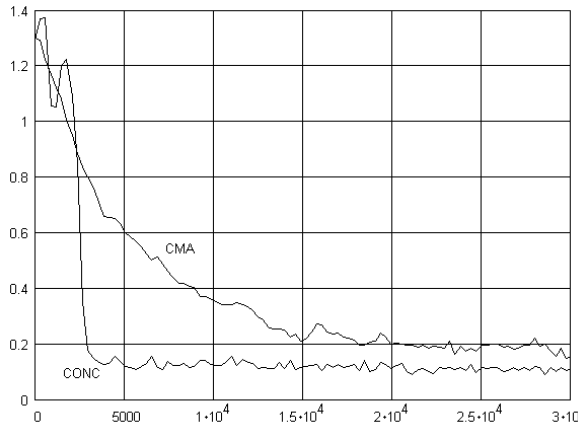


Fig. A.26c: ISI( $i$ )

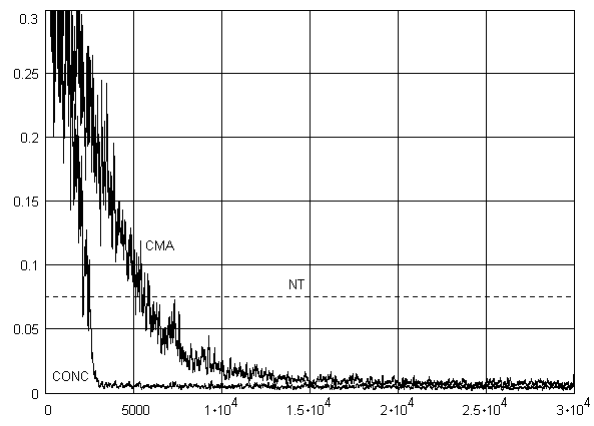


Fig. A.26d: MSE( $i$ )

Figura A.26: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M11, modulação 16-QAM ( $\gamma=1.32$ ), SNR=25dB. Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1.5 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 8$ .

Modulação 16-QAM SNR=25dB – Canal M12

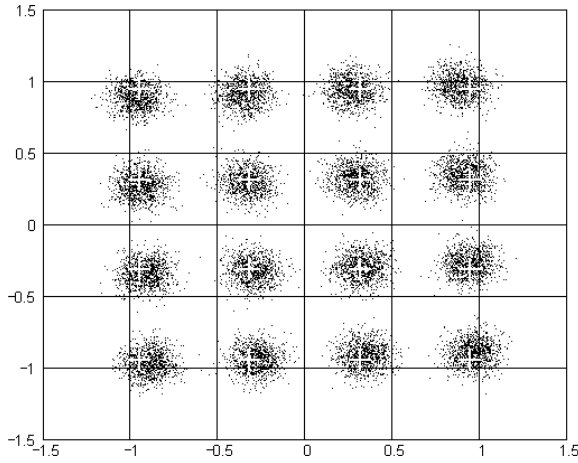


Fig. A.27a:  $\Gamma$  (CMA)

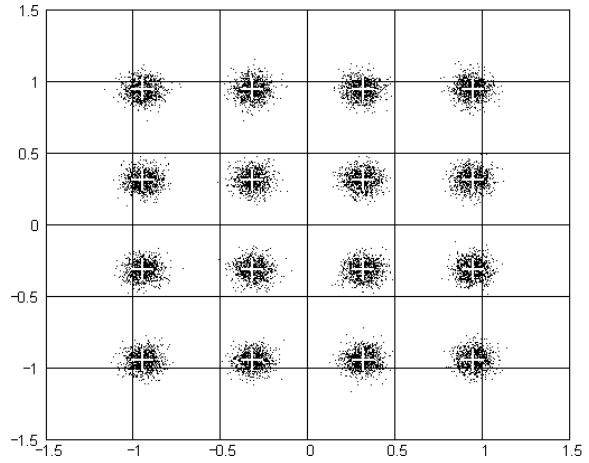


Fig. A.27b:  $\Psi$  (CONC)

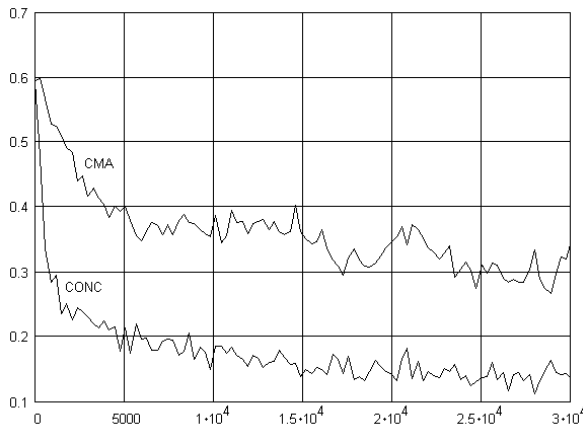


Fig. A.27c: ISI(*i*)

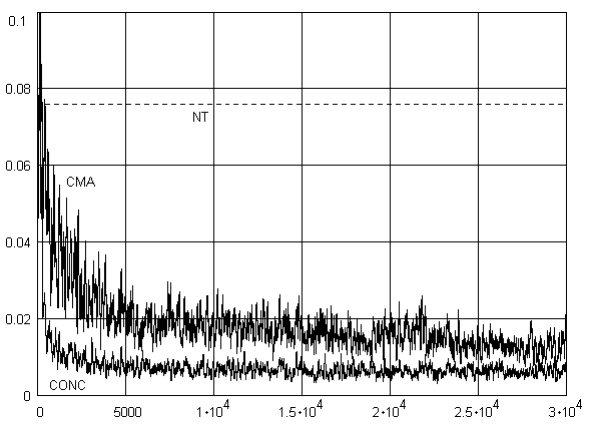


Fig. A.27d: MSE(*i*)

Figura A.27: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M12, modulação 16-QAM ( $\gamma=1.32$ ), SNR=25dB. Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 3$ .



## Modulação 16-QAM SNR=25dB – Canal M13

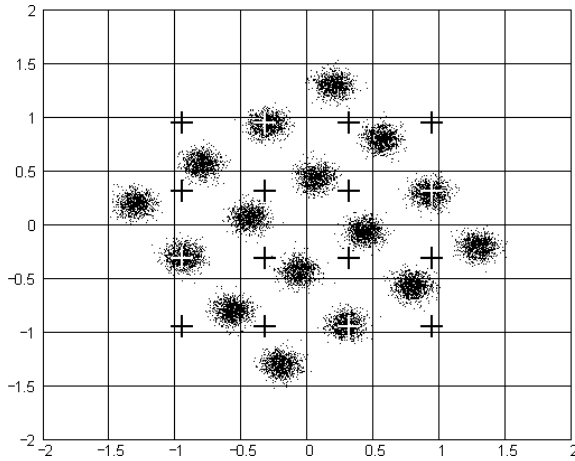


Fig. A.28a:  $\Gamma$  (CMA)

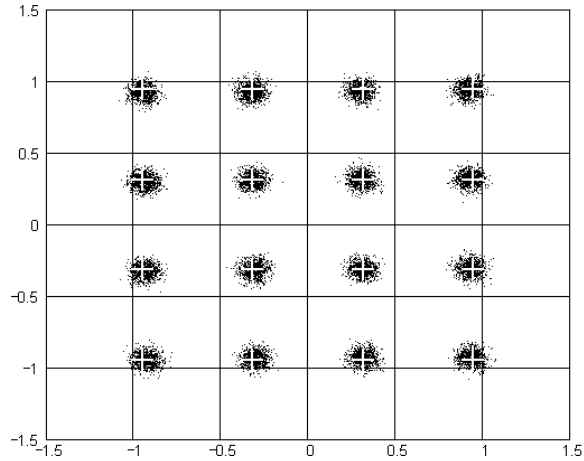


Fig. A.28b:  $\Psi$  (CONC)

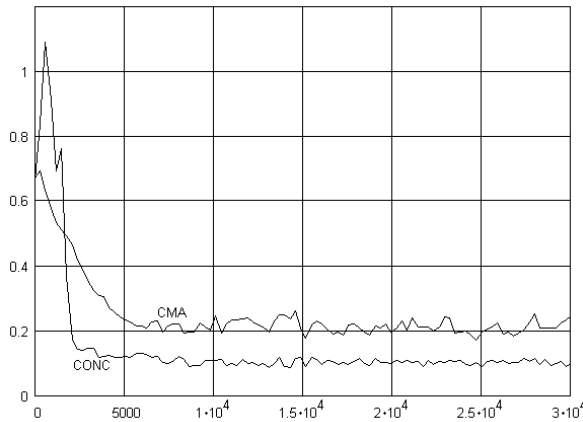


Fig. A.28c: ISI(*i*)

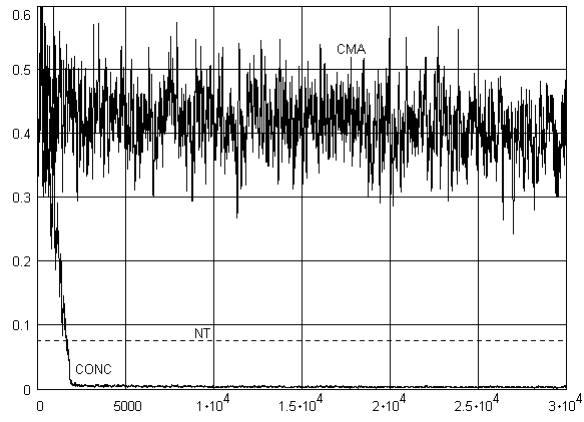


Fig. A.28d: MSE(*i*)

Figura A.28: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M13, modulação 16-QAM ( $\gamma=1.32$ ), SNR=25dB. Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 4$ .

Modulação 16-QAM SNR=25dB – Canal M14

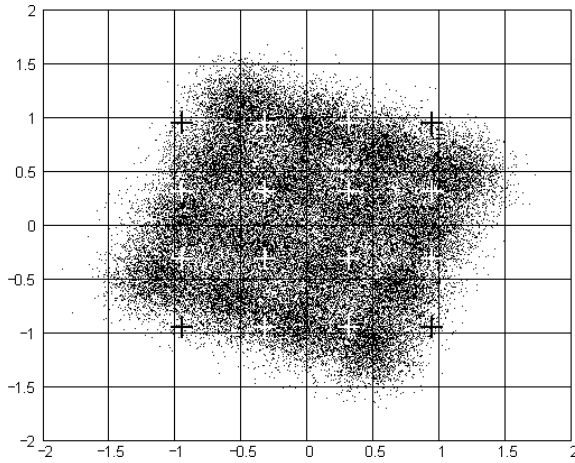


Fig. A.29a:  $\Gamma$  (CMA)

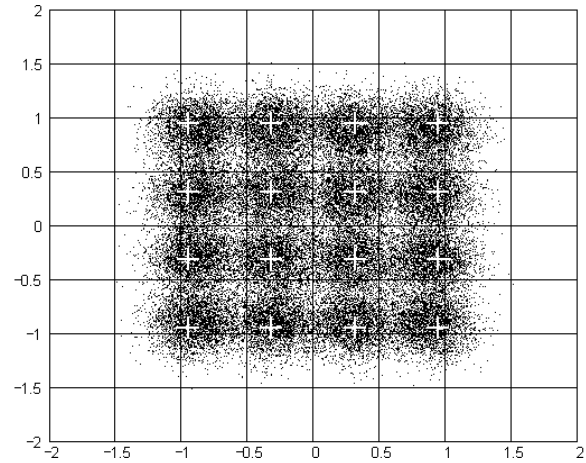


Fig. A.29b:  $\Psi$  (CONC)

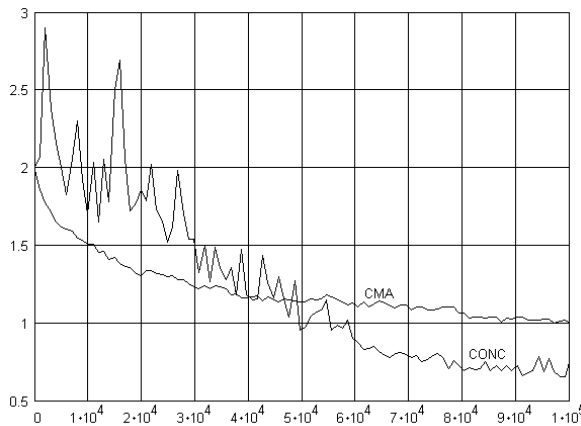


Fig. A.29c: ISI(*i*)

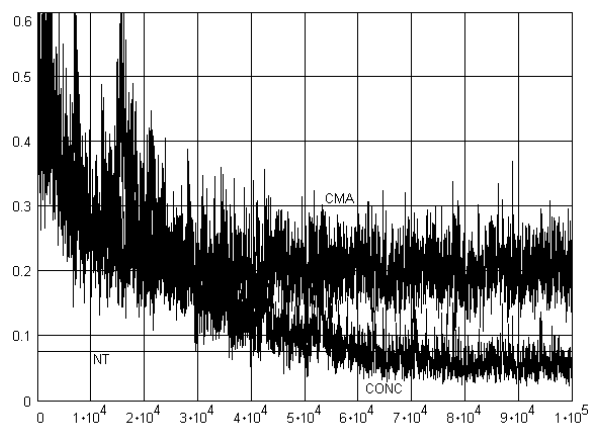


Fig. A.29d: MSE(*i*)

Figura A.29: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M14, modulação 16-QAM ( $\gamma=1.32$ ), SNR=25dB. Parâmetros:  $N_a = 100000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1.2 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 6$ .

Modulação 16-QAM SNR=25dB – Canal M15

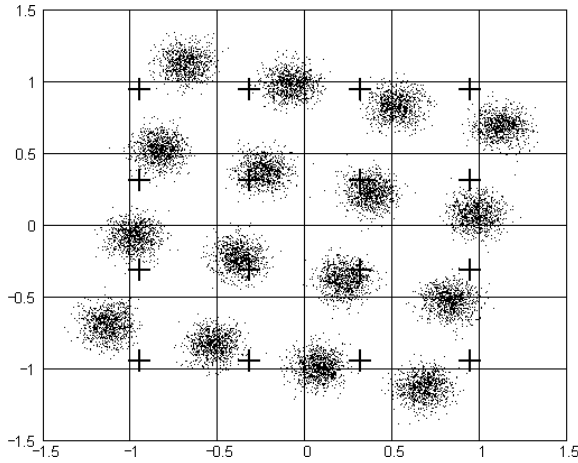


Fig. A.30a:  $\Gamma$  (CMA)

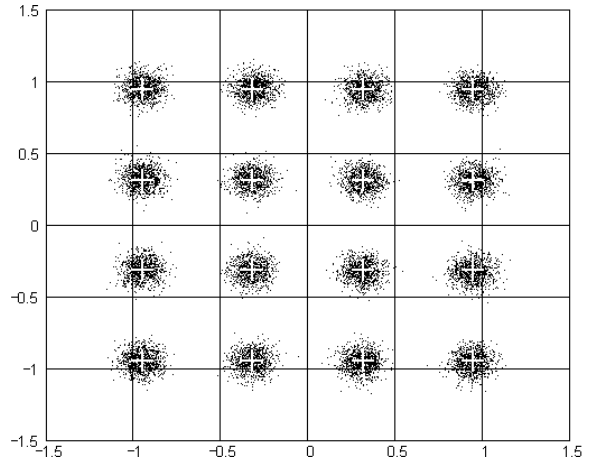


Fig. A.30b:  $\Psi$  (CONC)

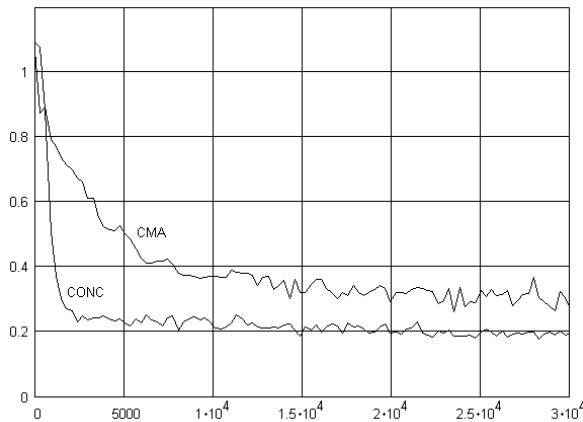


Fig. A.30c: ISI(*i*)

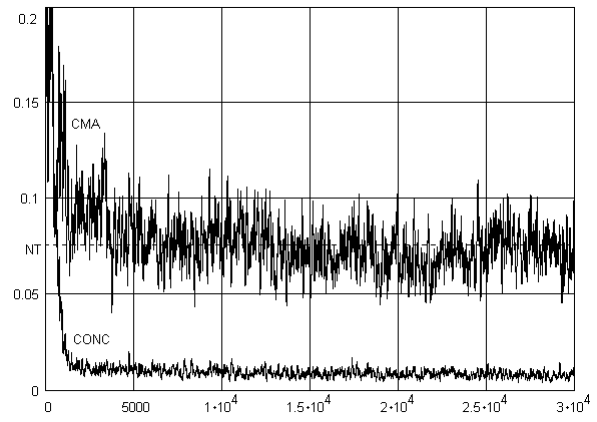


Fig. A.30d: MSE(*i*)

Figura A.30: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M15, modulação 16-QAM ( $\gamma=1.32$ ), SNR=25dB. Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 8$ .

## Modulação 16-QAM SNR=15dB – Canal M1

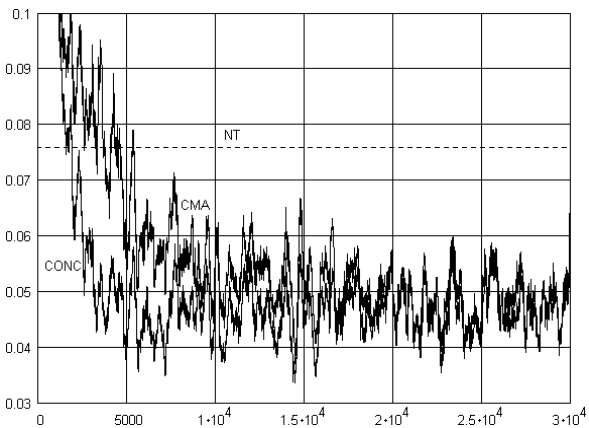
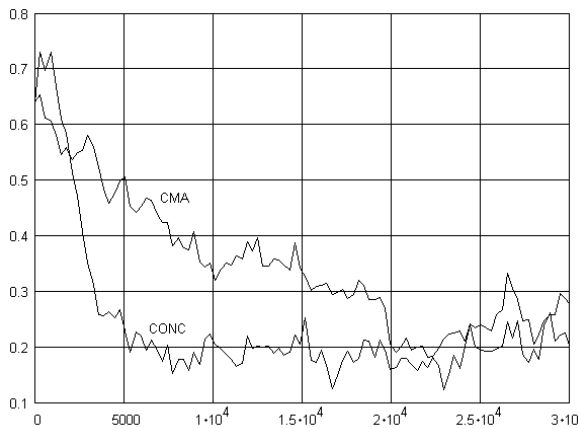
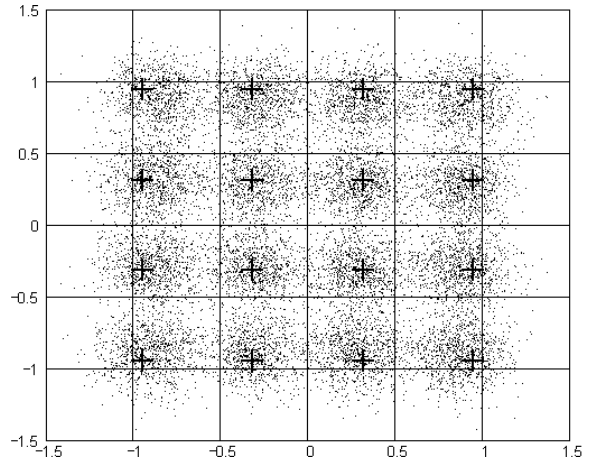
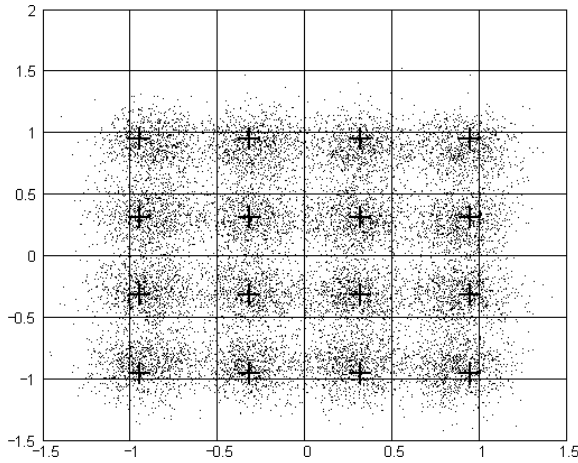


Figura A.31: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M1, modulação 16-QAM ( $\gamma=1.32$ ), SNR=15dB. Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 3 \times 10^{-3}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 8$ .

## Modulação 16-QAM SNR=15dB – Canal M2

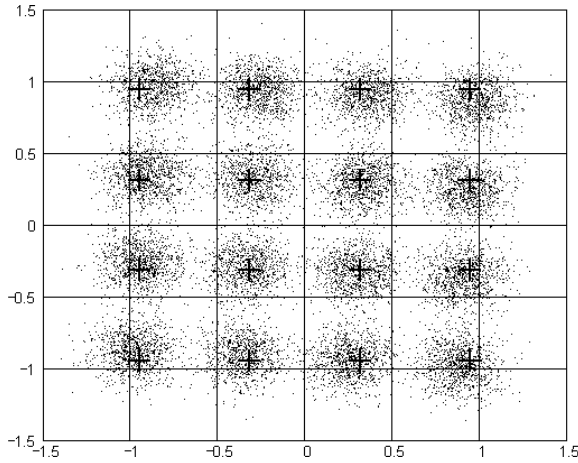


Fig. A.32a:  $\Gamma$  (CMA)

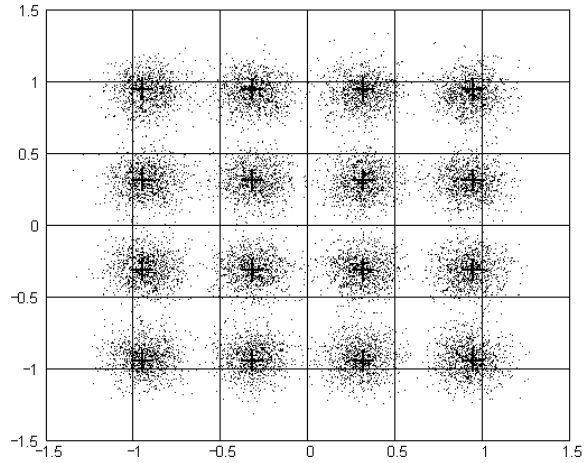


Fig. A.32b:  $\Psi$  (CONC)

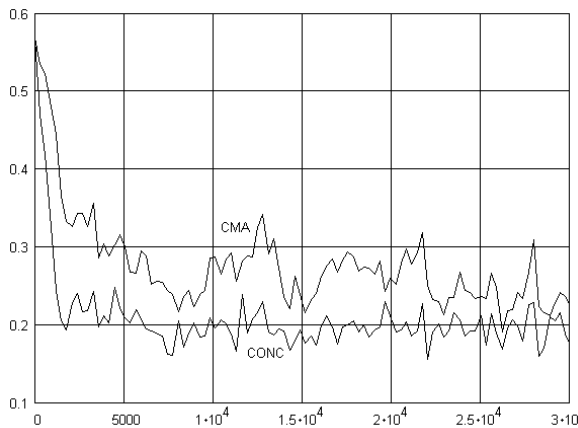


Fig. A.32c: ISI(*i*)

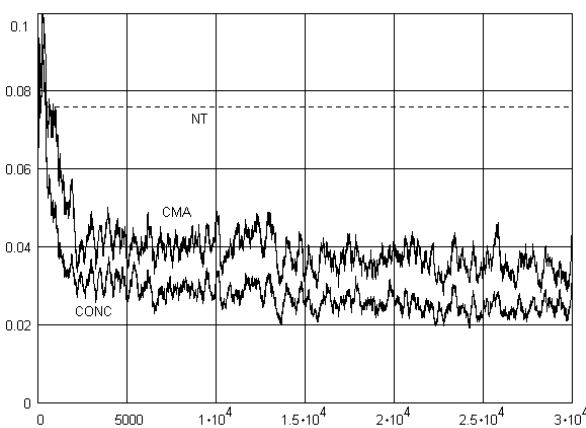


Fig. A.32d: MSE(*i*)

Figura A.32: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M2, modulação 16-QAM ( $\gamma=1.32$ ), SNR=15dB.

Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 2 \times 10^{-3}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 8$ .

## Modulação 16-QAM SNR=15dB – Canal M3

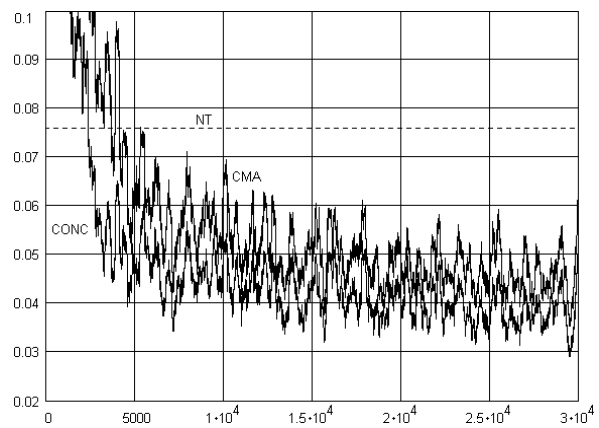
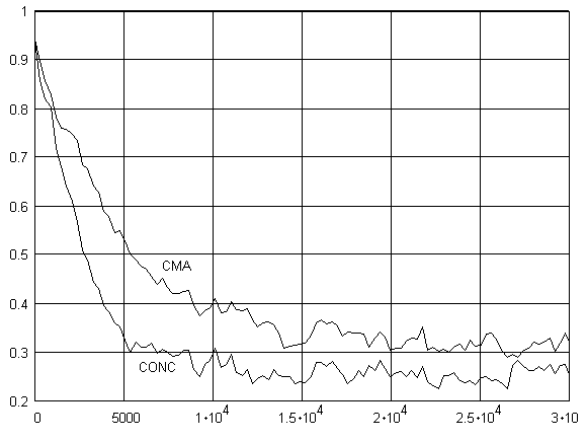
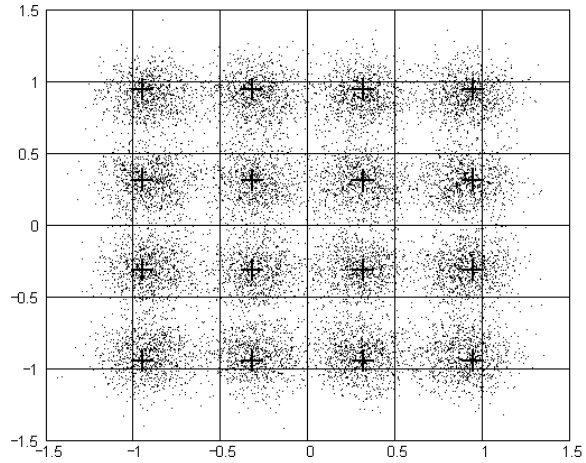
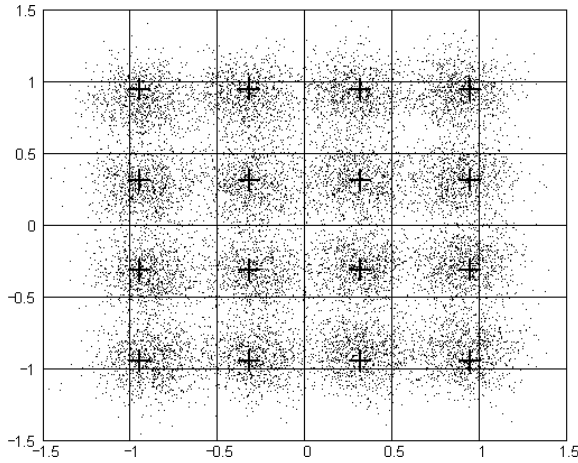


Figura A.33: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M3, modulação 16-QAM ( $\gamma=1.32$ ), SNR=15dB. Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 2 \times 10^{-3}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 8$ .

## Modulação 16-QAM SNR=15dB – Canal M4

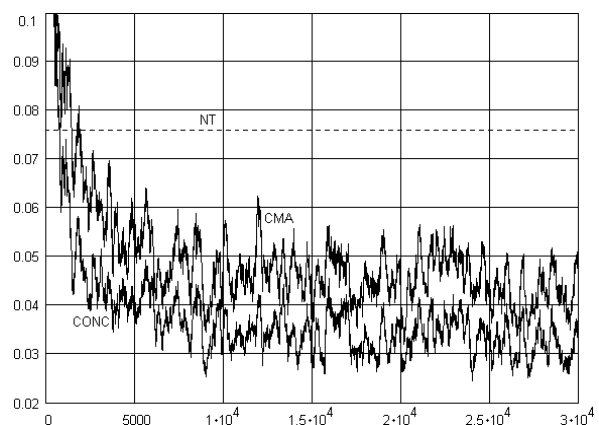
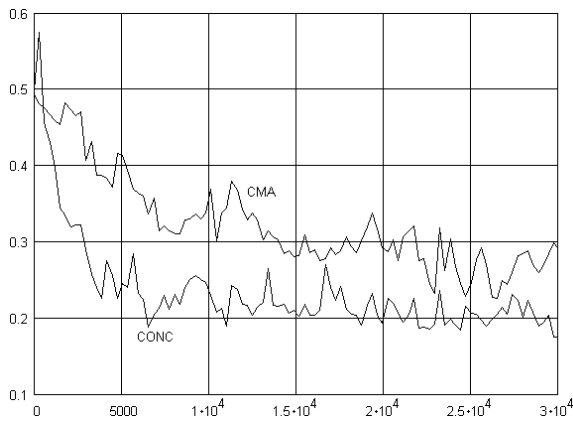
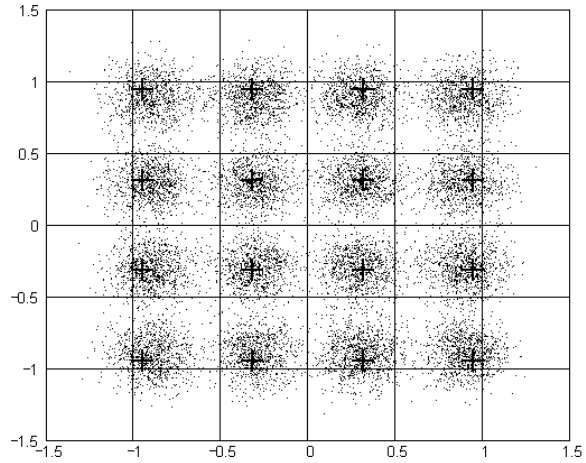
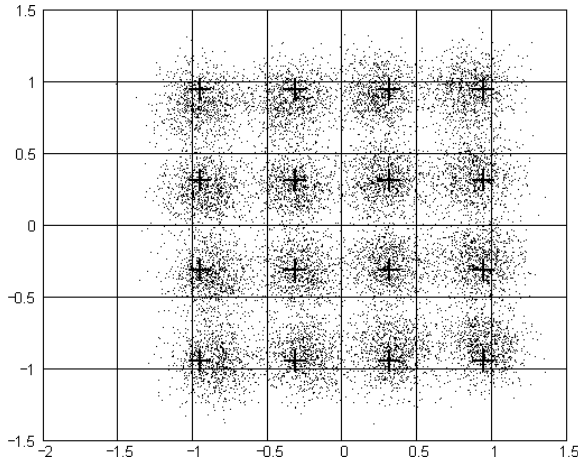


Figura A.34: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M4, modulação 16-QAM ( $\gamma=1.32$ ), SNR=15dB. Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 4 \times 10^{-3}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 5$ .

## Modulação 16-QAM SNR=15dB – Canal M5

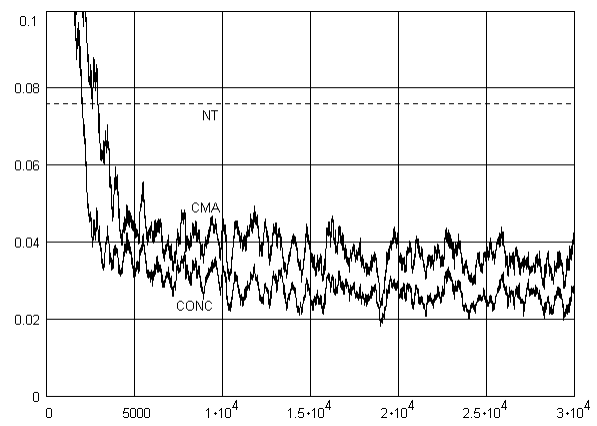
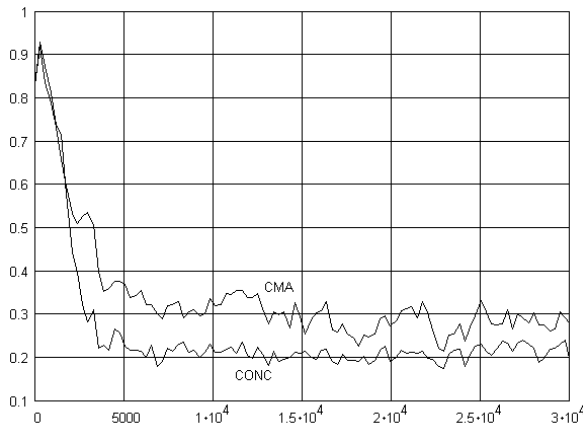
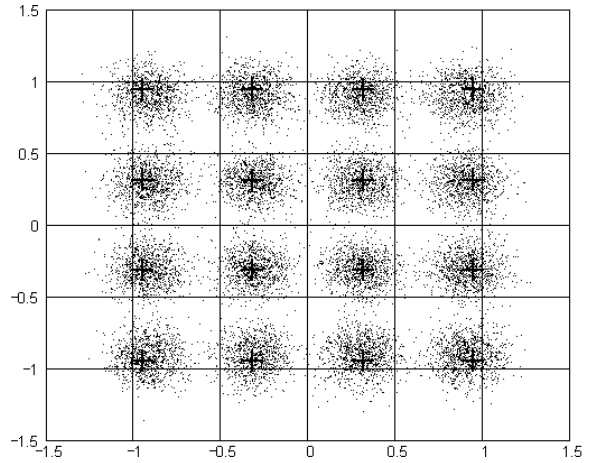
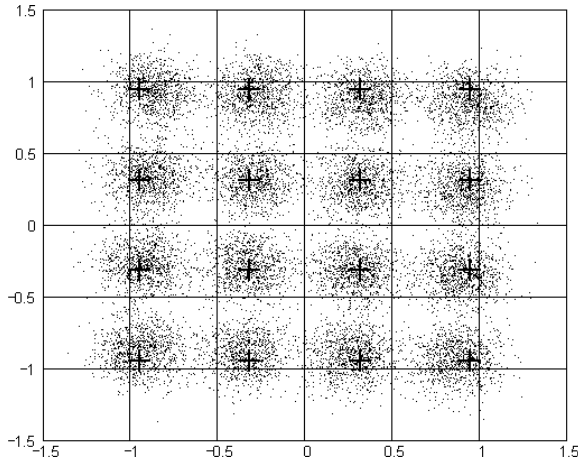


Figura A.35: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M5, modulação 16-QAM ( $\gamma=1.32$ ), SNR=15dB. Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 2 \times 10^{-3}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 8$ .



## Modulação 16-QAM SNR=15dB – Canal M6

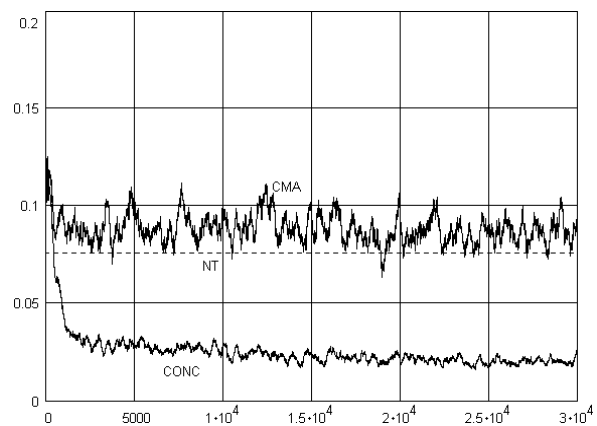
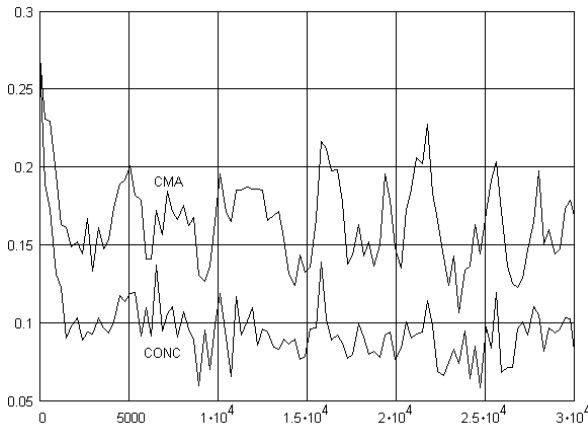
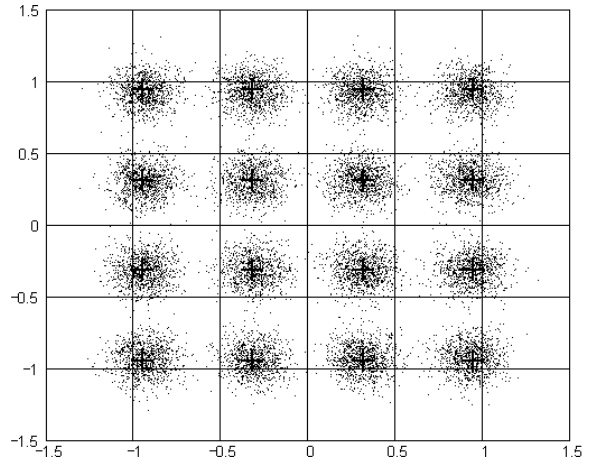
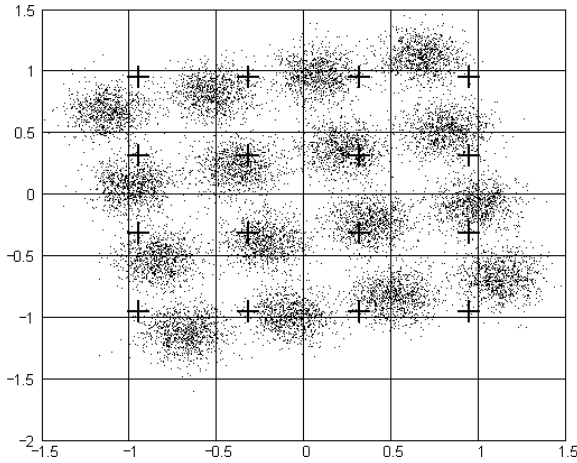


Figura A.36: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M6, modulação 16-QAM ( $\gamma=1.32$ ), SNR=15dB. Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 2 \times 10^{-3}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 8$ .

## Modulação 16-QAM SNR=15dB – Canal M7

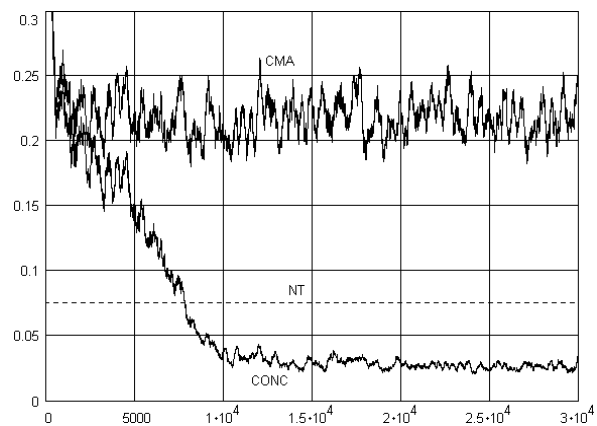
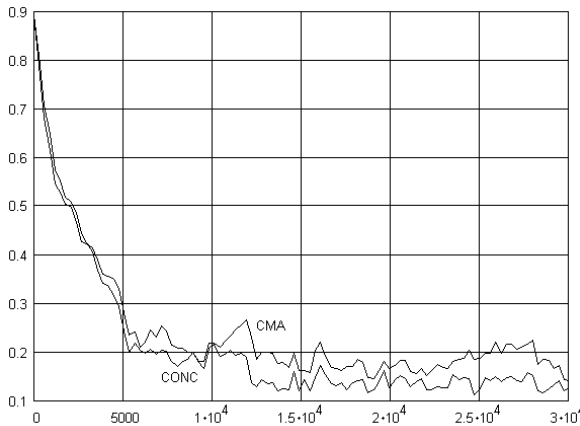
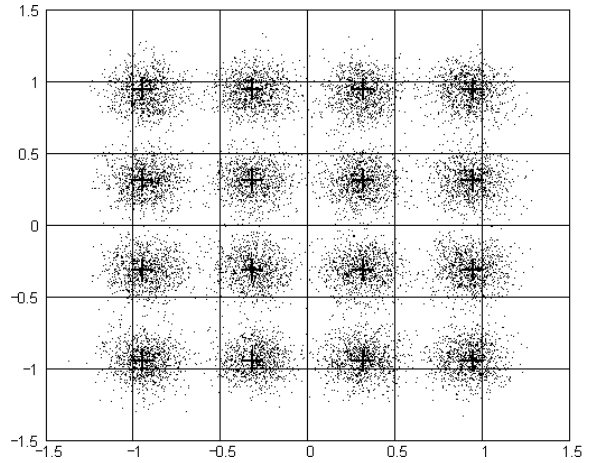
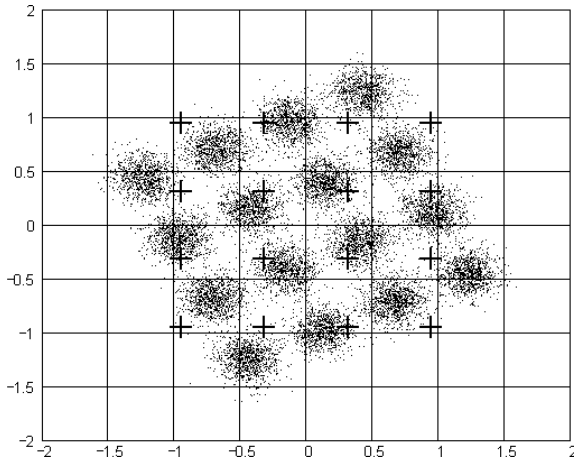


Figura A.37: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M7, modulação 16-QAM ( $\gamma=1.32$ ), SNR=15dB. Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-3}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 8$ .

## Modulação 16-QAM SNR=15dB – Canal M8

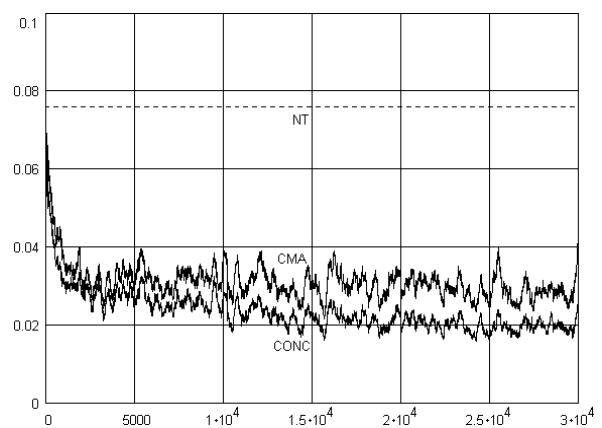
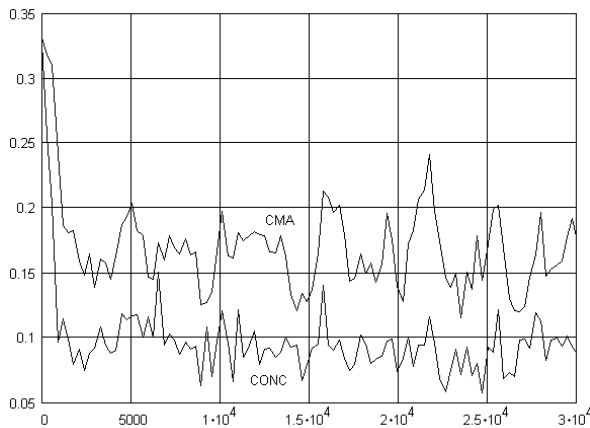
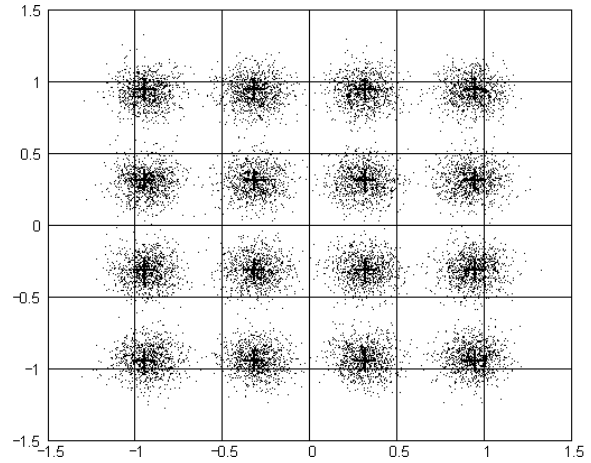
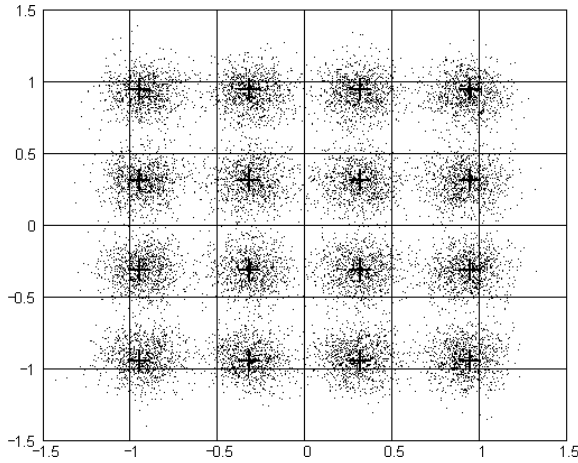


Figura A.38: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M8, modulação 16-QAM ( $\gamma=1.32$ ), SNR=15dB. Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 2 \times 10^{-3}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 8$ .

## Modulação 16-QAM SNR=15dB – Canal M9

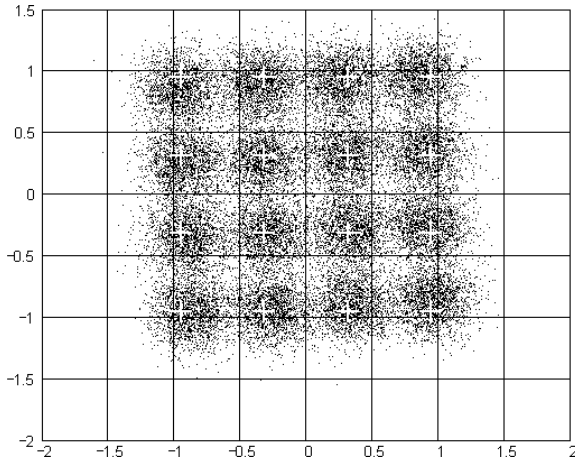


Fig. A.39a:  $\Gamma$  (CMA)

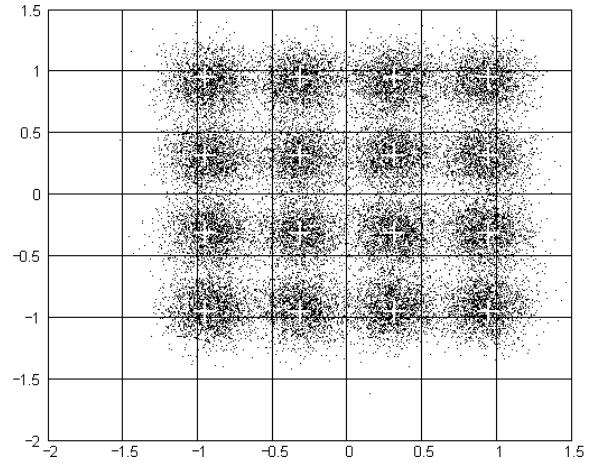


Fig. A.39b:  $\Psi$  (CONC)

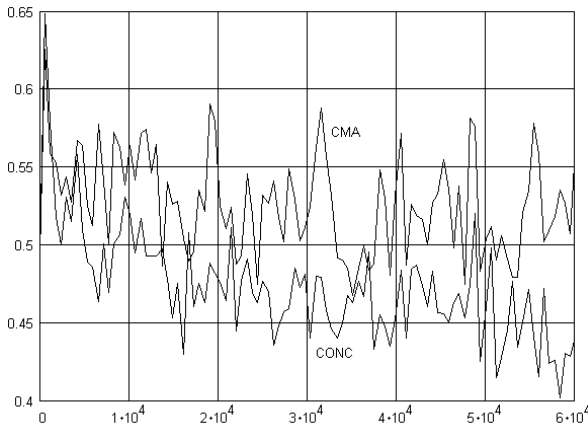


Fig. A.39c: ISI(*i*)

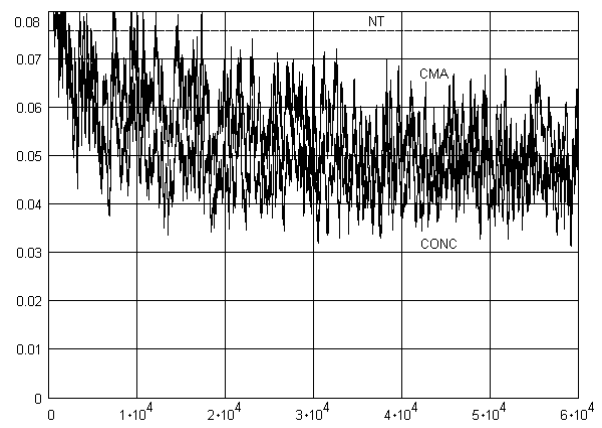


Fig. A.39d: MSE(*i*)

Figura A.39: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M9, modulação 16-QAM ( $\gamma=1.32$ ), SNR=15dB. Parâmetros:  $N_a = 60000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 4 \times 10^{-3}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 8$ .

## Modulação 16-QAM SNR=15dB – Canal M10

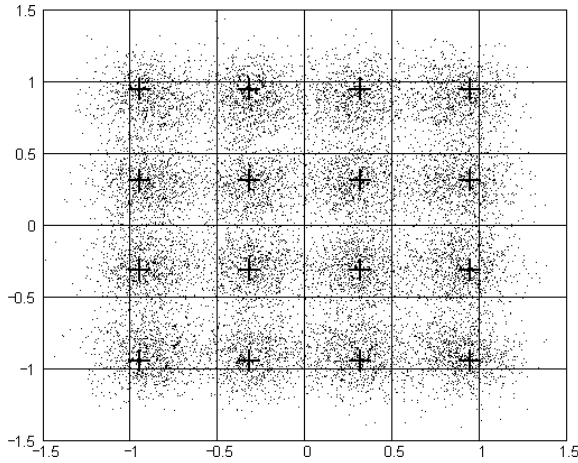


Fig. A.40a:  $\Gamma$  (CMA)

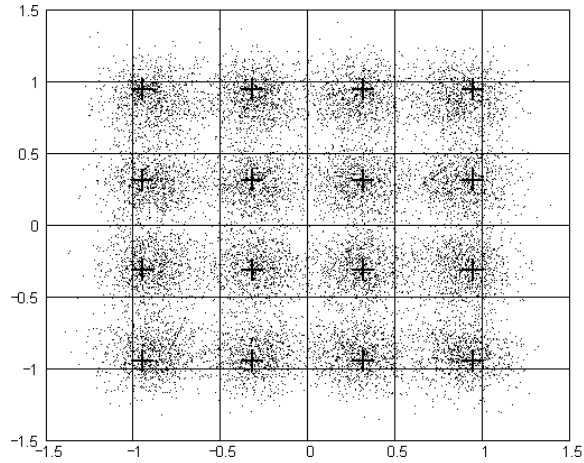


Fig. A.40b:  $\Psi$  (CONC)

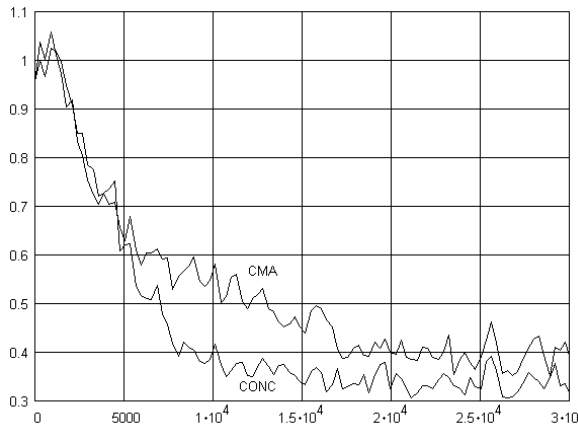


Fig. A.40c: ISI(*i*)

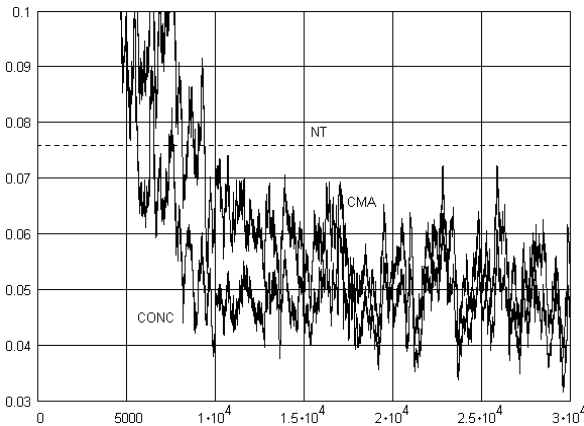


Fig. A.40d: MSE(*i*)

Figura A.40: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M10, modulação 16-QAM ( $\gamma=1.32$ ), SNR=15dB.

Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 2 \times 10^{-3}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 3$ .

## Modulação 16-QAM SNR=15dB – Canal M11

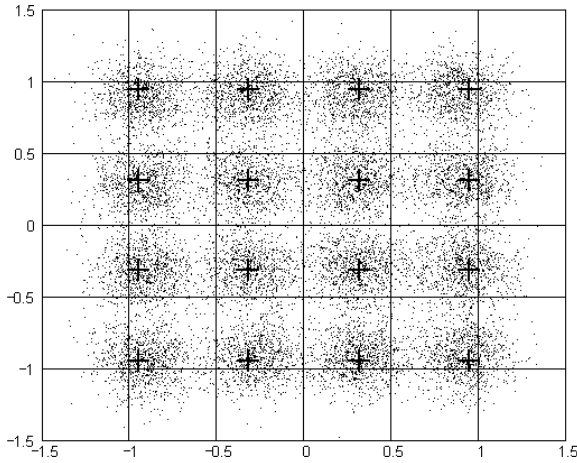


Fig. A.41a:  $\Gamma$  (CMA)

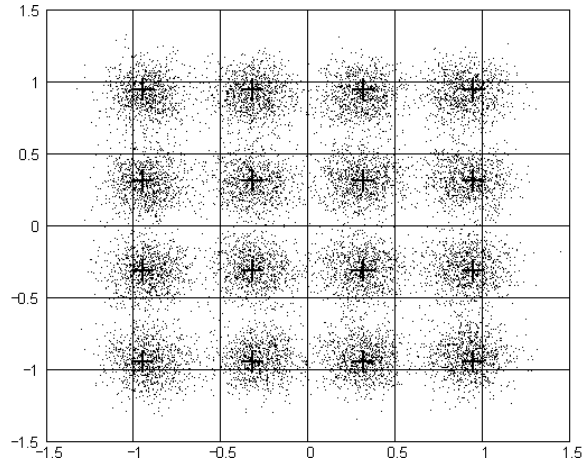


Fig. A.41b:  $\Psi$  (CONC)

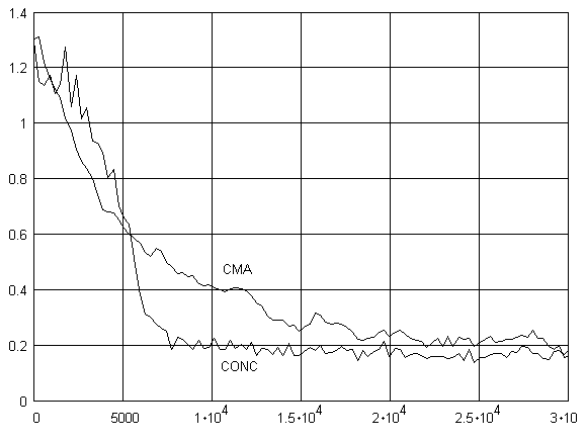


Fig. A.41c: ISI(*i*)

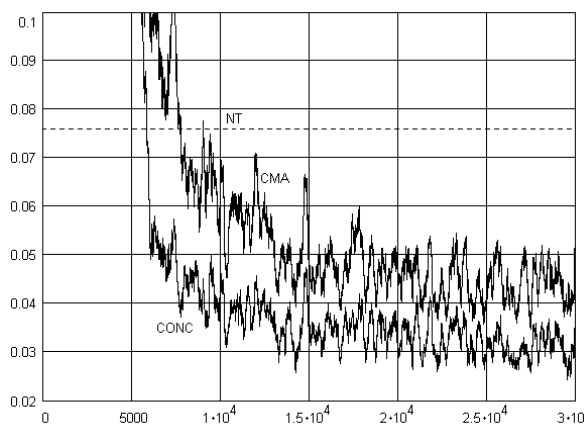


Fig. A.41d: MSE(*i*)

Figura A.41: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M11, modulação 16-QAM ( $\gamma=1.32$ ), SNR=15dB.

Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 6 \times 10^{-3}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 8$ .

## Modulação 16-QAM SNR=15dB – Canal M12

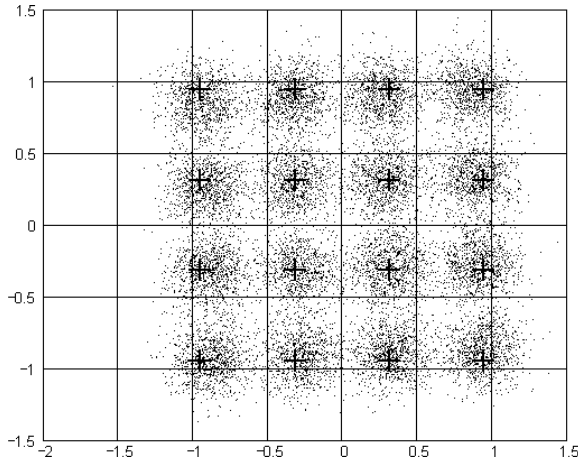


Fig. A.42a:  $\Gamma$  (CMA)

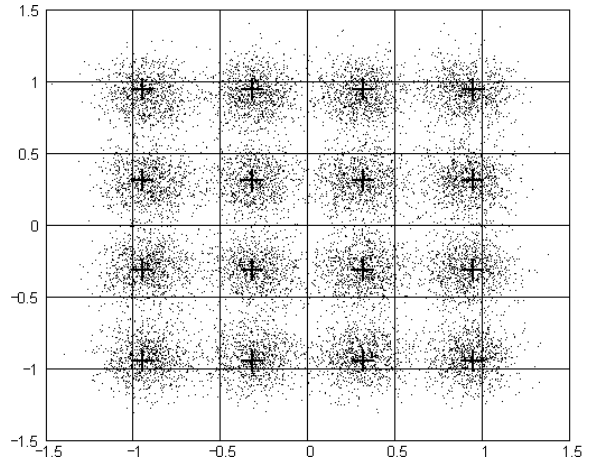


Fig. A.42b:  $\Psi$  (CONC)

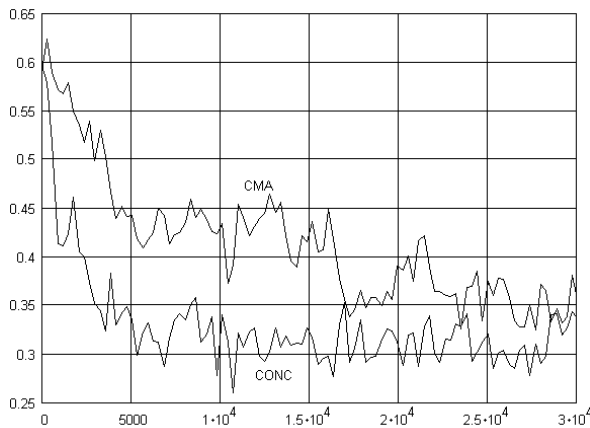


Fig. A.42c: ISI(*i*)

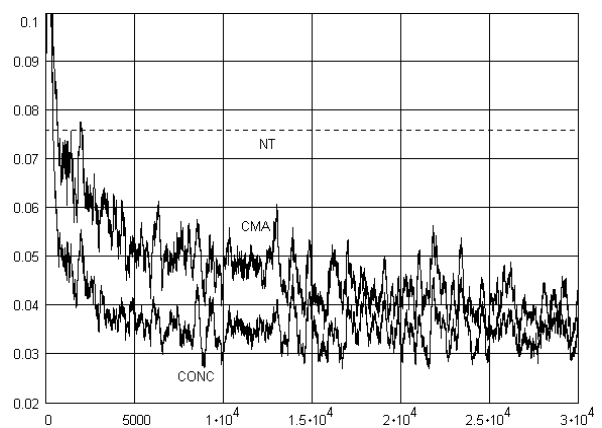


Fig. A.42d: MSE(*i*)

Figura A.42: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M12, modulação 16-QAM ( $\gamma=1.32$ ), SNR=15dB.

Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 5 \times 10^{-3}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 1$ .

## Modulação 16-QAM SNR=15dB – Canal M13

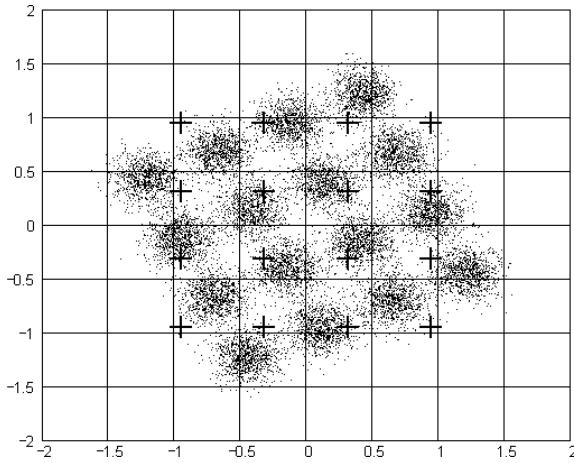


Fig. A.43a:  $\Gamma$  (CMA)

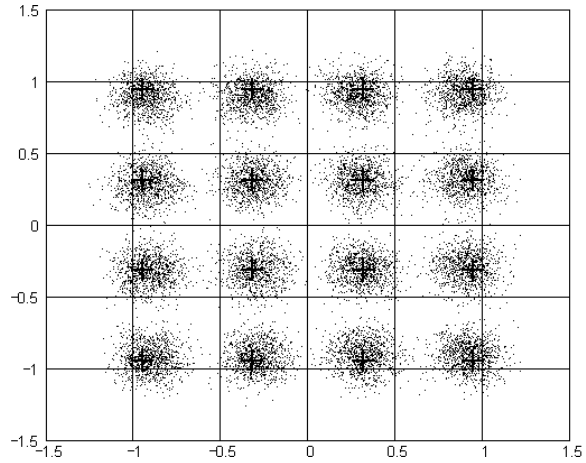


Fig. A.43b:  $\Psi$  (CONC)

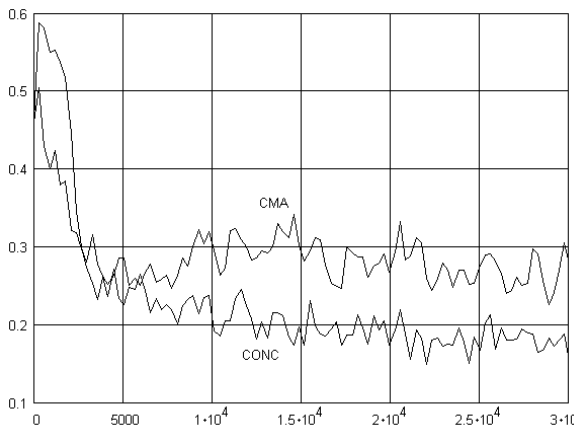


Fig. A.43c: ISI( $i$ )

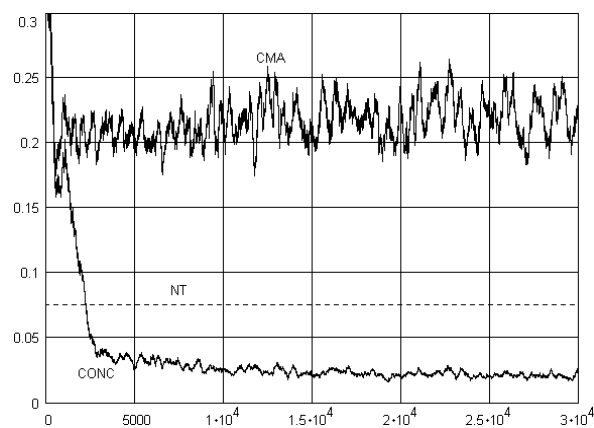


Fig. A.43d: MSE( $i$ )

Figura A.43: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M13, modulação 16-QAM ( $\gamma=1.32$ ), SNR=15dB.

Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 4 \times 10^{-3}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 3$ .



## Modulação 16-QAM SNR=15dB – Canal M14

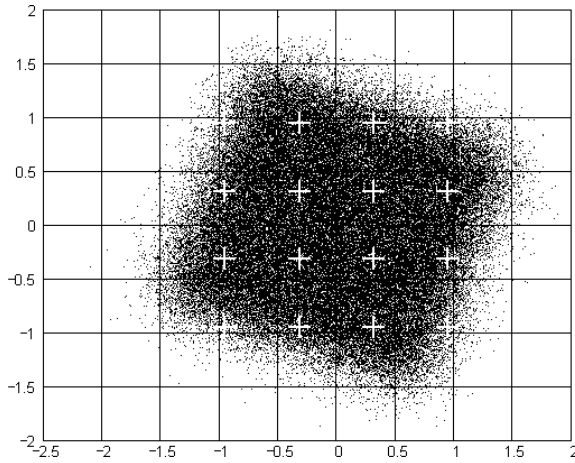


Fig. A.44a:  $\Gamma$  (CMA)

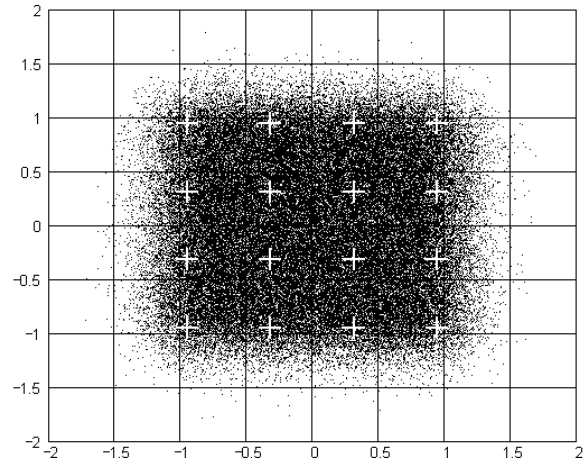


Fig. A.44b:  $\Psi$  (CONC)

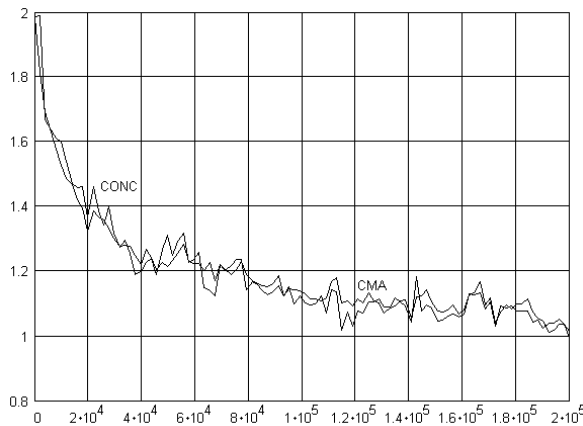


Fig. A.44c: ISI(*i*)

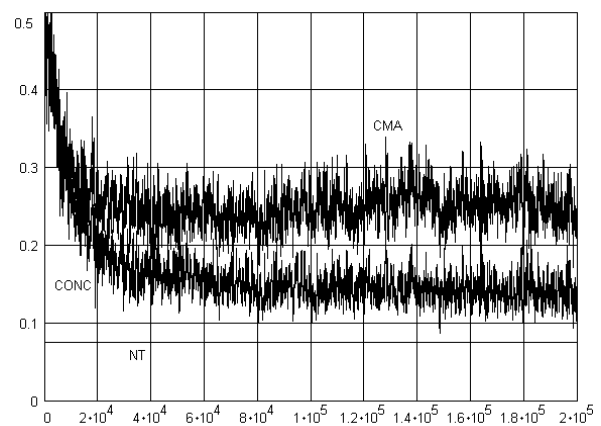


Fig. A.44d: MSE(*i*)

Figura A.44: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M14, modulação 16-QAM ( $\gamma=1.32$ ), SNR=15dB. Parâmetros:  $N_a = 200000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 3 \times 10^{-3}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 6$ .

## Modulação 16-QAM SNR=15dB – Canal M15

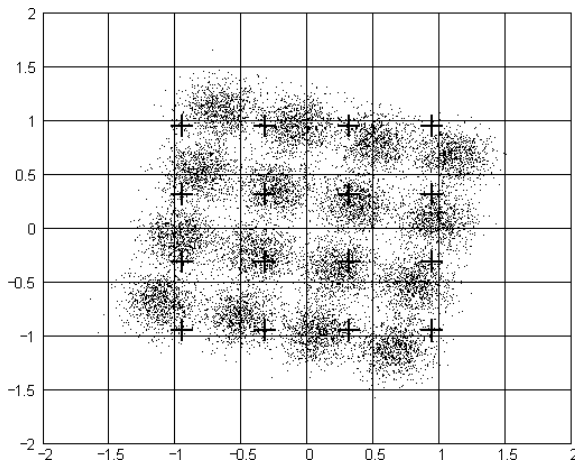


Fig. A.45a:  $\Gamma$  (CMA)

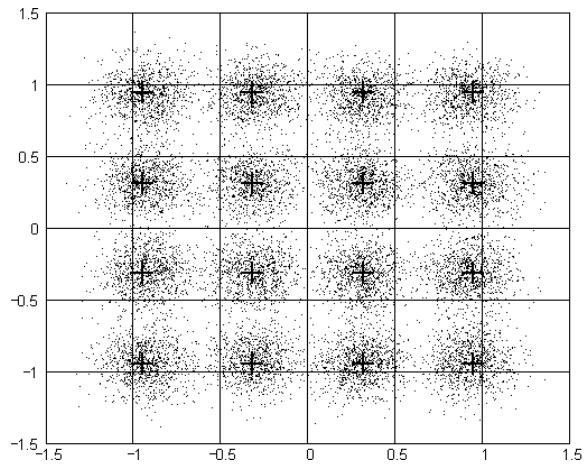


Fig. A.45b:  $\Psi$  (CONC)

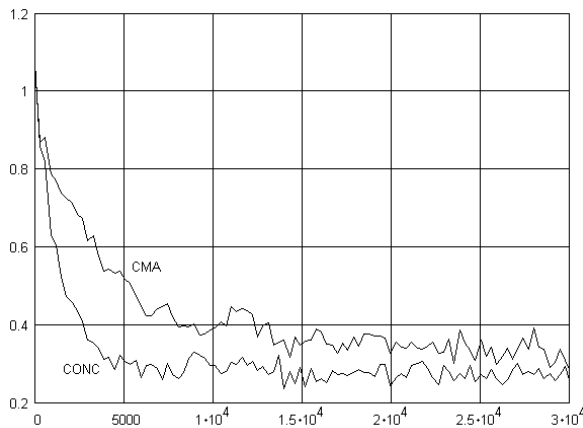


Fig. A.45c: ISI(*i*)

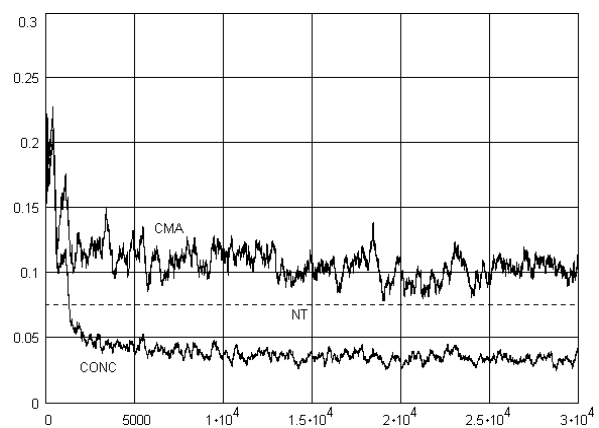


Fig. A.45d: MSE(*i*)

Figura A.45: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M15, modulação 16-QAM ( $\gamma=1.32$ ), SNR=15dB.

Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 5 \times 10^{-3}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 8$ .

## Modulação 64-QAM SNR=35dB – Canal M1

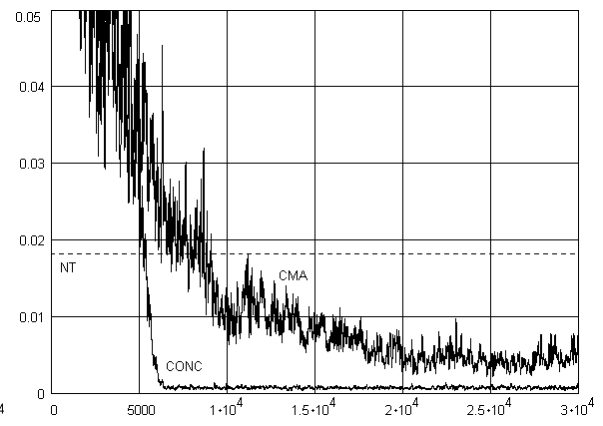
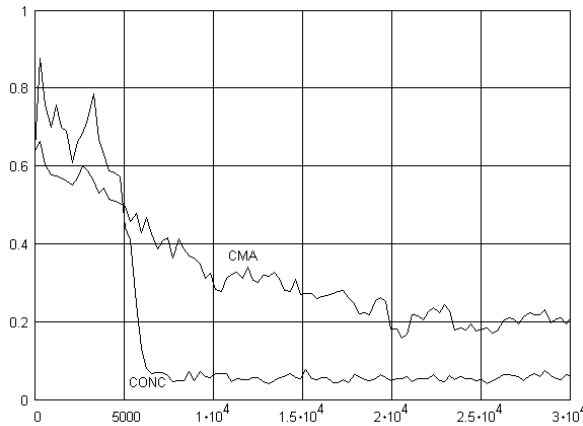
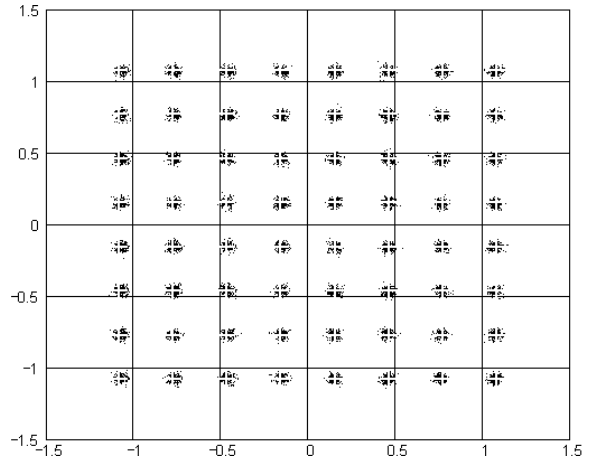
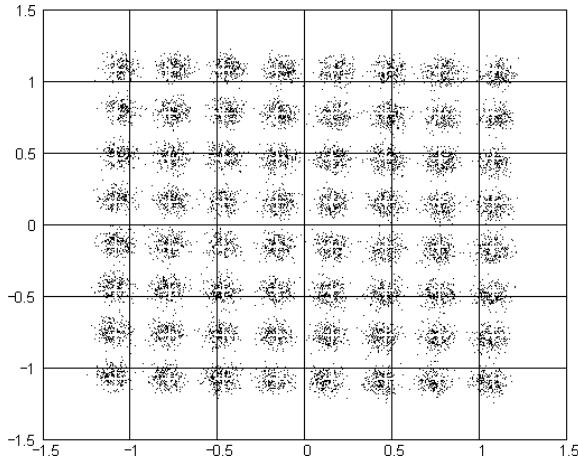


Figura A.46: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M1, modulação 64-QAM ( $\gamma = 1.380953$ ), SNR=35dB. Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 8$ .

## Modulação 64-QAM SNR=35dB – Canal M2

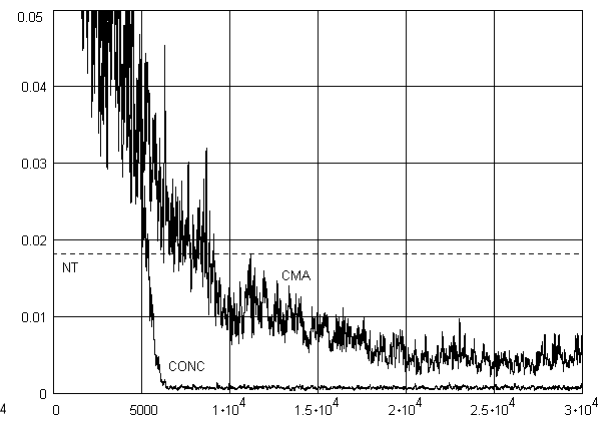
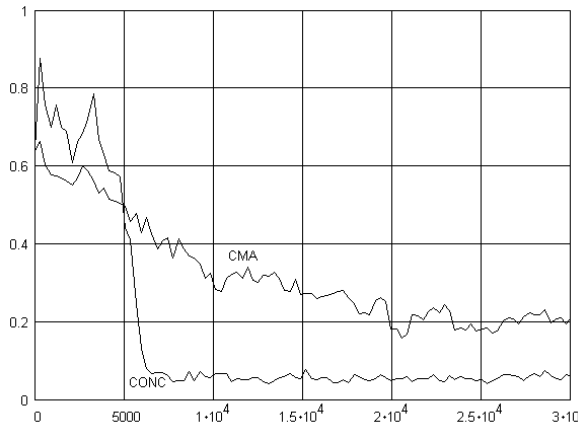
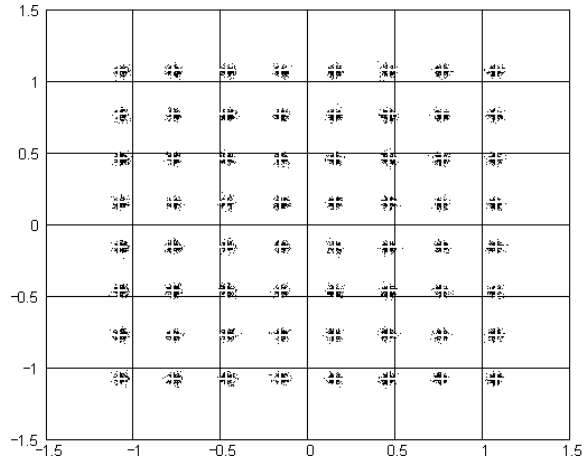
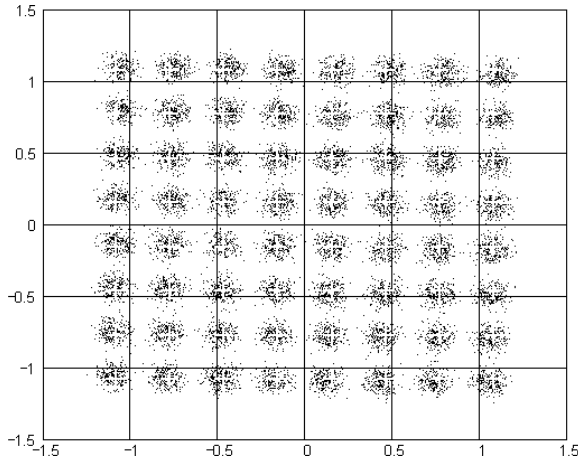


Figura A.47: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M2, modulação 64-QAM ( $\gamma = 1.380953$ ), SNR=35dB. Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 8$ .

## Modulação 64-QAM SNR=35dB – Canal M3

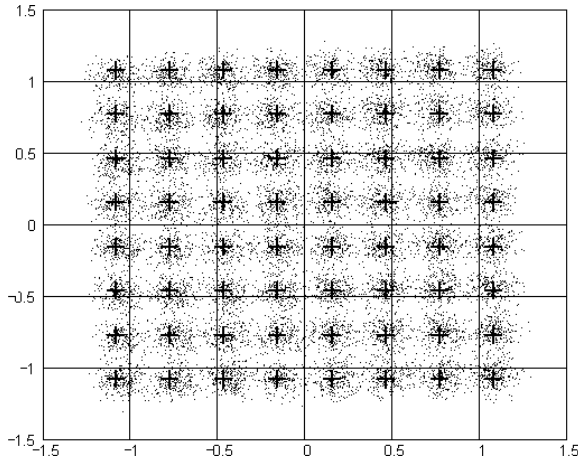


Fig. A.48a:  $\Gamma$  (CMA)

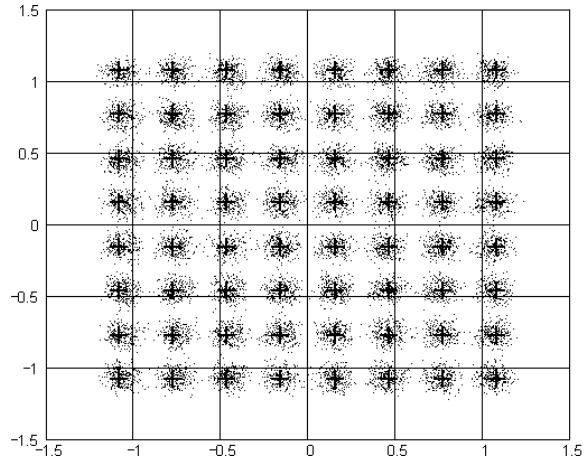


Fig. A.48b:  $\Psi$  (CONC)

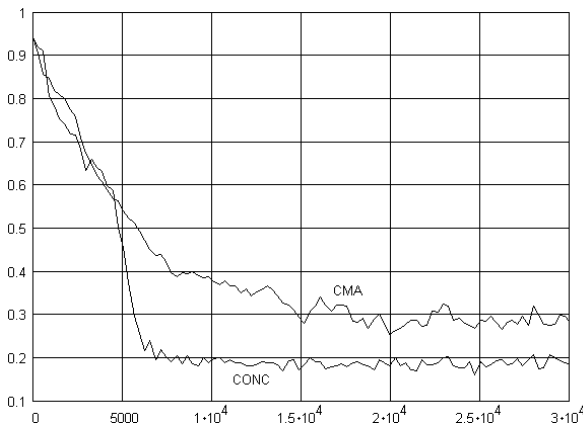


Fig. A.48c: ISI(*i*)

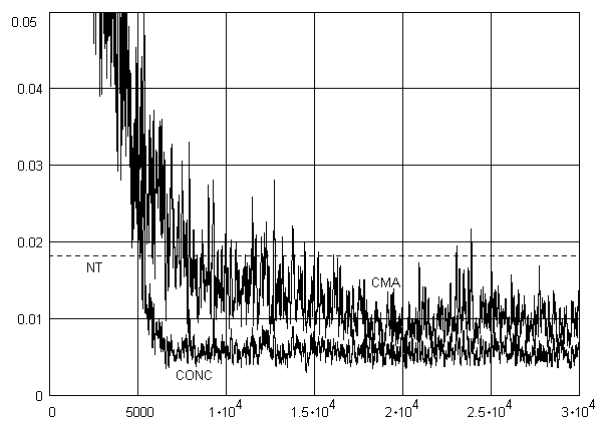


Fig. A.48d: MSE(*i*)

Figura A.48: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M3, modulação 64-QAM ( $\gamma = 1.380953$ ), SNR=35dB. Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 8$ .

## Modulação 64-QAM SNR=35dB – Canal M4

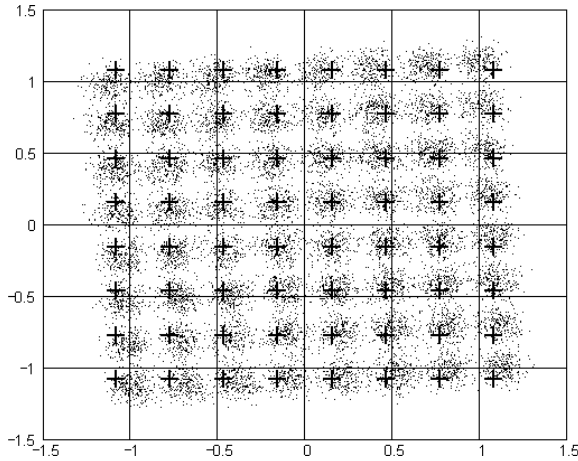


Fig. A.49a:  $\Gamma$  (CMA)

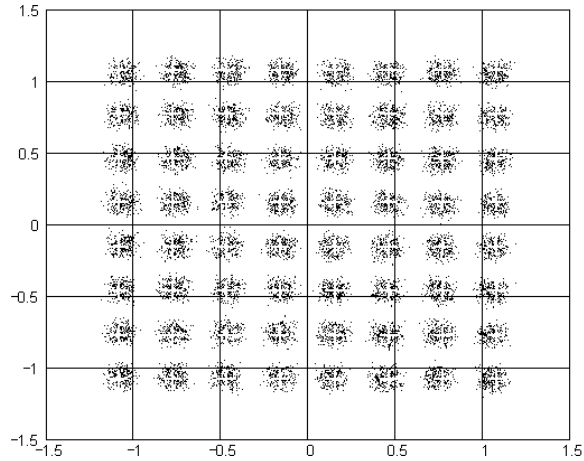


Fig. A.49b:  $\Psi$  (CONC)

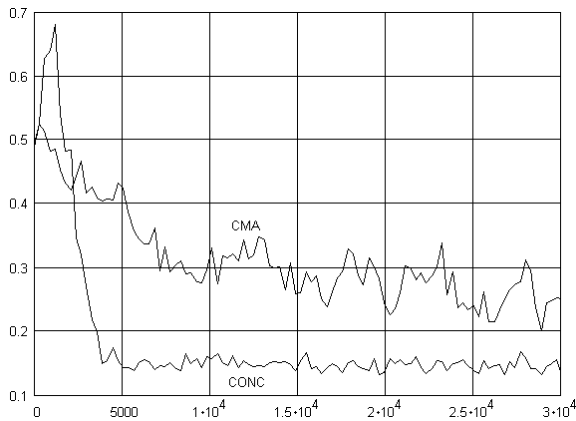


Fig. A.49c: ISI(*i*)

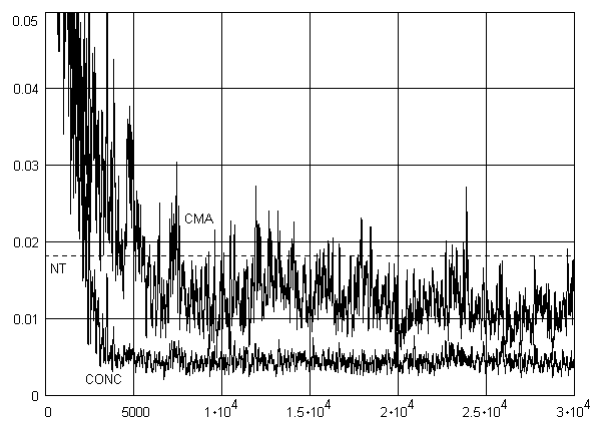


Fig. A.49d: MSE(*i*)

Figura A.49: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M4, modulação 64-QAM ( $\gamma = 1.380953$ ), SNR=35dB. Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 6$ .

## Modulação 64-QAM SNR=35dB – Canal M5

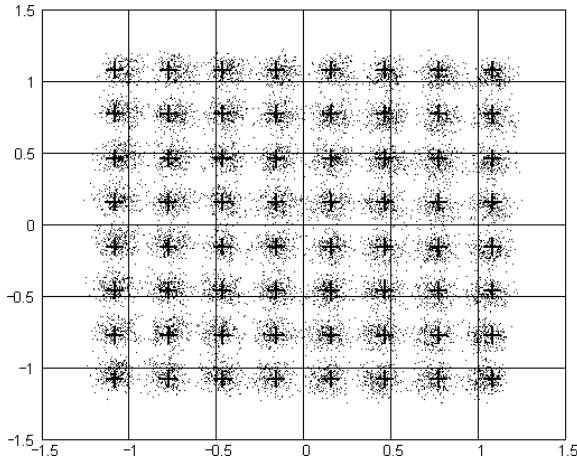


Fig. A.50a:  $\Gamma$  (CMA)

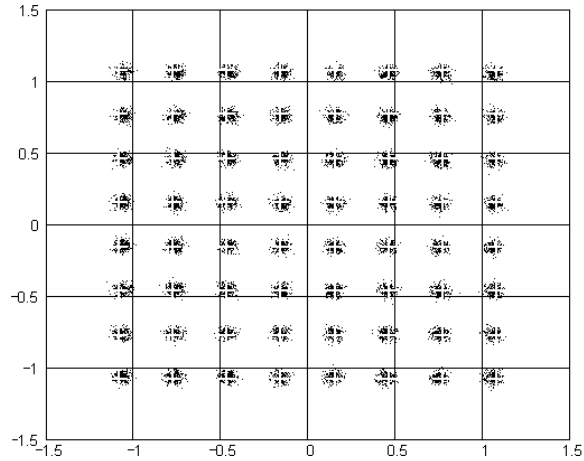


Fig. A.50b:  $\Psi$  (CONC)

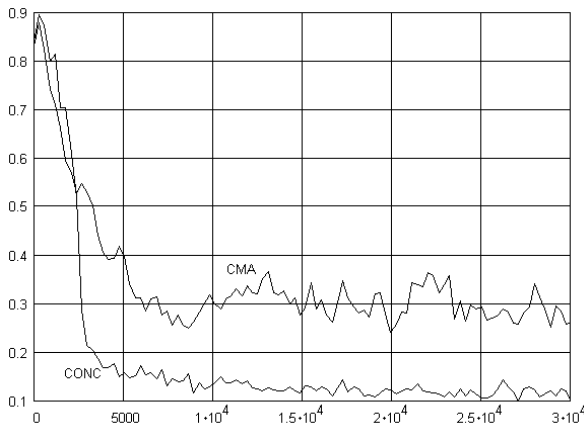


Fig. A.50c: ISI(*i*)

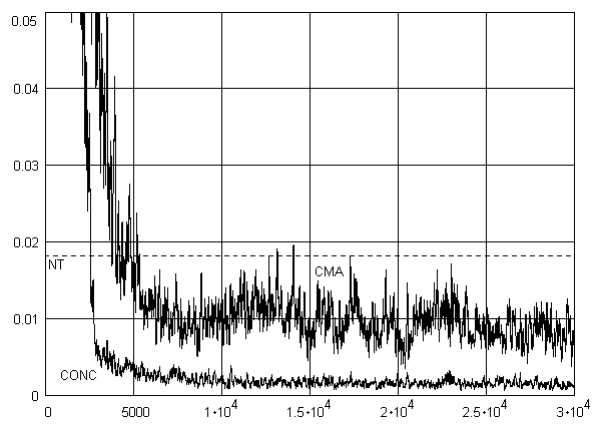


Fig. A.50d: MSE(*i*)

Figura A.50: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M5, modulação 64-QAM ( $\gamma = 1.380953$ ), SNR=35dB. Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 8$ .

## Modulação 64-QAM SNR=35dB – Canal M6

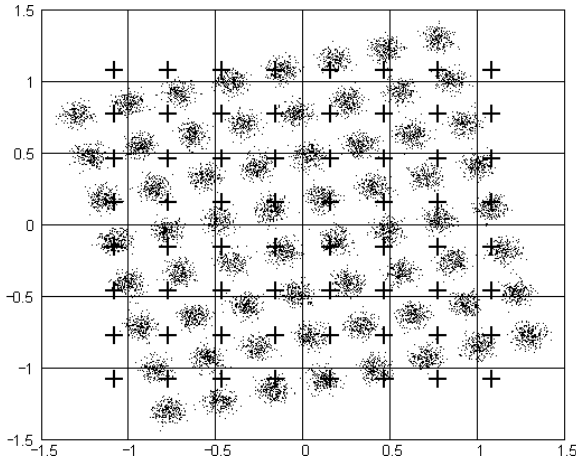


Fig. A.51a:  $\Gamma$  (CMA)

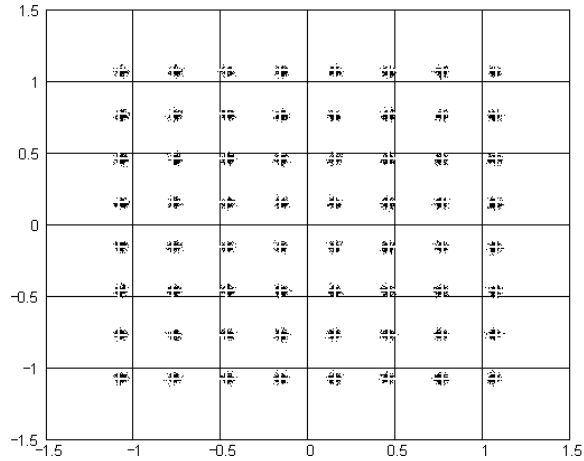


Fig. A.51b:  $\Psi$  (CONC)

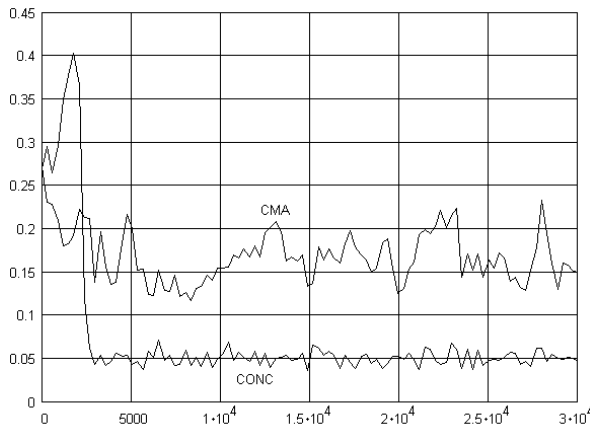


Fig. A.51c: ISI( $i$ )

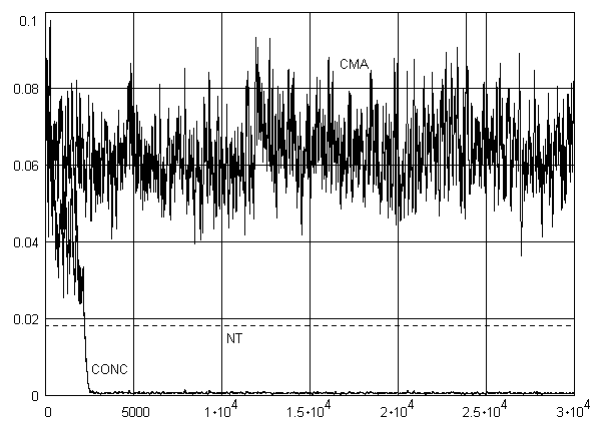


Fig. A.51d: MSE( $i$ )

Figura A.51: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M6, modulação 64-QAM ( $\gamma = 1.380953$ ), SNR=35dB. Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 8$ .



## Modulação 64-QAM SNR=35dB – Canal M7

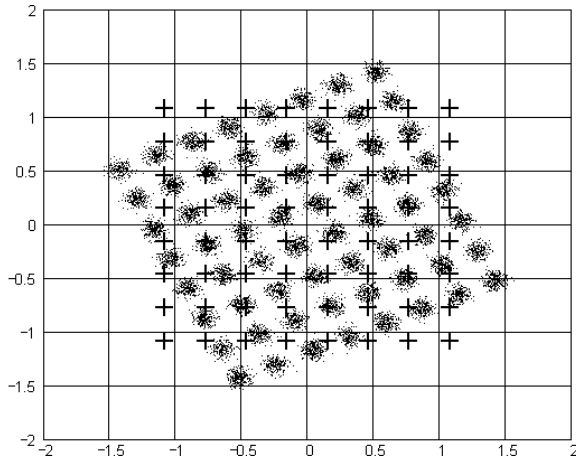


Fig. A.52a:  $\Gamma$  (CMA)

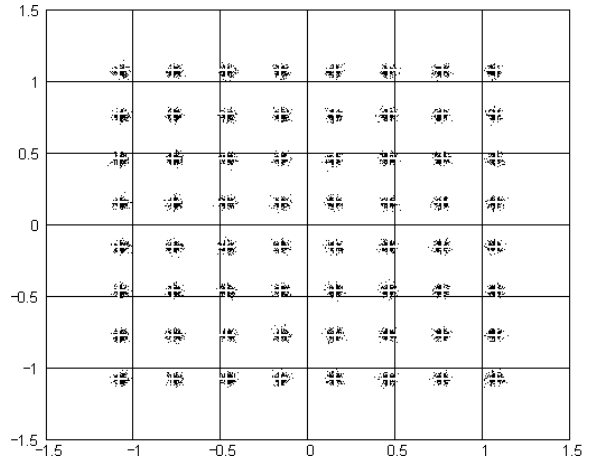


Fig. A.52b:  $\Psi$  (CONC)

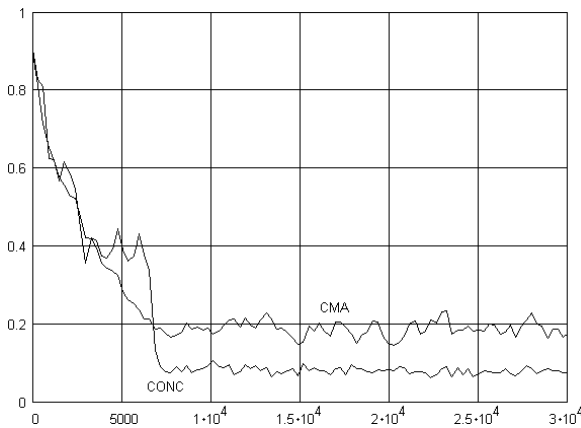


Fig. A.52c: ISI(*i*)

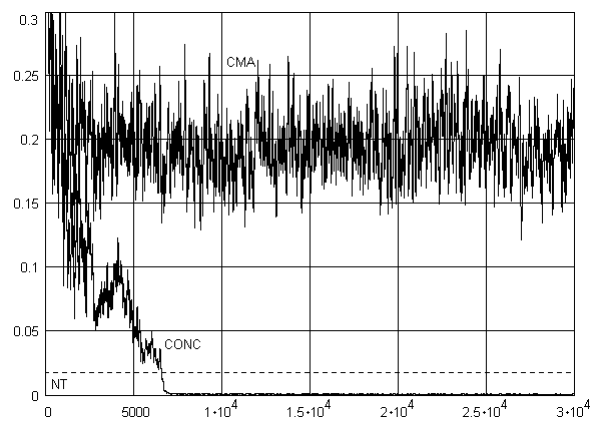


Fig. A.52d: MSE(*i*)

Figura A.52: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M7, modulação 64-QAM ( $\gamma = 1.380953$ ), SNR=35dB. Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 8$ .

## Modulação 64-QAM SNR=35dB – Canal M8

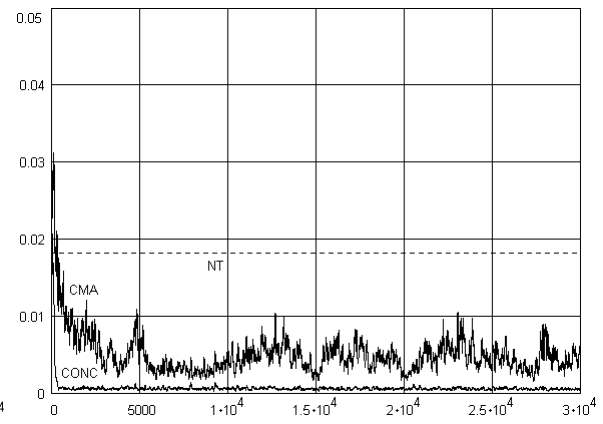
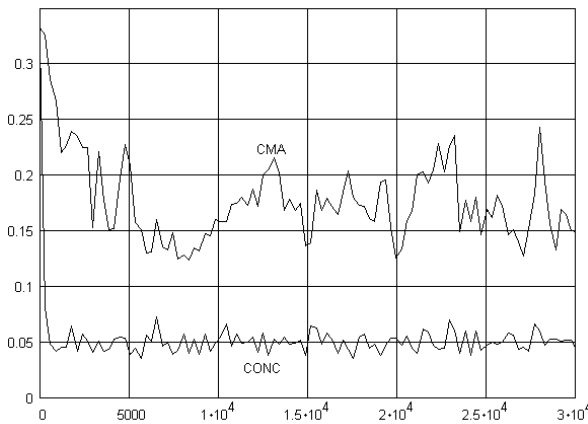
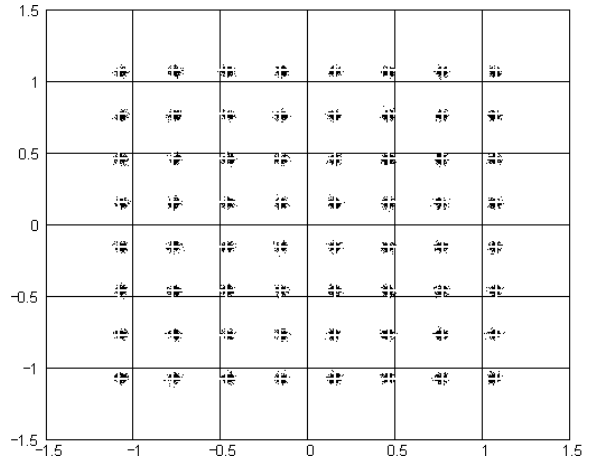
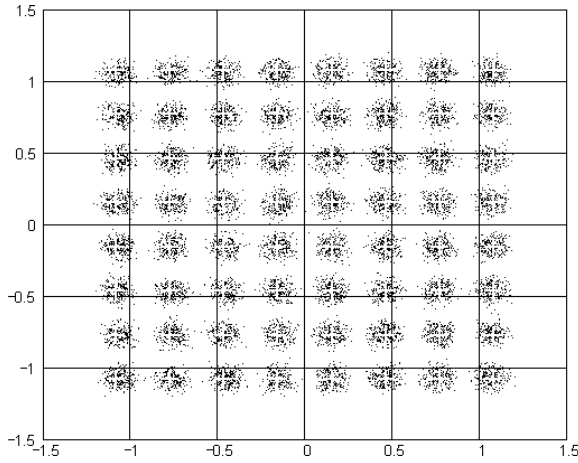


Figura A.53: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M8, modulação 64-QAM ( $\gamma = 1.380953$ ), SNR=35dB. Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 8$ .

## Modulação 64-QAM SNR=35dB – Canal M9

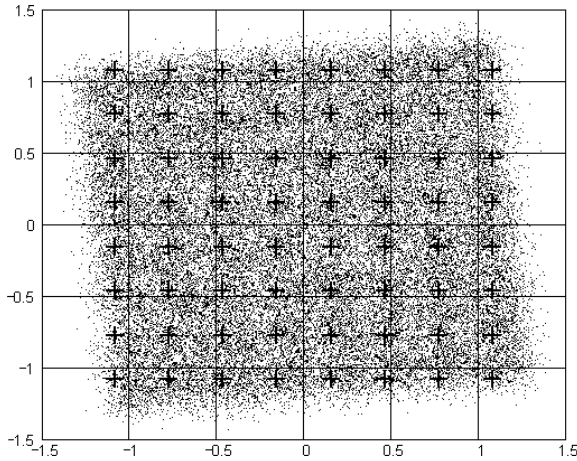


Fig. A.54a:  $\Gamma$  (CMA)

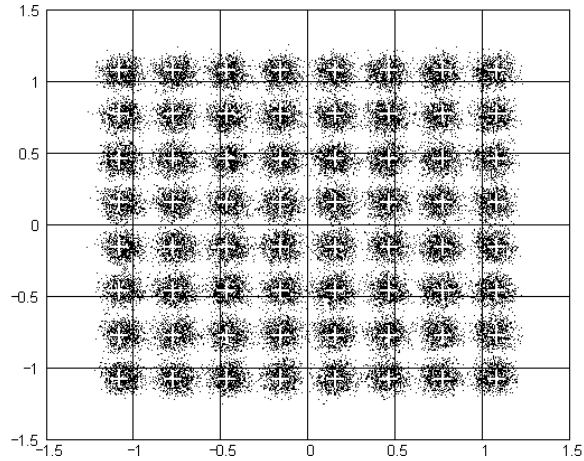


Fig. A.54b:  $\Psi$  (CONC)

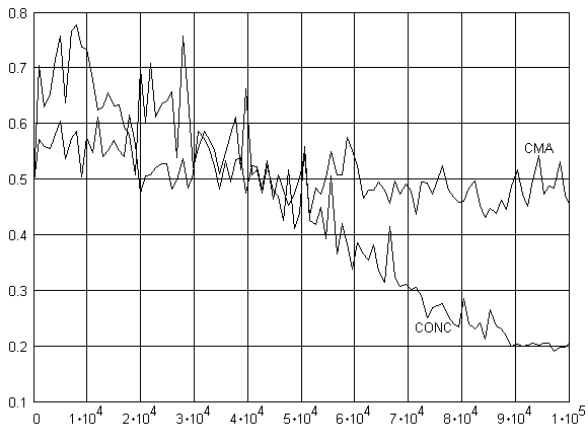


Fig. A.54c: ISI(*i*)

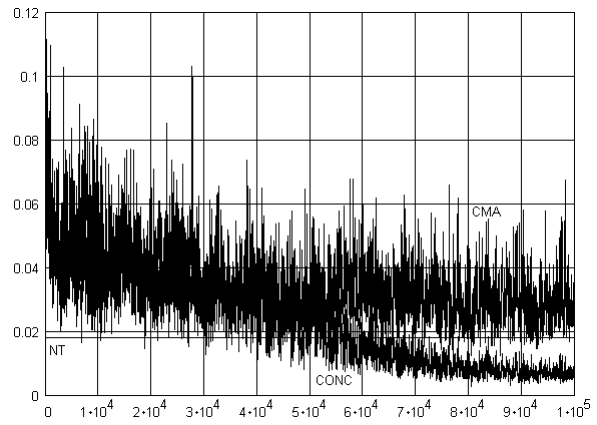


Fig. A.54d: MSE(*i*)

Figura A.54: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M9, modulação 64-QAM ( $\gamma = 1.380953$ ), SNR=35dB. Parâmetros:  $N_a = 100000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 2$ .

Modulação 64-QAM SNR=35dB – Canal M10

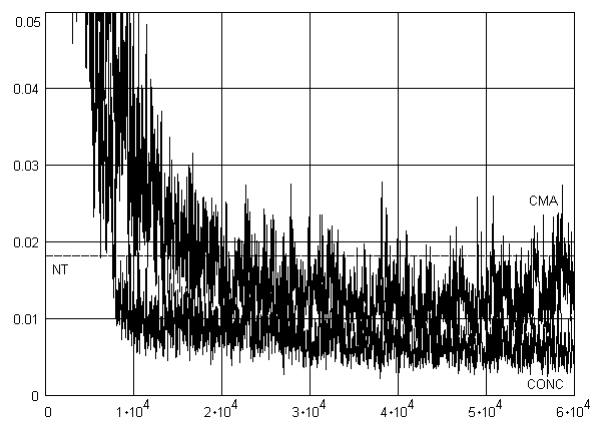
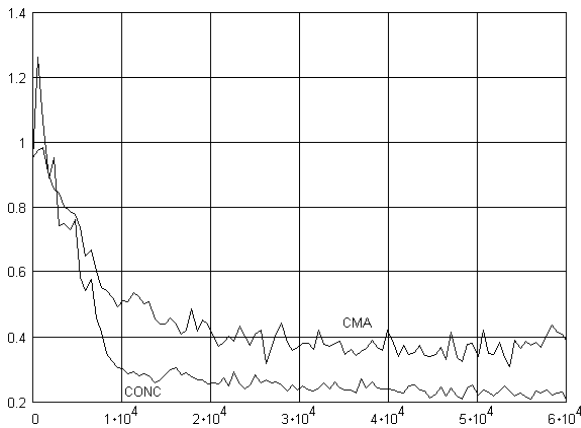
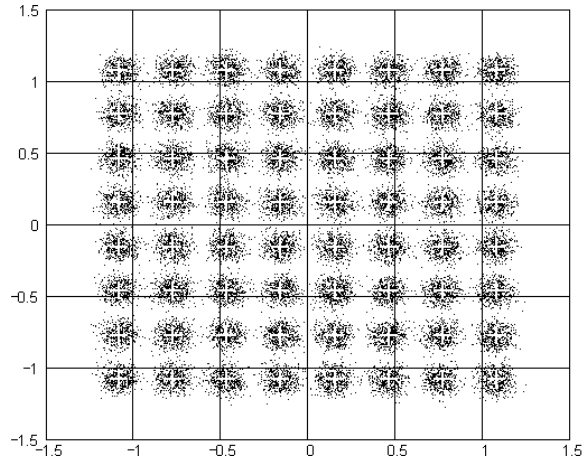
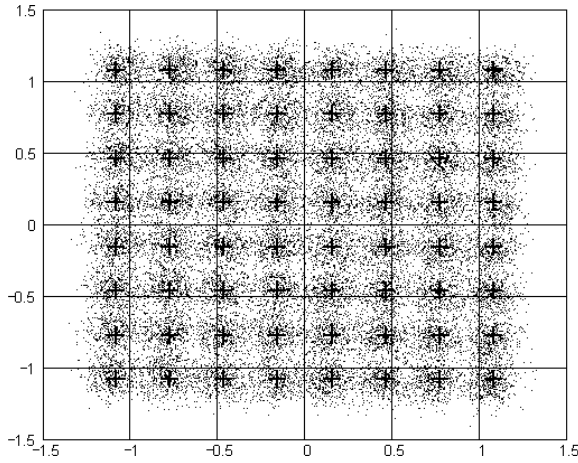


Figura A.55: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M10, modulação 64-QAM ( $\gamma = 1.380953$ ), SNR=35dB.

Parâmetros:  $N_a = 60000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 3$ .

## Modulação 64-QAM SNR=35dB – Canal M11

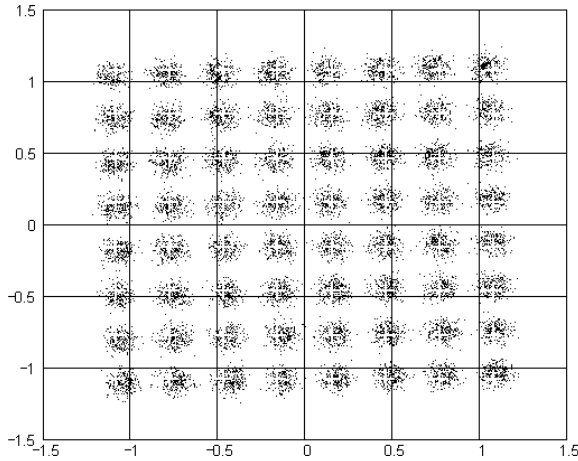


Fig. A.56a:  $\Gamma$  (CMA)

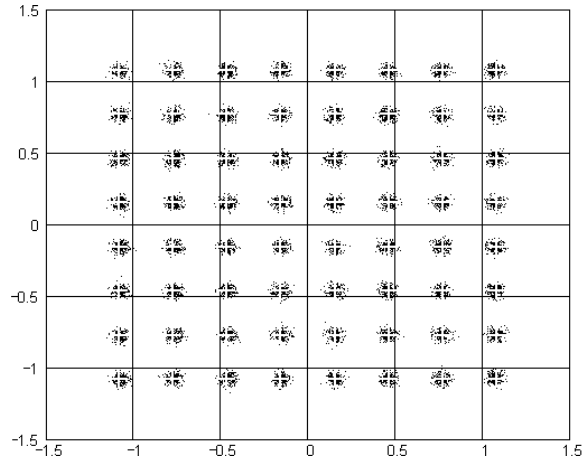


Fig. A.56b:  $\Psi$  (CONC)

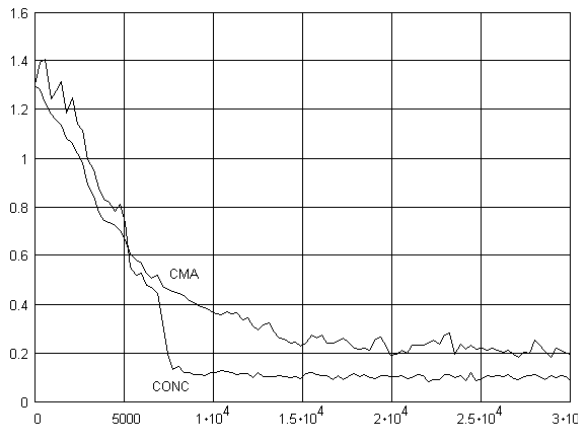


Fig. A.56c: ISI( $i$ )

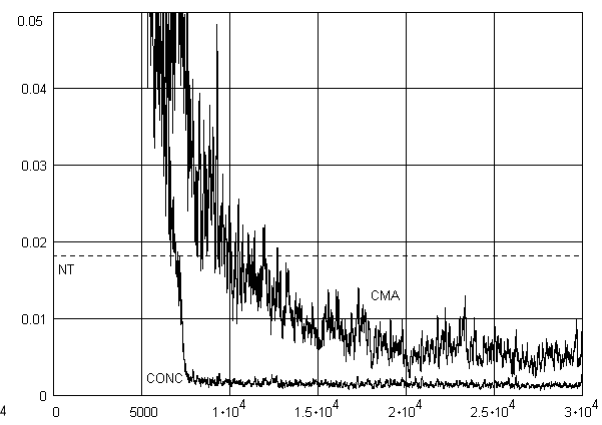


Fig. A.56d: MSE( $i$ )

Figura A.56: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M11, modulação 64-QAM ( $\gamma = 1.380953$ ), SNR=35dB. Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 8$ .

## Modulação 64-QAM SNR=35dB – Canal M12

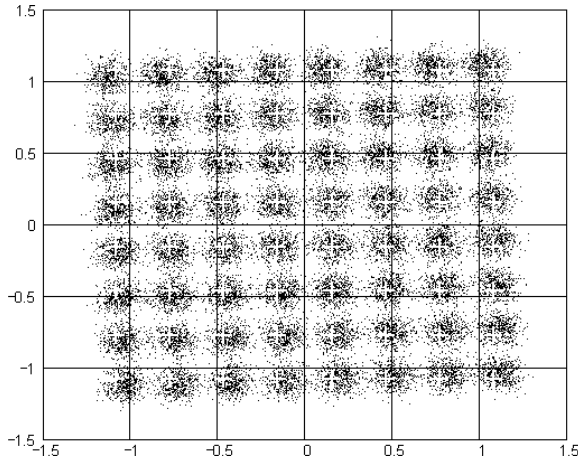


Fig. A.57a:  $\Gamma$  (CMA)

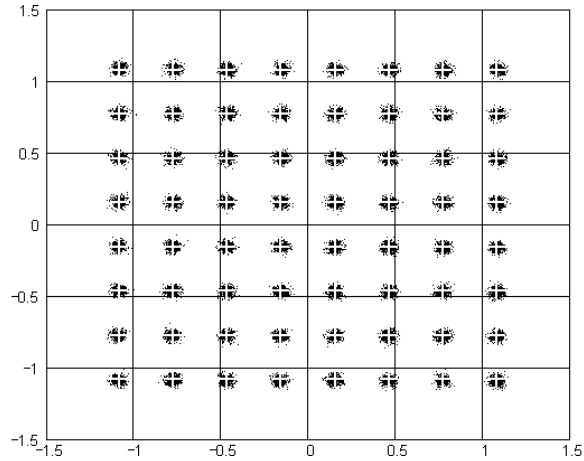


Fig. A.57b:  $\Psi$  (CONC)

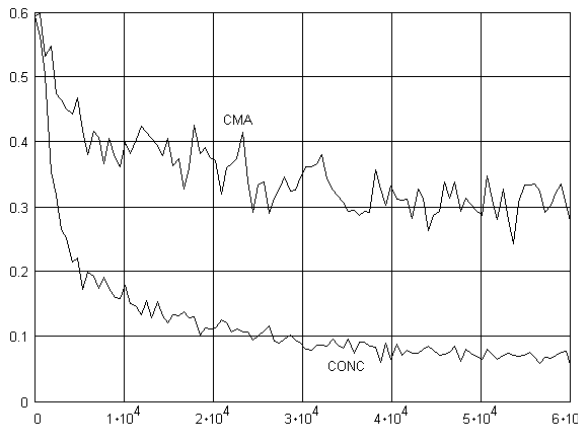


Fig. A.57c: ISI(*i*)

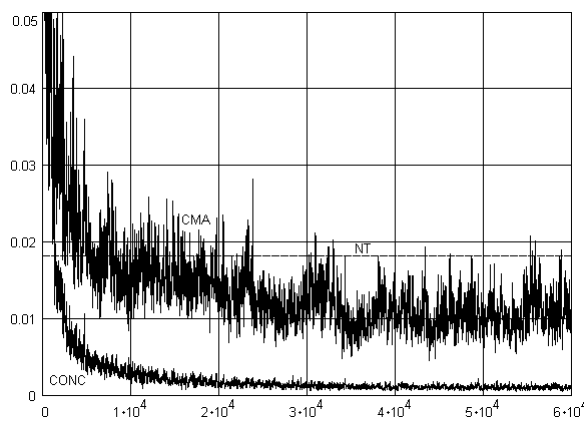


Fig. A.57d: MSE(*i*)

Figura A.57: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M12, modulação 64-QAM ( $\gamma = 1.380953$ ), SNR=35dB.

Parâmetros:  $N_a = 60000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 3$ .

## Modulação 64-QAM SNR=35dB – Canal M13

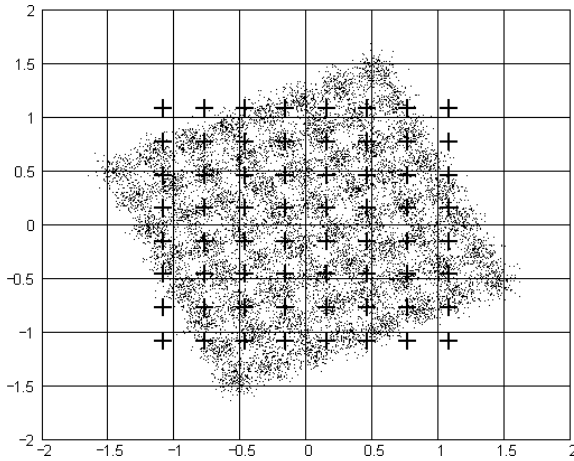


Fig. A.58a:  $\Gamma$  (CMA)

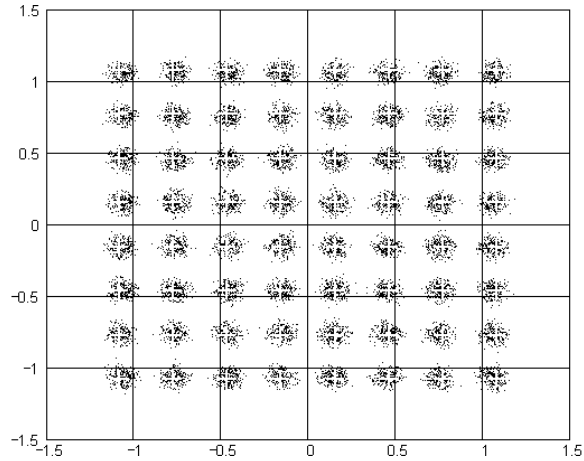


Fig. A.58b:  $\Psi$  (CONC)

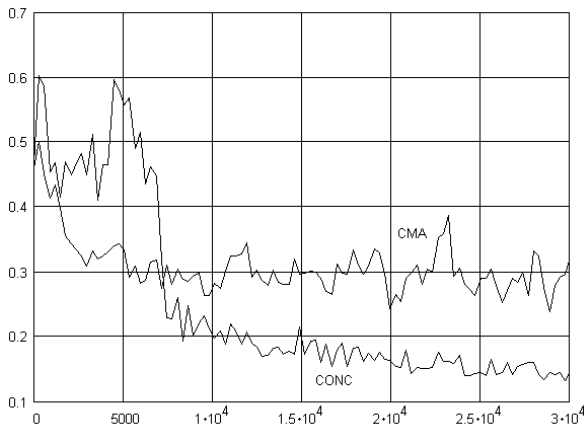


Fig. A.58c: ISI(*i*)

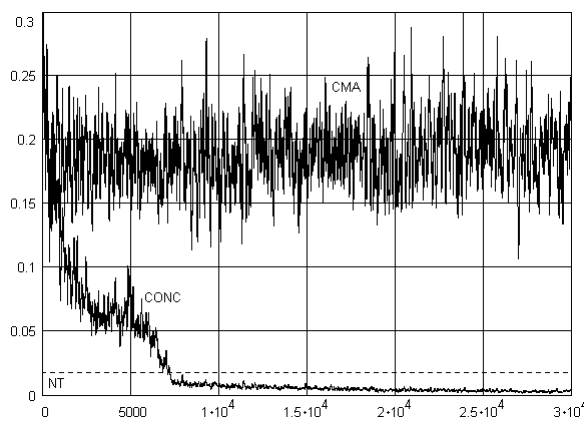


Fig. A.58d: MSE(*i*)

Figura A.58: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M13, modulação 64-QAM ( $\gamma = 1.380953$ ), SNR=35dB.

Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 3$ .

## Modulação 64-QAM SNR=35dB – Canal M14

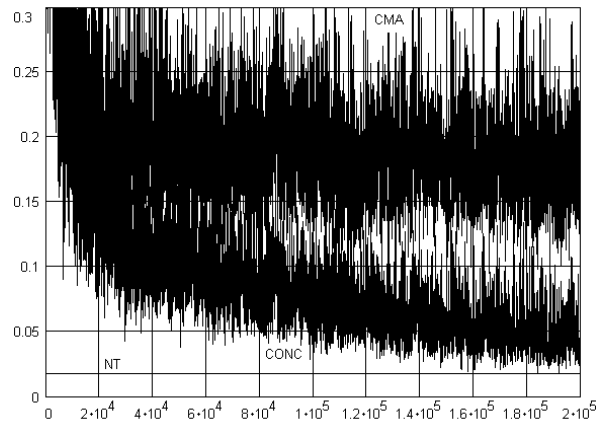
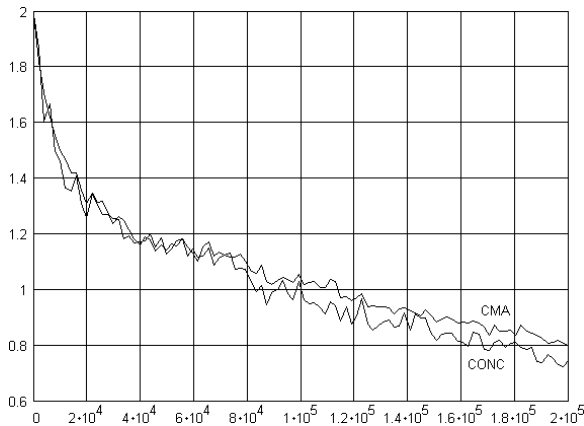
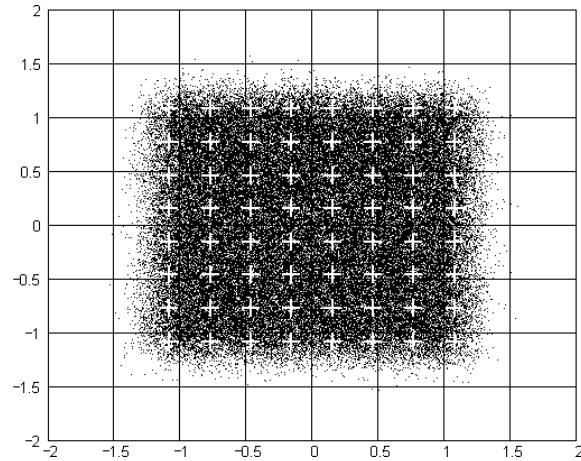
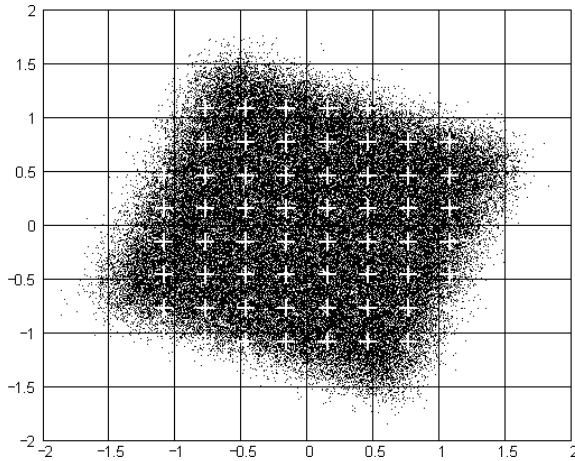


Figura A.59: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M14, modulação 64-QAM ( $\gamma = 1.380953$ ), SNR=35dB.

Parâmetros:  $N_a = 200000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 5 \times 10^{-3}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 6$ .



## Modulação 64-QAM SNR=35dB – Canal M15

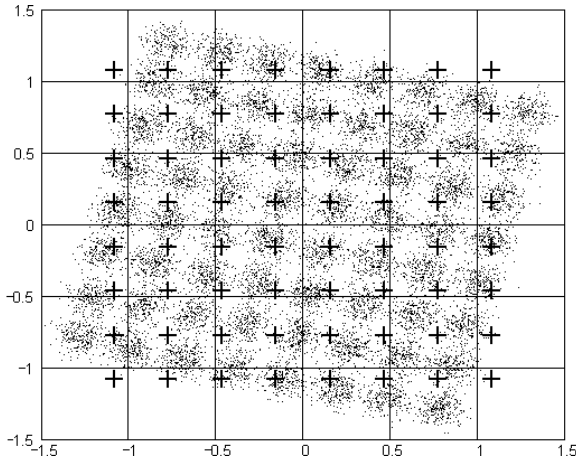


Fig. A.60a:  $\Gamma$  (CMA)

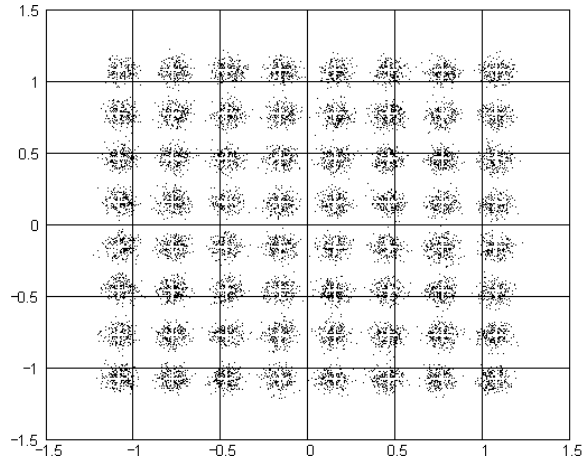


Fig. A.60b:  $\Psi$  (CONC)

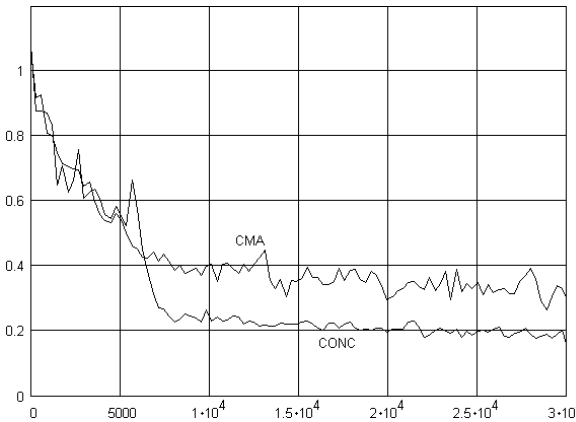


Fig. A.60c: ISI(*i*)

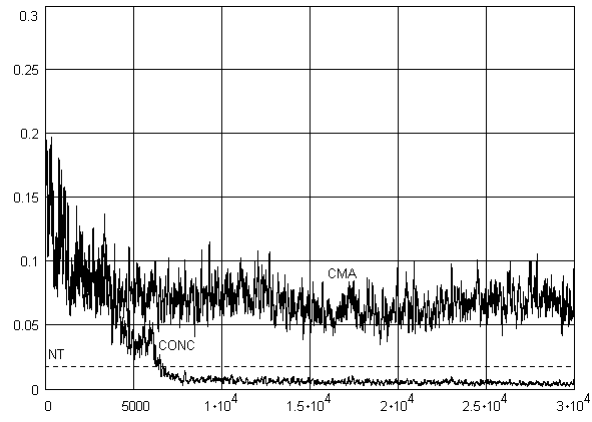


Fig. A.60d: MSE(*i*)

Figura A.60: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M15, modulação 64-QAM ( $\gamma = 1.380953$ ), SNR=35dB.

Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 8$ .

## Modulação 64-QAM SNR=25dB – Canal M1

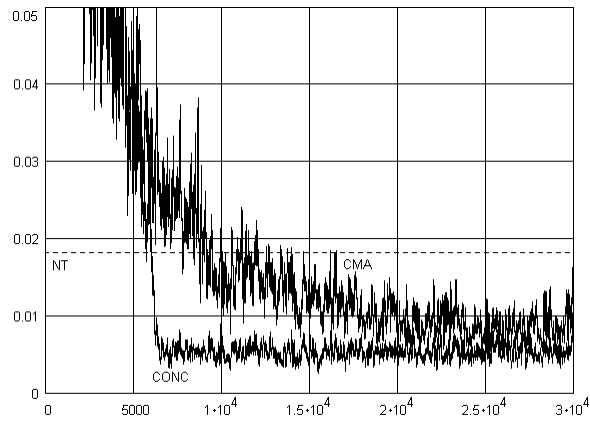
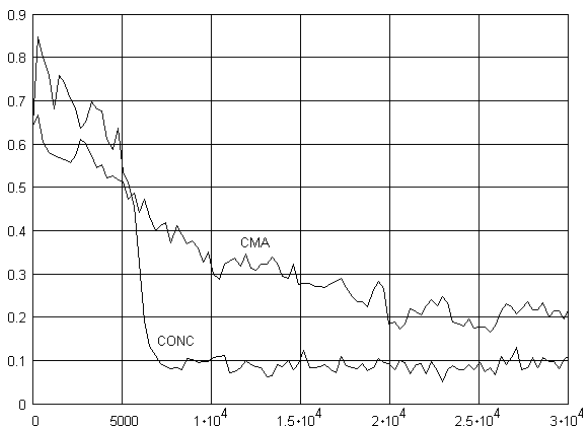
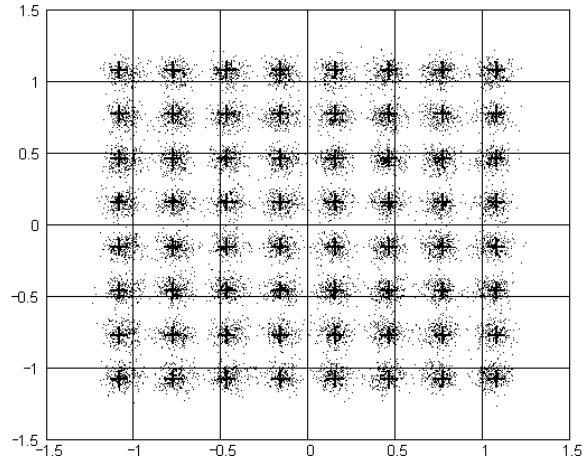
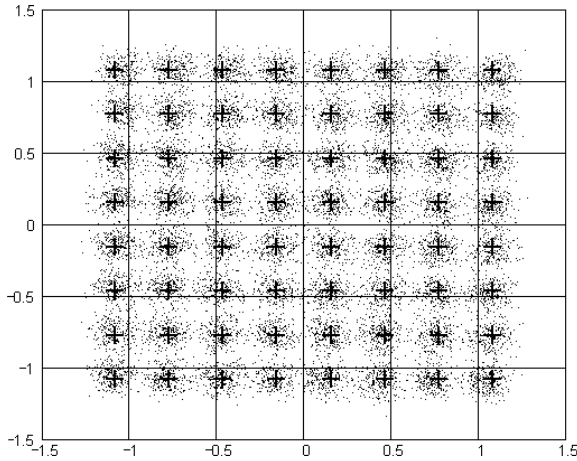


Figura A.61: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M1, modulação 64-QAM ( $\gamma = 1.380953$ ), SNR=25dB. Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 8$ .

Modulação 64-QAM SNR=25dB – Canal M2

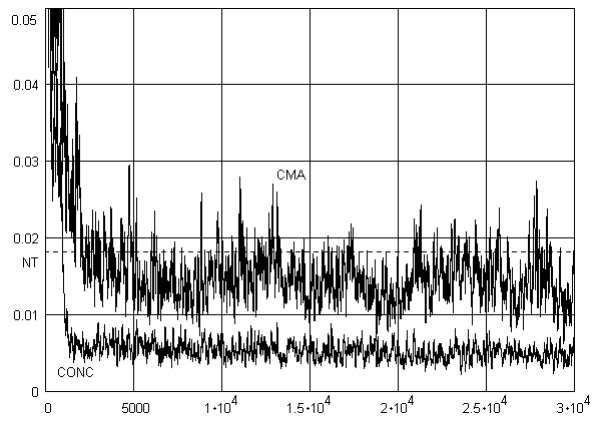
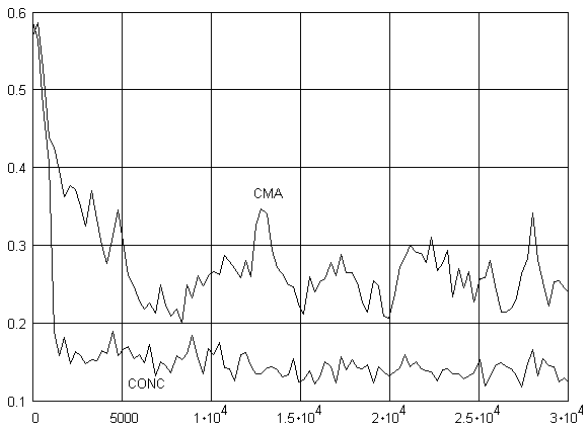
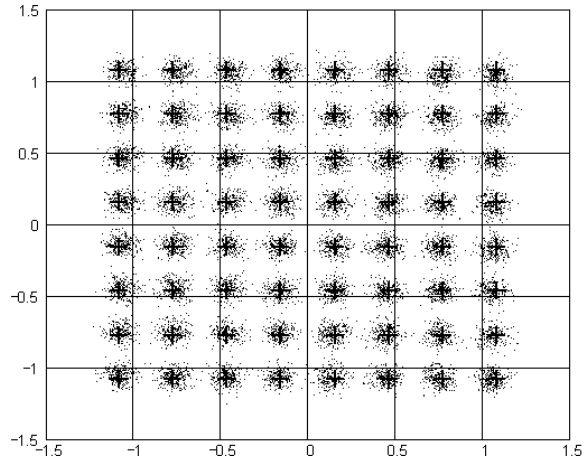
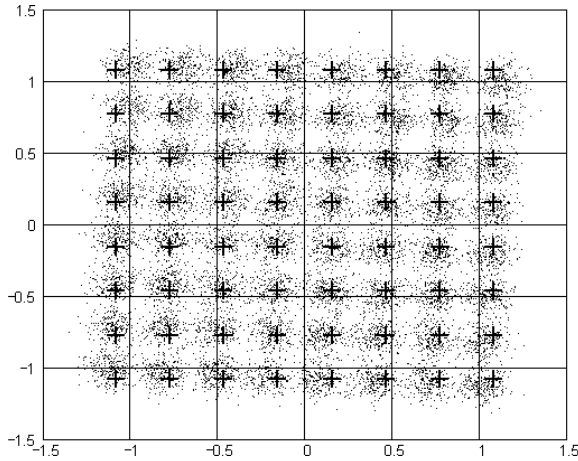


Figura A.62: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M2, modulação 64-QAM ( $\gamma = 1.380953$ ), SNR=25dB. Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 8$ .

## Modulação 64-QAM SNR=25dB – Canal M3

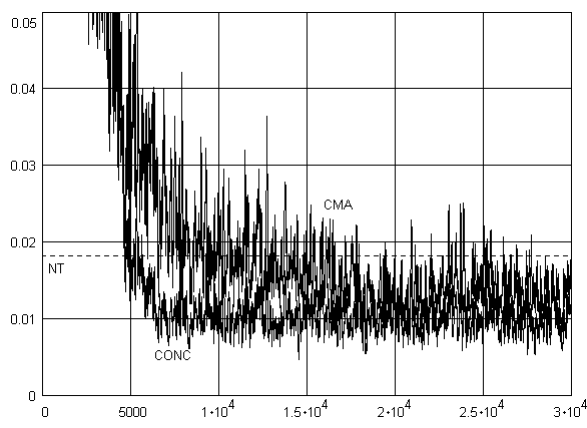
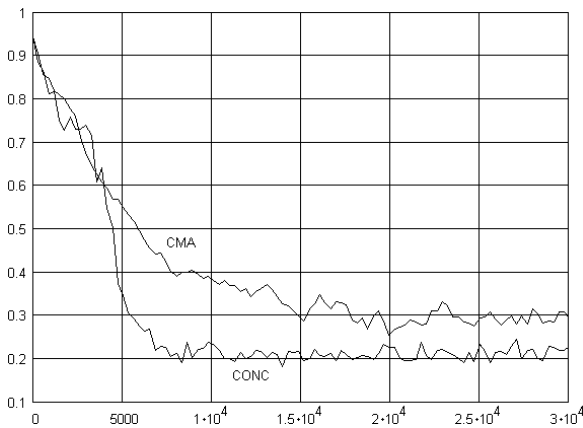
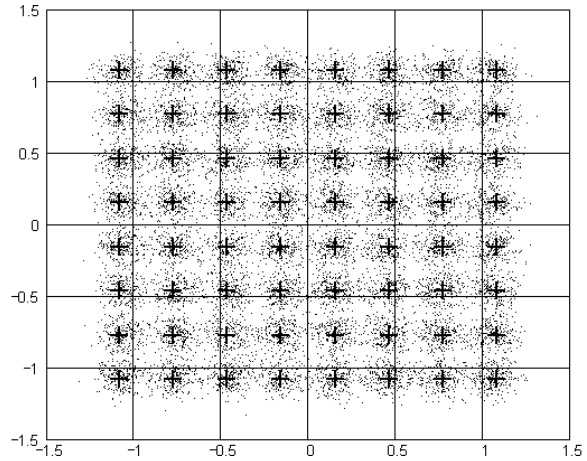
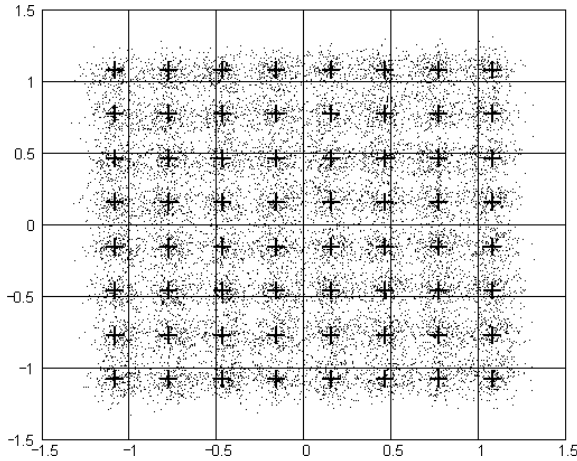


Figura A.63: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M3, modulação 64-QAM ( $\gamma = 1.380953$ ), SNR=25dB. Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 8$ .

## Modulação 64-QAM SNR=25dB – Canal M4

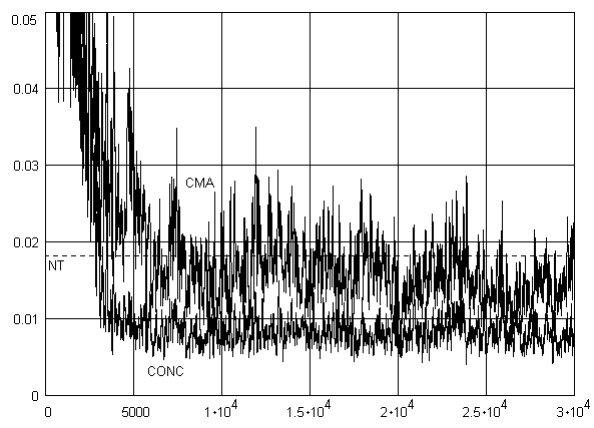
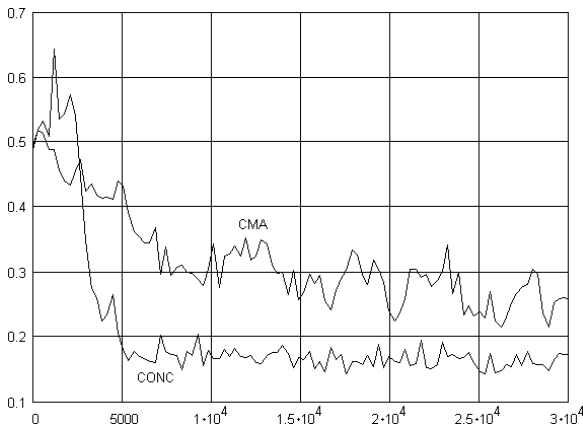
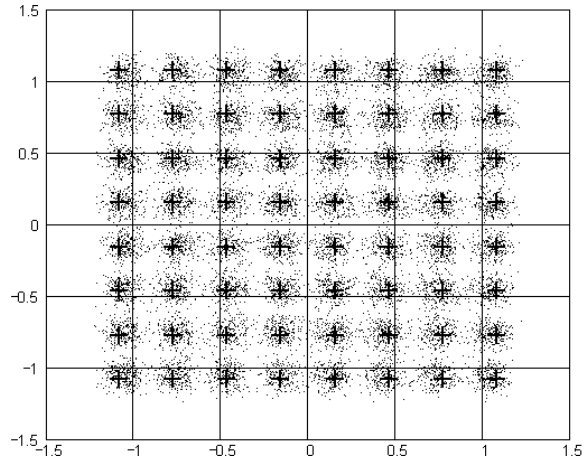
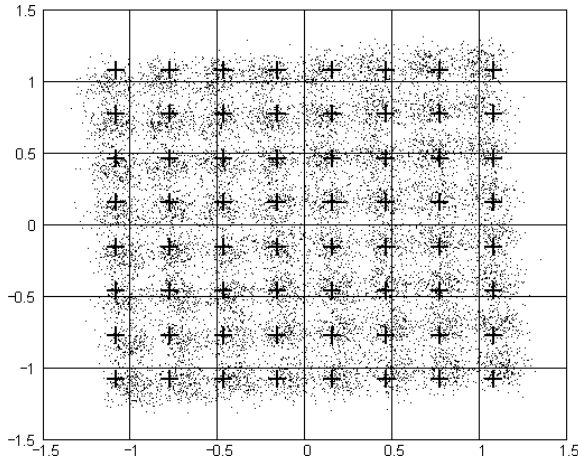


Figura A.64: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M4, modulação 64-QAM ( $\gamma = 1.380953$ ), SNR=25dB. Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 5$ .

Modulação 64-QAM SNR=25dB – Canal M5

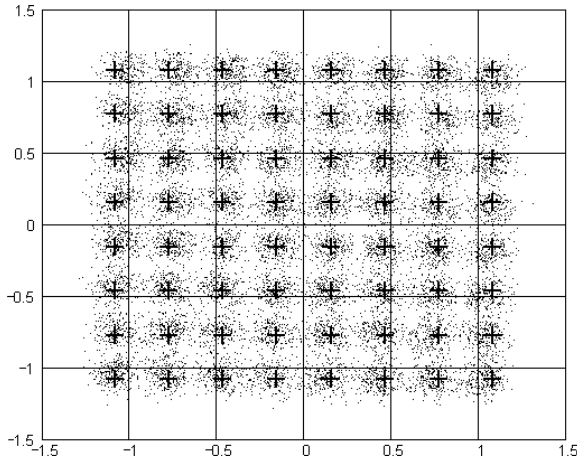


Fig. A.65a:  $\Gamma$  (CMA)

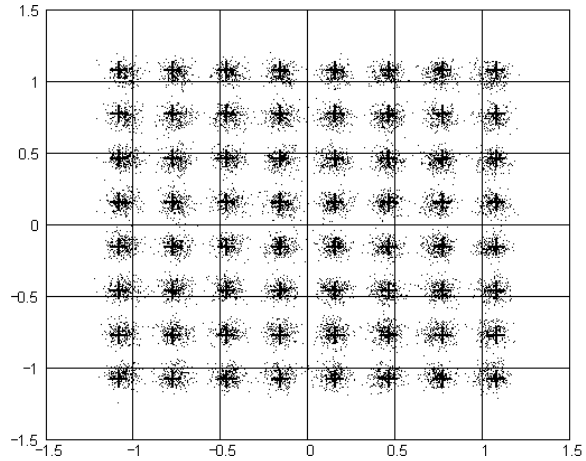


Fig. A.65b:  $\Psi$  (CONC)

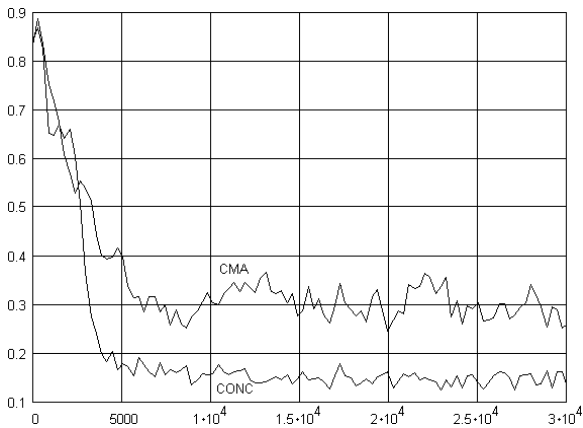


Fig. A.65c: ISI(*i*)

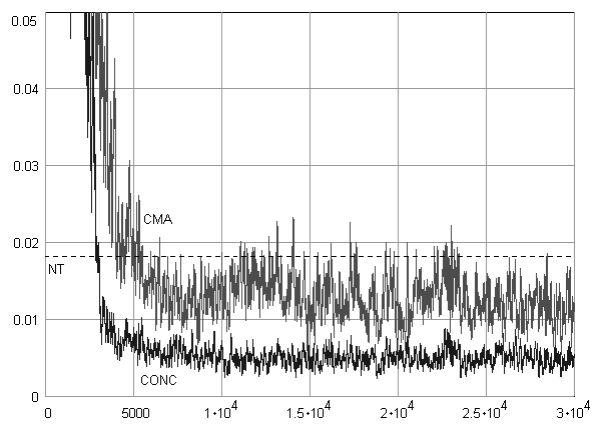


Fig. A.65d: MSE(*i*)

Figura A.65: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M5, modulação 64-QAM ( $\gamma = 1.380953$ ), SNR=25dB.

Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 8$ .

## Modulação 64-QAM SNR=25dB – Canal M6

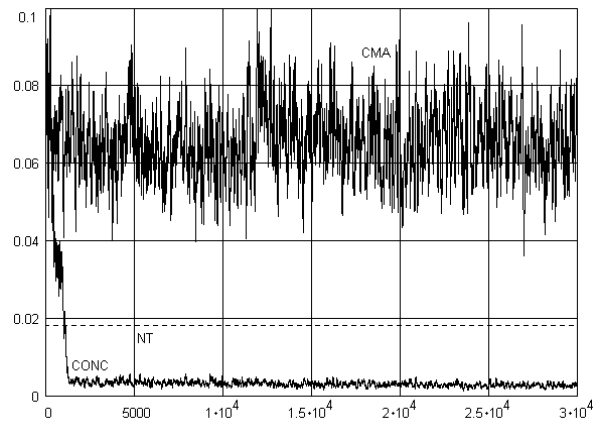
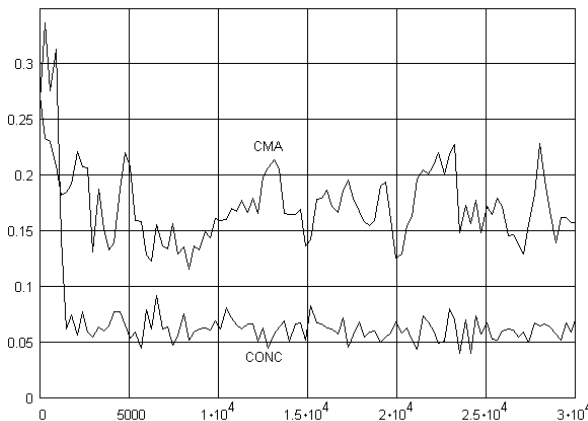
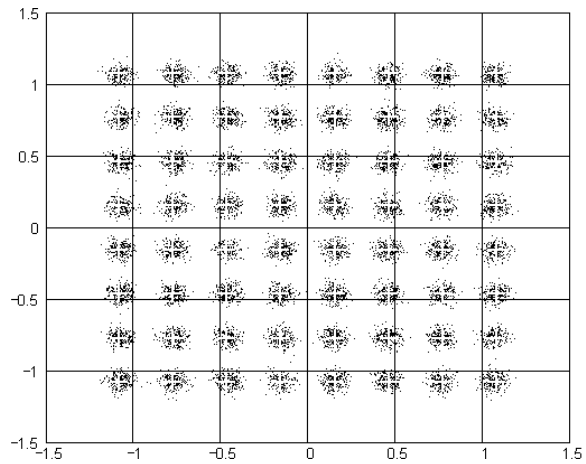
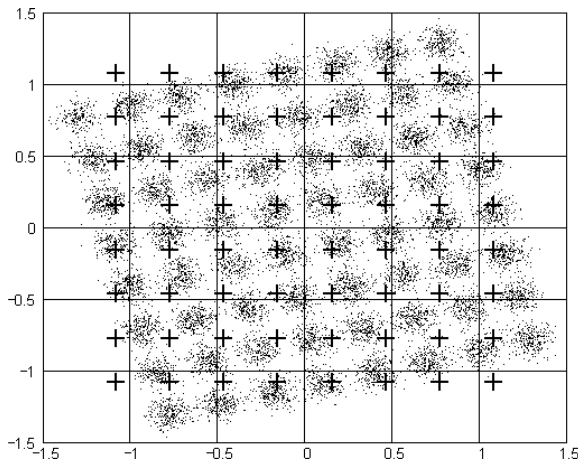


Figura A.66: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M6, modulação 64-QAM ( $\gamma = 1.380953$ ), SNR=25dB. Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 8$ .

## Modulação 64-QAM SNR=25dB – Canal M7

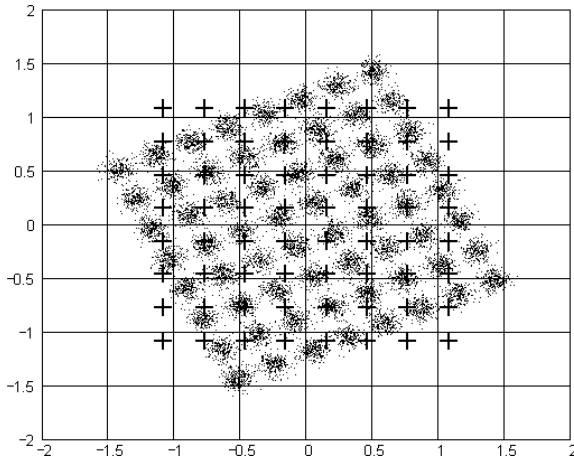


Fig. A.67a:  $\Gamma$  (CMA)

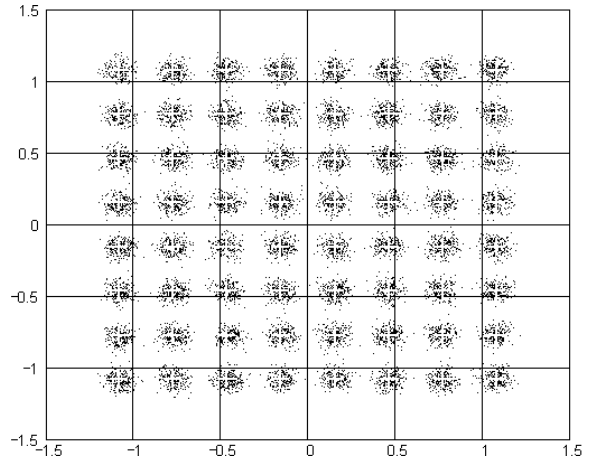


Fig. A.67b:  $\Psi$  (CONC)

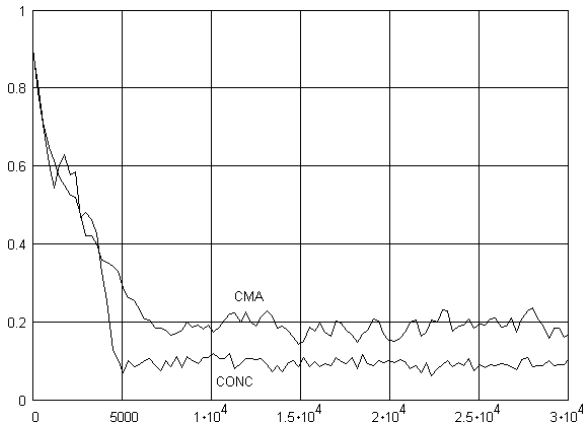


Fig. A.67c: ISI(*i*)

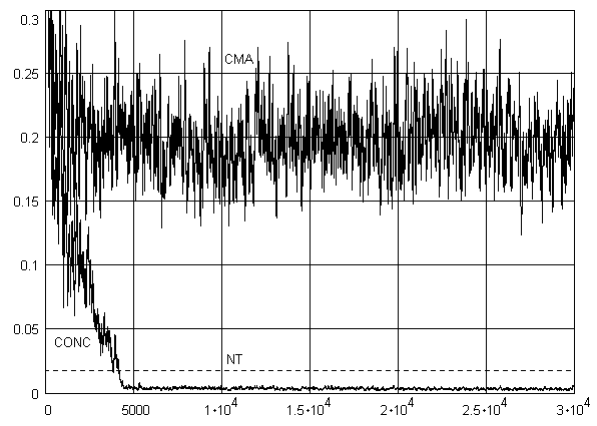


Fig. A.67d: MSE(*i*)

Figura A.67: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M7, modulação 64-QAM ( $\gamma = 1.380953$ ), SNR=25dB. Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 8$ .



## Modulação 64-QAM SNR=25dB – Canal M8

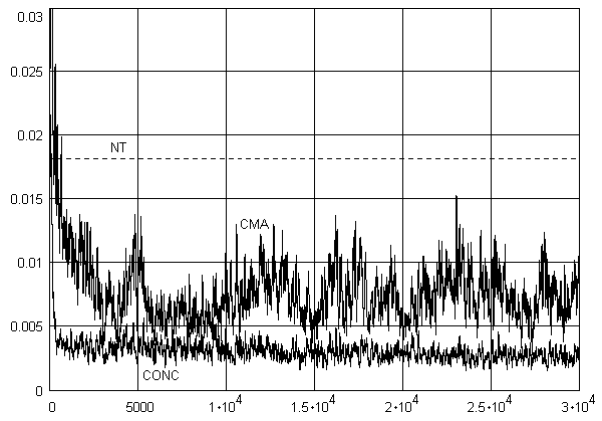
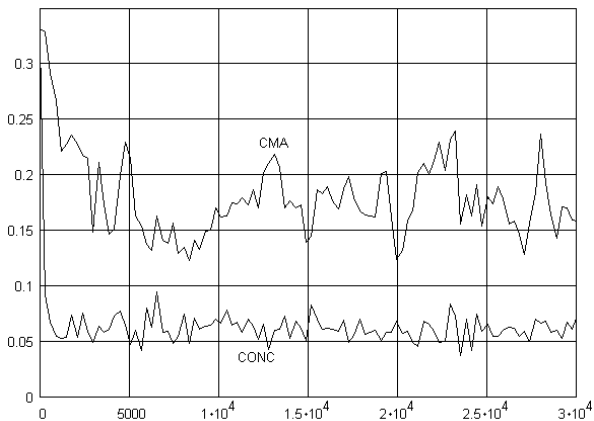
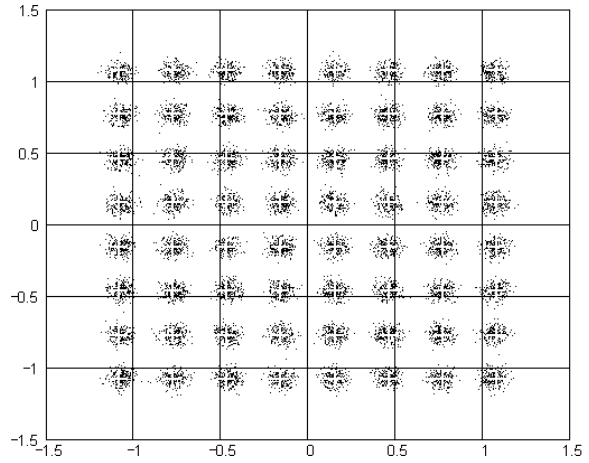
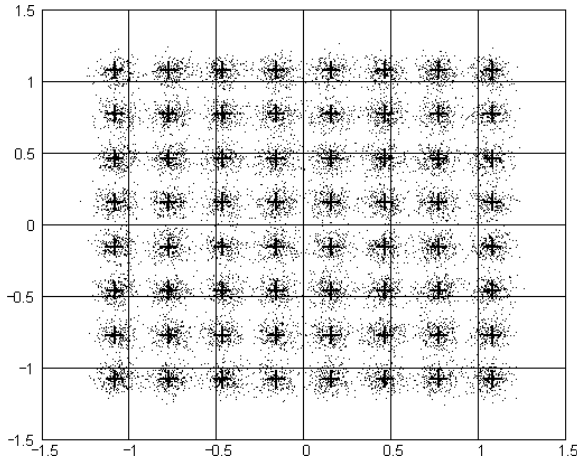


Figura A.68: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M8, modulação 64-QAM ( $\gamma = 1.380953$ ), SNR=25dB. Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 8$ .

Modulação 64-QAM SNR=25dB – Canal M9

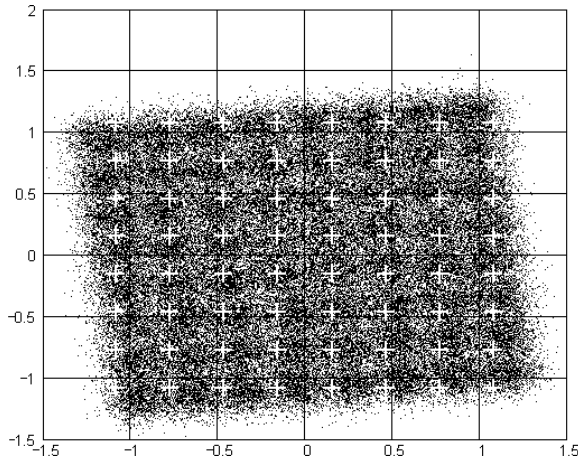


Fig. A.69a:  $\Gamma$  (CMA)

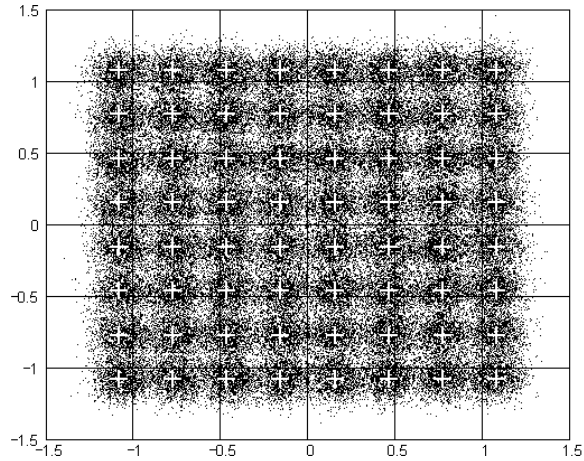


Fig. A.69b:  $\Psi$  (CONC)

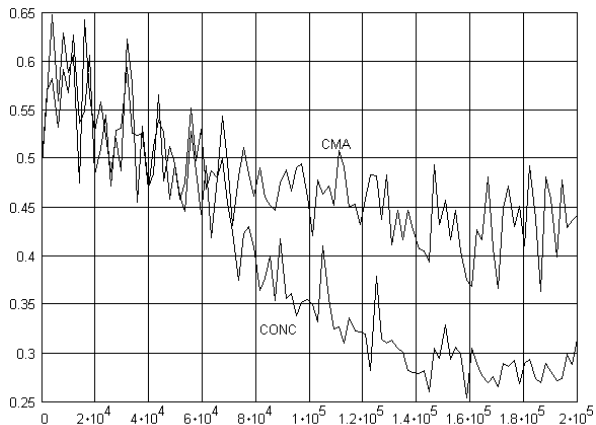


Fig. A.69c: ISI(*i*)

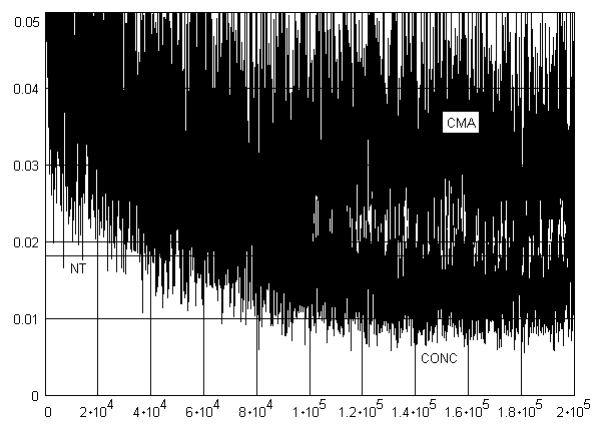


Fig. A.69d: MSE(*i*)

Figura A.69: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M9, modulação 64-QAM ( $\gamma = 1.380953$ ), SNR=25dB. Parâmetros:  $N_a = 200000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 5 \times 10^{-3}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 2$ .

## Modulação 64-QAM SNR=25dB – Canal M10

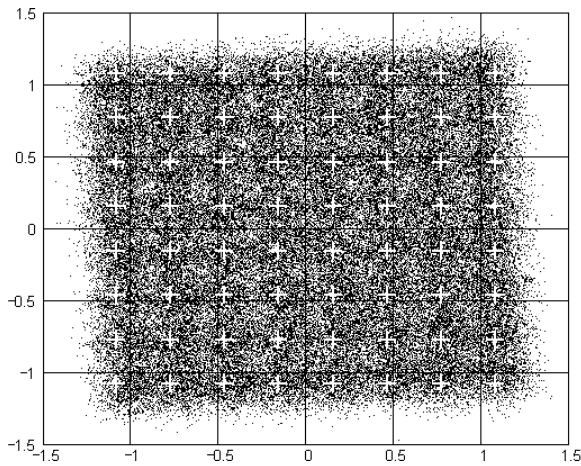


Fig. A.70a:  $\Gamma$  (CMA)

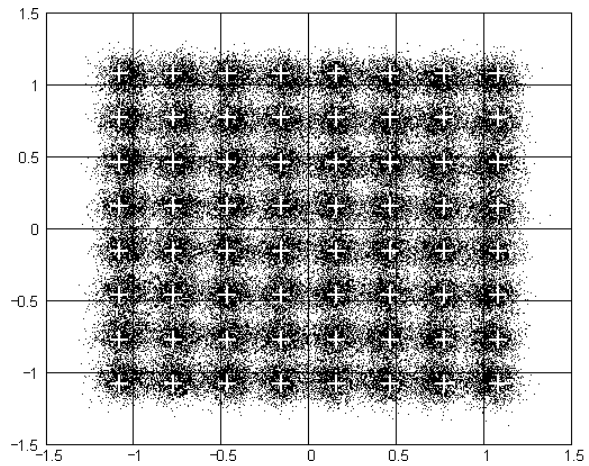


Fig. A.70b:  $\Psi$  (CONC)

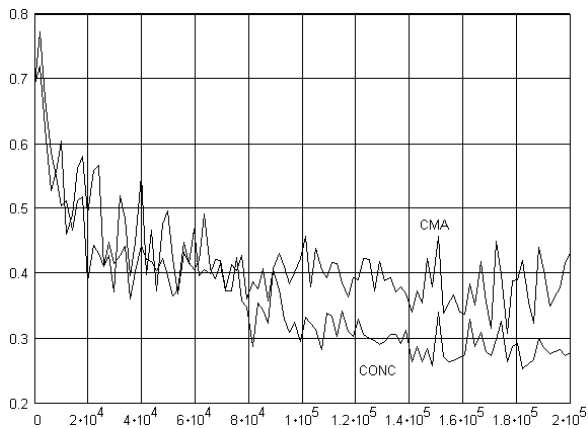


Fig. A.70c: ISI( $i$ )

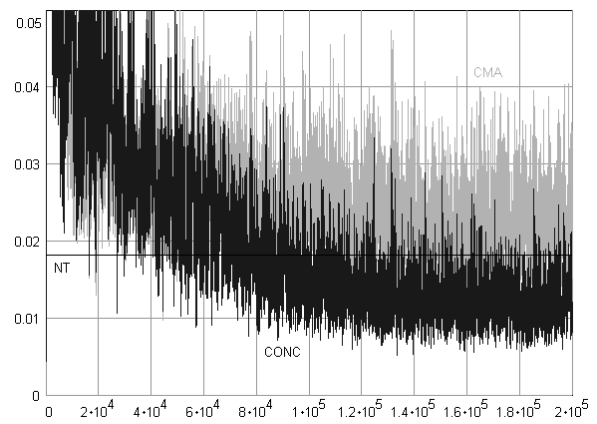


Fig. A.70d: MSE( $i$ )

Figura A.70: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M10, modulação 64-QAM ( $\gamma = 1.380953$ ), SNR=25dB.

Parâmetros:  $N_a = 200000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 7 \times 10^{-3}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 4$ .

## Modulação 64-QAM SNR=25dB – Canal M11

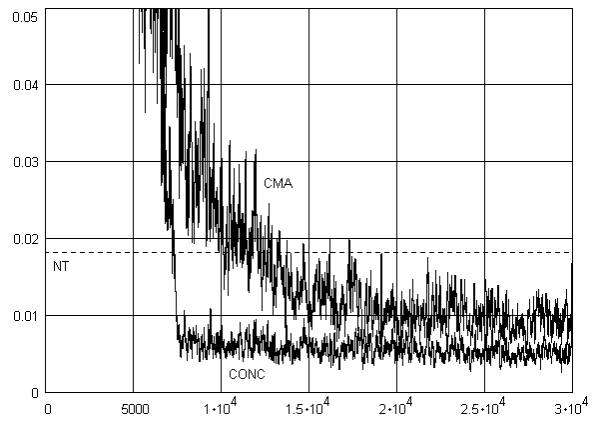
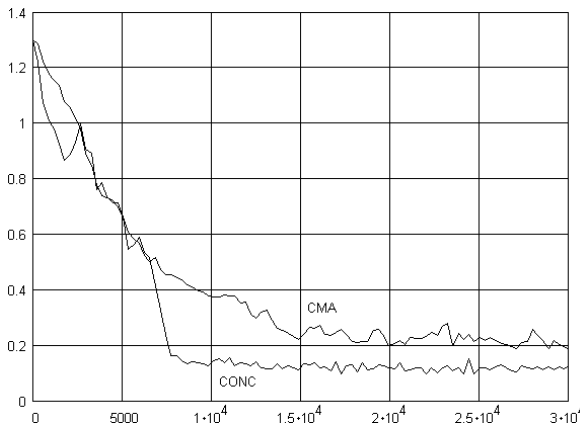
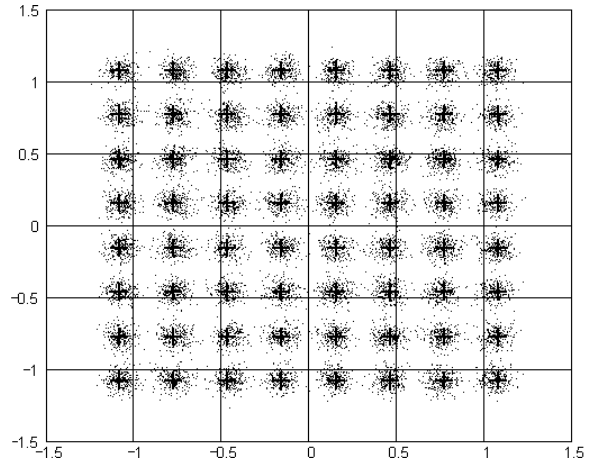
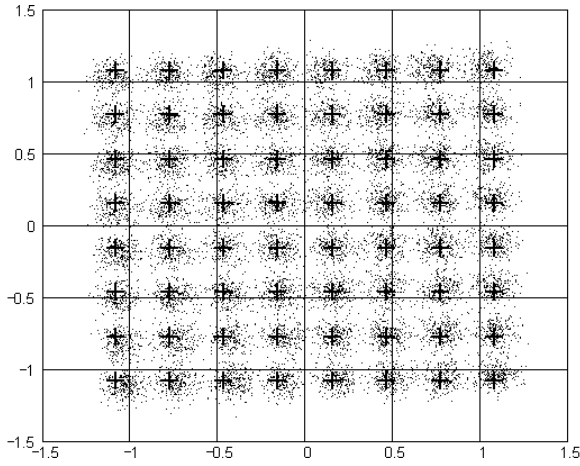


Figura A.71: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M11, modulação 64-QAM ( $\gamma = 1.380953$ ), SNR=25dB.

Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 8$ .

## Modulação 64-QAM SNR=25dB – Canal M12

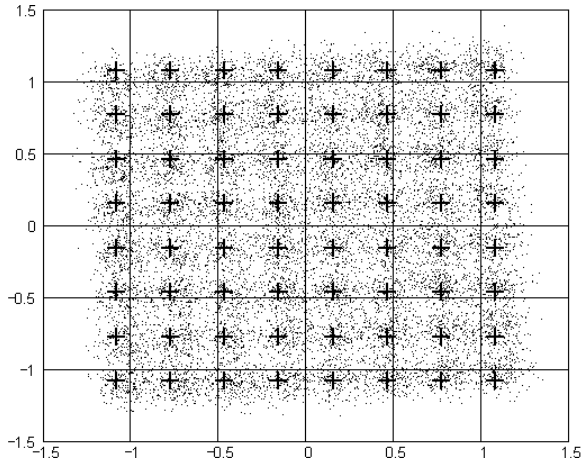


Fig. A.72a:  $\Gamma$  (CMA)

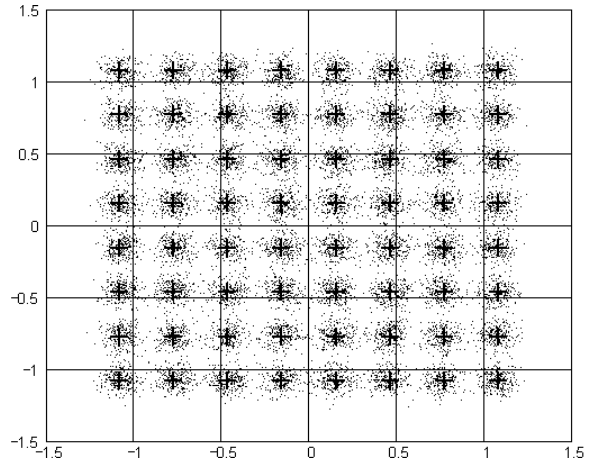


Fig. A.72b:  $\Psi$  (CONC)

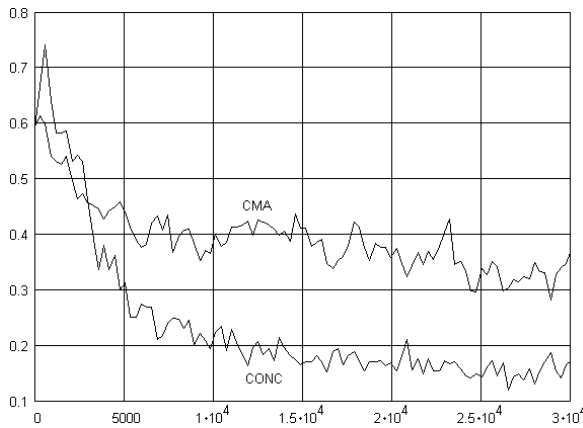


Fig. A.72c: ISI( $i$ )

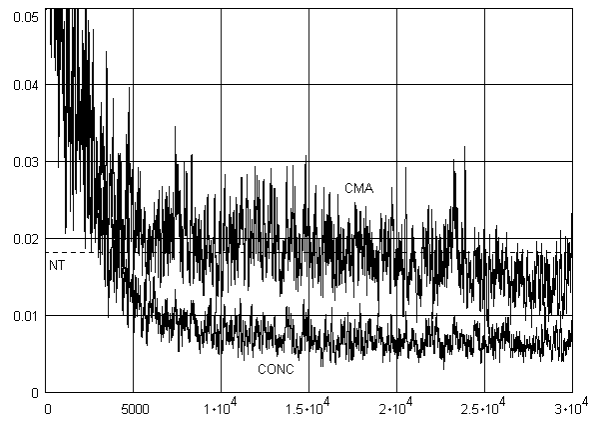


Fig. A.72d: MSE( $i$ )

Figura A.72: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M12, modulação 64-QAM ( $\gamma = 1.380953$ ), SNR=25dB.

Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 3$ .

Modulação 64-QAM SNR=25dB – Canal M13

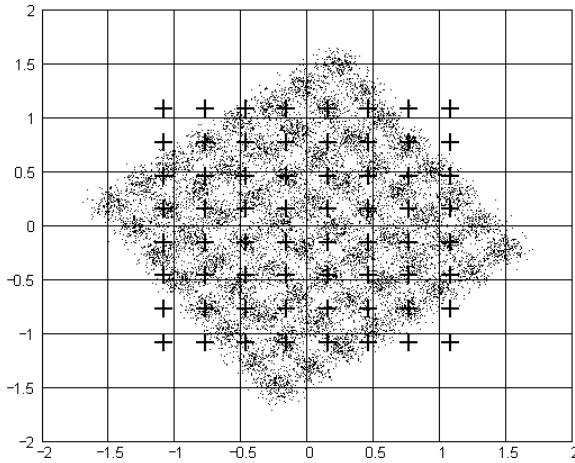


Fig. A.73a:  $\Gamma$  (CMA)

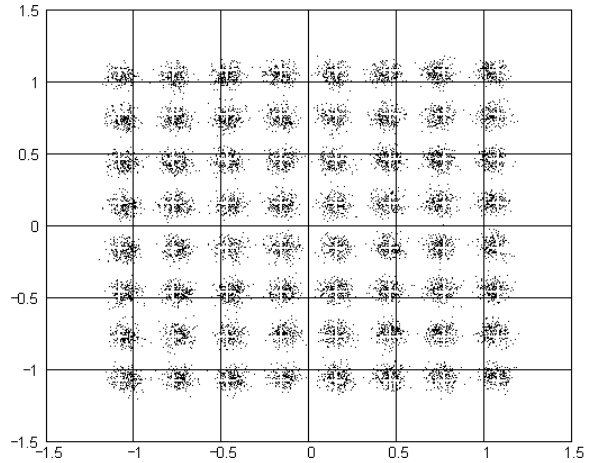


Fig. A.73b:  $\Psi$  (CONC)

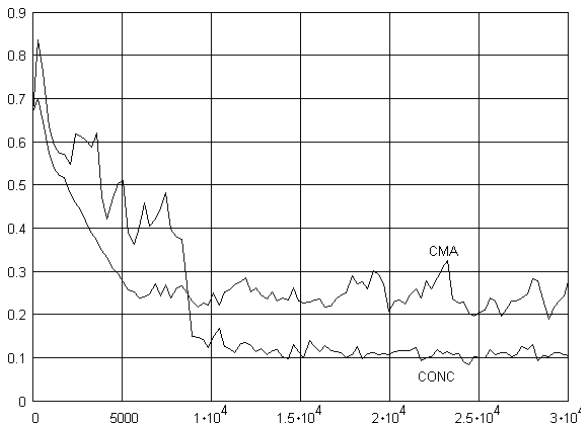


Fig. A.73c: ISI(*i*)

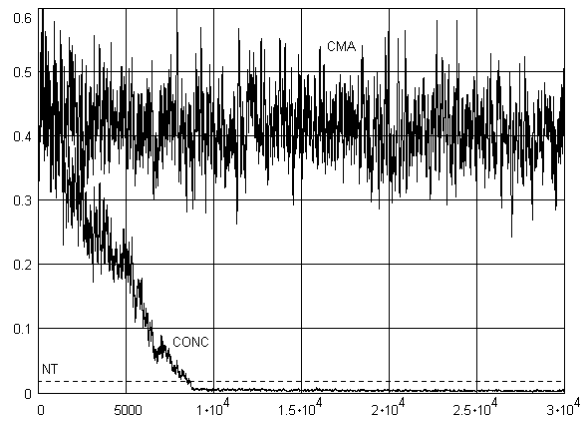


Fig. A.73d: MSE(*i*)

Figura A.73: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M13, modulação 64-QAM ( $\gamma = 1.380953$ ), SNR=25dB.

Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 4$ .

Modulação 64-QAM SNR=25dB – Canal M14

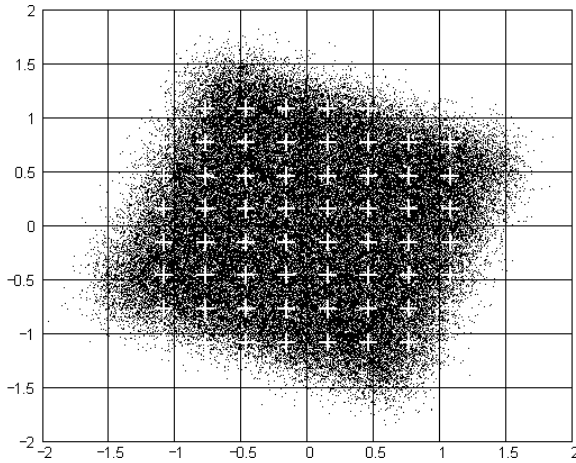


Fig. A.74a:  $\Gamma$  (CMA)

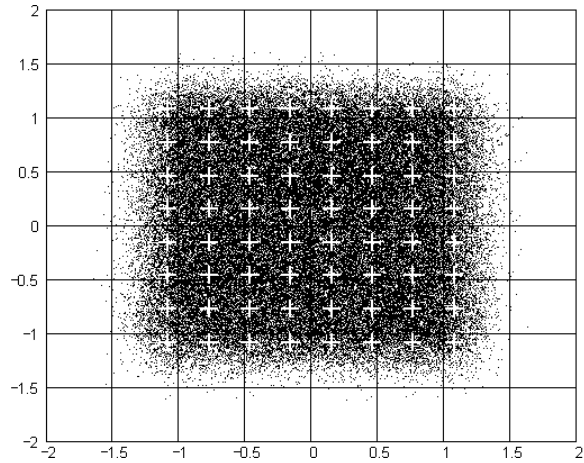


Fig. A.74b:  $\Psi$  (CONC)

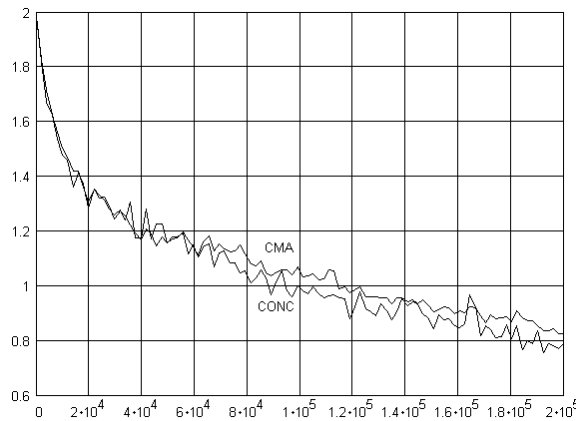


Fig. A.74c: ISI(*i*)

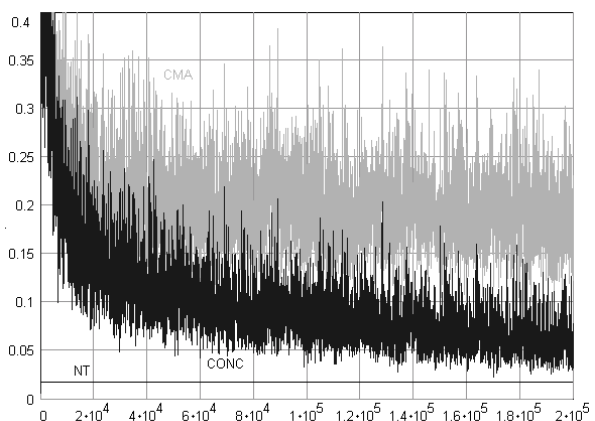


Fig. A.74d: MSE(*i*)

Figura A.74: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M14, modulação 64-QAM ( $\gamma = 1.380953$ ), SNR=25dB. Parâmetros:  $N_a = 200000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 5 \times 10^{-3}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 6$ .

## Modulação 64-QAM SNR=25dB – Canal M15

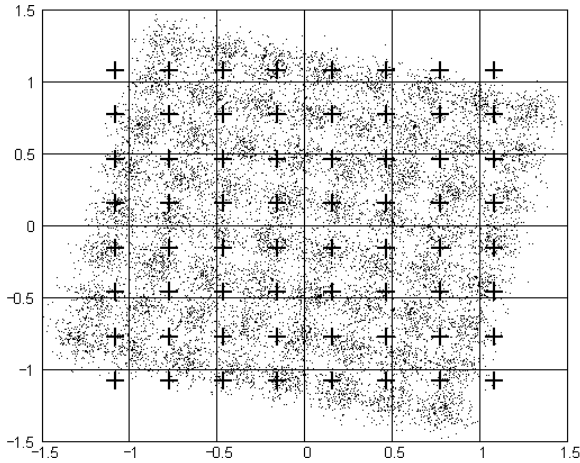


Fig. A.75a:  $\Gamma$  (CMA)

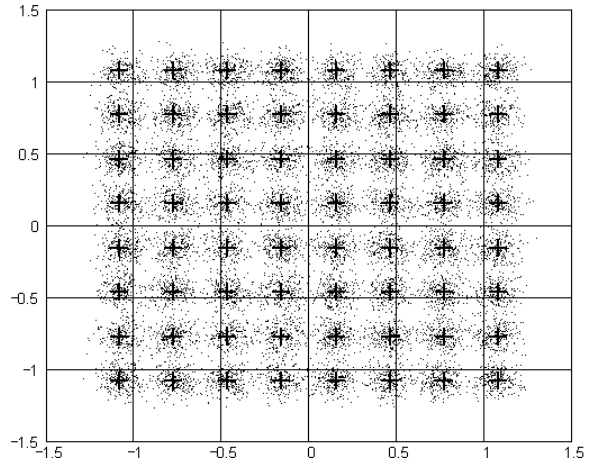


Fig. A.75b:  $\Psi$  (CONC)

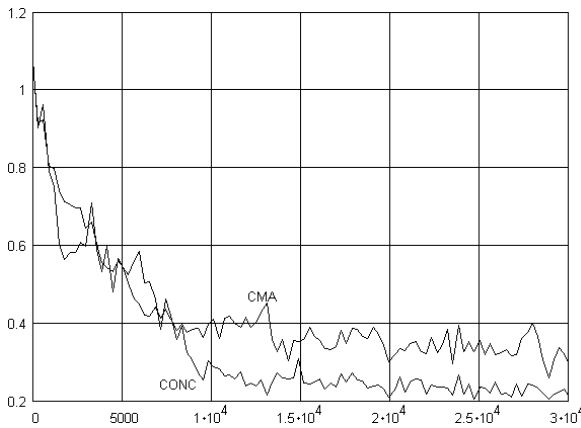


Fig. A.75c: ISI( $i$ )

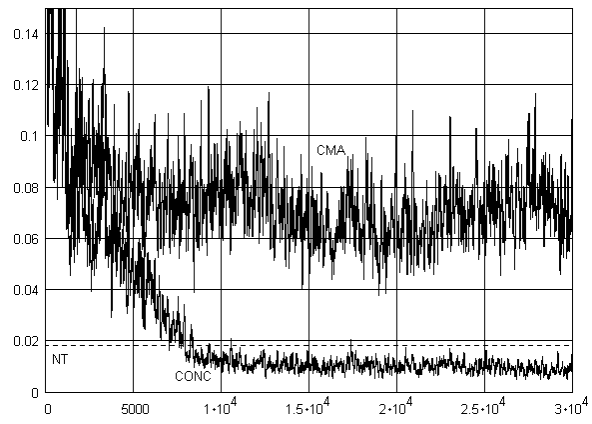


Fig. A.75d: MSE( $i$ )

Figura A.75: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal M15, modulação 64-QAM ( $\gamma = 1.380953$ ), SNR=25dB.

Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 8$ .



## Modulação 256-QAM SNR=100dB – Canal C1

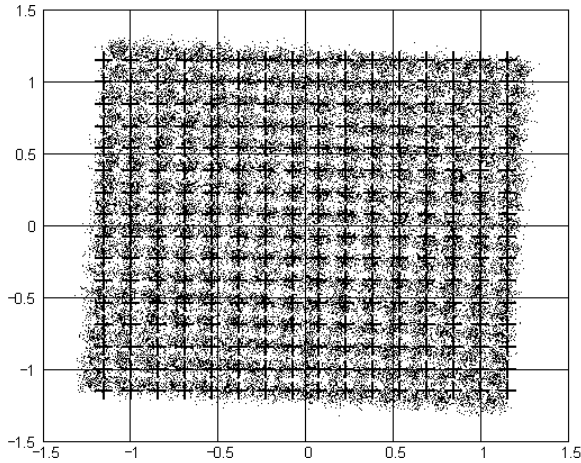


Fig. A.76a:  $\Gamma$  (CMA)

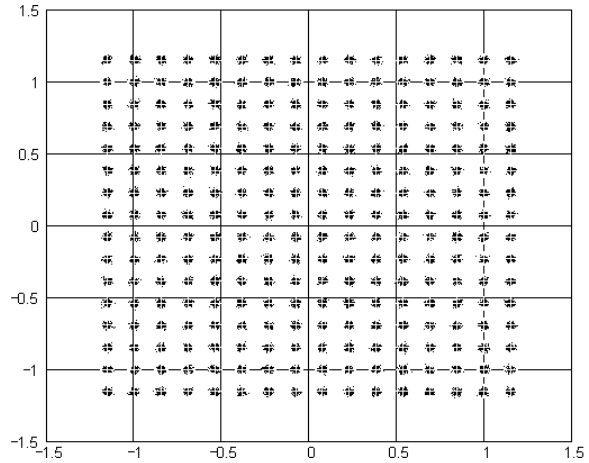


Fig. A.76b:  $\Psi$  (CONC)

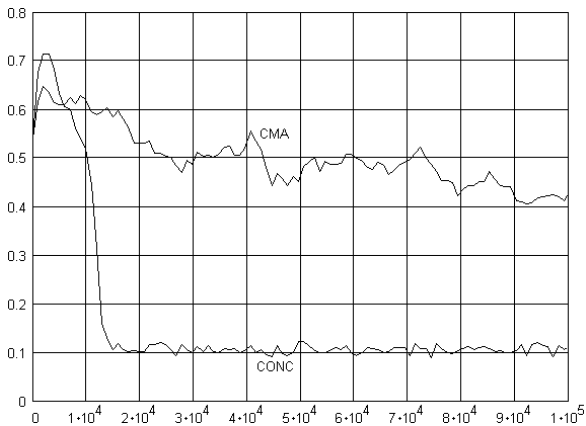


Fig. A.76c: ISI( $i$ )

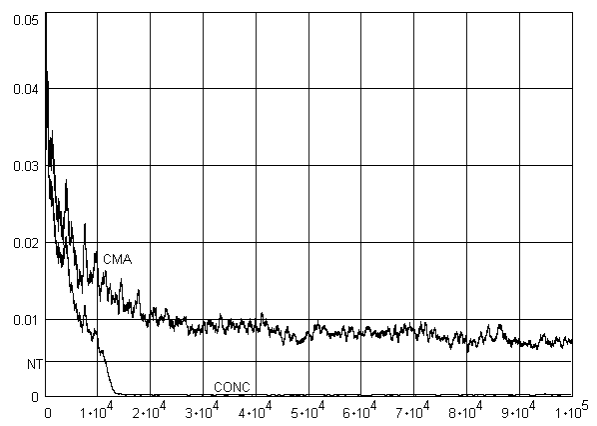


Fig. A.76d: MSE( $i$ )

Figura A.76: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal C1, modulação 256-QAM ( $\gamma = 1.395295$ ), SNR=100dB. Parâmetros:  $N_a = 100000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-4}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-4}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-3}$ ,  $L = L_c = 128$  e  $\xi = 63$ .

## Modulação 256-QAM SNR=100dB – Canal C2

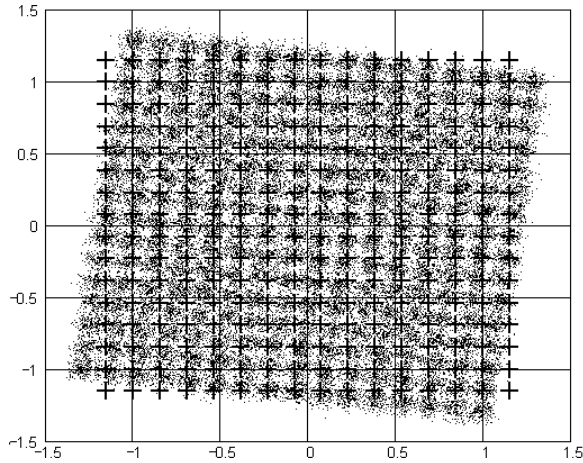


Fig. A.77a:  $\Gamma$  (CMA)

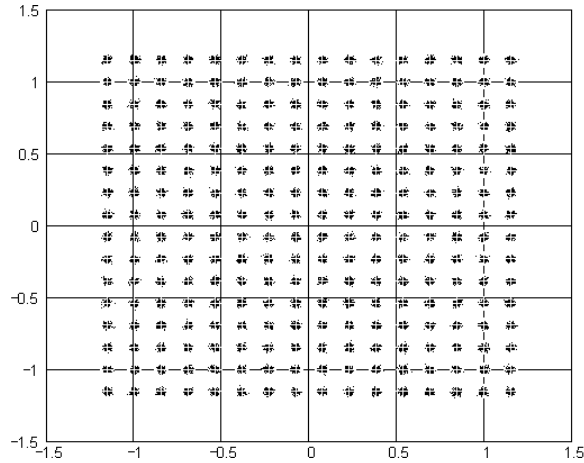


Fig. A.77b:  $\Psi$  (CONC)

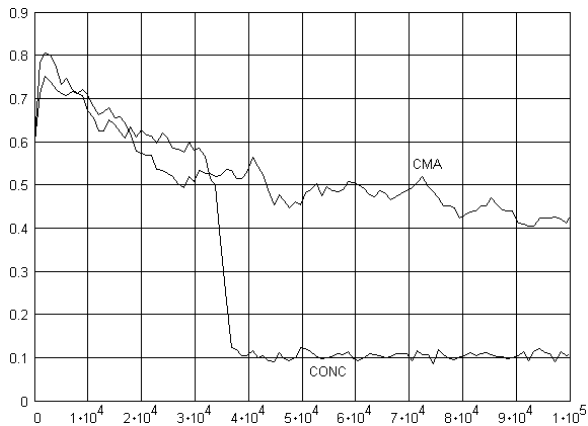


Fig. A.77c: ISI(*i*)

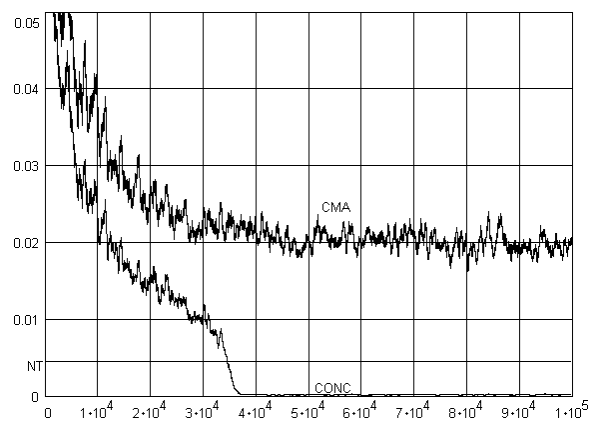


Fig. A.77d: MSE(*i*)

Figura A.77: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal C2, modulação 256-QAM ( $\gamma = 1.395295$ ), SNR=100dB.

Parâmetros:  $N_a = 100000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-4}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-4}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-3}$ ,  $L = L_c = 128$  e  $\xi = 63$ .

## Modulação 256-QAM SNR=35dB – Canal C1

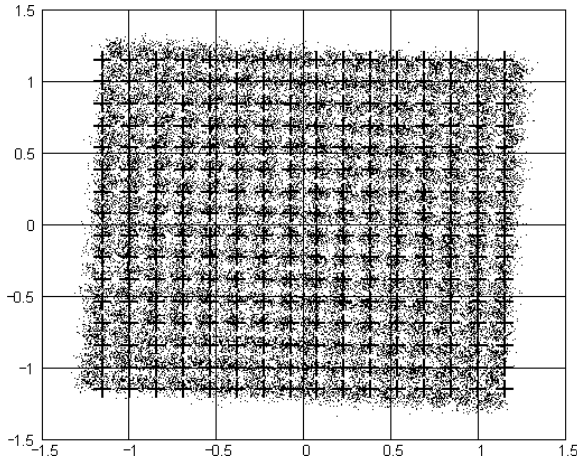


Fig. A.78a:  $\Gamma$  (CMA)

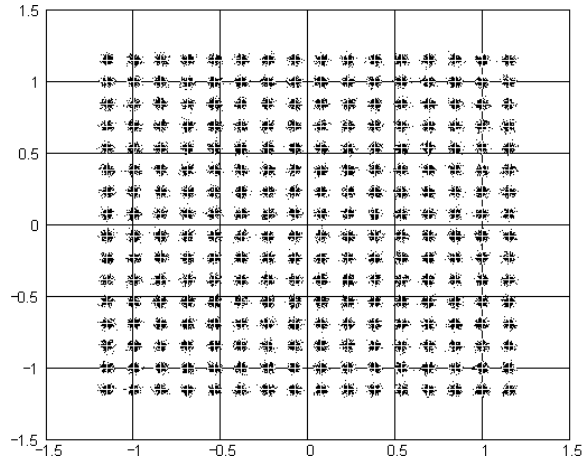


Fig. A.78b:  $\Psi$  (CONC)

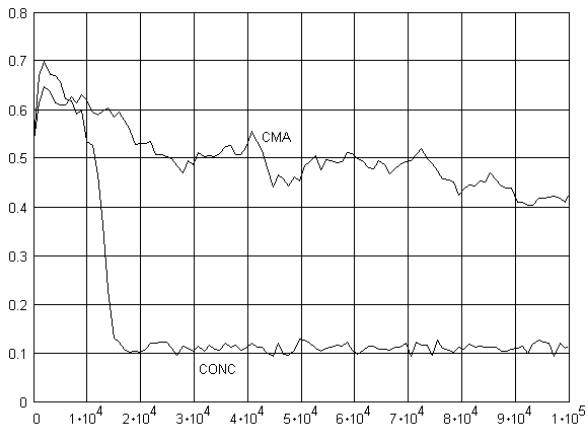


Fig. A.78c: ISI( $i$ )

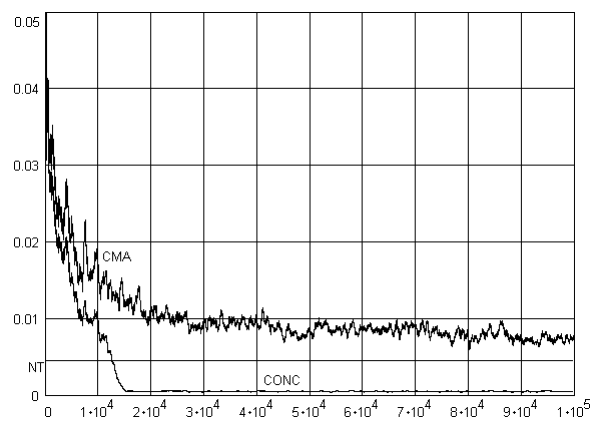


Fig. A.78d: MSE( $i$ )

Figura A.78: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal C1, modulação 256-QAM ( $\gamma = 1.395295$ ), SNR=35dB. Parâmetros:  $N_a = 100000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-4}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-4}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-3}$ ,  $L = L_c = 128$  e  $\xi = 63$ .

## Modulação 256-QAM SNR=35dB – Canal C2

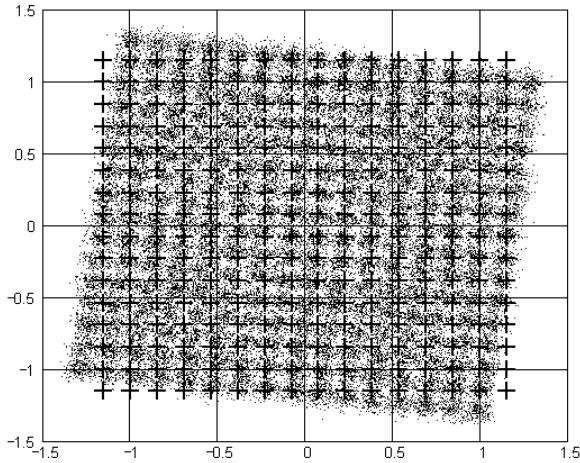


Fig. A.79a:  $\Gamma$  (CMA)

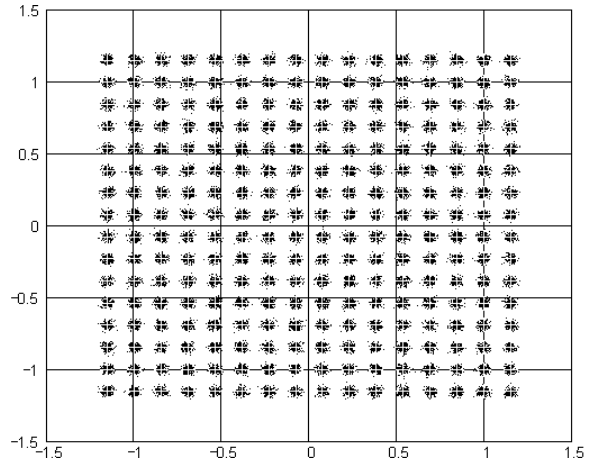


Fig. A.79b:  $\Psi$  (CONC)

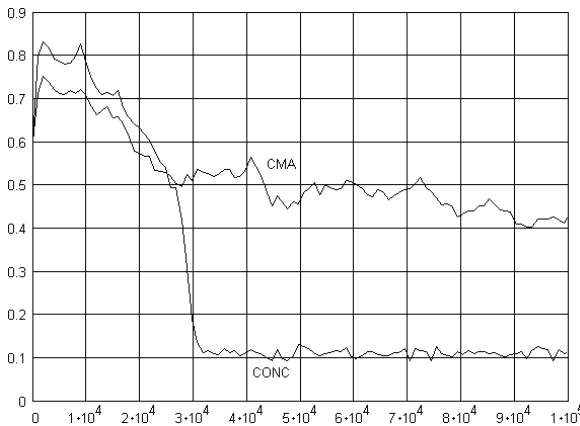


Fig. A.79c: ISI( $i$ )

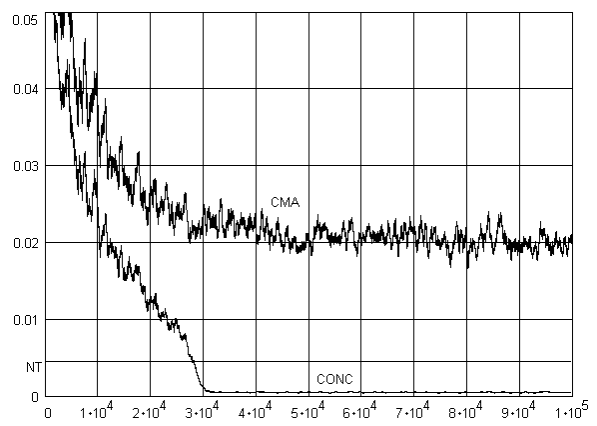


Fig. A.79d: MSE( $i$ )

Figura A.79: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal C2, modulação 256-QAM ( $\gamma = 1.395295$ ), SNR=35dB.

Parâmetros:  $N_a = 100000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-4}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-4}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-3}$ ,  $L = L_c = 128$  e  $\xi = 63$ .

## Canal RR – Modulação 16–QAM SNR=35dB

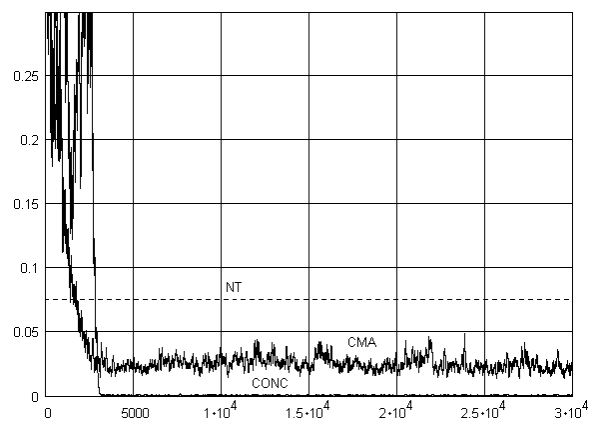
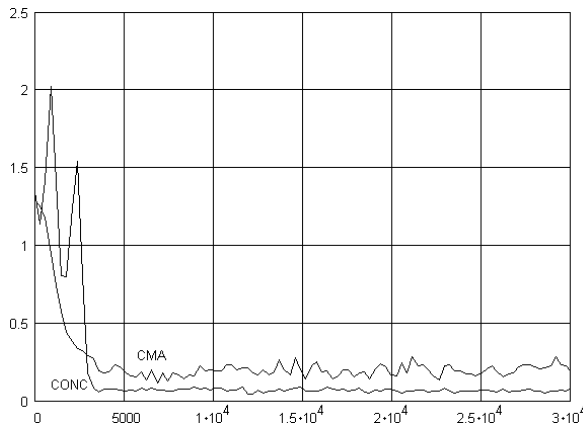
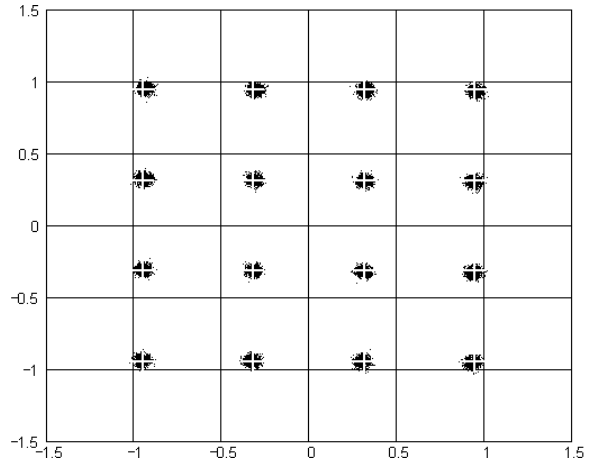
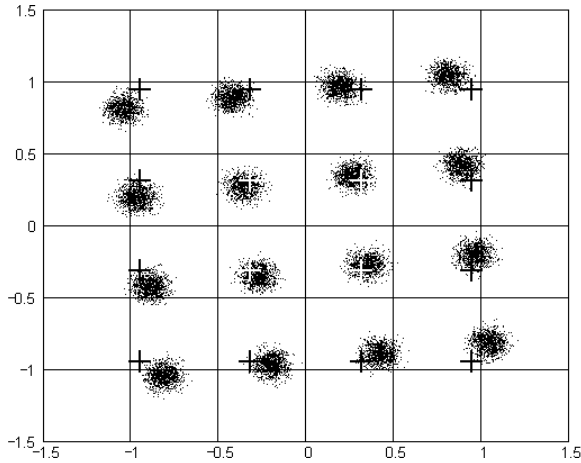


Figura A.80: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal RR, modulação 16–QAM ( $\gamma=1.32$ ), SNR=35dB. Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 8$ .

Canal RR – Modulação 16-QAM SNR=25dB

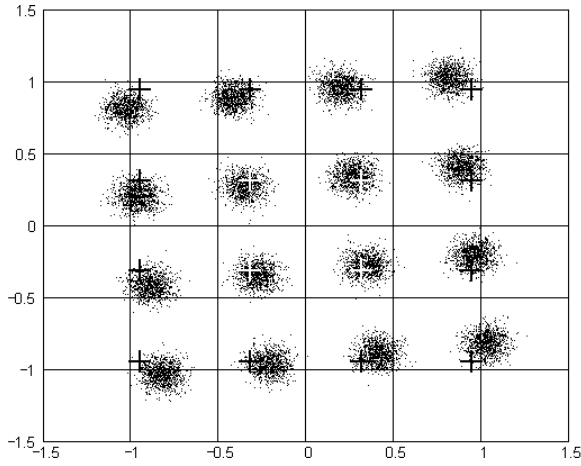


Fig. A.81a:  $\Gamma$  (CMA)

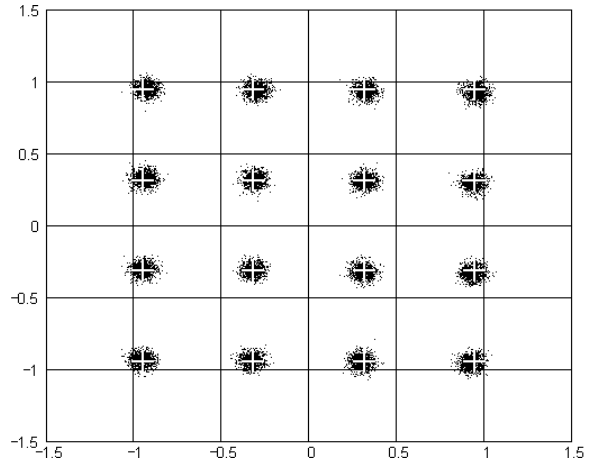


Fig. A.81b:  $\Psi$  (CONC)

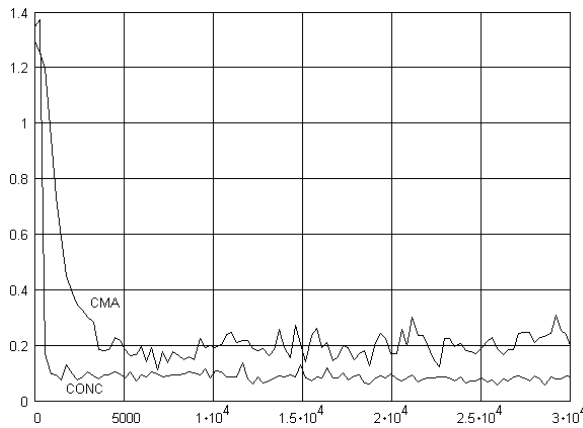


Fig. A.81c: ISI(*i*)

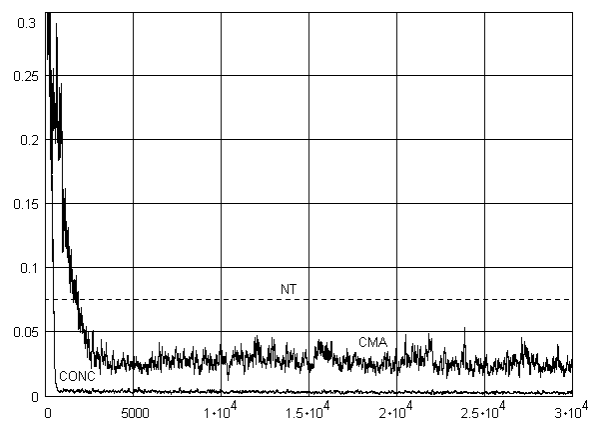


Fig. A.81d: MSE(*i*)

Figura A.81: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal RR, modulação 16-QAM ( $\gamma=1.32$ ), SNR=25dB.

Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1.1 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 8$ .

Canal RR – Modulação 16-QAM SNR=15dB

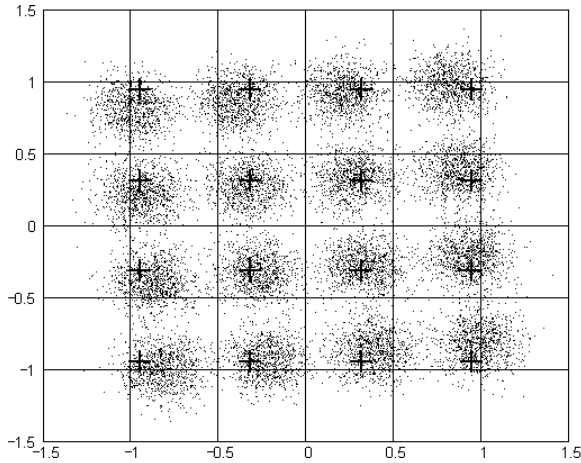


Fig. A.82a:  $\Gamma$  (CMA)

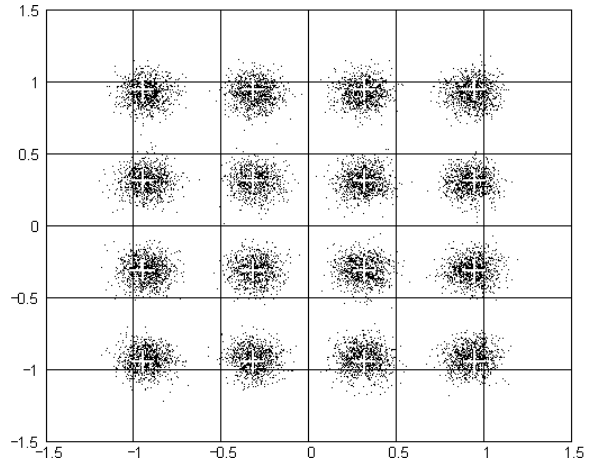


Fig. A.82b:  $\Psi$  (CONC)

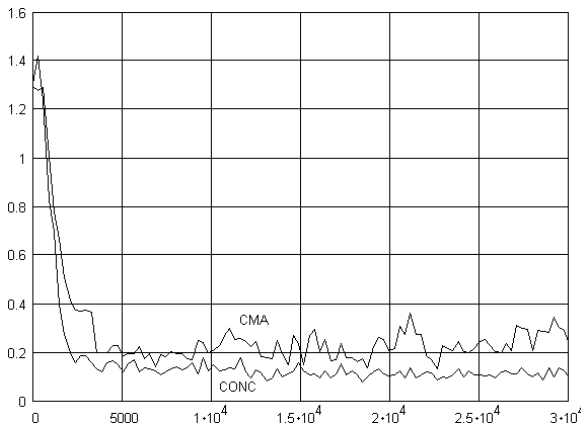


Fig. A.82c: ISI(*i*)

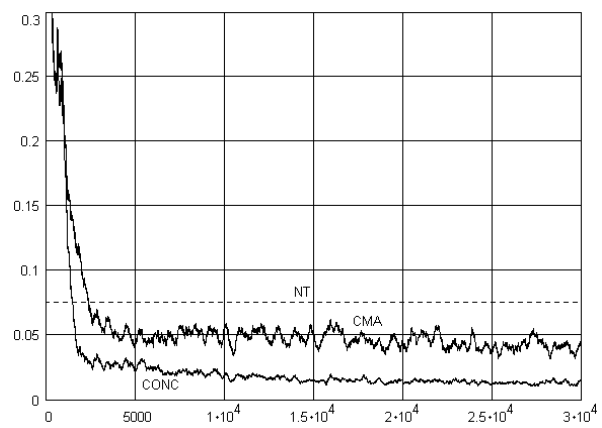


Fig. A.82d: MSE(*i*)

Figura A.82: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal RR, modulação 16-QAM ( $\gamma=1.32$ ), SNR=15dB.

Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 4 \times 10^{-3}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 8$ .

## Canal RR – Modulação 64-QAM SNR=35dB

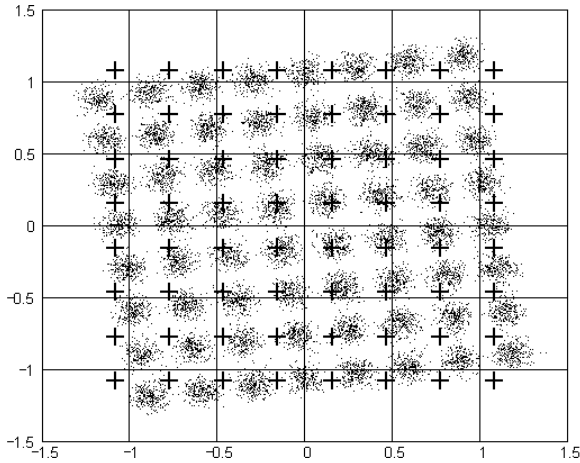


Fig. A.83a:  $\Gamma$  (CMA)

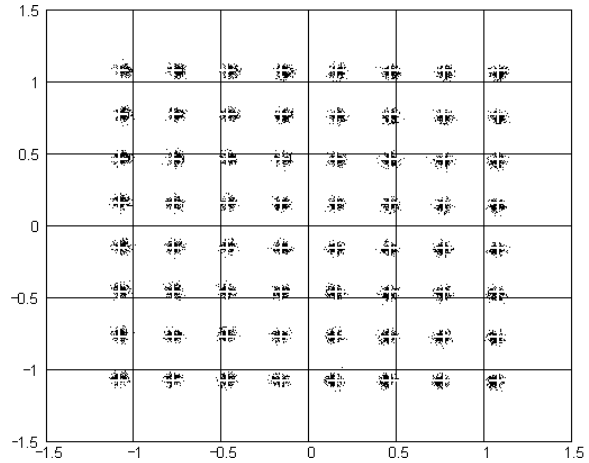


Fig. A.83b:  $\Psi$  (CONC)

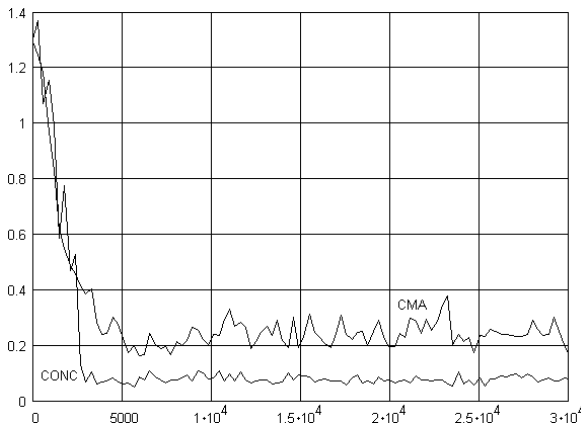


Fig. A.83c: ISI(*i*)

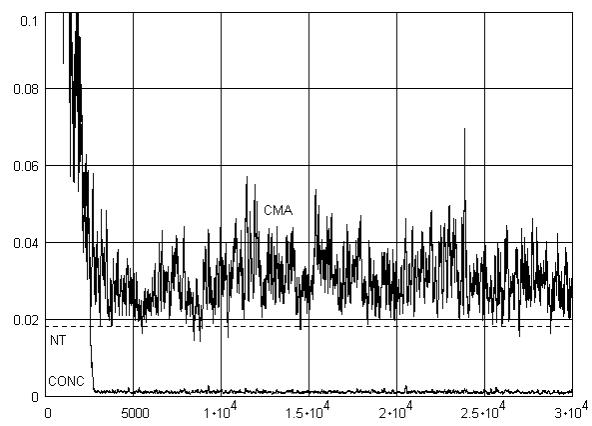


Fig. A.83d: MSE(*i*)

Figura A.83: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal RR, modulação 64-QAM ( $\gamma = 1.380953$ ), SNR=35dB.

Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 8$ .



## Canal RR – Modulação 64-QAM SNR=25dB

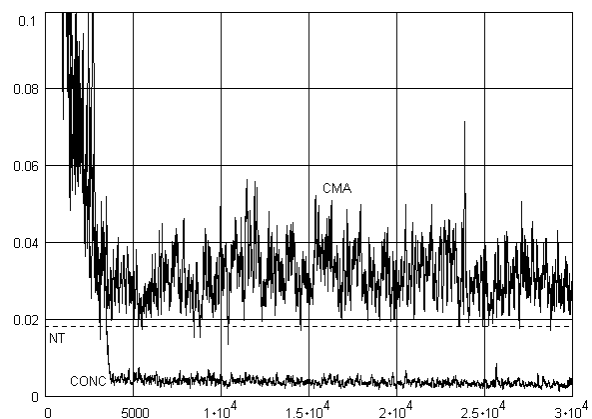
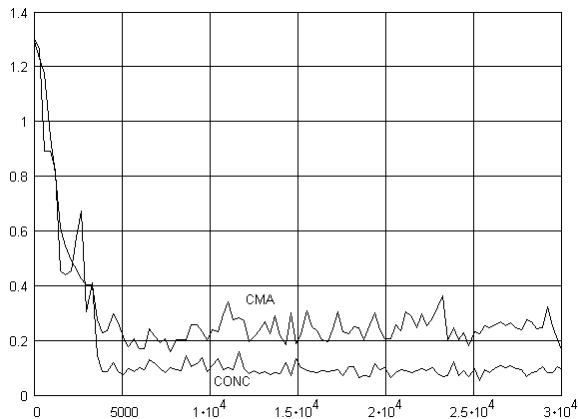
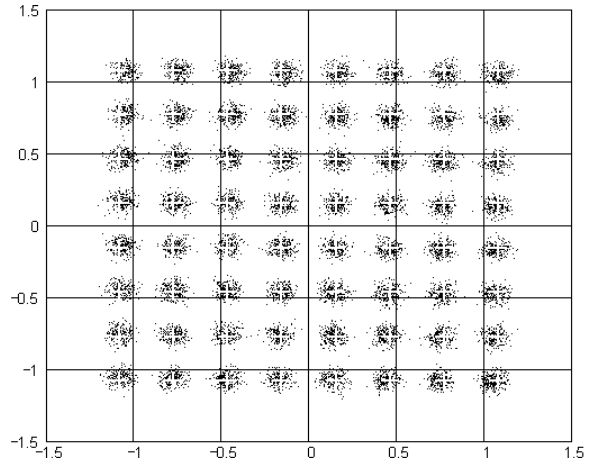
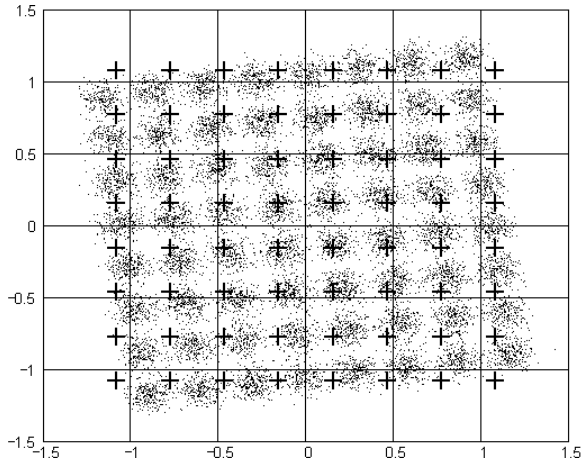


Figura A.84: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal RR, modulação 64-QAM ( $\gamma = 1.380953$ ), SNR=25dB. Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 8$ .

Canal RU – Modulação 16-QAM SNR=35dB

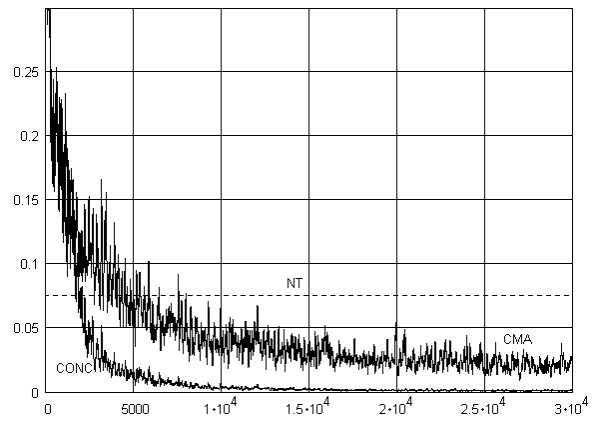
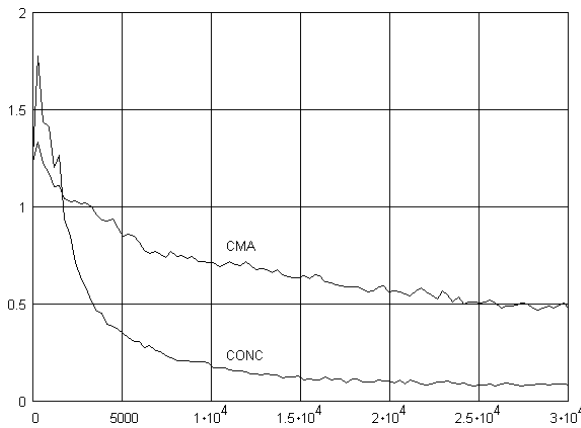
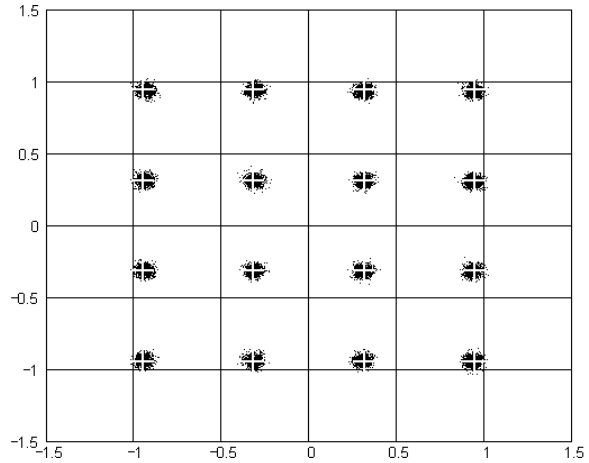
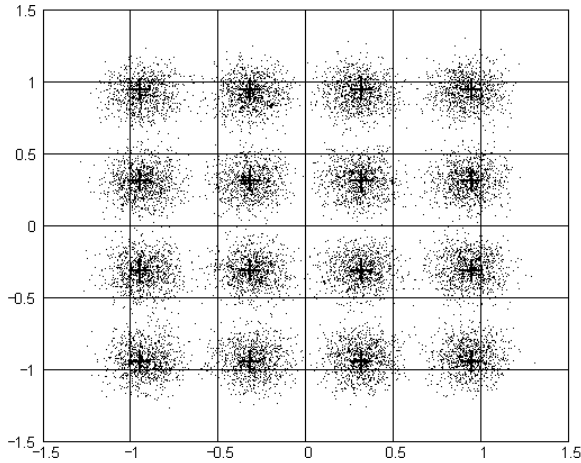


Figura A.85: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal RU, modulação 16-QAM ( $\gamma=1.32$ ), SNR=35dB. Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 8$ .

## Canal RU – Modulação 16-QAM SNR=25dB

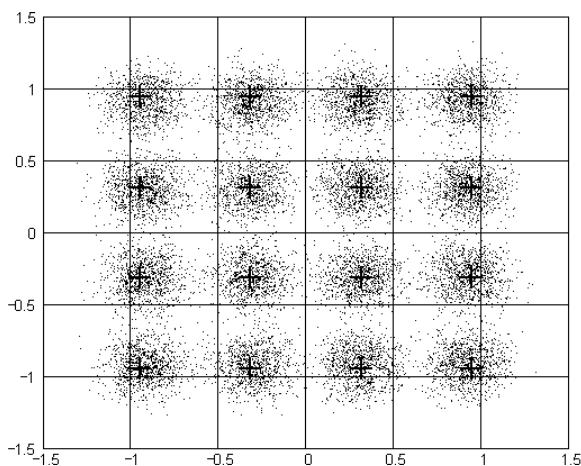


Fig. A.86a:  $\Gamma$  (CMA)

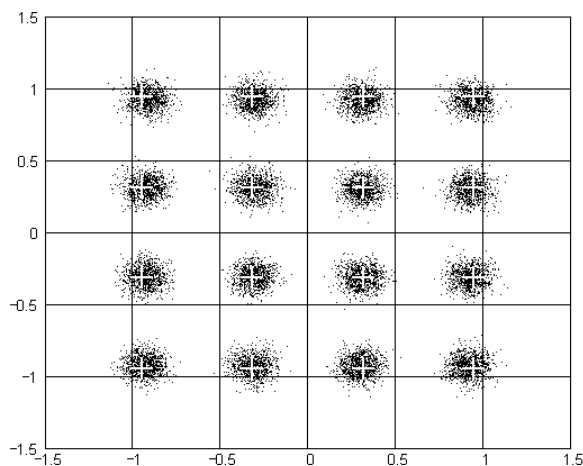


Fig. A.86b:  $\Psi$  (CONC)

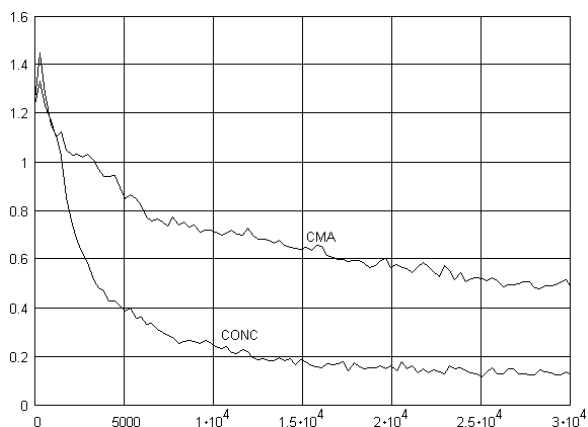


Fig. A.86c: ISI(*i*)

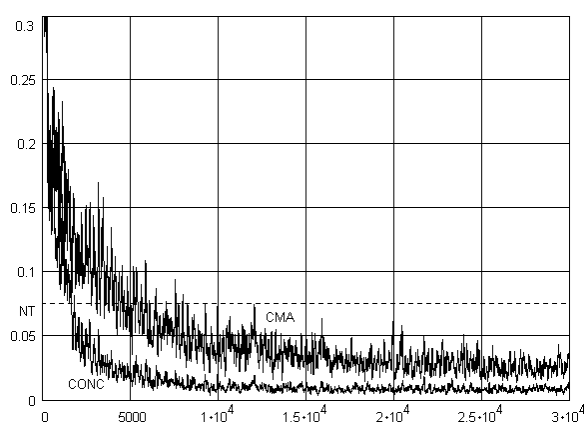


Fig. A.86d: MSE(*i*)

Figura A.86: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal RU, modulação 16-QAM ( $\gamma=1.32$ ), SNR=25dB. Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 0.8 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 8$ .

## Canal RU – Modulação 16–QAM SNR=15dB

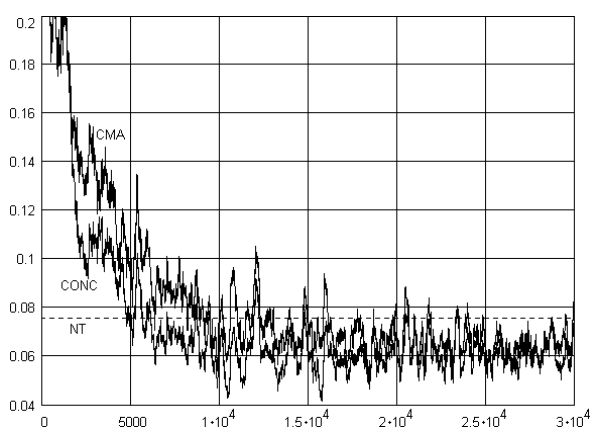
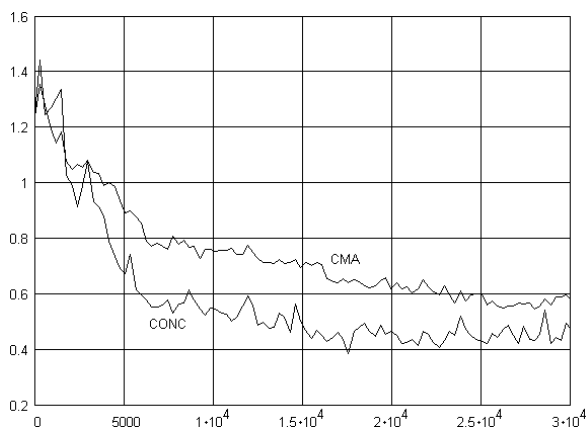
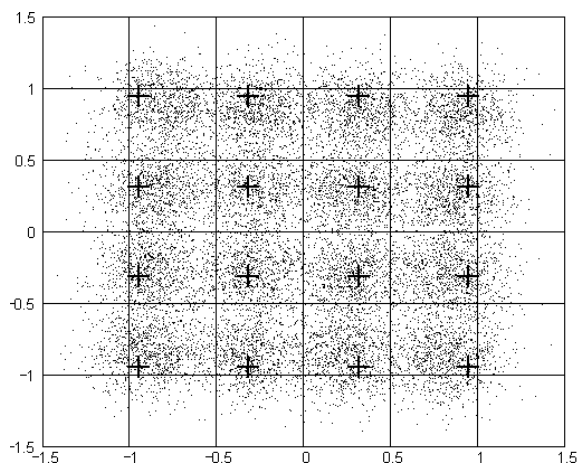
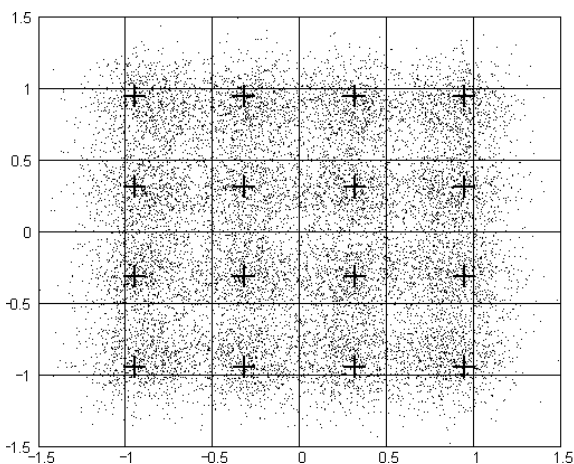


Figura A.87: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal RU, modulação 16–QAM ( $\gamma=1.32$ ), SNR=15dB. Parâmetros:  $N_a = 30000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 6 \times 10^{-3}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 8$ .

## Canal RU – Modulação 64-QAM SNR=35dB

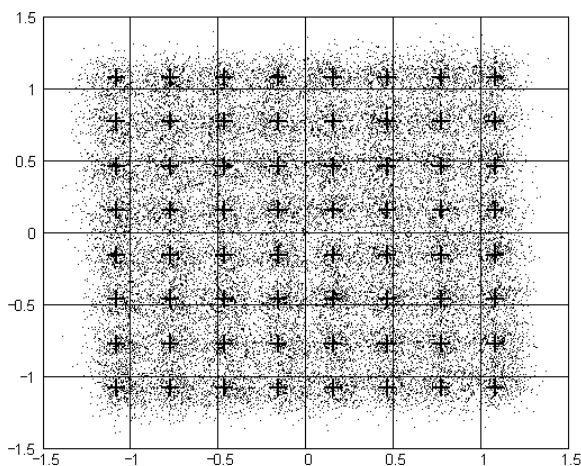


Fig. A.88a:  $\Gamma$  (CMA)

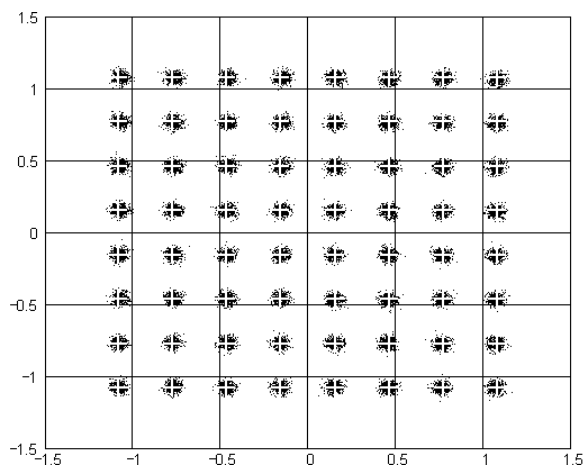


Fig. A.88b:  $\Psi$  (CONC)

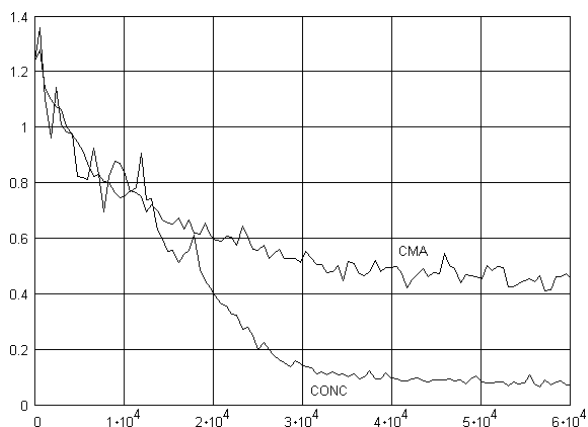


Fig. A.88c: ISI(*i*)

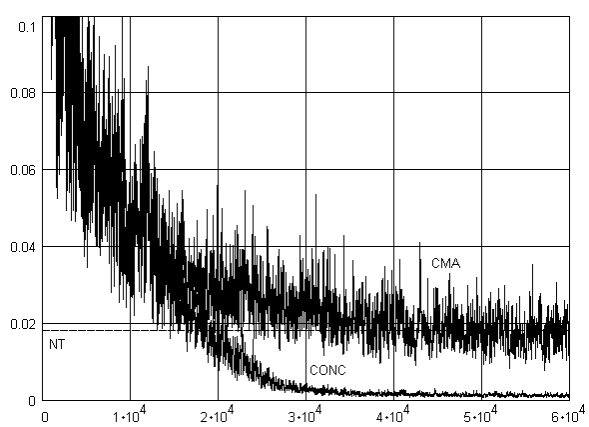


Fig. A.88d: MSE(*i*)

Figura A.88: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal RU, modulação 64-QAM ( $\gamma = 1.380953$ ), SNR=35dB. Parâmetros:  $N_a = 60000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 8$ .

Canal RU – Modulação 64-QAM SNR=25dB

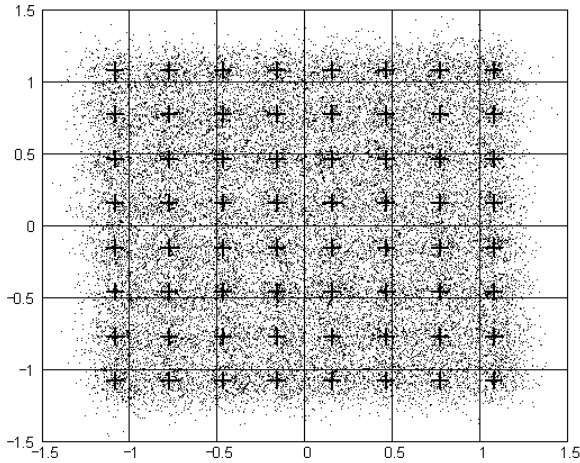


Fig. A.89a:  $\Gamma$  (CMA)

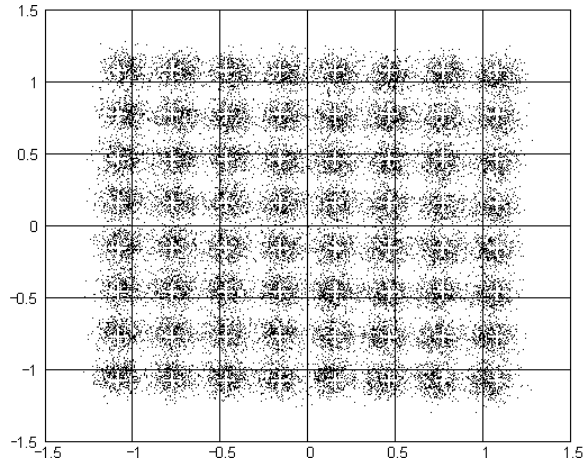


Fig. A.89b:  $\Psi$  (CONC)

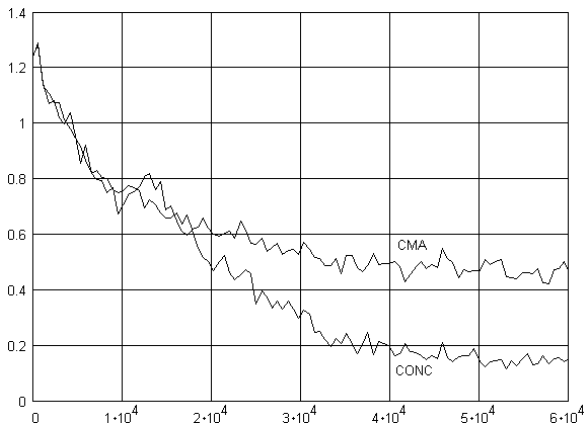


Fig. A.89c: ISI(*i*)

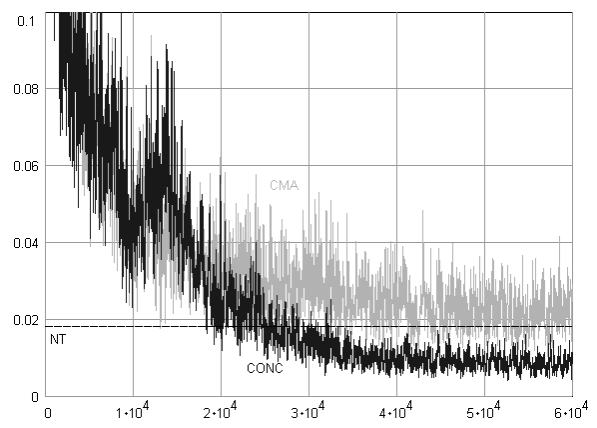


Fig. A.89d: MSE(*i*)

Figura A.89: Resultados comparativos entre o equalizador CMA e o Equalizador Concorrente (CONC) para o canal RU, modulação 64-QAM ( $\gamma = 1.380953$ ), SNR=25dB.

Parâmetros:  $N_a = 60000$ ,  $\eta = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_v = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\eta_w = 1 \times 10^{-2}$ ,  $L = L_c = 16$  e  $\xi = 8$ .

# Apêndice B

## Constelações e Constantes de Dispersão

As tabelas que seguem mostram os símbolos  $s_k \in A$ ,  $k = 0, 1, \dots, M-1$ , sendo  $A = \{s_0, s_1, \dots, s_{M-1}\}$  o alfabeto ou constelação de variância unitária associado a uma modulação  $M$ -QAM. A Constante de Dispersão de cada alfabeto é dada por

$$\gamma = \frac{\sum_{k=0}^{M-1} |s_k|^4}{\sum_{k=0}^{M-1} |s_k|^2}.$$

Tabela B.1: Constelação 16-QAM com variância unitária, cuja Constante de Dispersão é  $\gamma=1.320000$ .

|    |                     |
|----|---------------------|
| 0  | -0.948683-0.948683i |
| 1  | -0.948683-0.316228i |
| 2  | -0.948683+0.316228i |
| 3  | -0.948683+0.948683i |
| 4  | -0.316228-0.948683i |
| 5  | -0.316228-0.316228i |
| 6  | -0.316228+0.316228i |
| 7  | -0.316228+0.948683i |
| 8  | 0.316228-0.948683i  |
| 9  | 0.316228-0.316228i  |
| 10 | 0.316228+0.316228i  |
| 11 | 0.316228+0.948683i  |
| 12 | 0.948683-0.948683i  |
| 13 | 0.948683-0.316228i  |
| 14 | 0.948683+0.316228i  |
| 15 | 0.948683+0.948683i  |

Tabela B.2: Constelação 64-QAM com variância unitária, cuja Constante de Dispersão é  $\gamma=1.380953$ .

|    |                     |
|----|---------------------|
| 0  | -1.080123-1.080123i |
| 1  | -1.080123-0.771517i |
| 2  | -1.080123-0.462910i |
| 3  | -1.080123-0.154303i |
| 4  | -1.080123+0.154303i |
| 5  | -1.080123+0.462910i |
| 6  | -1.080123+0.771517i |
| 7  | -1.080123+1.080123i |
| 8  | -0.771517-1.080123i |
| 9  | -0.771517-0.771517i |
| 10 | -0.771517-0.462910i |
| 11 | -0.771517-0.154303i |

|    |                     |
|----|---------------------|
| 12 | -0.771517+0.154303i |
| 13 | -0.771517+0.462910i |
| 14 | -0.771517+0.771517i |
| 15 | -0.771517+1.080123i |
| 16 | -0.462910-1.080123i |
| 17 | -0.462910-0.771517i |
| 18 | -0.462910-0.462910i |
| 19 | -0.462910-0.154303i |
| 20 | -0.462910+0.154303i |
| 21 | -0.462910+0.462910i |
| 22 | -0.462910+0.771517i |
| 23 | -0.462910+1.080123i |
| 24 | -0.154303-1.080123i |
| 25 | -0.154303-0.771517i |
| 26 | -0.154303-0.462910i |
| 27 | -0.154303-0.154303i |
| 28 | -0.154303+0.154303i |
| 29 | -0.154303+0.462910i |
| 30 | -0.154303+0.771517i |
| 31 | -0.154303+1.080123i |
| 32 | 0.154303-1.080123i  |
| 33 | 0.154303-0.771517i  |
| 34 | 0.154303-0.462910i  |
| 35 | 0.154303-0.154303i  |
| 36 | 0.154303+0.154303i  |
| 37 | 0.154303+0.462910i  |
| 38 | 0.154303+0.771517i  |
| 39 | 0.154303+1.080123i  |
| 40 | 0.462910-1.080123i  |
| 41 | 0.462910-0.771517i  |
| 42 | 0.462910-0.462910i  |
| 43 | 0.462910-0.154303i  |
| 44 | 0.462910+0.154303i  |
| 45 | 0.462910+0.462910i  |
| 46 | 0.462910+0.771517i  |
| 47 | 0.462910+1.080123i  |
| 48 | 0.771517-1.080123i  |
| 49 | 0.771517-0.771517i  |
| 50 | 0.771517-0.462910i  |
| 51 | 0.771517-0.154303i  |
| 52 | 0.771517+0.154303i  |
| 53 | 0.771517+0.462910i  |
| 54 | 0.771517+0.771517i  |
| 55 | 0.771517+1.080123i  |
| 56 | 1.080123-1.080123i  |
| 57 | 1.080123-0.771517i  |
| 58 | 1.080123-0.462910i  |
| 59 | 1.080123-0.154303i  |
| 60 | 1.080123+0.154303i  |
| 61 | 1.080123+0.462910i  |
| 62 | 1.080123+0.771517i  |
| 63 | 1.080123+1.080123i  |



Tabela B.3: Constelação 256-QAM com variância unitária, cuja Constante de Dispersão é  $\gamma=1.395295$ .

|    |                     |
|----|---------------------|
| 0  | -1.150447-1.150447i |
| 1  | -1.150447-0.997055i |
| 2  | -1.150447-0.843661i |
| 3  | -1.150447-0.690269i |
| 4  | -1.150447-0.536875i |
| 5  | -1.150447-0.383483i |
| 6  | -1.150447-0.230090i |
| 7  | -1.150447-0.076697i |
| 8  | -1.150447+0.076697i |
| 9  | -1.150447+0.230090i |
| 10 | -1.150447+0.383483i |
| 11 | -1.150447+0.536875i |
| 12 | -1.150447+0.690269i |
| 13 | -1.150447+0.843661i |
| 14 | -1.150447+0.997055i |
| 15 | -1.150447+1.150447i |
| 16 | -0.997055-1.150447i |
| 17 | -0.997055-0.997055i |
| 18 | -0.997055-0.843661i |
| 19 | -0.997055-0.690269i |
| 20 | -0.997055-0.536875i |
| 21 | -0.997055-0.383483i |
| 22 | -0.997055-0.230090i |
| 23 | -0.997055-0.076697i |
| 24 | -0.997055+0.076697i |
| 25 | -0.997055+0.230090i |
| 26 | -0.997055+0.383483i |
| 27 | -0.997055+0.536875i |
| 28 | -0.997055+0.690269i |
| 29 | -0.997055+0.843661i |
| 30 | -0.997055+0.997055i |
| 31 | -0.997055+1.150447i |
| 32 | -0.843661-1.150447i |
| 33 | -0.843661-0.997055i |
| 34 | -0.843661-0.843661i |
| 35 | -0.843661-0.690269i |
| 36 | -0.843661-0.536875i |
| 37 | -0.843661-0.383483i |
| 38 | -0.843661-0.230090i |
| 39 | -0.843661-0.076697i |
| 40 | -0.843661+0.076697i |
| 41 | -0.843661+0.230090i |
| 42 | -0.843661+0.383483i |
| 43 | -0.843661+0.536875i |
| 44 | -0.843661+0.690269i |
| 45 | -0.843661+0.843661i |
| 46 | -0.843661+0.997055i |
| 47 | -0.843661+1.150447i |
| 48 | -0.690269-1.150447i |
| 49 | -0.690269-0.997055i |

|     |                     |
|-----|---------------------|
| 50  | -0.690269-0.843661i |
| 51  | -0.690269-0.690269i |
| 52  | -0.690269-0.536875i |
| 53  | -0.690269-0.383483i |
| 54  | -0.690269-0.230090i |
| 55  | -0.690269-0.076697i |
| 56  | -0.690269+0.076697i |
| 57  | -0.690269+0.230090i |
| 58  | -0.690269+0.383483i |
| 59  | -0.690269+0.536875i |
| 60  | -0.690269+0.690269i |
| 61  | -0.690269+0.843661i |
| 62  | -0.690269+0.997055i |
| 63  | -0.690269+1.150447i |
| 64  | -0.536875-1.150447i |
| 65  | -0.536875-0.997055i |
| 66  | -0.536875-0.843661i |
| 67  | -0.536875-0.690269i |
| 68  | -0.536875-0.536875i |
| 69  | -0.536875-0.383483i |
| 70  | -0.536875-0.230090i |
| 71  | -0.536875-0.076697i |
| 72  | -0.536875+0.076697i |
| 73  | -0.536875+0.230090i |
| 74  | -0.536875+0.383483i |
| 75  | -0.536875+0.536875i |
| 76  | -0.536875+0.690269i |
| 77  | -0.536875+0.843661i |
| 78  | -0.536875+0.997055i |
| 79  | -0.536875+1.150447i |
| 80  | -0.383483-1.150447i |
| 81  | -0.383483-0.997055i |
| 82  | -0.383483-0.843661i |
| 83  | -0.383483-0.690269i |
| 84  | -0.383483-0.536875i |
| 85  | -0.383483-0.383483i |
| 86  | -0.383483-0.230090i |
| 87  | -0.383483-0.076697i |
| 88  | -0.383483+0.076697i |
| 89  | -0.383483+0.230090i |
| 90  | -0.383483+0.383483i |
| 91  | -0.383483+0.536875i |
| 92  | -0.383483+0.690269i |
| 93  | -0.383483+0.843661i |
| 94  | -0.383483+0.997055i |
| 95  | -0.383483+1.150447i |
| 96  | -0.230090-1.150447i |
| 97  | -0.230090-0.997055i |
| 98  | -0.230090-0.843661i |
| 99  | -0.230090-0.690269i |
| 100 | -0.230090-0.536875i |
| 101 | -0.230090-0.383483i |

|     |                     |
|-----|---------------------|
| 102 | -0.230090-0.230090i |
| 103 | -0.230090-0.076697i |
| 104 | -0.230090+0.076697i |
| 105 | -0.230090+0.230090i |
| 106 | -0.230090+0.383483i |
| 107 | -0.230090+0.536875i |
| 108 | -0.230090+0.690269i |
| 109 | -0.230090+0.843661i |
| 110 | -0.230090+0.997055i |
| 111 | -0.230090+1.150447i |
| 112 | -0.076697-1.150447i |
| 113 | -0.076697-0.997055i |
| 114 | -0.076697-0.843661i |
| 115 | -0.076697-0.690269i |
| 116 | -0.076697-0.536875i |
| 117 | -0.076697-0.383483i |
| 118 | -0.076697-0.230090i |
| 119 | -0.076697-0.076697i |
| 120 | -0.076697+0.076697i |
| 121 | -0.076697+0.230090i |
| 122 | -0.076697+0.383483i |
| 123 | -0.076697+0.536875i |
| 124 | -0.076697+0.690269i |
| 125 | -0.076697+0.843661i |
| 126 | -0.076697+0.997055i |
| 127 | -0.076697+1.150447i |
| 128 | 0.076697-1.150447i  |
| 129 | 0.076697-0.997055i  |
| 130 | 0.076697-0.843661i  |
| 131 | 0.076697-0.690269i  |
| 132 | 0.076697-0.536875i  |
| 133 | 0.076697-0.383483i  |
| 134 | 0.076697-0.230090i  |
| 135 | 0.076697-0.076697i  |
| 136 | 0.076697+0.076697i  |
| 137 | 0.076697+0.230090i  |
| 138 | 0.076697+0.383483i  |
| 139 | 0.076697+0.536875i  |
| 140 | 0.076697+0.690269i  |
| 141 | 0.076697+0.843661i  |
| 142 | 0.076697+0.997055i  |
| 143 | 0.076697+1.150447i  |
| 144 | 0.230090-1.150447i  |
| 145 | 0.230090-0.997055i  |
| 146 | 0.230090-0.843661i  |
| 147 | 0.230090-0.690269i  |
| 148 | 0.230090-0.536875i  |
| 149 | 0.230090-0.383483i  |
| 150 | 0.230090-0.230090i  |
| 151 | 0.230090-0.076697i  |
| 152 | 0.230090+0.076697i  |
| 153 | 0.230090+0.230090i  |

|     |                    |
|-----|--------------------|
| 154 | 0.230090+0.383483i |
| 155 | 0.230090+0.536875i |
| 156 | 0.230090+0.690269i |
| 157 | 0.230090+0.843661i |
| 158 | 0.230090+0.997055i |
| 159 | 0.230090+1.150447i |
| 160 | 0.383483-1.150447i |
| 161 | 0.383483-0.997055i |
| 162 | 0.383483-0.843661i |
| 163 | 0.383483-0.690269i |
| 164 | 0.383483-0.536875i |
| 165 | 0.383483-0.383483i |
| 166 | 0.383483-0.230090i |
| 167 | 0.383483-0.076697i |
| 168 | 0.383483+0.076697i |
| 169 | 0.383483+0.230090i |
| 170 | 0.383483+0.383483i |
| 171 | 0.383483+0.536875i |
| 172 | 0.383483+0.690269i |
| 173 | 0.383483+0.843661i |
| 174 | 0.383483+0.997055i |
| 175 | 0.383483+1.150447i |
| 176 | 0.536875-1.150447i |
| 177 | 0.536875-0.997055i |
| 178 | 0.536875-0.843661i |
| 179 | 0.536875-0.690269i |
| 180 | 0.536875-0.536875i |
| 181 | 0.536875-0.383483i |
| 182 | 0.536875-0.230090i |
| 183 | 0.536875-0.076697i |
| 184 | 0.536875+0.076697i |
| 185 | 0.536875+0.230090i |
| 186 | 0.536875+0.383483i |
| 187 | 0.536875+0.536875i |
| 188 | 0.536875+0.690269i |
| 189 | 0.536875+0.843661i |
| 190 | 0.536875+0.997055i |
| 191 | 0.536875+1.150447i |
| 192 | 0.690269-1.150447i |
| 193 | 0.690269-0.997055i |
| 194 | 0.690269-0.843661i |
| 195 | 0.690269-0.690269i |
| 196 | 0.690269-0.536875i |
| 197 | 0.690269-0.383483i |
| 198 | 0.690269-0.230090i |
| 199 | 0.690269-0.076697i |
| 200 | 0.690269+0.076697i |
| 201 | 0.690269+0.230090i |
| 202 | 0.690269+0.383483i |
| 203 | 0.690269+0.536875i |
| 204 | 0.690269+0.690269i |
| 205 | 0.690269+0.843661i |

|     |                    |
|-----|--------------------|
| 206 | 0.690269+0.997055i |
| 207 | 0.690269+1.150447i |
| 208 | 0.843661-1.150447i |
| 209 | 0.843661-0.997055i |
| 210 | 0.843661-0.843661i |
| 211 | 0.843661-0.690269i |
| 212 | 0.843661-0.536875i |
| 213 | 0.843661-0.383483i |
| 214 | 0.843661-0.230090i |
| 215 | 0.843661-0.076697i |
| 216 | 0.843661+0.076697i |
| 217 | 0.843661+0.230090i |
| 218 | 0.843661+0.383483i |
| 219 | 0.843661+0.536875i |
| 220 | 0.843661+0.690269i |
| 221 | 0.843661+0.843661i |
| 222 | 0.843661+0.997055i |
| 223 | 0.843661+1.150447i |
| 224 | 0.997055-1.150447i |
| 225 | 0.997055-0.997055i |
| 226 | 0.997055-0.843661i |
| 227 | 0.997055-0.690269i |
| 228 | 0.997055-0.536875i |
| 229 | 0.997055-0.383483i |
| 230 | 0.997055-0.230090i |
| 231 | 0.997055-0.076697i |
| 232 | 0.997055+0.076697i |
| 233 | 0.997055+0.230090i |
| 234 | 0.997055+0.383483i |
| 235 | 0.997055+0.536875i |
| 236 | 0.997055+0.690269i |
| 237 | 0.997055+0.843661i |
| 238 | 0.997055+0.997055i |
| 239 | 0.997055+1.150447i |
| 240 | 1.150447-1.150447i |
| 241 | 1.150447-0.997055i |
| 242 | 1.150447-0.843661i |
| 243 | 1.150447-0.690269i |
| 244 | 1.150447-0.536875i |
| 245 | 1.150447-0.383483i |
| 246 | 1.150447-0.230090i |
| 247 | 1.150447-0.076697i |
| 248 | 1.150447+0.076697i |
| 249 | 1.150447+0.230090i |
| 250 | 1.150447+0.383483i |
| 251 | 1.150447+0.536875i |
| 252 | 1.150447+0.690269i |
| 253 | 1.150447+0.843661i |
| 254 | 1.150447+0.997055i |
| 255 | 1.150447+1.150447i |