Problema: incidência oblíqua de onda EM na interface entre dois meios - polarização paralela e perpendicular

Uma onda plana se propaga no ar (meio 1) com fasor do campo elétrico definido por:

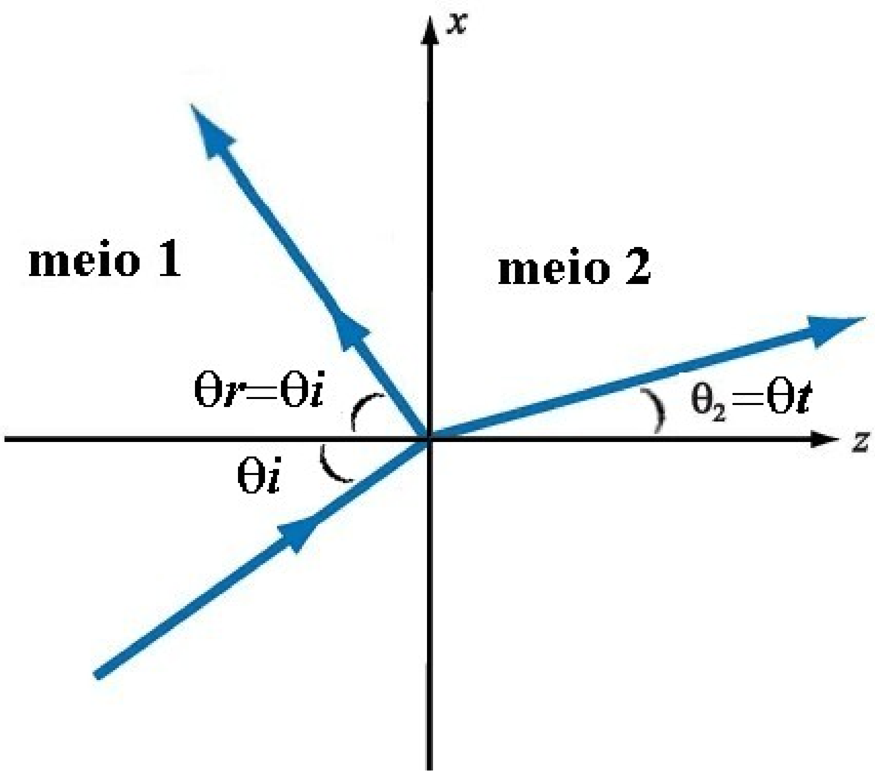
$$Ei(x,z) = (Eix \cdot i\_ + Eiy \cdot j\_ + Eiz \cdot k\_) \cdot e^{-j \cdot (\beta x \cdot x + \beta z \cdot z)} \qquad (1)$$

onde

$i\_ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad j\_ = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad k\_ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$Eix := 9 \frac{V}{m}$ $\quad Eiy := -4 \frac{V}{m}$ $\quad Eiz := -6 \frac{V}{m}$ $\quad \beta x := 2 \cdot \frac{rad}{m}$ $\quad \beta z := 3 \cdot \frac{rad}{m}$

A onda que se propaga no meio 1 incide na interface meio 1-meio 2, e passa a se propagar no meio 2 com direção de propagação distinta da direção de propagação no meio 1, conforme mostra a figura abaixo. O meio 2 é um meio dielétrico (não-magnético), sem perdas e com permissividade relativa $\varepsilon r := 2.25$.



Pede-se:

a) Determine o ângulo de incidência θi e o ângulo de transmissão $\theta t = \theta 2$ na figura acima.

b) Determine a frequência f da onda.

c) Determine nos pontos P1 e P2 de coordenadas P1 ($x1 := 0m$, $y1 := 0m$, $z1 := 0m$) e P2 ($x2 := 1m$, $y2 := 0m$, $z2 := -1m$. o fasor do campo elétrico Er refletido na fronteira e que se propaga no meio 1)

d) Determine o fasor do campo elétrico Et transmitido através da fronteira e que se propaga no meio 2 nos pontos P1 e P3 de coordenadas P1 ($x1 = 0$, $y1 = 0$, $z1 = 0$) e P3 ($x3 := 1m$, $y3 := 0m$, $z3 := 1m$.).

e) A densidade de potência média (parte real do vetor de Poynting) no meio 2.

Referências bibliográficas

[1] http:/www.feng.pucrs.br/~decastro/pdf/OL_IV.pdf

[2] Microwave Engineering 4th - Pozar - JohnWiley & Sons – 2012

Solução :

a) Comparando o argumento da exponencial complexa na expressão de Ei na equação (1) acima com o argumento da exponencial complexa na expressão de Ei nos slides 20 e/ou 28 de [1], temos:

$$\beta 1 \cdot \sin(\theta i) = \beta x$$

$$\beta 1 \cdot \cos(\theta i) = \beta z$$

Daí, das projeções acima, obtemos:

$$\theta i := \operatorname{atan}\left(\frac{\beta x}{\beta z}\right) \quad \rightarrow \quad \theta i = 33.69 \cdot \mathrm{deg}$$

$$\beta 1 := \sqrt{(\beta x)^2 + (\beta z)^2} \quad \rightarrow \quad \beta 1 = 3.606 \cdot \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$$

Do εr definido no enunciado para o meio 2 e do slide (23) de [1], temos:

$$\beta 1 = \omega \cdot \sqrt{\mu_0 \cdot \varepsilon_0}$$

$$\beta 2 = \omega \cdot \sqrt{\mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon r}$$

e, portanto,

$$\beta 2 := \beta 1 \cdot \sqrt{\varepsilon r} \qquad \beta 2 = 5.408 \cdot \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}} \tag{2}$$

Da Lei de Snell no slide 25 e/ou no slide 31 de [1] temos:

$$\beta 1 \cdot \sin(\theta i) = \beta 2 \cdot \sin(\theta t)$$

Resolvendo p/ θt :

$$\theta t = \operatorname{asin}\left(\frac{\beta 1 \cdot \sin(\theta i)}{\beta 2}\right) \tag{3}$$

(2)→(3):

$$\theta t := \operatorname{asin}\left(\frac{\sin(\theta i)}{\sqrt{\varepsilon r}}\right) \qquad \theta t = 21.703 \cdot \mathrm{deg}$$

Nota: Observe que a lei de Snell vale tanto p/ o caso de onda incidente com polarização paralela como p/ o caso de onda incidente com polarização perpendicular. Vide equação (1.136b) e comentário imediatamente após equação (1.142b) em [2]. Observe também que para os dois casos o ângulo de reflexão θr é igual ao ângulo de incidência θi, isto é $\theta r := \theta i$.

b)

$$\beta 1 = \frac{2 \cdot \pi \cdot f}{c} \quad \rightarrow \quad f := \frac{c \cdot \beta 1}{2 \cdot \pi} \quad \rightarrow \quad f = 172.033 \cdot \mathrm{MHz}$$

c & d) Para determinar o campo elétrico da onda refletida, primeiro temos que determinar a polarização da onda incidente. Da expressão de Ei na equação (1) acima observa-se que a onda incidente é uma superposição de duas ondas, uma com polarização paralela e outra com polarização perpendicular. Conforme slide 28 de [1], no caso de incidência sob polarização perpendicular, Ei tem apenas componente na direção y. E conforme slide 20 de [1], no caso de incidência sob polarização paralela, Ei possui componentes na direção x e na direção z. Conseqüentemente, é necessário decompor a onda do campo elétrico incidente Ei como a superposição da onda EiPara de polarização paralela com a onda EiPerp de polarização perpendicular:

$$Ei = EiPerp + EiPara$$

Portanto, desta decomposição $Ei = EiPerp + EiPara$ e da expressão de Ei na equação (1) acima, e tendo em mente que no caso de incidência sob polarização perpendicular Ei tem apenas componente na direção y , e que no caso de incidência sob polarização paralela, Ei possui componentes na direção x e na direção z, temos:

$$EiPerp(x,z) := Eiy \cdot j\_ \cdot e^{-j\cdot(\beta x\cdot x+\beta z\cdot z)}$$

$$EiPara(x,z) := (Eix\cdot i\_ + Eiz\cdot k\_)\cdot e^{-j\cdot(\beta x\cdot x+\beta z\cdot z)}$$

Na origem do sistema cartesiano, na coordenada ($x = 0$, $y = 0$, $z = 0$) onde a onda incidente Ei incide na fronteira e dá origem à onda transmitida Et e também à onda refletida Er , temos que as componentes nas direções x,y e z do vetor campo elétrico EiPerp e as componentes nas direções x,y e z do vetor campo elétrico EiPara são:

$$EiPerp(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{V}{m}$$

$$EiPara(0,0) = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \frac{V}{m}$$

Na fronteira na coordenada ($x = 0$, $y = 0$, $z = 0$) , o vetor campo elétrico EiPerp0 na direção de propagação da onda que incide na fronteira sob polarização perpendicular é a componente na direção y do vetor campo elétrico EiPerp :

$$EiPerp0 := EiPerp(0,0)_1 \quad \rightarrow \quad EiPerp0 = -4\cdot\frac{V}{m}$$

De mesma forma, na fronteira na coordenada ($x = 0$, $y = 0$, $z = 0$) , o vetor campo elétrico EiPara0 na direção de propagação da onda que incide na fronteira sob polarização paralela é o vetor resultante na direção de propagação da onda obtido das componentes nas direção x e z do vetor campo elétrico EiPara :

$$EiPara0 := \sqrt{\left(EiPara(0,0)_0\right)^2 + \left(EiPara(0,0)_2\right)^2} \quad \rightarrow \quad EiPara0 = 10.817\cdot\frac{V}{m}$$

Note que, pelo princípio da continuidade dos campos na fronteira, EiPerp0 e EiPara0 darão origem à onda transmitida Et e também à onda refletida Er ,que serão respectivamente obtidas a partir da aplicação dos coeficientes de reflexão Γ e transmissão τ aos campos EiPerp0 e EiPara0 na fronteira, conforme desenvolvimento que segue:

Do slide 23 de [1], temos que as impedâncias η1 e η2 respectivas aos meis 1 e 2 são dadas por:

$$\eta 1 := \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \quad \rightarrow \quad \eta 1 = 376.73\cdot\Omega$$

$$\eta 2 := \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0\cdot\varepsilon r}} \quad \rightarrow \quad \eta 2 = 251.154\cdot\Omega$$

Os coeficientes de reflexão $\Gamma Para$ e de transmissão $\tau Para$ válidos para a onda incidindo na fronteira sob polarização paralela são dados por (ver slide 25 de [1]):

$$\Gamma Para := \frac{\eta 2\cdot\cos(\theta t) - \eta 1\cdot\cos(\theta i)}{\eta 2\cdot\cos(\theta t) + \eta 1\cdot\cos(\theta i)} \quad \rightarrow \quad \Gamma Para = -0.147$$

$$\tau Para := \frac{2\eta 2\cdot\cos(\theta i)}{\eta 2\cdot\cos(\theta t) + \eta 1\cdot\cos(\theta i)} \quad \rightarrow \quad \tau Para = 0.764$$

Os coeficientes de reflexão $\Gamma Perp$ e de transmissão $\tau Perp$ válidos para a onda incidindo na fronteira sob polarização perpendicular são dados por (ver slide 31 de [1]):

$$\Gamma Perp := \frac{\eta 2\cdot\cos(\theta i) - \eta 1\cdot\cos(\theta t)}{\eta 2\cdot\cos(\theta i) + \eta 1\cdot\cos(\theta t)} \quad \rightarrow \quad \Gamma Perp = -0.252$$

$$\tau Perp := \frac{2\eta 2\cdot\cos(\theta i)}{\eta 2\cdot\cos(\theta i) + \eta 1\cdot\cos(\theta t)} \quad \rightarrow \quad \tau Perp = 0.748$$

Do slide 23 de [1], temos que para a onda incidindo na fronteira sob polarização paralela, o campo elétrico da onda refletida $ErPara$ e o campo elétrico $EtPara$ da onda transmitida são dados por:

$$ErPara(x,z) = EiPara0\cdot\Gamma Para\cdot(\cos(\theta r)\cdot i\_ + \sin(\theta r)\cdot k\_)\cdot e^{-j\cdot\beta 1\cdot(x\cdot\sin(\theta r) - z\cdot\cos(\theta r))}$$

$$EtPara(x,z) = EiPara0\cdot\tau Para\cdot(\cos(\theta t)\cdot i\_ - \sin(\theta t)\cdot k\_)\cdot e^{-j\cdot\beta 2\cdot(x\cdot\sin(\theta t) + z\cdot\cos(\theta t))}$$

Do slide 29 de [1], temos que para a onda incidindo na fronteira sob polarização perpendicular, o campo elétrico da onda refletida $ErPerp$ e o campo elétrico $EtPerp$ da onda transmitida são dados por:

$$ErPerp(x,z) = EiPerp0\cdot\Gamma Perp\cdot e^{-j\cdot\beta 1\cdot(x\cdot\sin(\theta r) - z\cdot\cos(\theta r))}\cdot j\_$$

$$EtPerp(x,z) = EiPerp0\cdot\tau Perp\cdot e^{-j\cdot\beta 2\cdot(x\cdot\sin(\theta t) + z\cdot\cos(\theta t))}\cdot j\_$$

Mas, conforme já discutido, a onda do campo elétrico E em qualquer coordenada é uma superposição da onda $EPara$ de polarização paralela com a onda $EPerp$ de polarização perpendicular, independente da onda ser incidente, refletida ou transmitida, conforme expresso abaixo:

$$Er(x,z) := ErPara(x,z) + ErPerp(x,z)$$

$$Et(x,z) := EtPara(x,z) + EtPerp(x,z)$$

Para o ponto P1 (na fronteira), $x1 = 0$ e $z1 = 0$ e daí obtemos os fasores:

$$Er(x1,z1) = \begin{pmatrix} -1.319 \\ 1.009 \\ -0.879 \end{pmatrix}\cdot\frac{V}{m} \qquad Et(x1,z1) = \begin{pmatrix} 7.681 \\ -2.991 \\ -3.057 \end{pmatrix}\cdot\frac{V}{m}$$

Para o ponto P2, $x2 = 1\,m$ e $z2 = -1\,m$ e daí daí obtemos os fasores:

$$Er(x2,z2) = \begin{pmatrix} -0.374 - 1.264i \\ 0.286 + 0.968i \\ -0.249 - 0.843i \end{pmatrix}\cdot\frac{V}{m} \qquad \overrightarrow{\left|Er(x2,z2)\right|} = \begin{pmatrix} 1.319 \\ 1.009 \\ 0.879 \end{pmatrix}\cdot\frac{V}{m} \qquad \arg(Er(x2,z2)) = \begin{pmatrix} -106.479 \\ 73.521 \\ -106.479 \end{pmatrix}\cdot deg$$

Para o ponto P3, $x3 = 1\,m$ e $z3 = 1\,m$ e daí obtemos os fasores:

$$Et(x3,z3) = \begin{pmatrix} 5.663 - 5.189i \\ -2.205 + 2.02i \\ -2.254 + 2.065i \end{pmatrix}\cdot\frac{V}{m} \qquad \overrightarrow{\left|Et(x3,z3)\right|} = \begin{pmatrix} 7.681 \\ 2.991 \\ 3.057 \end{pmatrix}\cdot\frac{V}{m} \qquad \arg(Et(x3,z3)) = \begin{pmatrix} -42.499 \\ 137.501 \\ 137.501 \end{pmatrix}\cdot deg$$

e) Como ambos os meios são sem perdas, a densidade de potência média é conservada em ambos os meios, incluindo a fronteira. Daí temos que na fronteira (x=0 e z=0) o campo Et transmitido é:

$$Et(0,0) = \begin{pmatrix} 7.681 \\ -2.991 \\ -3.057 \end{pmatrix} \cdot \frac{V}{m}$$

Cujo módulo é obtido a partir de suas componentes nas direções x, y e z:

$$Eo := \sqrt{\left(Et(0,0)_0\right)^2 + \left(Et(0,0)_1\right)^2 + \left(Et(0,0)_2\right)^2} \qquad Eo = 8.792 \cdot \frac{V}{m}$$

E daí a densidade de potência média é obtida através de:

$$S := \frac{\left(\frac{Eo}{\sqrt{2}}\right)^2}{\eta 2} \qquad S = 153.883 \cdot \frac{mW}{m^2}$$