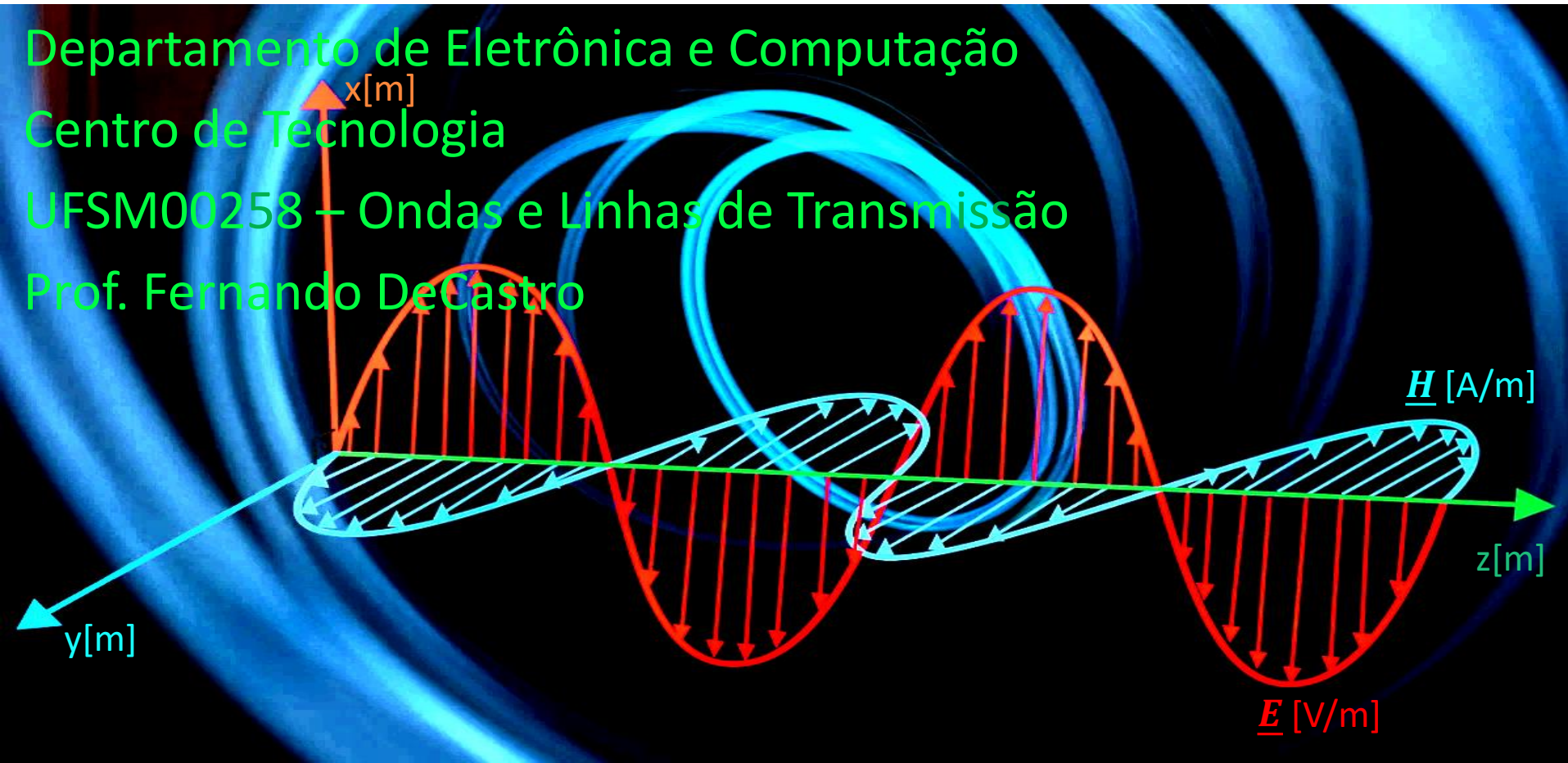


Caracterização do meio de propagação da onda EM. Equação de onda de Helmholtz. Propagação de ondas planas uniformes no espaço livre, em meios dielétricos e em meios condutores. Efeito pelicular (*skin effect*).



Caracterização do meio de propagação da onda EM

Consideremos uma onda EM que se propaga em um meio de propagação com **permissividade elétrica** ε [F/m] (Farad/metro), **condutividade elétrica** σ [Ω /m] (mho/metro = siemens/metro) e **permeabilidade magnética** μ [H/m] (Henry/metro). Os parâmetros eletromagnéticos ε , σ e μ do meio de propagação definem o comportamento da onda EM que se propaga no meio e, simultaneamente, definem a caracterização do tipo do meio: *loseless* (sem perdas), *lossy* (com perdas) e bom condutor, conforme veremos adiante.

A onda EM se propaga no espaço \mathbb{R}^3 através da interação mútua entre os campos $\underline{H} = \underline{H}(x, y, z, t) = H_x(x, y, z, t)\hat{i} + H_y(x, y, z, t)\hat{j} + H_z(x, y, z, t)\hat{k}$ [A/m] e $\underline{E} = \underline{E}(x, y, z, t) = E_x(x, y, z, t)\hat{i} + E_y(x, y, z, t)\hat{j} + E_z(x, y, z, t)\hat{k}$ [V/m], interação mútua que é descrita através das Equações de Maxwell em rotacional, discutidas no Cap 1.2:

$$\underline{\nabla} \times \underline{H} = \underline{J} + \underline{J}_D = \sigma \underline{E} + \varepsilon \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} \quad [\text{A/m}^2] \quad (1)$$

$$\underline{\nabla} \times \underline{E} = -\mu \frac{\partial \underline{H}}{\partial t} \quad [\text{V/m}^2] \quad (2)$$

Na grande maioria das situações práticas os sistemas de telecom operam aproximadamente sob regime permanente senoidal, e, sendo assim, os campos $\underline{H}(x, y, z, t)$ e $\underline{E}(x, y, z, t)$ são denominados de **campos harmônicos** e variam de forma aproximadamente senoidal no tempo t [s] com uma frequência f [Hz]. Nesta situação a variação temporal pode ser descrita através de $e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$, sendo $\omega = 2\pi f$ e $j = \sqrt{-1}$, e os campos podem ser expressos por $\underline{H} = \underline{H}(x, y, z, t) = \underline{H}(x, y, z)e^{j\omega t} = H_x(x, y, z)e^{j\omega t}\hat{i} + H_y(x, y, z)e^{j\omega t}\hat{j} + H_z(x, y, z)e^{j\omega t}\hat{k}$ [A/m] e $\underline{E} = \underline{E}(x, y, z, t) = \underline{E}(x, y, z)e^{j\omega t} = E_x(x, y, z)e^{j\omega t}\hat{i} + E_y(x, y, z)e^{j\omega t}\hat{j} + E_z(x, y, z)e^{j\omega t}\hat{k}$ [V/m]. Substituindo $\underline{H}(x, y, z)e^{j\omega t}$ e $\underline{E}(x, y, z)e^{j\omega t}$ em (1):

$$\underline{\nabla} \times \underline{H}(x, y, z)e^{j\omega t} = \sigma \underline{E} + \varepsilon \frac{\partial \underline{E}(x, y, z)e^{j\omega t}}{\partial t}$$

$$\underline{\nabla} \times \underline{H}(x, y, z)e^{j\omega t} = \sigma \underline{E} + j\omega \varepsilon \underline{E}(x, y, z)e^{j\omega t}$$

Cancelando os termos $e^{j\omega t}$ em ambos os lados da equação e omitindo a dependência de (x, y, z) por ser uma dependência óbvia e sempre presente, a equação acima simplifica para a forma

$$\underline{\nabla} \times \underline{\dot{H}} = \sigma \underline{\dot{E}} + j\omega \varepsilon \underline{\dot{E}} = (\sigma + j\omega \varepsilon) \underline{\dot{E}} \quad (3)$$

sendo $\underline{\dot{H}}$ e $\underline{\dot{E}}$ em (3) respectivamente os fasores dos campos \underline{H} e \underline{E} em (1). Por simplicidade de notação de agora em diante vamos omitir o ponto da representação fasorial, ficando subentendido que $\underline{\dot{H}}$ e $\underline{\dot{E}}$ são fasores quando o sistema opera sob regime permanente senoidal (i.e., \underline{H} e \underline{E} são campos harmônicos).

Caracterização do meio de propagação da onda EM

Substituindo $\underline{H}(x, y, z)e^{j\omega t}$ e $\underline{E}(x, y, z)e^{j\omega t}$ em (2) e procedendo as mesmas simplificações algébricas do slide anterior:

$$\begin{aligned}\underline{\nabla} \times \underline{E}(x, y, z)e^{j\omega t} &= -\mu \frac{\partial \underline{H}(x, y, z)e^{j\omega t}}{\partial t} \\ \underline{\nabla} \times \underline{E}(x, y, z)e^{j\omega t} &= -j\omega\mu \underline{H}(x, y, z)e^{j\omega t} \\ \underline{\nabla} \times \underline{E} &= -j\omega\mu \underline{H} \quad (4)\end{aligned}$$

Resumindo, para sistemas de telecom que operam sob regime permanente senoidal (resultando na propagação de uma onda EM com campos \underline{H} e \underline{E} harmônicos), temos as seguintes relações fasoriais p/ o campo magnético \underline{H} e p/ o campo elétrico \underline{E} :

$$\underline{\nabla} \times \underline{H} = \sigma \underline{E} + j\omega\varepsilon \underline{E} = (\sigma + j\omega\varepsilon) \underline{E} \quad [\text{A/m}^2] \quad (3)$$

$$\underline{\nabla} \times \underline{E} = -j\omega\mu \underline{H} \quad [\text{V/m}^2] \quad (4)$$

Para um meio de propagação da onda EM constituído de um material dielétrico sem perdas, como, por exemplo, o ar atmosférico seco, a permissividade ε é um número real. No entanto, a grande maioria dos materiais dielétricos apresenta alguma perda, o que atenua exponencialmente a onda EM à medida que ela se propaga no meio. Então é necessário contemplar as perdas dielétricas na especificação da permissividade ε do material. Neste contexto, a **permissividade complexa** de um material dielétrico é dada por

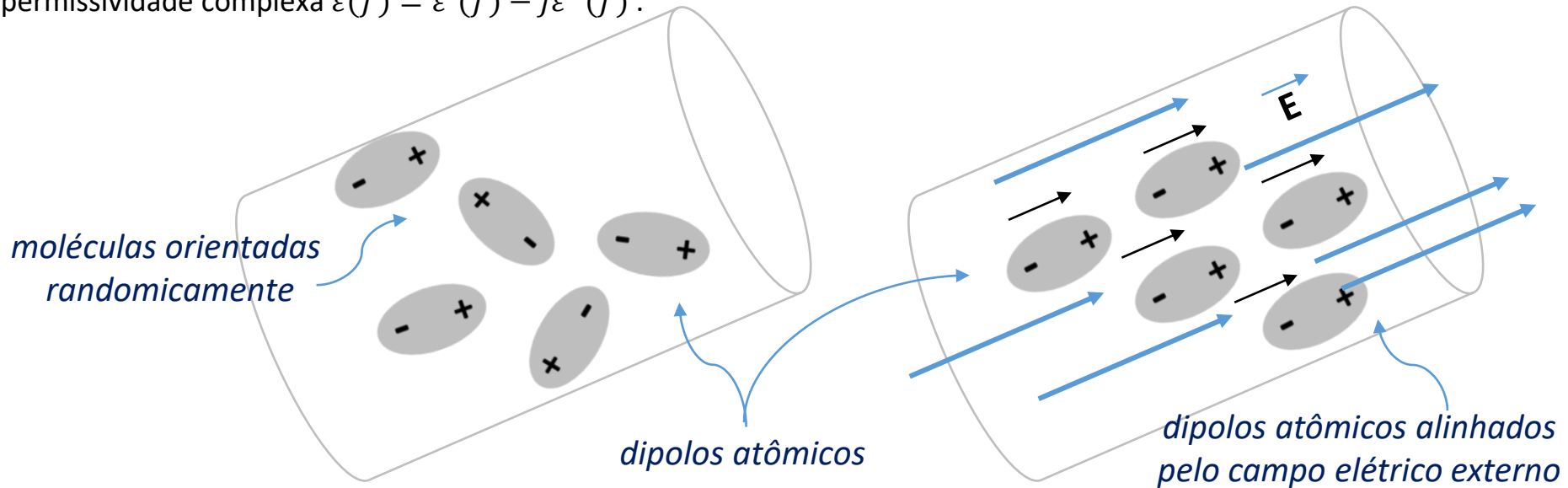
$$\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon'' \quad [\text{F/m}] \quad (5)$$

onde ε' expressa o quanto o meio dielétrico intensifica a densidade de linhas do campo \underline{E} e ε'' é um fator multiplicativo da atenuação que a onda EM sofre ao se propagar em um meio dielétrico com perdas. Por exemplo, o ε'' do ar seco é próximo de zero, então não há perdas dielétricas e a onda EM não se atenua em razão destas perdas ao se propagar nele. Tanto o valor de ε' como o valor de ε'' dependem do tipo de material e da frequência f da onda EM que se propaga no material. É usual os materiais dielétricos serem caracterizados pelos gráficos das curvas $\varepsilon'(f)$ e $\varepsilon''(f)$.

Caracterização do meio de propagação da onda EM

Todo dielétrico tem um retículo de moléculas que nunca é eletricamente neutro, no qual as moléculas são orientadas aleatoriamente. Quando se aplica um campo elétrico externo de frequência f , as moléculas tendem a se orientar de acordo com este campo, conforme mostra a figura abaixo.

O campo elétrico externo alinha os dipolos do retículo e os campos elétricos infinitesimais do material se alinham com o campo externo aplicado. O material se polariza ciclicamente variando de acordo com f , ou seja, orienta seus dipolos de acordo com o campo elétrico externo cíclico de frequência f , o que intensifica a densidade de linhas do campo elétrico do material, como se o mesmo sofresse um aumento de permissividade elétrica. Isto é expresso pela parte real $\epsilon'(f)$ da permissividade complexa $\epsilon(f) = \epsilon'(f) - j\epsilon''(f)$.



Se o campo elétrico é DC (i.e., $f = 0$), os dipolos se orientam de acordo com o campo externo, mas após se orientarem, permanecem estáticos. Quando o campo elétrico é AC, os dipolos giram ora em sentido horário, ora em sentido anti-horário, de acordo com o campo elétrico \underline{E} de frequência f . Ou seja, as cargas elétricas exibem um movimento cíclico de frequência f . O movimento cíclico das cargas elétricas gera atrito entre as moléculas no retículo, ocasionando perdas Joule (= perdas ôhmicas). Por esta razão, em geral, as perdas dielétricas aumentam com a frequência f da onda EM, embora possam ocorrer picos de atenuação da onda EM em determinadas frequências devido à ressonância das moléculas. Isto é expresso pela parte imaginária $\epsilon''(f)$ da permissividade complexa $\epsilon(f) = \epsilon'(f) - j\epsilon''(f)$.

Caracterização do meio de propagação da onda EM

Vamos agora substituir em (3) a permissividade complexa $\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon''$ dada por (5) e analisar a equação resultante:

$$\underline{\nabla} \times \underline{H} = \sigma \underline{E} + j\omega\varepsilon \underline{E} = (\sigma + j\omega\varepsilon) \underline{E} \quad \Rightarrow \quad \underline{\nabla} \times \underline{H} = (\sigma + j\omega(\varepsilon' - j\varepsilon'')) \underline{E} \quad \Rightarrow \quad \underline{\nabla} \times \underline{H} = (\sigma + \omega\varepsilon'' + j\omega\varepsilon') \underline{E}$$

σ indica o quanto o meio atenua a onda EM por perdas Joule	ε'' indica o quanto o meio atenua a onda EM por perdas dielétricas	ε' indica o quanto o meio intensifica a densidade de linhas do campo \underline{E}	\Leftarrow
$\underline{\nabla} \times \underline{H} = \underbrace{(\sigma + \omega\varepsilon'')}_{\text{densidade de corrente de condução}} \underline{E} + \underbrace{j\omega\varepsilon'}_{\text{densidade de corrente de deslocamento}} \underline{E} \quad (6)$			

Note de (6) que se, por exemplo, aplicarmos uma tensão DC (DC $\rightarrow \omega = 2\pi f = 0$) em um bloco de plástico PVC (que é um material dielétrico com perdas), a densidade de corrente de condução será nula porque, para qualquer material dielétrico, o termo $\omega\varepsilon''$ é zero em (6) para $f = 0$ [Hz] e $\sigma = 0$ para qualquer valor de f . Agora, se aplicarmos ao bloco de PVC uma tensão senoidal de $f = 10$ [MHz] observaremos haver uma densidade de corrente de condução (e portanto, uma corrente de condução) não nula, apesar do PVC ser um isolante elétrico ($\sigma = 0$). Note ainda de (6) que a corrente de condução resulta em fase com a tensão aplicada e que a corrente de deslocamento resulta adiantada de 90° em relação à tensão aplicada em consequência do $j = \sqrt{-1} = e^{j90^\circ}$ no termo $j\omega\varepsilon' \underline{E}$.

Alternativamente ao conceito de permissividade complexa $\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon''$, um parâmetro largamente utilizado para caracterizar perdas dielétricas de um meio é a denominada **tangente de perdas (loss tangent)** ou **$\tan \delta$** definida pela razão entre a corrente de condução e a corrente de deslocamento:

$$\tan \delta = \frac{(\sigma + \omega\varepsilon'')}{\omega\varepsilon'} \quad (7)$$

A relação entre permissividade complexa e tangente de perdas de um material dielétrico é dada por

$$\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon'' = \varepsilon'(1 - j \tan \delta) \quad (8)$$

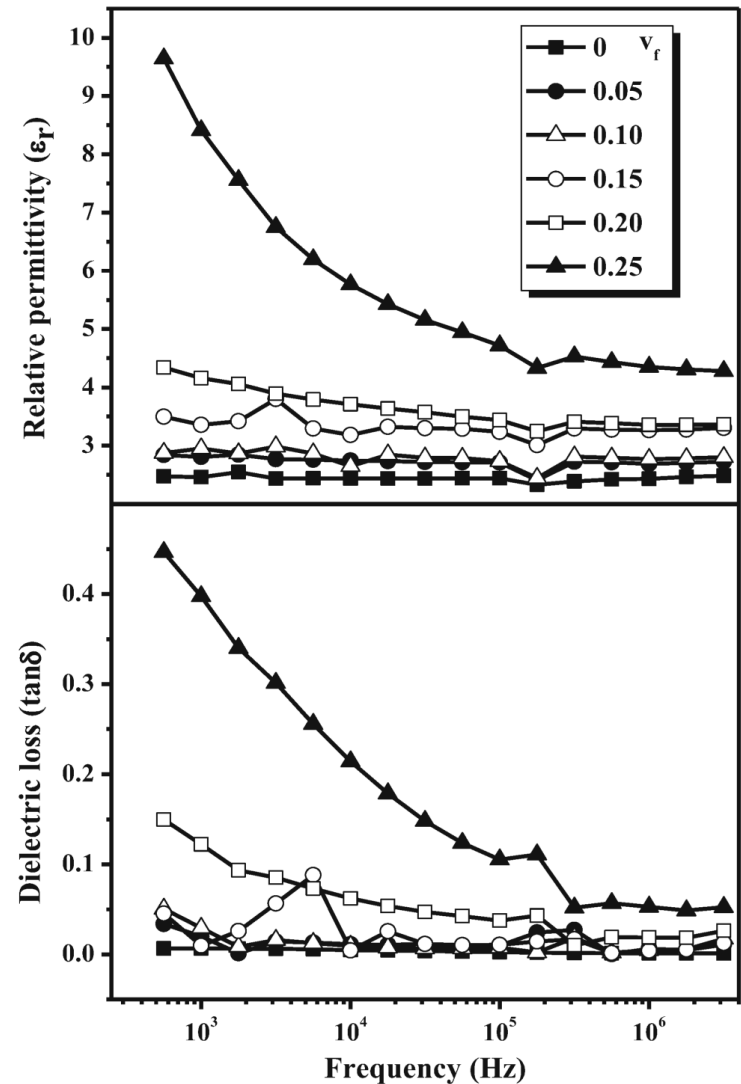
É usual o ε' de um material ser especificado a partir de $\varepsilon' = \varepsilon_0 \varepsilon_r$, onde $\varepsilon_0 = 8.8541878128 \times 10^{-12}$ [F/m] é a permissividade elétrica do vácuo e ε_r é denominada **permissividade elétrica relativa** do material. Em (A) no próximo slide é mostrado a tabela do ε_r e da $\tan \delta$ para vários materiais. Em (B) é mostrado as curvas $\varepsilon_r(f)$ e $\tan \delta(f)$ para o material PTFE (Politetrafluoretileno, comercialmente denominado Teflon®) na faixa de frequências entre 500 [Hz] e 3 [MHz].

(A)

(B)

DIELECTRIC CONSTANTS AND LOSS TANGENTS FOR SOME MATERIALS

Material	Frequency	ϵ_r	$\tan \delta$ (25°C)
Alumina (99.5%)	10 GHz	9.5–10.	0.0003
Barium tetratitanate	6 GHz	37 ± 5%	0.0005
Beeswax	10 GHz	2.35	0.005
Beryllia	10 GHz	6.4	0.0003
Ceramic (A-35)	3 GHz	5.60	0.0041
Fused quartz	10 GHz	3.78	0.0001
Gallium arsenide	10 GHz	13.0	0.006
Glass (pyrex)	3 GHz	4.82	0.0054
Glazed ceramic	10 GHz	7.2	0.008
Lucite	10 GHz	2.56	0.005
Nylon (610)	3 GHz	2.84	0.012
Parafin	10 GHz	2.24	0.0002
Plexiglass	3 GHz	2.60	0.0057
Polyethylene	10 GHz	2.25	0.0004
Polystyrene	10 GHz	2.54	0.00033
Porcelain (dry process)	100 MHz	5.04	0.0078
Rexolite (1422)	3 GHz	2.54	0.00048
Silicon	10 GHz	11.9	0.004
Styrofoam (103.7)	3 GHz	1.03	0.0001
Teflon	10 GHz	2.08	0.0004
Titania (D-100)	6 GHz	96 ± 5%	0.001
Vaseline	10 GHz	2.16	0.001
Water (distilled)	3 GHz	76.7	0.157



As curvas parametrizadas por V_f em (B) referem-se à concentração volumétrica de Teflon, i.e, ao volume de Teflon por volume de mistura (ver https://en.wikipedia.org/wiki/Volume_fraction).

Caracterização do meio de propagação da onda EM

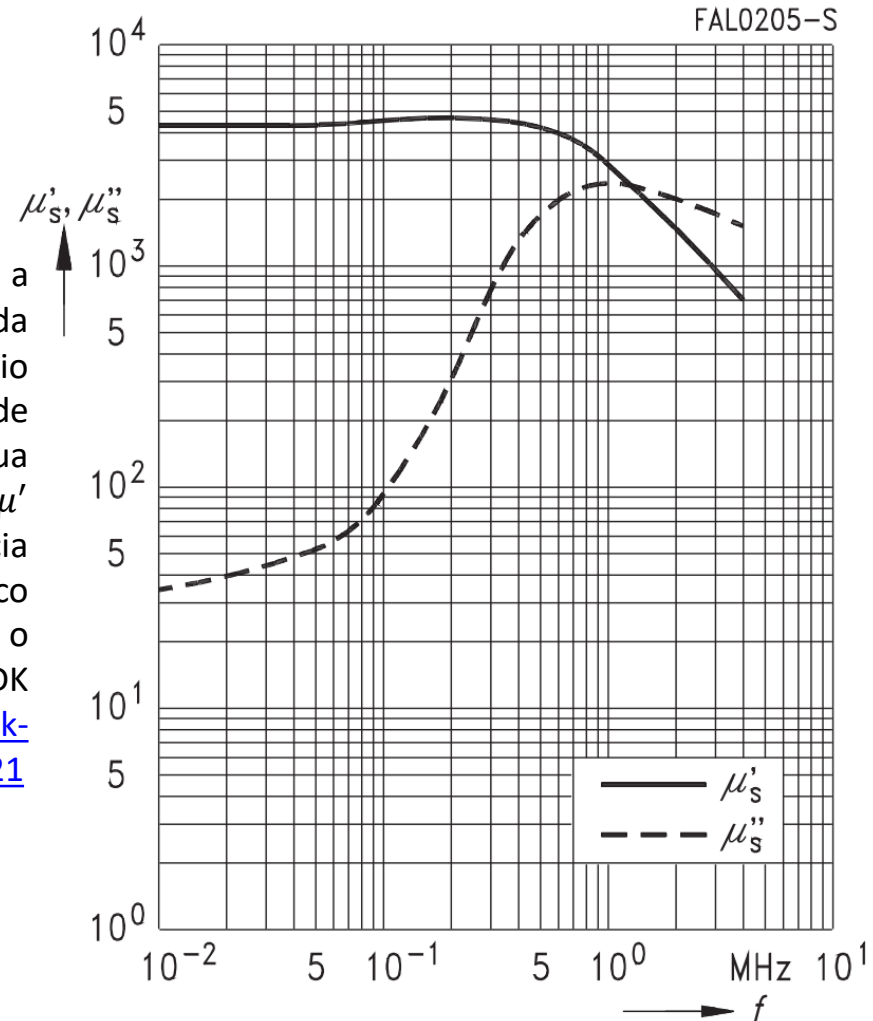
Assim como um material dielétrico é constituído de dipolos atômicos, um material magnético é constituído de domínios magnéticos (ver https://en.wikipedia.org/wiki/Magnetic_domain). Para um campo magnético AC, os domínios se orientam espacialmente de acordo com o campo magnético \underline{H} cíclico de frequência f . O movimento cíclico dos domínios gera perdas Joule (= perdas ôhmicas). Por esta razão, em geral, as perdas magnéticas aumentam com a frequência f da onda EM, embora possa haver picos de atenuação da onda EM em determinadas frequências devido à efeitos de ressonância.

Neste contexto, a **permeabilidade complexa** de um material magnético é dada por:

$$\mu(f) = \mu'(f) - j\mu''(f) \quad [\text{H/m}] \quad (9)$$

onde μ' expressa o quanto o meio magnético intensifica a densidade de linhas do campo \underline{H} e μ'' é um fator multiplicativo da atenuação que a onda EM sofre ao se propagar em um meio magnético com perdas. Por exemplo, o μ'' do ar seco é próximo de zero, então não há perdas magnéticas e a onda EM não se atenua em razão destas perdas ao se propagar nele. Tanto o valor de μ' como o valor de μ'' dependem do tipo de material e da frequência f da onda EM que se propaga no material. Por exemplo, o gráfico ao lado mostra as curvas de μ' e μ'' em função de f para o material magnético do tipo ferrite N30 fabricado pela EPCOS – TDK (ver <https://www.tdk-electronics.tdk.com/download/187204/11a3ca92549b8d3b7cce210eace3dc3c/pdf-n30.pdf>).

É usual o μ' de um material ser especificado a partir de $\mu' = \mu_0\mu_r$, onde $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ [H/m]}$ é a permeabilidade magnética do vácuo e μ_r é a denominada **permeabilidade magnética relativa** do material.



Equação de onda de Helmholtz

No Cap I.2 discutimos qualitativamente a irradiação e a propagação de uma onda EM à luz das Equações de Maxwell. No presente capítulo levaremos esta discussão adiante através das Equações de Helmholtz, que descrevem quantitativamente a propagação de uma onda EM plana.

Consideremos uma onda EM que se propaga em um meio de propagação dielétrico com permissividade elétrica ϵ [F/m] e permeabilidade magnética μ [H/m]. Dado que o meio é dielétrico, então a sua condutividade elétrica σ [S/m] é zero. Conforme já comentado em slides anteriores, um exemplo deste tipo de meio é o ar atmosférico, muitas vezes denominado de **espaço livre**, em que $\epsilon = \epsilon_0 = 8.8541878128 \times 10^{-12}$ [F/m], $\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ [H/m] e $\sigma = 0$ [S/m]. Se o ar for seco e livre de poluentes não há perdas dielétricas e a sua $\tan \delta$ é zero para frequências de até 10 [GHz]. Acima de 10 [GHz] começam a ocorrer perdas dielétricas devido aos gases que constituem a atmosfera.

Portanto, para uma onda EM que se propaga em um meio é dielétrico com $\epsilon_r = 1.0$, $\mu_r = 1.0$, $\sigma = 0$ e $\tan \delta = 0$ (o espaço livre, por exemplo), a partir das equações (3) e (4) valem as seguintes equações:

$$\underline{\nabla} \times \underline{H} = j\omega\epsilon\underline{E} = j\omega\epsilon_0\epsilon_r\underline{E} \quad [\text{A/m}^2] \quad (10)$$

$$\underline{\nabla} \times \underline{E} = -j\omega\mu\underline{H} = -j\omega\mu_0\mu_r\underline{H} \quad [\text{V/m}^2] \quad (11)$$

Nosso objetivo neste capítulo é descrever analiticamente a propagação de uma onda EM plana no espaço livre. Note que há duas incógnitas em (10) e (11): O campo elétrico \underline{E} e o campo magnético \underline{H} . Portanto, neste sistema de duas equações a duas incógnitas, é possível determinar as soluções para as incógnitas \underline{E} e \underline{H} . Para tanto, vamos inicialmente aplicar o rotacional em ambos os lados de (11):

$$\underline{\nabla} \times \underline{\nabla} \times \underline{E} = -j\omega\mu\underline{\nabla} \times \underline{H} \quad (12)$$

E daí, vamos substituir (10) em (12):

$$\underline{\nabla} \times \underline{\nabla} \times \underline{E} = -j\omega\mu(j\omega\epsilon\underline{E}) = \omega^2\mu\epsilon\underline{E} \quad (13)$$

Equação de onda de Helmholtz

O lado esquerdo de (13) efetua a operação “rotacional do rotacional” do campo \underline{E} . Esta operação é clássica em cálculo vetorial (ver a expressão da identidade “*curl of curl*” em https://en.wikipedia.org/wiki/Vector_calculus_identities), permitindo expandir o lado esquerdo de (13) para a seguinte forma:

$$\underline{\nabla} \times \underline{\nabla} \times \underline{E} = \underline{\nabla}(\underline{\nabla} \cdot \underline{E}) - \nabla^2 \underline{E} \quad (14)$$

onde $\nabla^2 \underline{E}$ representa o operador Laplaciano ∇^2 aplicado ao campo \underline{E} , e que resulta no seguinte vetor (ver “*Vector Laplacian*” em https://en.wikipedia.org/wiki/Laplace_operator#Vector_Laplacian):

$$\nabla^2 \underline{E}(x, y, z) = \nabla^2 E_x(x, y, z) \underline{\hat{i}} + \nabla^2 E_y(x, y, z) \underline{\hat{j}} + \nabla^2 E_z(x, y, z) \underline{\hat{k}} \quad [\text{V/m}^3] \quad (15)$$

onde (ver “*Laplacian*” em https://en.wikipedia.org/wiki/Vector_calculus_identities):

$$\nabla^2 E_x(x, y, z) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} E_x(x, y, z) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} E_x(x, y, z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x(x, y, z) \quad (15A)$$

$$\nabla^2 E_y(x, y, z) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} E_y(x, y, z) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} E_y(x, y, z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_y(x, y, z) \quad (15B)$$

$$\nabla^2 E_z(x, y, z) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} E_z(x, y, z) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} E_z(x, y, z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_z(x, y, z) \quad (15C)$$

Conforme discutimos no slide 19 do Cap I.2, se medirmos $\underline{E}(x_1, y_1, z_1)$ no ponto (x_1, y_1, z_1) , o resultado de $\underline{\nabla} \cdot \underline{E}(x_1, y_1, z_1)$ dá a intensidade de cargas elétricas no ponto (x_1, y_1, z_1) . Mas como a onda EM está se propagando em um meio dielétrico sem cargas elétricas livres, i.e., sem fontes ou sumidouros das linhas de \underline{E} (como é o espaço livre), então $\underline{\nabla} \cdot \underline{E} = 0$ em (14), o que simplifica (14) para a forma:

$$\underline{\nabla} \times \underline{\nabla} \times \underline{E} = -\nabla^2 \underline{E} \quad (16)$$

Equação de onda de Helmholtz

Substituindo (16) em (13) :

$$\omega^2 \mu \varepsilon \underline{E} = -\nabla^2 \underline{E} \quad [\text{V/m}^3] \quad (17)$$

Uma possível interpretação de (17) é a seguinte: Um campo elétrico \underline{E} [V/m] variando senoidalmente no tempo t [s] com uma frequência angular $\omega = 2\pi f$ [rad/s], sendo f [Hz] a frequência de variação no tempo do campo \underline{E} [V/m], estabelece uma distribuição deste campo \underline{E} no espaço \mathbb{R}^3 dada por $-\nabla^2 \underline{E}$ [V/m³], distribuição que também é variante no tempo. Ora, se uma variação no tempo do campo \underline{E} estabelece uma variação no espaço \mathbb{R}^3 de \underline{E} que é também variante no tempo, então estamos diante do processo de propagação de uma onda do campo \underline{E} . Neste contexto, (17) pode ser reescrita conforme (18) abaixo, sendo denominada **Equação de Onda de Helmholtz** para o campo \underline{E} :

$$\nabla^2 \underline{E} + \omega^2 \mu \varepsilon \underline{E} = \underline{0} \quad (18)$$

onde $\underline{0} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}$. De mesma forma, se aplicarmos o rotacional em ambos os lados de (10), resultando $\underline{\nabla} \times \underline{\nabla} \times \underline{H} = j\omega\varepsilon \underline{\nabla} \times \underline{E}$, e se substituirmos nesta equação o $\underline{\nabla} \times \underline{E}$ dado por (11) obteremos $\underline{\nabla} \times \underline{\nabla} \times \underline{H} = j\omega\varepsilon(-j\omega\mu\underline{H}) = \omega^2\mu\varepsilon\underline{H}$. Mas, conforme discutimos no slide 20 do Cap 1.2, o campo \underline{H} é um campo solenoidal e, portanto, $\underline{\nabla} \cdot \underline{H} = 0$. Consequentemente, conforme discutimos para o campo \underline{E} nos slides 8 e 9, de mesma forma vale para o campo \underline{H} a relação $\underline{\nabla} \times \underline{\nabla} \times \underline{H} = -\nabla^2 \underline{H}$. E daí, seguindo a mesma análise que fizemos para o campo \underline{E} chega-se na denominada **Equação de Onda de Helmholtz** para o campo H :

$$\nabla^2 \underline{H} + \omega^2 \mu \varepsilon \underline{H} = \underline{0} \quad (19)$$

Note que (18) e (19) podem ser reescritas na forma

$$\nabla^2 \underline{E} + k^2 \underline{E} = \underline{0} \quad (20)$$

$$\nabla^2 \underline{H} + k^2 \underline{H} = \underline{0} \quad (21)$$

onde a constante $k = \omega \sqrt{\mu\varepsilon}$ medida em [rad/m], é denominada de **constante de propagação, constante de fase, frequência de variação espacial** ou também **número de onda**.

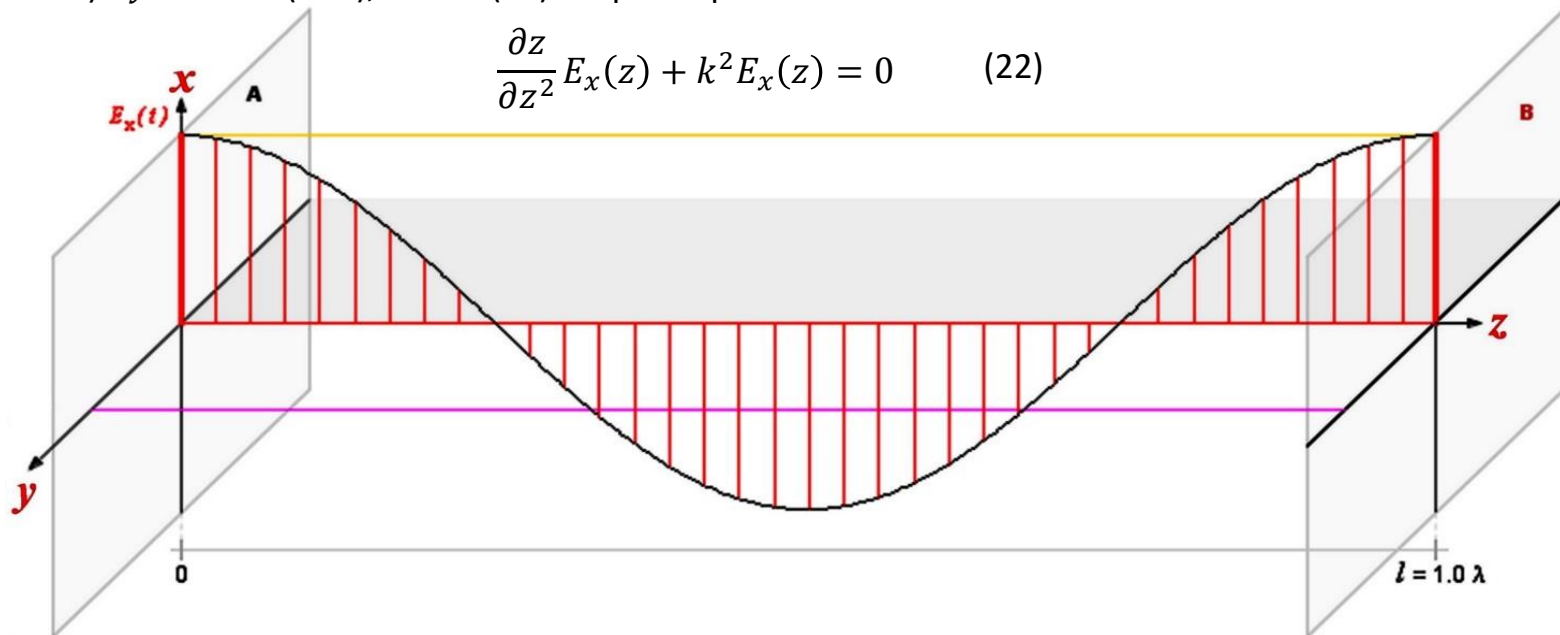
Onda EM plana se propagando em um meio sem perdas (*loseless medium*)

Consideremos uma onda EM com um campo \underline{E} tendo uma única componente E_x [V/m] na direção \hat{i} (eixo cartesiano x) e que se propaga ao longo do eixo cartesiano z em um meio de propagação sem perdas, conforme mostra a figura abaixo. A onda EM varia senoidalmente no tempo t [s] com uma frequência angular $\omega = 2\pi f$ [rad/s], sendo f [Hz] a frequência de variação do campo \underline{E} no tempo t , e, portanto, \underline{E} é dado por $\underline{E} = \underline{E}(x, y, z, t) = E_x(z)e^{j\omega t}\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}$ [V/m].

Como a propagação da onda EM em um meio sem perdas com μ e ε constantes é um processo linear descrito por (20) e (21), decorre deste fato que a variação no tempo $E_x(t) = e^{j\omega t}$ causa de modo proporcional a variação $E_x(z)$ no espaço. Portanto, dado que há proporcionalidade entre causa $E_x(t)$ e consequência $E_x(z)$, então $E_x(z)$ deve ter uma única frequência $k = \omega \sqrt{\mu\varepsilon}$ de variação no espaço obedecendo ao fato de que o processo é linear e ao fato de que $E_x(t) = e^{j\omega t}$ tem uma única frequência $\omega = 2\pi f$ de variação no tempo t . Se, por exemplo, μ e ε não fossem constantes no tempo t e variassem com a amplitude da onda EM, então a propagação da onda não seria um processo linear e seriam geradas múltiplas frequências de variação no espaço. Além disto, em um meio sem perdas a permissividade ε e a permeabilidade μ são números reais, e, portanto, a constante $k = \omega \sqrt{\mu\varepsilon}$ na Equação de Helmholtz (20) é também um número real.

Dado que $E_y = E_z = 0$ fazendo com que (15B) e (15C) resultem nulas, e dado que \underline{E} não varia com x ou com y , fazendo com que $\partial/\partial x = \partial/\partial y = 0$ em (15A), então (20) simplifica para:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x(z) + k^2 E_x(z) = 0 \quad (22)$$



Onda EM plana se propagando em um meio sem perdas (*loseless medium*)

Uma possível solução para o campo $E_x(z)$ da equação diferencial linear definida por (22) é a solução para o campo $E_x(z)$ dada por (23):

$$E_x(z) = E^+ e^{-jkz} + E^- e^{jkz} \quad (23)$$

Note que, substituindo a solução (23) na equação diferencial (22), a solução satisfaz (22):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x(z) + k^2 E_x(z) &= 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} (E^+ e^{-jkz} + E^- e^{jkz}) + k^2 (E^+ e^{-jkz} + E^- e^{jkz}) &= 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} (E^+ e^{-jkz} + E^- e^{jkz}) + k^2 (E^+ e^{-jkz} + E^- e^{jkz}) &= 0 \\ ((-jk)^2 E^+ e^{-jkz} + (jk)^2 E^- e^{jkz}) + k^2 (E^+ e^{-jkz} + E^- e^{jkz}) &= 0 \\ (-k^2 E^+ e^{-jkz} - k^2 E^- e^{jkz}) + (k^2 E^+ e^{-jkz} + k^2 E^- e^{jkz}) &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Dado que $e^{jkz} = \cos(kz) + j \sin(kz)$, então a interpretação da solução (23) para $E_x(z)$ é a seguinte:

$E^+ e^{-jkz}$ representa o fasor de uma onda senoidal de amplitude E^+ se propagando no sentido do eixo z , com uma frequência de variação espacial $k = \omega \sqrt{\mu\epsilon}$ [rad/m] ao longo do eixo z (que é a situação mostrada na figura do slide anterior).

$E^- e^{jkz}$ representa o fasor de uma onda senoidal de amplitude E^- se propagando no sentido contrário do eixo z , com uma frequência de variação espacial $k = \omega \sqrt{\mu\epsilon}$ [rad/m] ao longo do eixo z ($E^- = 0$ na situação mostrada na figura do slide anterior, portanto a onda E^- é inexistente nesta figura).

Veremos no Cap VI.1 que, sempre que a onda E^+ está se propagando em um meio e encontra no caminho de propagação um novo meio com permissividade ϵ ou permeabilidade μ ou condutividade σ diferente das do meio em que a onda E^+ vinha se propagando, haverá uma reflexão da onda E^+ na fronteira entre os dois meios e uma parcela da onda E^+ retornará de volta no caminho de propagação na forma de uma nova onda com amplitude E^- .

Onda EM plana se propagando em um meio sem perdas (*loseless medium*)

Portanto, a solução p/ o campo $E_x(z)$ dada por (23) representa a superposição de duas ondas EM – a onda incidente e a onda refletida. Os fasores $E^+ e^{-jkz}$ e $E^- e^{jkz}$ representam respectivamente a onda incidente e a onda refletida na fronteira entre dois meios de propagação sem perdas, cada um com ε e μ próprios. Se o meio é **isotrópico** e **homogêneo** ao longo do caminho de propagação da onda (i.e., ε e μ são constantes escalares e invariantes ao longo do caminho de propagação), então não há geração da onda refletida $E^- e^{jkz}$ e a única onda que se propaga no meio é a onda incidente $E^+ e^{-jkz}$.

Se quisermos a solução no tempo $E_x(z, t)$ a partir da solução fasorial $E_x(z)$ é necessário multiplicar (23) por $e^{j\omega t}$ e extrair a parte real do resultado através do operador $\text{Re}\{\cdot\}$:

$$E_x(z, t) = \text{Re}\{E_x(z)e^{j\omega t}\} = \text{Re}\{E^+ e^{-jkz} e^{j\omega t} + E^- e^{jkz} e^{j\omega t}\}$$

$$E_x(z, t) = \text{Re}\{E^+ e^{j(\omega t - kz)} + E^- e^{j(\omega t + kz)}\}$$

$$E_x(z, t) = \text{Re}\{E^+ \cos(\omega t - kz) + jE^+ \sin(\omega t - kz) + E^- \cos(\omega t + kz) + jE^- \sin(\omega t + kz)\}$$

$$E_x(z, t) = E^+ \cos(\omega t - kz) + E^- \cos(\omega t + kz) \quad (24)$$

A interpretação da solução (24) para $E_x(z, t)$ é a seguinte:

O 1º termo $E^+ \cos(\omega t - kz)$ em (24) representa uma onda EM que se propaga na direção $+z$. Isto acontece porque um determinado valor de amplitude constante desta onda EM (por exemplo, $E^+ \cos(\omega t - kz) = -1$ [V/m]) exige que o resultado de $(\omega t - kz)$ também seja constante (por exemplo, $(\omega t - kz) = \pi$). Para que a condição $(\omega t - kz) = \text{constante}$ seja atendida à medida que z e t variam é necessário que z aumente à medida que o tempo t transcorre, ou seja, é necessário que a onda se mova no sentido $+z$.

O 2º termo $E^- \cos(\omega t + kz)$ em (24) representa uma onda EM que se propaga na direção $-z$. Isto acontece porque um determinado valor de amplitude constante desta onda EM (por exemplo, $E^- \cos(\omega t + kz) = -1$ [V/m]) exige que o resultado de $(\omega t + kz)$ também seja constante (por exemplo, $(\omega t + kz) = \pi$). Para que a condição $(\omega t + kz) = \text{constante}$ seja atendida à medida que z e t variam é necessário que z diminua à medida que o tempo t transcorre, ou seja, é necessário que a onda se mova no sentido $-z$.

Onda EM plana se propagando em um meio sem perdas (*loseless medium*)

Note que, para efeito de simplificar a análise, assumimos até o momento que E^+ e E^- representam apenas a amplitude das ondas incidente e refletida. Na realidade, ambos podem ser generalizados como fasores da forma $E^+ = |E^+|e^{j\angle E^+}$ e $E^- = |E^-|e^{j\angle E^-}$, onde $|E^+|$ é a amplitude (magnitude) da onda incidente, $\angle E^+$ é o ângulo de fase da onda incidente, $|E^-|$ é a amplitude (magnitude) da onda refletida e $\angle E^-$ é o ângulo de fase da onda refletida. Nesta situação, através de um desenvolvimento algébrico similar ao do slide anterior, (24) generaliza para a forma:

$$E_x(z, t) = |E^+|\cos(\omega t - kz + \angle E^+) + |E^-|\cos(\omega t + kz + \angle E^-) \quad (25)$$

Note também que a condição $(\omega t - kz) = \text{constante}$ para a onda incidente $E^+ \cos(\omega t - kz)$ em (24) permite determinar a **velocidade de fase** $v_p^+ = \frac{dz}{dt}$ com que a onda EM incidente se propaga no meio de permissividade ε e permeabilidade μ :

$$z = \frac{(\omega t - \text{constante})}{k} \quad \Rightarrow \quad v_p^+ = \frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{(\omega t - \text{constante})}{k} \right\} = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \text{ [m/s]} \quad (26)$$

De mesma forma, a condição $(\omega t + kz) = \text{constante}$ para a onda refletida $E^- \cos(\omega t + kz)$ em (24) também permite determinar a **velocidade de fase** $v_p^- = \frac{dz}{dt}$ com que a onda EM refletida se propaga no meio de permissividade ε e permeabilidade μ :

$$z = \frac{(-\omega t + \text{constante})}{k} \quad \Rightarrow \quad v_p^- = \frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{(-\omega t + \text{constante})}{k} \right\} = \frac{-\omega}{k} = \frac{-\omega}{\omega \sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{-1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \text{ [m/s]} \quad (27)$$

Como era de se esperar, a velocidade de fase v_p^- com que a onda EM refletida se propaga no meio é o valor negativo da velocidade de fase v_p^+ com que a onda EM incidente se propaga no meio.

Para uma onda EM se propagando no espaço livre, em que $\varepsilon = \varepsilon_0 = 8.8541878128 \times 10^{-12}$ [F/m] e $\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ [H/m], a velocidade de fase resulta de (26) no valor $v_p = \frac{dz}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = c = 2.99792458 \times 10^8$ [m/s], que é a velocidade de propagação da luz e de qualquer onda EM no espaço livre, notando que luz é uma onda EM de frequências da ordem de centenas de [THz] (ver "*Spectral Colors*" em https://en.wikipedia.org/wiki/Visible_spectrum).

Onda EM plana se propagando em um meio sem perdas (*loseless medium*)

O **comprimento de onda** λ [m] de uma onda EM senoidal que se propaga em uma determinada direção de propagação é definido como a distância ao longo da direção de propagação entre duas amplitudes máximas da onda (ou entre duas amplitudes mínimas, ou entre quaisquer outros dois pontos de referência nos quais a onda apresente os mesmos valores de amplitude) em um determinado instante de tempo t [s]. Com base nesta definição, o λ [m] da onda EM é obtido através da condição que estabelece que uma diferença de fase 2π [rad] ocorre entre dois pontos de referência nos quais a onda apresente os mesmos valores de amplitude:

$$(\omega t - kz) - [\omega t - k(z + \lambda)] = 2\pi \quad (28)$$

Resolvendo (28) para o comprimento de onda λ obtemos

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad [\text{m}] \quad (29)$$

Substituindo a constante de propagação (= frequência de variação espacial) $k = \omega \sqrt{\mu\epsilon} = \frac{\omega}{v_p}$ [rad/m] em (29), o comprimento de onda λ resulta em

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi v_p}{\omega} = \frac{v_p}{f} \quad [\text{m}] \quad (30)$$

Onda EM plana se propagando em um meio sem perdas (*loseless medium*)

Conforme estabelecido pela equação (10) no slide 17 do Cap I.2, uma variação temporal de \underline{E} gera uma variação espacial de \underline{H} . Então é esperado que o campo elétrico $E_x(z, t)$ variante no tempo dado por (24) gere um correspondente campo magnético \underline{H} variante no tempo e que o mesmo se propague no espaço \mathbb{R}^3 .

Para determinar este campo magnético resultante de $E_x(z, t)$, vamos substituir $E_x(z) = E^+ e^{-jkz} + E^- e^{jkz}$ dado por (23) na equação em rotacional do campo elétrico $\underline{\nabla} \times \underline{E} = -j\omega\mu\underline{H}$ dada por (11).

O rotacional do campo elétrico $\underline{\nabla} \times \underline{E}$ em (11) é uma identidade vetorial dada por (ver “Curl” em https://en.wikipedia.org/wiki/Vector_calculus_identities):

$$\underline{\nabla} \times \underline{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \hat{k} \quad [\text{V/m}^2] \quad (31)$$

Para a onda $E_x(z)$ mostrada na figura do slide 11, dado que $E_y = E_z = 0$, então $\frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0$ em (31). E dado que $E_x(z)$ não varia com y , então $\frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$ em (31). Portanto, para a onda $E_x(z)$ mostrada na figura do slide 11, a equação (31) simplifica para:

$$\underline{\nabla} \times \underline{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \hat{k} = \frac{\partial E_x(z)}{\partial z} \hat{j} \quad [\text{V/m}^2] \quad (32)$$

Isolando \underline{H} em (11), e a seguir usando $\underline{\nabla} \times \underline{E} = \frac{\partial E_x(z)}{\partial z} \hat{j}$ dado por (32) e usando $E_x(z) = E^+ e^{-jkz} + E^- e^{jkz}$ dado por (23), obtemos a onda do campo magnético $H_y(z)$ gerado no \mathbb{R}^3 pela onda do campo elétrico $E_x(z)$ mostrada na figura do slide 11:

$$\begin{aligned} \underline{H} &= \frac{1}{-j\omega\mu} \underline{\nabla} \times \underline{E} \Rightarrow \underline{H} = \frac{1}{-j\omega\mu} \frac{\partial E_x(z)}{\partial z} \hat{j} \Rightarrow \underline{H} = \frac{1}{-j\omega\mu} \frac{\partial}{\partial z} \{E^+ e^{-jkz} + E^- e^{jkz}\} \hat{j} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \underline{H} = \frac{1}{-j\omega\mu} \{-jkE^+ e^{-jkz} + jkE^- e^{jkz}\} \hat{j} \Rightarrow \\ \Rightarrow \underline{H} &= \frac{k}{\omega\mu} \{E^+ e^{-jkz} - E^- e^{jkz}\} \hat{j} \Rightarrow H_y(z) = \frac{k}{\omega\mu} \{E^+ e^{-jkz} - E^- e^{jkz}\} \Rightarrow \quad (\text{segue no próximo slide}) \end{aligned}$$

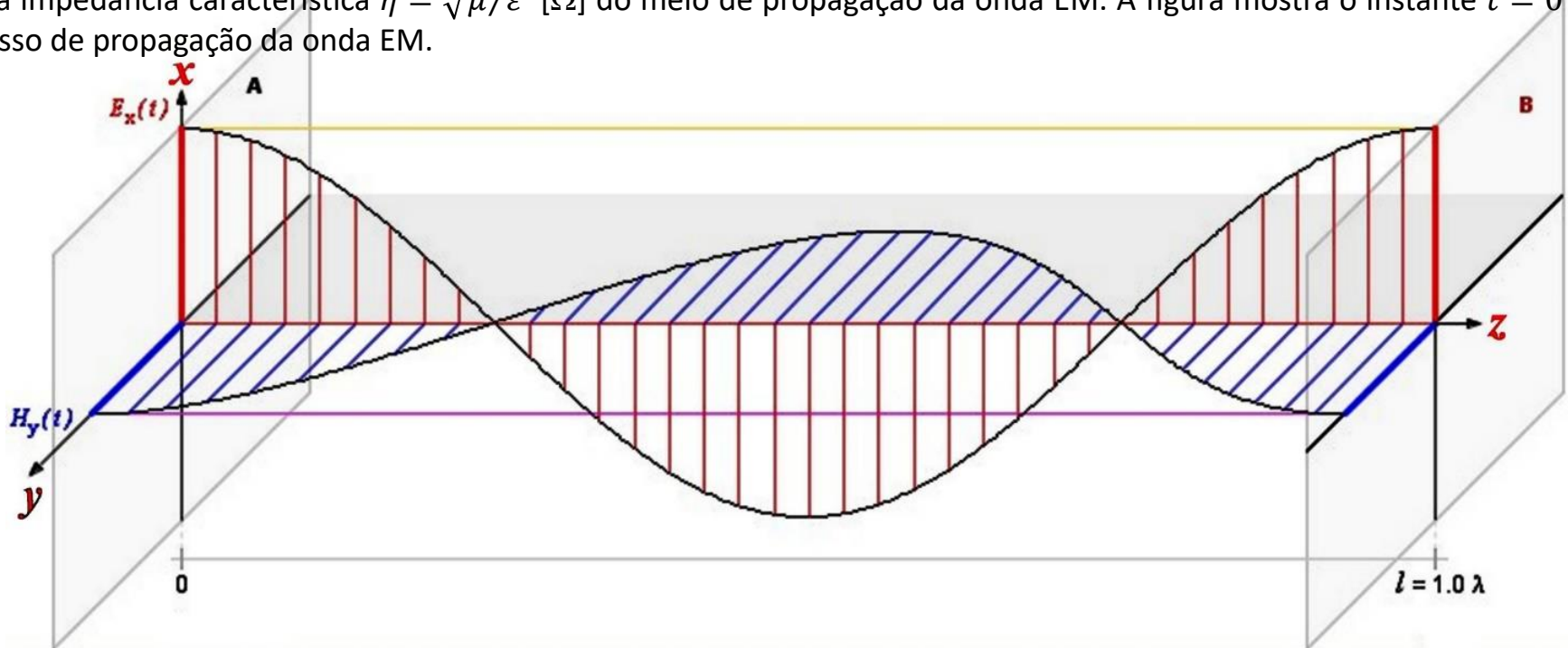
Onda EM plana se propagando em um meio sem perdas (*loseless medium*)

$$H_y(z) = \frac{1}{\eta} \{ E^+ e^{-jkz} - E^- e^{jkz} \} \quad [\text{A/m}] \quad (33)$$

onde $\eta = \frac{\omega\mu}{k} = \frac{\omega\mu}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ $[\Omega]$ é denominada **impedância característica** do meio de propagação da onda EM.

Para uma onda EM se propagando no espaço livre, em que $\varepsilon = \varepsilon_0 = 8.8541878128 \times 10^{-12}$ $[\text{F/m}]$ e $\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ $[\text{H/m}]$, a impedância característica do espaço livre resulta $\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi \approx 377$ $[\Omega]$.

A figura abaixo mostra o campo $E_x(z)$ dado por (23) e o campo $H_y(z)$ dado por (33) para uma onda EM propagando-se ao longo do eixo cartesiano z em um meio de propagação sem perdas. Não há ondas refletidas no meio, portanto $E^- = 0$ e $H^- = \frac{E^-}{\eta} = 0$. A razão entre o fasor $E^+ e^{-jkz}$ $[\text{V/m}]$ da onda incidente do campo elétrico e o fasor $\frac{E^+}{\eta} e^{-jkz}$ $[\text{A/m}]$ da onda incidente do campo magnético é denominada **impedância de onda**, e para uma onda plana, a impedância de onda resulta igual à impedância característica $\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ $[\Omega]$ do meio de propagação da onda EM. A figura mostra o instante $t = 0$ do processo de propagação da onda EM.

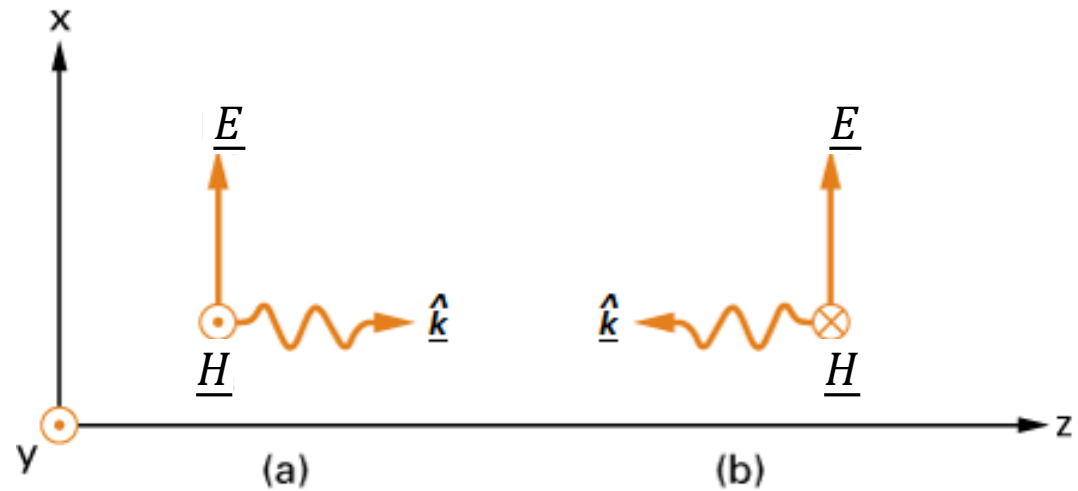
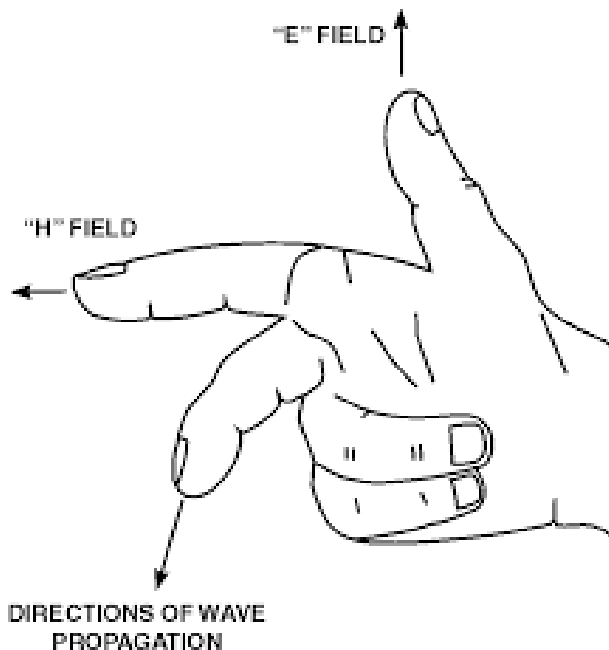


Onda EM plana se propagando em um meio sem perdas (*loseless medium*)

No geral, para um modo de propagação TEM (*Transverse Electric and Magnetic mode*), conforme brevemente citado no slide 3 do Cap I.1, a direção de propagação de uma onda EM plana é dada pelo vetor unitário \hat{k} , e é igual à direção do vetor que resulta do produto vetorial entre \underline{E} e \underline{H} . Neste contexto, temos que

$$\underline{H} = \frac{1}{\eta} (\hat{k} \times \underline{E}) \quad (34)$$

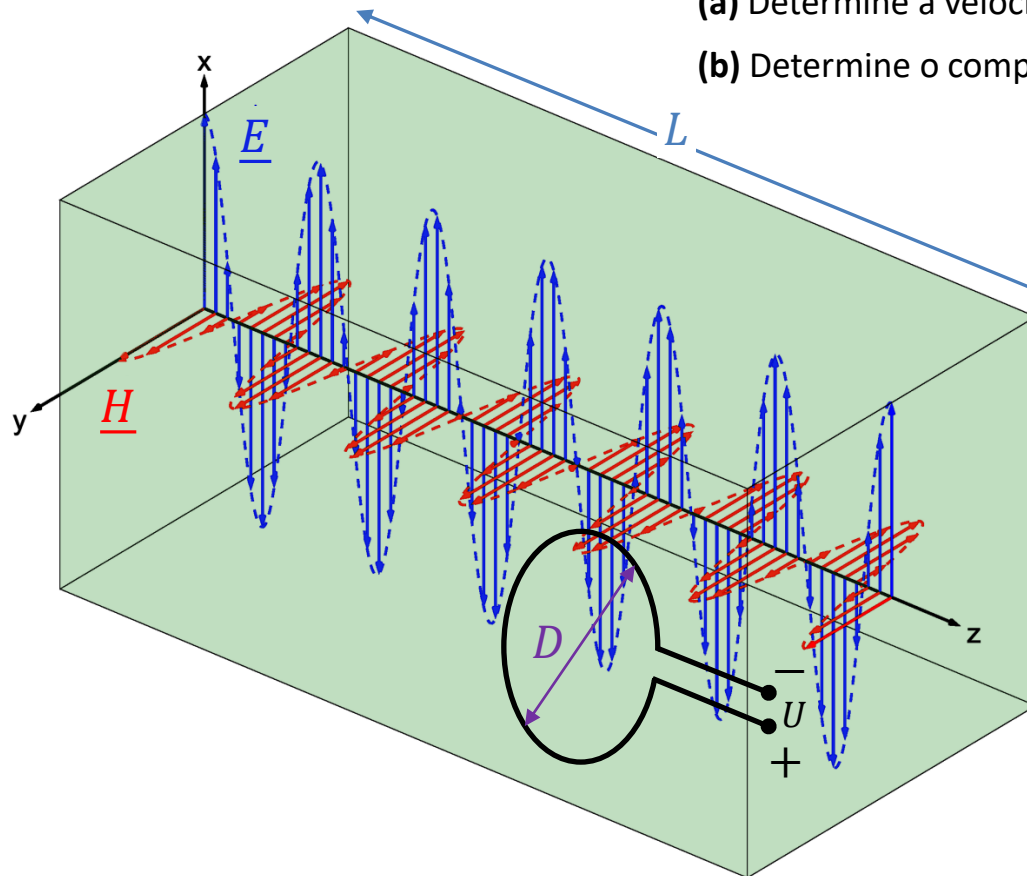
$$\underline{E} = -\eta(\hat{k} \times \underline{H}) \quad (35)$$



Onda EM plana se propagando em um meio sem perdas (*loseless medium*)

Exemplo 1: A figura abaixo mostra uma onda EM plana de frequência $f = 2.4$ [GHz] propagando-se no interior de um bloco de material dielétrico sem perdas com permissividade relativa $\epsilon_r = 4.0$ e de comprimento L na direção $+z$ de propagação da onda. A tensão U [V] medida nos terminais da espira de diâmetro D é proporcional a intensidade do campo elétrico \underline{E} da onda EM e cujo valor é $E_x = 100$ [mV/m]. **Pede-se:**

- (a) Determine a velocidade de fase v_p [m/s] da onda EM no interior do bloco.
(b) Determine o comprimento de onda λ [m] da onda EM no interior do bloco.



- (c) Determine a constante de propagação k [rad/m] (= frequência de variação espacial) da onda EM no interior do bloco.
(d) Determine a impedância característica η [Ω] do meio de propagação da onda EM.
(e) Determine o comprimento L [m] na direção de propagação da onda para que o bloco tenha um comprimento L exato de 6 comprimentos de onda λ , conforme mostra a figura.
(f) Determine o valor da amplitude da tensão U [V] induzida pelo campo \underline{H} na espira de diâmetro $D = \lambda/4$ situada no interior do bloco. O plano que contém a espira é paralelo ao plano xz do bloco. As linhas de \underline{H} são perpendiculares ao plano que contém a espira e são uniformemente distribuídas no interior da espira.
(g) Qual o valor da tensão U [V] induzida pelo campo \underline{H} nos terminais da espira se sua orientação espacial for alterada de modo ao plano que contém a espira ser paralelo ao plano yz do bloco? Justifique analiticamente sua resposta.

Onda EM plana se propagando em um meio sem perdas (*loseless medium*)

Solução:

Para a solução deste exemplo vamos usar o *script* Mathcad Exemplo1.xmcd disponível em https://www.fccdecastro.com.br/ZIP/OLT_C2_E1S19.zip.

$$\mu_0 := 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{\text{henry}}{\text{m}} \quad \epsilon_0 := 8.854187817 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{\text{farad}}{\text{m}}$$

$$f := 2.4 \text{GHz}$$

$$\epsilon_r := 4.0$$

$$E_x := 100 \frac{\text{mV}}{\text{m}}$$

Solução:

(a) Da equação (26) do slide 14 do Cap II.3:

$$v_p := \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot \mu_0}} = 1.499 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Note que a velocidade $v_p = 1.499 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ de propagação da onda EM no bloco dielétrico é menor que

a velocidade $c = 2.998 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ de propagação da luz no espaço livre.

Onda EM plana se propagando em um meio sem perdas (*loseless medium*)

(b) Da equação (30) do slide 15 do Cap II.3:

$$\lambda := \frac{v_p}{f} = 6.246 \cdot \text{cm}$$

Note que o comprimento de onda $\lambda = 6.246 \text{ cm}$ da onda EM no bloco dielétrico é menor que o comprimento de onda

$$\lambda_{\text{free}} := \frac{c}{f} = 12.491 \text{ cm}$$

que a onda EM teria caso se propagasse no espaço livre.

(c) Da equação (29) do slide 15 do Cap II.3:

$$k := \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} = 100.601 \cdot \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

(d) Do slide 17 do Cap II.3:

$$\eta := \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_r \cdot \epsilon_0}} = 188.365 \Omega$$

(e) $L := 6 \cdot \lambda = 37.474 \text{ cm}$

(f) Do slide 17 do Cap II.3:

$$H_y := \frac{E_x}{\eta} = 5.309 \times 10^{-4} \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

Da equação 11 do slide 8 do Cap II.3, com $\nabla \times \underline{E} = \text{RotE}$, temos:

$$\text{RotE} := -j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \mu_0 \cdot H_y = -10.06i \cdot \frac{\text{V}}{\text{m}^2}$$

Conforme dado no enunciado, o diâmetro da espira é $D := \frac{\lambda}{4} = 1.561 \text{ cm}$. E daí, sua área é $St := \pi \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2 = 1.915 \text{ cm}^2$.

Da equação 4 do slide 15 do Cap I.2 temos:

$$U := St \cdot |\text{RotE}| = 1.926 \cdot \text{mV}$$

(g) $U = 0 \text{ [V]}$ porque, se a orientação espacial da espira for paralela ao plano yz, então nenhuma linha do campo H atravessará a área do interior da espira. Ver figura no slide 15 do Cap I.2.

Onda EM plana se propagando em um meio com perdas (*lossy medium*)

Passamos a analisar agora a propagação de uma onda EM variando senoidalmente no tempo t [s] com uma frequência f [Hz] em um meio com perdas, i.e., um meio com permissividade elétrica ϵ [F/m], permeabilidade magnética μ [H/m] e condutividade elétrica σ [S/m] não nula. Para este meio com perdas, a relação entre o campo elétrico \underline{E} [V/m] e o campo magnético \underline{H} [A/m] é dada pelas Equações de Maxwell na forma fasorial – equações (3) e (4) do slide 3 do Cap II.1:

$$\underline{\nabla} \times \underline{H} = \sigma \underline{E} + j\omega\epsilon \underline{E} = (\sigma + j\omega\epsilon) \underline{E} \quad [\text{A/m}^2] \quad (3) \quad \text{sendo } \omega = 2\pi f \text{ [rad/s]}$$

$$\underline{\nabla} \times \underline{E} = -j\omega\mu \underline{H} \quad [\text{V/m}^2] \quad (4) \quad \text{e } j = \sqrt{-1}.$$

Vamos efetuar em (3) e (4) a mesma sequência de operações vetoriais e algébricas que efetuamos nas equações (10) e (11) do Cap II.2, e que resultou na equação de onda de Helmholtz p/ o campo \underline{E} dada por $\nabla^2 \underline{E} + \omega^2 \mu \epsilon \underline{E} = \underline{0}$ (equação (18) do slide 10 do Cap II.2). A referida sequência de operações encontra-se resumida abaixo e o seu resultado é a equação (36):

$$\nabla^2 \underline{E} + \omega^2 \mu \epsilon \left(1 - \frac{j\sigma}{\omega\epsilon} \right) \underline{E} = \underline{0} \quad (36)$$

$$\underline{\nabla} \times \underline{\nabla} \times \underline{E} = -j\omega\mu \underline{\nabla} \times \underline{H}$$

$$-\nabla^2 \underline{E} = -j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)\underline{E}$$

$$\nabla^2 \underline{E} = j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)\underline{E}$$

$$\nabla^2 \underline{E} = (j\omega\mu\sigma + j\omega\mu j\omega\epsilon)\underline{E}$$

$$\nabla^2 \underline{E} = (j\omega\mu\sigma - \omega^2\mu\epsilon)\underline{E}$$

$$\nabla^2 \underline{E} = \omega^2\mu\epsilon \left(\frac{j\omega\mu\sigma}{\omega^2\mu\epsilon} - 1 \right) \underline{E}$$

$$\nabla^2 \underline{E} = \omega^2\mu\epsilon \left(\frac{j\sigma}{\omega\epsilon} - 1 \right) \underline{E}$$

Note a similaridade de (36) com (18). De fato, se o meio de propagação é sem perdas então $\sigma = 0$ e a equação (36) simplifica para a forma da equação (18). Para sistematizar e simplificar a nossa análise, vamos **definir** uma **constante de propagação complexa** γ para o meio de propagação com perdas dada por

$$\gamma = \alpha + j\beta = j \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon \left(1 - \frac{j\sigma}{\omega\epsilon} \right)} = j\omega\sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{\left(1 - \frac{j\sigma}{\omega\epsilon} \right)} \quad (37)$$

de modo que a equação (36) pode ser reescrita como

$$\nabla^2 \underline{E} - \gamma^2 \underline{E} = \underline{0} \quad (38)$$

A parte real $\alpha = \text{Re}\{\gamma\}$ da constante de propagação complexa γ é denominada de **constante de atenuação** medida em [Neper/m] e indica quantos Nepers a onda se atenua a cada metro que a onda se propaga (ver <https://pt.wikipedia.org/wiki/Neper>). A parte imaginária $\beta = \text{Im}\{\gamma\}$ é a constante de fase medida em [rad/m], análoga à constante k já discutida no slide 10 do Cap II.2.

Onda EM plana se propagando em um meio com perdas (*lossy medium*)

Consideremos uma onda EM com um campo \underline{E} tendo uma única componente E_x [V/m] na direção \hat{i} (eixo cartesiano x) e que se propaga ao longo do eixo cartesiano z em um meio de propagação com perdas. A onda EM varia senoidalmente no tempo t [s] com uma frequência angular $\omega = 2\pi f$ [rad/s], sendo f [Hz] a frequência de variação do campo \underline{E} no tempo t , e, portanto, \underline{E} é dado por $\underline{E} = \underline{E}(x, y, z, t) = E_x(z)e^{j\omega t}\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}$ [V/m]. Para a onda EM em consideração, a equação (38) simplifica para:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x(z) - \gamma^2 E_x(z) = 0 \quad (39)$$

cuja solução é (ver slide 12 do Cap II.3):

$$E_x(z) = E^+ e^{-\gamma z} + E^- e^{\gamma z} \quad (40)$$

Da mesma forma que fizemos no desenvolvimento analítico do slide 13 do Cap II.3, se quisermos a solução no tempo $E_x(z, t)$ a partir da solução fasorial $E_x(z)$ é necessário multiplicar (40) por $e^{j\omega t}$, fazer $\gamma = \alpha + j\beta$ e extrair a parte real do resultado através do operador $\text{Re}\{\cdot\}$, o que resulta em:

$$E_x(z, t) = E^+ e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) + E^- e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z) \quad (41)$$

A interpretação da solução (41) para $E_x(z, t)$ é a seguinte:

O 1º termo $E^+ e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)$ em (41) representa a onda EM incidente que se propaga na direção $+z$ com velocidade de fase $v_p^+ = \frac{\omega}{\beta}$ [m/s] e comprimento de onda $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$ [m]. A medida que a onda incidente se propaga na direção $+z$, a sua amplitude sofre uma atenuação de α [Neper] a cada metro percorrido.

O 2º termo $E^- e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z)$ em (41) representa a onda EM refletida que se propaga na direção $-z$ com velocidade de fase $v_p^- = -\frac{\omega}{\beta}$ [m/s] e comprimento de onda $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$ [m]. A medida que a onda refletida se propaga na direção $-z$, a sua amplitude sofre uma atenuação de α [Neper] a cada metro percorrido.

Note que se $\sigma = 0$, então o meio é sem perdas e resulta de (37) que $\alpha = 0$ e $\gamma = j\beta = jk = j\omega \sqrt{\mu\epsilon}$. Note também que mesmo quando $\sigma = 0$ as perdas dielétricas podem ser alternativamente contempladas através da permissividade complexa $\epsilon = \epsilon' - j\epsilon''$ do meio de propagação (ver slide 5 do Cap II.1):

$$\gamma = jk = j\omega \sqrt{\mu\epsilon} = j\omega \sqrt{\mu\epsilon'(1 - j \tan \delta)} \quad (42) \quad \tan \delta = \epsilon''/\epsilon' \quad (43)$$

Onda EM plana se propagando em um meio com perdas (*lossy medium*)

Através de um desenvolvimento algébrico similar ao efetuado nos slides 16 e 17 do Cap II.3 e que resultou na equação (33) para um meio de propagação sem perdas, para um meio com perdas a onda do campo magnético $H_y(z)$ gerado no \mathbb{R}^3 a partir da onda do campo elétrico $E_x(z)$ é dada pela equação (44):

$$H_y(z) = \frac{1}{\eta} \{E^+ e^{-\gamma z} - E^- e^{\gamma z}\} \quad [\text{A/m}] \quad (44)$$

onde

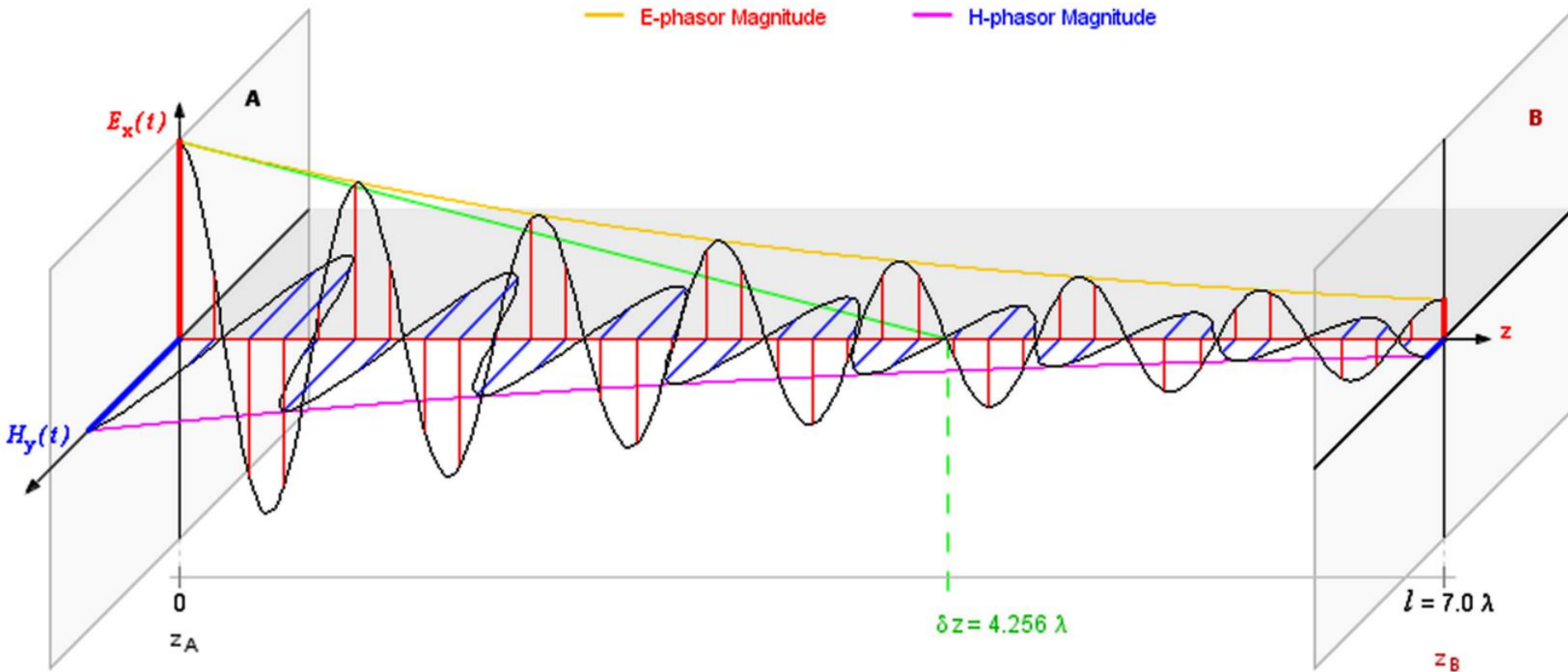
$$\eta = \frac{j\omega\mu}{\gamma} \quad [\Omega] \quad (45)$$

é a impedância característica do meio de propagação da onda EM. Note que para um meio com perdas a impedância η é um valor complexo, i.e, $\eta = |\eta|e^{j\angle\eta}$ $[\Omega]$. Note também que se $\sigma = 0$, então o meio é sem perdas e resulta de (37) que $\alpha = 0$ e $\gamma = j\beta = jk = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$, e daí (45) simplifica para $\eta = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \frac{j\omega\mu}{j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ $[\Omega]$ (ver slide 17 do Cap II.3).

A interpretação da relação entre as equações (40) e (44) é a mesma do que para o meio sem perdas analisada no slide 17 do Cap II.3: A razão entre o fasor $E^+ e^{-\gamma z}$ $[\text{V/m}]$ da onda incidente do campo elétrico e o fasor $\frac{E^+}{\eta} e^{-\gamma z}$ $[\text{A/m}]$ da onda incidente do campo magnético é a impedância de onda, e para uma onda plana, a impedância de onda resulta igual à impedância característica η do meio de propagação da onda EM dada por (45).

Onda EM plana se propagando em um meio com perdas (*lossy medium*)

Por exemplo, a figura abaixo mostra o campo $E_x(z)$ dado por (40) e o campo $H_y(z)$ dado por (44) para uma onda EM de frequência $f = 2.4$ [GHz] propagando-se ao longo do eixo cartesiano z em um meio de propagação com permissividade relativa $\epsilon_r = 4.0$, condutividade $\sigma = 0.04$ [S/m] e permeabilidade $\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ [H/m]. Não há ondas refletidas no meio, portanto $E^- = 0$ e $H^- = \frac{E^-}{\eta} = 0$. A figura mostra o instante $t = 0$ do processo de propagação da onda EM.



A distância $\delta z = 4.256\lambda = 0.26583$ [m] é a distância que a onda EM precisa percorrer no meio de propagação para que sua amplitude reduza 1 Neper. Ou seja, a cada vez que a onda EM percorre 0.26583 [m] as perdas atenuam a amplitude da onda multiplicando sua amplitude por um fator de $1/e = 0.368$. Esta distância é denominada de *skin depth* e será vista nos próximos slides na discussão sobre o efeito pelicular (*skin effect*).

Onda EM plana se propagando em um meio com perdas (*lossy medium*)

Exemplo 2: Uma onda EM plana de frequência $f = 2.4$ [GHz] propaga-se na direção $+z$ em um meio com permissividade relativa $\epsilon_r = 4.0$, condutividade $\sigma = 0.04$ [S/m] e permeabilidade $\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ [H/m]. A intensidade da componente x do campo elétrico da onda é $E_x = 100$ [mV/m].

Pede-se:

- (a) Determine a constante de propagação γ [1/m] da onda EM.
- (b) Determine a constante de atenuação α [Neper/m] da onda EM.
- (c) Determine a constante de fase β [rad/m] da onda EM.
- (d) Determine a velocidade de fase v_p [m/s] da onda EM.
- (e) Determine o comprimento de onda λ [m] da onda EM.
- (f) Determine a impedância característica η [Ω] do meio de propagação da onda EM.
- (g) Plote o gráfico da amplitude de $E_x(z)$ para $0 \leq z \leq 7\lambda$.
- (h) Plote o gráfico da amplitude de $H_y(z)$ para $0 \leq z \leq 7\lambda$.

Onda EM plana se propagando em um meio com perdas (*lossy medium*)

Solução:

Para a solução deste exemplo vamos usar o *script* Mathcad Exemplo2.xmcd disponível em https://www.fccdecastro.com.br/ZIP/OLT_C2_E2S27.zip.

$$\mu_0 := 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{\text{H}}{\text{m}} \quad \epsilon_0 := 8.854187817 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{\text{F}}{\text{m}} \quad \epsilon_r := 4.0 \quad \sigma := 0.04 \frac{\text{mho}}{\text{m}}$$

$$E_x := 100 \frac{\text{mV}}{\text{m}} \quad f := 2.4 \text{GHz}$$

$$\mu := \mu_0 \quad \epsilon := \epsilon_r \cdot \epsilon_0 = 3.542 \times 10^{-11} \frac{\text{F}}{\text{m}} \quad \omega := 2 \cdot \pi \cdot f = 1.508 \times 10^{10} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Solução:

(a) Da equação (37) do slide 23 do Cap II.4:

$$\gamma := j \cdot \omega \sqrt{\mu \cdot \epsilon} \cdot \sqrt{1 - \frac{j \cdot \sigma}{\omega \cdot \epsilon}} = (3.765 + 100.671i) \frac{1}{\text{m}}$$

(b) $\alpha := \text{Re}(\gamma) = 3.765 \frac{1}{\text{m}}$ [Np/m]

(c) $\beta := \text{Im}(\gamma) = 100.671 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$

(d) Da equação (26) do slide 14 do Cap II.3:

$$v_p := \frac{1}{\sqrt{\mu \cdot \epsilon}} = 1.499 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

(e) Da equação (30) do slide 15 do Cap II.3:

$$\lambda := \frac{v_p}{f} = 6.246 \cdot \text{cm}$$

(f) Da equação (45) do slide 25 do Cap II.4:

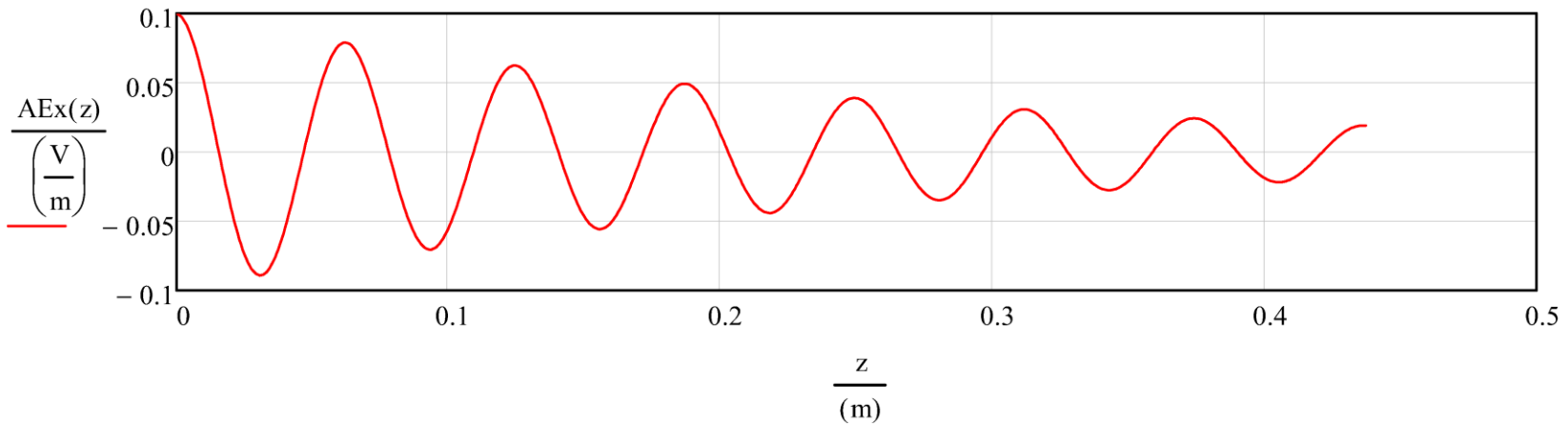
$$\eta := \frac{j \cdot \omega \cdot \mu}{\gamma} = (187.971 + 7.029i) \Omega$$

Onda EM plana se propagando em um meio com perdas (*lossy medium*)

(g) $z := 0, 0.01 \cdot \lambda .. 7 \cdot \lambda$

Para plotar o gráfico da amplitude $AEx(z)$ de $Ex(z)$, é necessário tomar a parte real da equação (40) do slide 24 do Cap II.4, com $E^+ = Ex$ e $E^- = 0$:

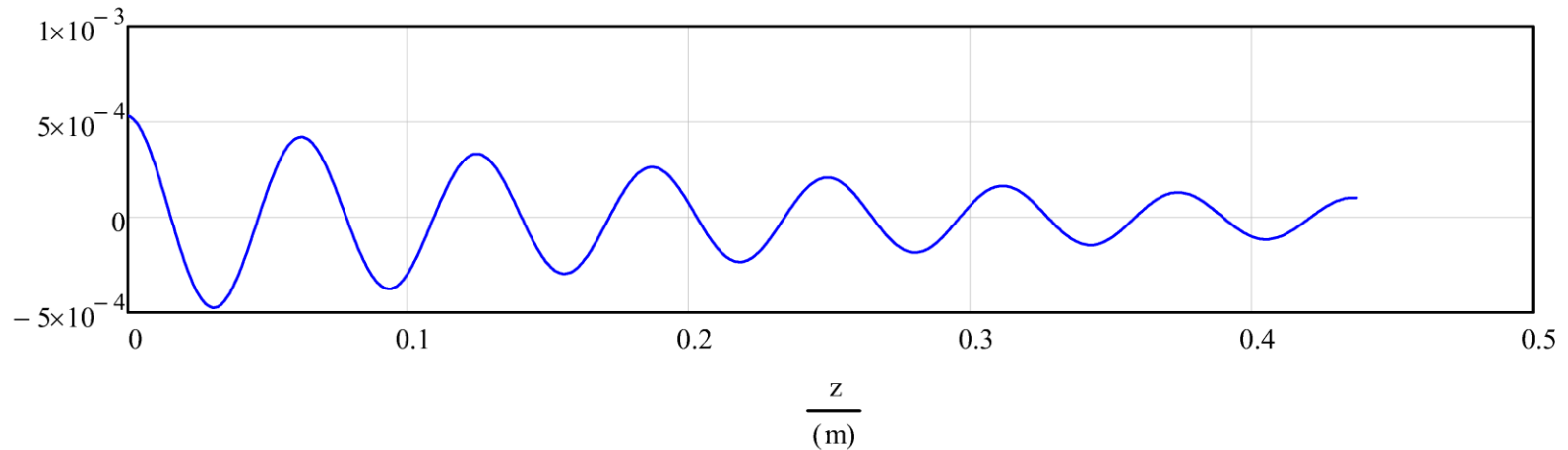
$$AEx(z) := \text{Re}\left(Ex \cdot e^{-\gamma \cdot z}\right)$$



Onda EM plana se propagando em um meio com perdas (*lossy medium*)

(h) Para plotar o gráfico da amplitude $A_{Hy}(z)$ de $H_y(z)$, é necessário tomar a parte real da equação (44) do slide 25 do Cap II.4, com $E^+ = E_x$ e $E^- = 0$:

$$A_{Hy}(z) := \operatorname{Re} \left(\frac{E_x \cdot e^{-\gamma \cdot z}}{\eta} \right)$$



Onda EM plana se propagando em um meio bom condutor

Um meio bom condutor, como em geral é um meio de propagação metálico (ouro, cobre, alumínio, etc.), apresenta uma condutividade σ muito grande. Em consequência, a tangente de perdas é muito maior do que 1, i.e., $\tan \delta = \sigma/\omega\varepsilon' \gg 1$, ou, de forma equivalente, $\varepsilon'' \gg \varepsilon'$ na permissividade complexa $\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon''$. Nesta situação em que o meio apresenta $\sigma/\omega\varepsilon' \gg 1$, a constante de propagação γ dada por (37) pode ser aproximada para

$$\begin{aligned} \gamma = \alpha + j\beta &= j\omega\sqrt{\mu\varepsilon} \sqrt{\left(1 - \frac{j\sigma}{\omega\varepsilon}\right)} \approx j\omega\sqrt{\mu\varepsilon} \sqrt{\left(\frac{\sigma}{j\omega\varepsilon}\right)} = 1e^{j90^\circ} \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \sqrt{1e^{-j90^\circ} \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)} = 1e^{j90^\circ} 1e^{-j45^\circ} \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \sqrt{\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)} \\ &= 1e^{j45^\circ} \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \sqrt{\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1+j)\omega\sqrt{\mu\varepsilon} \sqrt{\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1+j)\omega\sqrt{\mu} \sqrt{\left(\frac{\sigma}{\omega}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1+j) \sqrt{\left(\frac{\omega^2\mu\sigma}{\omega}\right)} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} (1+j)\sqrt{\omega\mu\sigma} = (1+j) \sqrt{\frac{2\omega\mu\sigma}{4}} = (1+j) \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \quad [1/m] \end{aligned}$$

$$\gamma = \alpha + j\beta = (1+j) \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \quad [1/m] \quad (46)$$

Substituindo (46) em (45) obtemos a impedância característica de um meio de propagação bom condutor:

$$\begin{aligned} \eta = \frac{j\omega\mu}{\gamma} &= \frac{j\omega\mu}{(1+j) \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}} = \frac{1e^{j90^\circ} \omega\mu}{\sqrt{2} 1e^{j45^\circ} \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}} = \frac{1e^{j45^\circ} \omega\mu}{\sqrt{\omega\mu\sigma}} = \frac{1e^{j45^\circ} \sqrt{\omega^2\mu^2}}{\sqrt{\omega\mu\sigma}} = 1e^{j45^\circ} \sqrt{\frac{\omega^2\mu^2}{\omega\mu\sigma}} \\ &= 1e^{j45^\circ} \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1+j) \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} \quad [\Omega] \end{aligned}$$

$$\eta = (1+j) \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} = 1e^{j45^\circ} \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} \quad [\Omega] \quad (47)$$

Onda EM plana se propagando em um meio bom condutor

Note de (47) que, para qualquer bom condutor, o campo magnético $H^+ = \frac{E^+}{\eta}$ se encontra atrasado no domínio tempo em relação ao campo elétrico E^+ em 45° , i.e., $\angle H^+ = \angle E^+ - 45^\circ$. Note também que η é muito pequeno devido a σ ser muito grande. Ainda, observe no geral que para meios sem perdas o ângulo da impedância característica η é 0° e H^+ e E^+ resultam em fase, enquanto que para meios arbitrários com perdas, a defasagem de H^+ em relação a E^+ varia entre 0° e -45° .

A velocidade de fase $v_p = \frac{\omega}{\beta}$ [m/s] da onda EM propagando-se em um meio bom condutor, $c/\beta = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$ obtido de (46), é dada por:

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}} \quad [\text{m/s}] \quad (48)$$

onde $\omega = 2\pi f$.

E o comprimento de onda λ é dado por:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 2 \sqrt{\frac{\pi}{f\mu\sigma}} \quad [\text{m}] \quad (49)$$

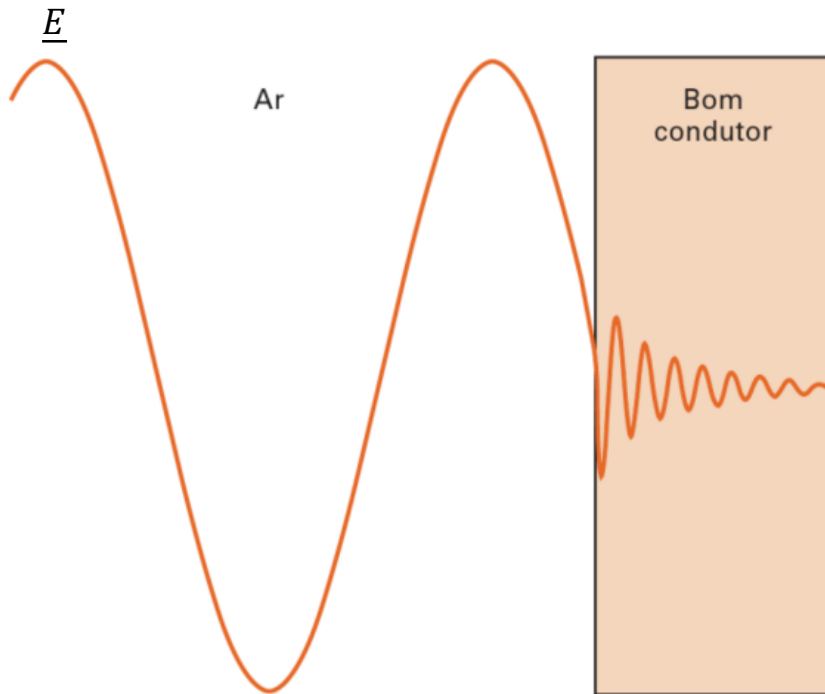
Efeito pelicular (*skin effect*)

A figura abaixo mostra o campo \underline{E} de uma onda EM plana se propagando no espaço livre (ar) e adentrando em um bloco de material bom condutor. Observa-se que a onda do campo \underline{E} atenua rapidamente ao se propagar no condutor, com um comprimento de onda visivelmente muito menor do que seu valor no ar.

Isto implica que os campos \underline{E} e \underline{H} não podem penetrar uma grande distância no condutor. A distância na qual a amplitude do campo \underline{E} cai a e^{-1} ($\cong 0.368$) do seu valor na interface com o ar é chamada profundidade de penetração (*skin depth*).

A solução da Equação de Helmholtz para os campos \underline{E} e \underline{H} de uma onda EM plana se propagando em um meio com condutividade σ não nula – equação (40) do slide 24 do Cap II.4 e equação (44) do slide 25 do Cap II.4 – estabelece a seguinte dependência da distância z percorrida ao longo do caminho de propagação:

$$e^{-\gamma z} = e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \quad (50)$$



Para uma distância percorrida pela onda EM de $z = \frac{1}{\alpha}$ [m] o termo de amplitude $e^{-\alpha z}$ em (50) resulta $e^{-\alpha(\frac{1}{\alpha})} = e^{-1} = 0.368 = 36.8\%$.

Isto significa que a cada vez que a onda percorre uma distância $1/\alpha$, a amplitude da onda é multiplicada por e^{-1} , ou 0.368.

Em outras palavras, a cada distância $1/\alpha$ que a onda percorre, a amplitude é atenuada para 36.8% do valor original.

Assim, $e^{-1} = e^{-\alpha\delta}$, onde $\delta = \frac{1}{\alpha}$ é a **profundidade pelicular** dada por

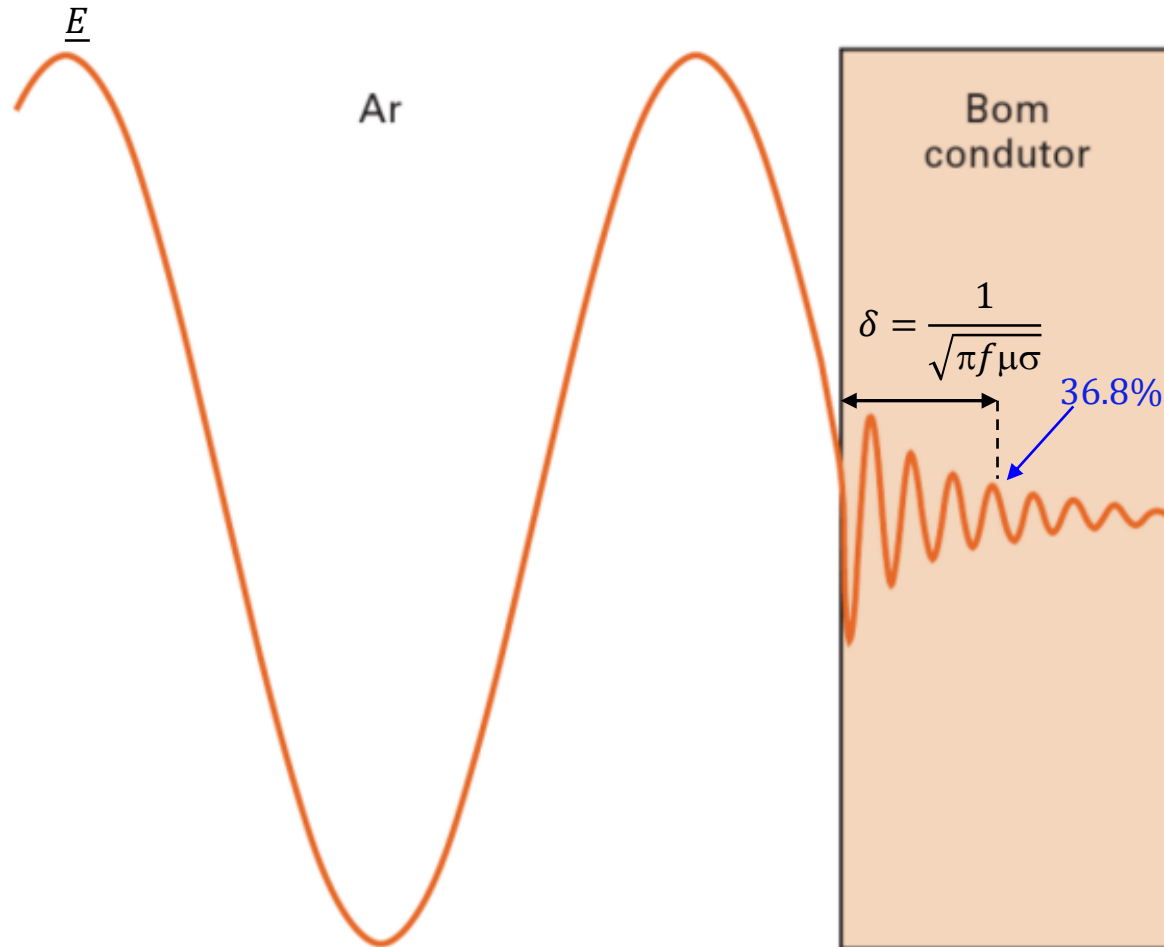
$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} \quad (51)$$

sendo $\alpha = \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}}$ obtido a partir de (46).

Efeito pelicular (*skin effect*)

Como a amplitude da onda EM atenua exponencialmente com a distância no interior de um bom condutor, e como a profundidade de penetração $\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}}$ é pequena devido ao alto valor de σ no interior de um bom condutor, os campos \underline{E} e \underline{H} ficarão confinados à superfície (*skin effect*, ou efeito pelicular).

Importante notar que, para baixas frequências f , a corrente atravessa uniformemente toda a seção transversal do condutor. No entanto, para altas frequências f , a corrente se concentra na superfície, reduzindo a seção transversal, aumentando a resistência ôhmica, e, portanto, as perdas Joule.



Efeito pelicular (*skin effect*)

Por exemplo, se $\delta = 1\text{mm}$, a cada milímetro que a onda EM se propaga no condutor, ela terá sua amplitude multiplicada por e^{-1} (i.e., reduzida de um fator e):

Para 1mm: $\frac{1}{e}$

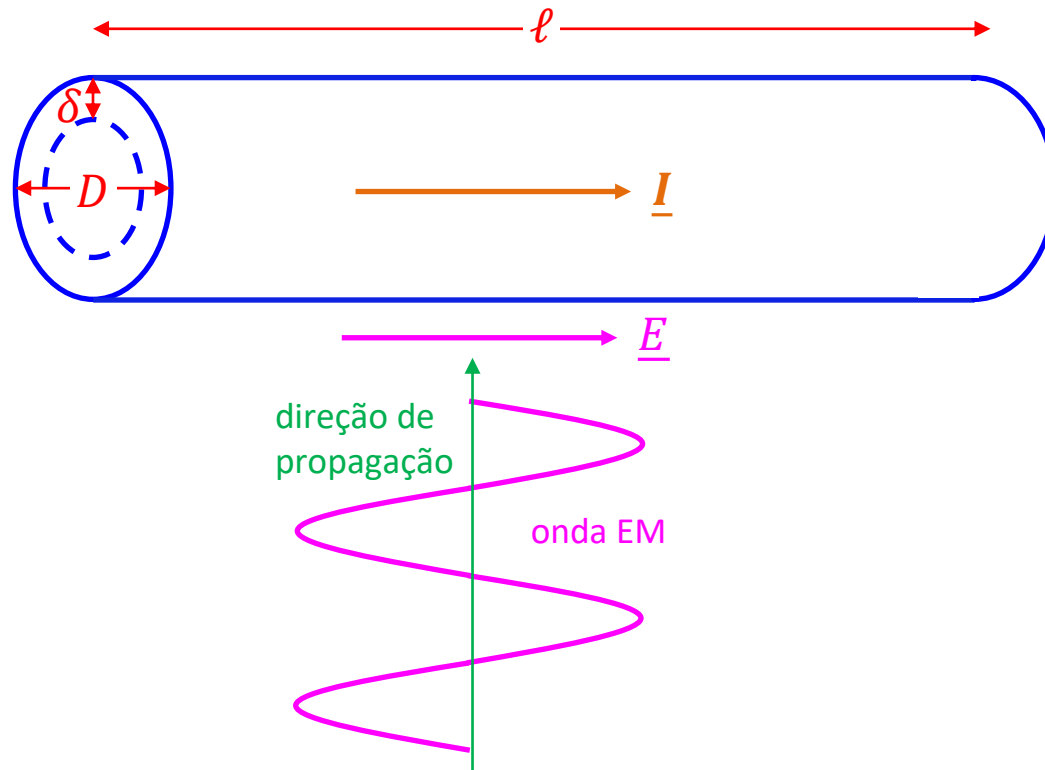
Para 2mm: $\frac{1}{e} \frac{1}{e} = \frac{1}{e^2}$... e assim sucessivamente

A profundidade de penetração δ extremamente pequena para frequências f nas faixas de micro-ondas indica que apenas a superfície do condutor que guia a onda precisa ser considerada para efeito de transporte de corrente elétrica.

Por exemplo, uma lâmina de vidro com uma deposição superficial de prata de $3\mu\text{m}$ de espessura é um excelente condutor em micro-ondas devido à pequena profundidade de penetração $\delta = 1/\sqrt{\pi f \mu \sigma}$ em consequência da alta frequência f em micro-ondas e da alta condutividade σ da prata. Em geral apenas uma fina camada de material bom condutor é necessária para obter componentes de micro-ondas com baixas perdas.

Efeito pelicular (*skin effect*)

Exemplo 3: Consideremos o fio condutor cilíndrico de cobre mostrado na figura abaixo. O fio é retilíneo e apresenta um diâmetro $D = 1$ [mm] e comprimento $\ell = 50$ [cm] (não mostrado em escala). Uma onda EM de frequência $f = 2.4$ [GHz] incide no fio, sendo a direção de propagação da onda EM perpendicular ao fio. O campo elétrico \underline{E} da onda EM incide tangencialmente no fio condutor e coloca em movimento as cargas livres do mesmo, estabelecendo uma corrente elétrica AC I [A] no interior do fio. Devido ao efeito pelicular, a corrente I é confinada na casca externa do fio, casca cuja espessura é dada pelo *skin depth* δ , conforme mostra a figura. Sabendo que a condutividade do cobre é $\sigma = 5.813 \times 10^7$ [Ω^{-1}/m], **pede-se:** (a) Determine o *skin depth* δ . (b) Determine a resistência elétrica R [Ω] medida entre as extremidades do fio na frequência f . (c) Determine a resistência elétrica medida entre as extremidades do fio caso a corrente I fosse gerada por uma tensão DC ($f = 0$ [Hz]) aplicada por uma bateria conectada nas extremidades do fio. **Dica:** Utilize a equação de Pouillet para determinar a resistência R do fio condutor cilíndrico (ver "Pouillet's law" em https://en.wikipedia.org/wiki/Electrical_resistivity_and_conductivity).



Efeito pelicular (*skin effect*)

Solução:

Para a solução deste exemplo vamos usar o *script* Mathcad Exemplo3.xmcd disponível em https://www.fccdecastro.com.br/ZIP/OLT_C2_E3S36.zip.

$$\mu_0 := 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{\text{H}}{\text{m}} \quad \epsilon_0 := 8.854187817 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{\text{F}}{\text{m}}$$

$$f := 2.4\text{GHz} \quad \sigma := 5.813 \cdot 10^7 \frac{\text{mho}}{\text{m}} \quad D := 1\text{mm} \quad L := 50\text{cm} \quad \mu := \mu_0$$

Solução:

(a) Da equação (51) do slide 33 do Cap II.5:

$$\delta := \frac{1}{\sqrt{\pi f \cdot \mu \cdot \sigma}} = 1.347 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

(b) A área S_{skin} da seção transversal do fio em que a corrente I é confinada na casca externa pelo efeito pelicular é dada pela área da seção transversal do condutor de diâmetro D subtraída da área do disco de diâmetro $D - 2 \cdot \delta$ (ver disco tracejado na figura do enunciado):

$$S_{\text{skin}} := \pi \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2 - \pi \cdot \left(\frac{D - 2 \cdot \delta}{2}\right)^2 = 4.227 \times 10^{-3} \text{ mm}^2$$

Utilizando a equação de Pouillet referida no enunciado, temos:

$$R := \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{L}{S_{\text{skin}}} = 2.035 \Omega$$

Efeito pelicular (*skin effect*)

(c) Quando a corrente I é DC não ocorre o confinamento da corrente na casca externa do fio pelo efeito pelicular, Nesta situação, a corrente I é uniformemente distribuída na área da seção transversal do condutor de diâmetro D . Utilizando a equação de Pouillet para esta situação, temos:

$$S := \pi \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2 = 0.785 \text{ mm}^2 \quad R := \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{L}{S} = 0.011 \Omega$$

Note, portanto, a significativa influência do efeito pelicular na resistência de fios condutores. Para antenas de fio (por exemplo, dipolos de fio – ver https://en.wikipedia.org/wiki/Dipole_antenna) e enrolamentos de indutores operando em alta frequência, é necessário avaliar criteriosamente o quanto o efeito pelicular no fio condutor afetará o desempenho do dispositivo.

Uma maneira de minimizar o efeito pelicular em fios condutores é utilizar fios do tipo Litz (ver https://en.wikipedia.org/wiki/Litz_wire).

Quantity	Type of Medium		
	Lossless ($\epsilon'' = \sigma = 0$)	General Lossy	Good Conductor ($\epsilon'' \gg \epsilon'$ or $\sigma \gg \omega\epsilon'$)
Complex propagation constant	$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}$	$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}$ $= j\omega\sqrt{\mu\epsilon'}\sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon'}}$	$\gamma = (1 + j)\sqrt{\omega\mu\sigma/2}$
Phase constant (wave number)	$\beta = k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$	$\beta = \text{Im}\{\gamma\}$	$\beta = \text{Im}\{\gamma\} = \sqrt{\omega\mu\sigma/2}$
Attenuation constant	$\alpha = 0$	$\alpha = \text{Re}\{\gamma\}$	$\alpha = \text{Re}\{\gamma\} = \sqrt{\omega\mu\sigma/2}$
Impedance	$\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$	$\eta = j\omega\mu/\gamma$	$\eta = (1 + j)\sqrt{\omega\mu/2\sigma}$
Skin depth	$\delta_s = \infty$	$\delta_s = 1/\alpha$	$\delta_s = \sqrt{2/\omega\mu\sigma}$
Wavelength	$\lambda = 2\pi/\beta$	$\lambda = 2\pi/\beta$	$\lambda = 2\pi/\beta$
Phase velocity	$v_p = \omega/\beta$	$v_p = \omega/\beta$	$v_p = \omega/\beta$

Propriedades para dielétricos selecionados^a

	ϵ_r	E_{br} (V/m)	tg δ em 1 MHz	σ (S/m)
Ar	1,0005	3×10^6	~ 0	~ 0
Alumina	9,9		0,0001	
Titanato de bário	1200	$7,5 \times 10^6$	—	
Vidro	10	30×10^6	0,004	$\sim 10^{-12}$
Gelo	4,2		0,12	
Mica	5,4	200×10^6	0,0003	10^{-15}
Polietileno	2,26	47×10^6	—	10^{-16}
Poliestireno	2,56	20×10^6	—	10^{-17}
Quartz (fundido)	3,8	30×10^6	0,0002	10^{-17}
Silício (puro)	11,8		—	$4,4 \times 10^{-4}$
Solo (seco)	3 – 4		0,017	2×10^{-3}
Teflon	2,1	60×10^6	$< 0,0002$	10^{-15}
Água (destilada)	81		0,04	10^{-4}
Água do mar	72		0,9	5

^a A permissividade dielétrica é resultado da polarização de moléculas fixas e seus elétrons de ligação. Condutores, com seus elétrons livres, não têm moléculas polarizadas e, portanto, possuem permissividades do espaço livre ($\epsilon_{r(\text{metais})} = 1$).

E_{br} é o valor do campo elétrico para que ocorra o *breakdown* do material (ver https://en.wikipedia.org/wiki/Electrical_breakdown)

CONDUCTIVITIES FOR SOME MATERIALS

Material	Conductivity S/m (20°C)	Material	Conductivity S/m (20°C)
Aluminum	3.816×10^7	Nichrome	1.0×10^6
Brass	2.564×10^7	Nickel	1.449×10^7
Bronze	1.00×10^7	Platinum	9.52×10^6
Chromium	3.846×10^7	Sea water	3–5
Copper	5.813×10^7	Silicon	4.4×10^{-4}
Distilled water	2×10^{-4}	Silver	6.173×10^7
Germanium	2.2×10^6	Steel (silicon)	2×10^6
Gold	4.098×10^7	Steel (stainless)	1.1×10^6
Graphite	7.0×10^4	Solder	7.0×10^6
Iron	1.03×10^7	Tungsten	1.825×10^7
Mercury	1.04×10^6	Zinc	1.67×10^7
Lead	4.56×10^6		

Condutores à temperatura ambiente^a

Material	Símbolo	σ (S/m)
Alumínio	Al	$3,8 \times 10^7$
Carbono	C	3×10^4
Cobre	Cu	$5,8 \times 10^7$
Ouro	Au	$4,1 \times 10^7$
Grafite		7×10^4
Ferro	Fe	1×10^7
Chumbo	Pb	5×10^6
Nicrômio		1×10^6
Niquel	Ni	$1,5 \times 10^7$
Prata	Ag	$6,2 \times 10^7$
Solda		7×10^6
Aço inoxidável		$1,1 \times 10^6$
Estanho	Sn	$8,8 \times 10^6$
Tungstênio	W	$1,8 \times 10^7$

^a A condutividade é aproximada, pois ela depende das impurezas, da umidade e da temperatura.

Materiais magnéticos

Substância	μ_r
<i>Diamagnético</i>	
Bismuto	0,99983
Ouro	0,99986
Mercúrio	0,99997
Prata	0,99998
Chumbo	0,999983
Cobre	0,999991
Água	0,999991
<i>Não-magnético</i>	
Vácuo	1,000000
<i>Paramagnético</i>	
Ar	1,0000004
Alumínio	1,00002
Paládio	1,0008
Tungstênio	1,00008
Titânio	1,0002
Platina	1,0003
<i>Ferromagnético</i>	
Cobalto	250
Níquel	600
Ferro silício	3500
Ferro puro 99,8%	5000
Mumetal	
(75% Ni, 5% Cu, 2% Cr)	100,000
Ferro puro 99,6%	280,000
"Supermalloy"	
(79% Ni, 5% Mo)	1,000,000