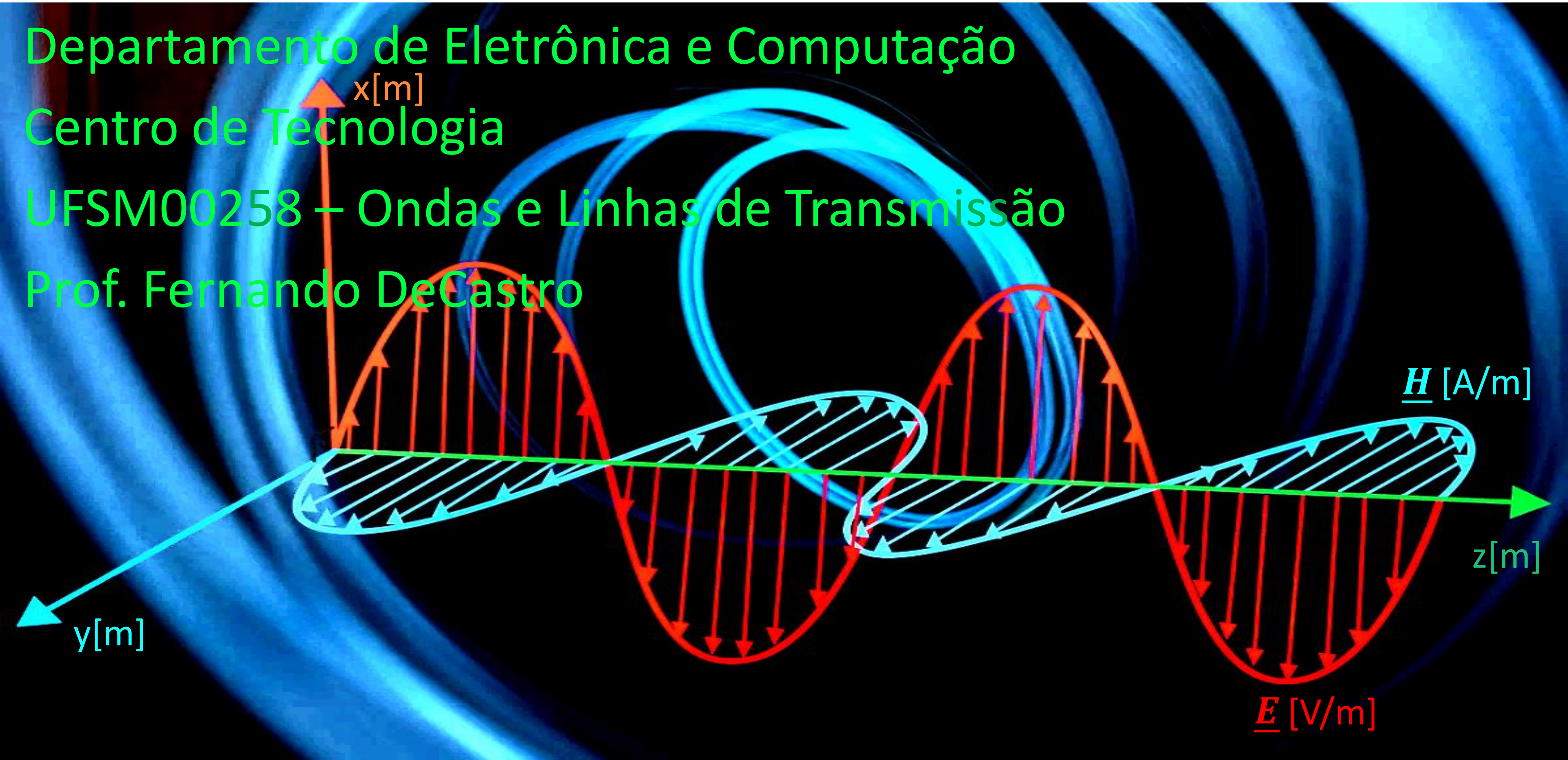
Reflexão e transmissão de ondas EM planas em fronteiras, reflexão e transmissão sob incidência oblíqua à fronteira, ângulo de Brewster, reflexão total. Ondas estacionárias.

Departamento de Eletrônica e Computação
Centro de Tecnologia

UFSM00258 – Ondas e Linhas de Transmissão

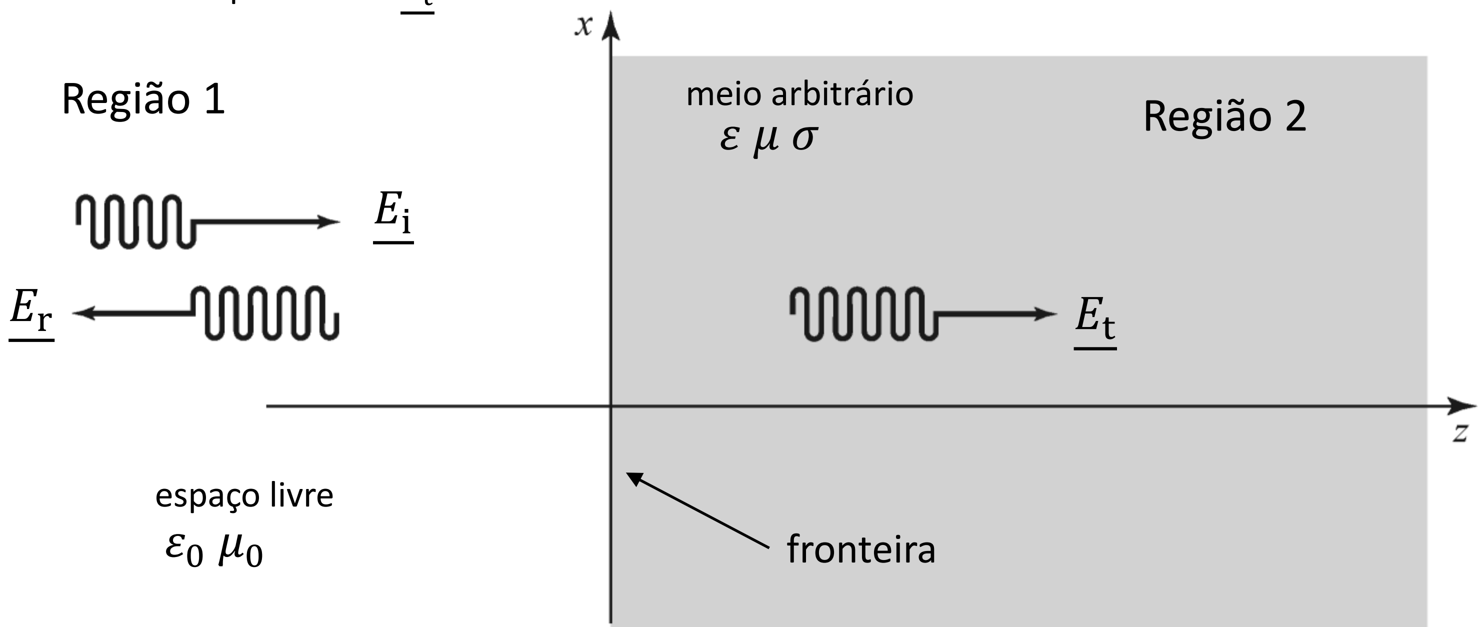
Prof. Fernando DeCastro



Reflexão e transmissão de ondas EM planas em fronteiras

Várias situações de análise e projeto de sistemas de telecomunicações envolvem o comportamento de campos EM na fronteira entre vários tipos de meios de propagação da onda EM, incluindo meios sem perdas, meios com perdas, meios condutores e meios condutores perfeitos (PEC – *perfect electric conductor*, em que a condutividade σ é muito grande, como o ouro ou o cobre).

Neste contexto, é instrutivo e útil analisar a reflexão de uma onda EM plana normalmente incidente do espaço livre em um *half space* (meio-espaço) de um material arbitrário. A geometria é mostrada na figura abaixo, onde o *half space* definido para $z > 0$ é caracterizado pelos parâmetros permissividade ε [F/m], permeabilidade μ [H/m] e condutividade σ [mho/m]. A polarização da onda EM é tal que o campo elétrico $\underline{E}$ [V/m] é orientado de acordo com o eixo x do sistema cartesiano de referência do espaço $\mathbb{R}^3$. Note na figura que uma onda EM com campo elétrico $\underline{E_{\mathrm{i}}}$ se propaga no espaço livre no sentido do eixo $+z$ e incide na fronteira do espaço livre com o material de parâmetros ε, μ e σ. Uma parcela da onda incidente $\underline{E_{\mathrm{i}}}$ se reflete na fronteira e retorna na forma de uma onda EM refletida $\underline{E_{\mathrm{r}}}$ que se propaga no sentido do eixo $-z$. Uma outra parcela de $\underline{E_{\mathrm{i}}}$ atravessa a fronteira e se propaga no meio com parâmetros ε, μ e σ no sentido do eixo $+z$ na forma de uma onda EM transmitida com campo elétrico $\underline{E_{\mathrm{t}}}$.



Reflexão e transmissão de ondas EM planas em fronteiras

No espaço livre, i.e., para $z<0$, se propagam as ondas do campo elétrico $\underline{E}_{\mathrm{i}}$ e do campo magnético $\underline{H}_{\mathrm{i}}$, ambas incidentes na fronteira. A partir das equações (23) e (33) do Cap II.3 $\underline{E}_{\mathrm{i}}$ e $\underline{H}_{\mathrm{i}}$ são dados por:

$$\underline{E}_{\mathrm{i}} = E_0 e^{-jk_0 z}\underline{\hat{\imath}} \text{ [V/m]} \quad (1) \qquad \underline{H}_{\mathrm{i}} = \frac{E_0}{\eta_0} e^{-jk_0 z}\underline{\hat{\jmath}} \text{ [A/m]} \quad (2)$$

onde E_0 [V/m] é a amplitude do campo elétrico incidente, $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$ [rad/m] é a constante de propagação no espaço livre, $\lambda = \frac{c}{f}$ [m] é o comprimento de onda no espaço livre da onda EM de frequência f [Hz] , $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = 2.99792458\times 10^8$ [m/s] é a velocidade de propagação da luz no espaço livre, $\varepsilon_0 = 8.8541878128\times 10^{-12}$ [F/m] , $\mu_0 = 4\pi\times 10^{-7}$[H/m] e $\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi \approx 377$ [Ω] é a impedância característica do meio de propagação (no caso, o espaço livre) da onda EM.

No mesmo espaço livre para $z<0$ se propaga a onda EM refletida na fronteira, cujos campo elétrico $\underline{E}_{\mathrm{r}}$ e o campo magnético $\underline{H}_{\mathrm{r}}$ são dados por (ver equações (23) e (33) do Cap II.3):

$$\underline{E}_{\mathrm{r}} = E_0 \Gamma e^{jk_0 z}\underline{\hat{\imath}} \text{ [V/m]} \quad (3) \qquad \underline{H}_{\mathrm{r}} = -\frac{E_0\Gamma}{\eta_0} e^{jk_0 z}\underline{\hat{\jmath}} \text{ [A/m]} \quad (4)$$

onde Γ é o denominado **coeficiente de reflexão**. Γ indica a parcela da onda incidente $\underline{E}_{\mathrm{i}}$ que se refletiu na fronteira e retorna na forma da onda EM refletida $\underline{E}_{\mathrm{r}}$. Note em (3) e (4) que o argumento das exponenciais é positivo, indicando que a onda EM refletida $\underline{E}_{\mathrm{r}}$ se propaga na direção $-z$.

Da equação (13) do Cap III.1, para o *half-space* $z<0$ (Região 1) o valor negativo do vetor de Poynting $\underline{\mathcal{S}}_{\mathrm{r}} = \frac{1}{2}\underline{E}_{\mathrm{r}} \times \underline{H}_{\mathrm{r}}^* = \frac{1}{2}E_0\,\Gamma e^{jk_0 z}\underline{\hat{\imath}} \times \left(-\frac{E_0\Gamma}{\eta_0} e^{jk_0 z}\underline{\hat{\jmath}}\right)^* = \frac{1}{2}E_0\Gamma e^{jk_0 z}\underline{\hat{\imath}} \times \left(-\frac{E_0{}^*\Gamma^*}{\eta_0} e^{-jk_0 z}\underline{\hat{\jmath}}\right) = -\frac{|E_0|^2|\Gamma|^2}{2\eta_0}\underline{\hat{k}}$ [VA/m²] indica que a potência da onda EM refletida na fronteira está se propagando na direção $-z$, o que corrobora com o parágrafo anterior.

Note também que o sinal "$-$" em (4) indica que a onda do campo magnético refletido $\underline{H}_{\mathrm{r}}$ apresenta uma inversão de fase de 180° em relação à onda do campo magnético incidente $\underline{H}_{\mathrm{i}}$ dado por (2). Este sinal "$-$" em (4) decorre da solução da Equação de Helmholtz para o campo magnético, conforme vimos na dedução da equação (33) nos slides 16 e 17 do Cap II.3.

Reflexão e transmissão de ondas EM planas em fronteiras

No meio arbitrário com parâmetros ε, μ e σ, i.e., para $z > 0$, se propagam as ondas do campo elétrico $\underline{E_t}$ e do campo magnético $\underline{H_t}$, ambas transmitidos através da fronteira. A partir das equações (40) e (44) do Cap II.4 $\underline{E_i}$ e $\underline{H_t}$ são dados por:

$$\underline{E_t} = E_0 \mathrm{T} e^{-\gamma z} \underline{\hat{\imath}} \ \text{[V/m]} \tag{5}$$

$$\underline{H_t} = \frac{E_0 \mathrm{T}}{\eta} e^{-\gamma z} \underline{\hat{\jmath}} \ \text{[A/m]} \tag{6}$$

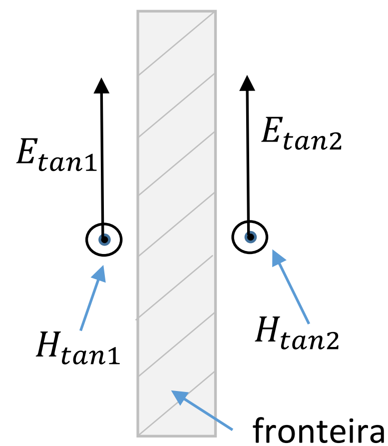
onde γ é a constante de propagação complexa dada pela equação (37) do Cap II.4, abaixo reproduzida por comodidade de visualização:

$$\gamma = \alpha + j\beta = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{\left(1 - \frac{j\sigma}{\omega\varepsilon}\right)} \quad \text{[1/m]} \tag{7}$$

e onde T é o denominado **coeficiente de transmissão**. T indica a parcela da onda incidente $\underline{E_i}$ que atravessou a fronteira e se propaga adiante no *half-space* $z > 0$ na forma da onda EM transmitida $\underline{E_t}$. A constante η é a impedância característica do *half-space* $z > 0$ dada pela equação (45) do Cap II.4, abaixo reproduzida:

$$\eta = \frac{j\omega\mu}{\gamma} \quad [\Omega] \tag{8}$$

O próximo passo em nossa análise da reflexão da onda EM na fronteira entre o espaço livre e um meio arbitrário será determinar os coeficientes Γ e T a partir dos parâmetros dos dois meios. Para tanto, vamos considerar que a fronteira é uniforme e tem uma espessura infinitesimal, de modo os campos elétrico e magnético tangenciais à fronteira precisam ser iguais em ambos os lados 1 e 2 da fronteira, conforme mostra a figura ao lado (i.e. os campos mantém continuidade ao atravessar a fronteira) . Em outras palavras, é necessário que:



$$E_{tan1} = E_{tan2} \ \text{[V/m]} \tag{9}$$

$$H_{tan1} = H_{tan2} \ \text{[A/m]} \tag{10}$$

Reflexão e transmissão de ondas EM planas em fronteiras

O plano da fronteira encontra-se em $z=0$ (ver figura no slide 2). Exatamente na fronteira em $z=0$ há uma onda EM incidente $\underline{E_\mathrm{i}}$ e uma onda EM refletida $\underline{E_\mathrm{r}}$ no lado 1 (espaço livre). Estas duas ondas se superpõe de modo que de (1) e (3) temos:

$$E_{tan1}=\underline{E_\mathrm{i}}+\underline{E_\mathrm{r}}=E_0+E_0\Gamma \quad [\text{V/m}] \tag{11}$$

Exatamente na fronteira em $z=0$, mas agora no lado 2 da mesma (meio arbitrário com parâmetros ε, μ e σ), há uma onda EM transmitida $\underline{E_\mathrm{t}}$, de modo que de (5) temos:

$$E_{tan2}=\underline{E_\mathrm{t}}=E_0\mathrm{T} \quad [\text{V/m}] \tag{12}$$

Substituindo (11) e (12) em (9) resulta:

$$1+\Gamma=\mathrm{T} \tag{13}$$

Agora, fazendo a mesma análise para o campo magnético. Exatamente na fronteira em $z=0$ há uma onda EM incidente $\underline{H_\mathrm{i}}$ e uma onda EM refletida $\underline{H_\mathrm{r}}$ no lado 1 (espaço livre). Estas duas ondas se superpõe de modo que de (2) e (4) temos:

$$H_{tan1}=\underline{H_\mathrm{i}}+\underline{H_\mathrm{r}}=\frac{E_0}{\eta_0}-\frac{E_0\Gamma}{\eta_0} \quad [\text{A/m}] \tag{14}$$

Exatamente na fronteira em $z=0$, mas agora no lado 2 da mesma (meio arbitrário com parâmetros ε, μ e σ), há uma onda EM transmitida $\underline{H_\mathrm{t}}$, de modo que de (6) temos:

$$H_{tan2}=\underline{H_\mathrm{t}}=\frac{E_0\mathrm{T}}{\eta} \quad [\text{A/m}] \tag{15}$$

Substituindo (14) e (15) em (10) resulta:

$$\frac{1-\Gamma}{\eta_0}=\frac{\mathrm{T}}{\eta} \tag{16}$$

Reflexão e transmissão de ondas EM planas em fronteiras

Resolvendo o sistema de equações definido por (13) e (16) para as incógnitas Γ e T resulta em:

$$\Gamma = \frac{\eta - \eta_0}{\eta + \eta_0} \tag{17}$$

$$\mathrm{T} = 1 + \Gamma = \frac{2\eta}{\eta + \eta_0} \tag{18}$$

Note que (17) e (18) constituem uma solução geral para a reflexão e transmissão de uma onda EM normalmente incidente na fronteira entre o espaço livre e um material arbitrário, onde η é a impedância intrínseca do material e η_0 é a impedância do espaço livre.

A partir deste resultado, e considerando a figura no slide 2, nos próximos slides vamos analisar três casos de particular interesse em telecomunicações: (1) A Região 2 é um meio sem perdas, (2) a Região 2 é um meio bom condutor e (3) a Região 2 é um meio condutor perfeito. A análise será baseada na transferência de potência através da fronteira e na reflexão de potência na fronteira, e , para tanto, usaremos o conceito de Vetor de Poynting, visto no Cap III.1.

Reflexão e transmissão da onda EM plana em fronteira entre o espaço livre e um meio sem perdas

Para o caso em que o *half-space* $z > 0$ é um material dielétrico sem perdas, fica implícito que a condutividade σ é zero e a permeabilidade μ e a permissividade ε são valores reais (i.e., não-complexos). A constante de propagação γ neste caso é puramente imaginária e dada por

$$\gamma = j\beta = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon} = jk_0\sqrt{\mu_r\varepsilon_r} \quad \text{[rad/m]} \tag{19}$$

onde $k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ [rad/m] é a constante de propagação para uma onda EM plana no espaço livre. O comprimento de onda da onda EM que se propaga no meio dielétrico sem perdas é

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}} \quad \text{[m]} \tag{20}$$

onde $\lambda_0 = c/f$ [m] é o comprimento de onda no espaço livre da onda EM de frequência f [Hz]. A velocidade de propagação (=velocidade de fase) da onda EM que se propaga no meio dielétrico sem perdas é

$$v_\mathrm{p} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}} \quad \text{[m/s]} \tag{21}$$

Importante notar em (20) e (21) que o comprimento de onda λ e a velocidade de fase v_p no dielétrico são menores por um fator $\frac{1}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}$ em relação ao comprimento de onda λ_0 e a velocidade de fase c da onda EM que se propaga no espaço livre. A impedância característica do *half-space* $z > 0$ é obtida da equação (8) do slide 4:

$$\eta = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \eta_0\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} \quad [\Omega] \tag{22}$$

onde $\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi \approx 377$ $[\Omega]$ é a impedância característica do espaço livre.

Reflexão e transmissão da onda EM plana em fronteira entre o espaço livre e um meio sem perdas

Note que para este caso em que o *half-space* $z > 0$ é um material dielétrico sem perdas, a impedância característica η dada por (22) é um número real, e daí, os coeficientes de reflexão Γ e transmissão T dados por (17) e (18) resultam também em números reais. Em consequência, o campo $\underline{E}$ e o campo $\underline{H}$ encontram-se em fase tanto na Região 1 como na Região 2 (ver figura no slide 2).

O fluxo direcional de potência das ondas EM que se propagam na Região 1 e na Região 2 pode ser determinado através do Vetor de Poynting $\underline{\mathcal{S}}$, especificamente através da equação (13) no slide 5 do Cap III.1.

Para o *half-space* $z < 0$ (Região 1) o vetor de Poynting $\underline{\mathcal{S}}^-$ é determinado da equação (13) do Cap III.1 a partir do campo $\underline{E}$ total e do campo $\underline{H}$ total que resultam da superposição da onda incidente e da onda refletida, tanto para $\underline{E}$ como para $\underline{H}$, conforme equações (1), (2), (3) e (4) :

$$\underline{\mathcal{S}}^- = \tfrac{1}{2}\underline{E}\times\underline{H}^* = \tfrac{1}{2}\left(\underline{E_{\mathrm{i}}}+\underline{E_{\mathrm{r}}}\right)\times\left(\underline{H_{\mathrm{i}}}+\underline{H_{\mathrm{r}}}\right)^* = \tfrac{1}{2}\left(E_0 e^{-jk_0z}\underline{\hat{\imath}} + E_0\Gamma e^{jk_0z}\underline{\hat{\imath}}\right)\times\left(\frac{E_0}{\eta_0}e^{-jk_0z}\underline{\hat{\jmath}} - \frac{E_0\Gamma}{\eta_0}e^{jk_0z}\underline{\hat{\jmath}}\right)^* =$$

$$= \tfrac{1}{2}\,\underline{\hat{\imath}}\left(E_0e^{-jk_0z}+E_0\Gamma e^{jk_0z}\right)\times\underline{\hat{\jmath}}\left(\frac{{E_0}^*}{\eta_0}e^{jk_0z} - \frac{{E_0}^*\Gamma^*}{\eta_0}e^{-jk_0z}\right) = \underline{\hat{k}}\frac{|E_0|^2}{2\eta_0}\left(e^{-jk_0z}+\Gamma e^{jk_0z}\right)\left(e^{jk_0z}-\Gamma^*e^{-jk_0z}\right) =$$

Γ é real, então $\Gamma^* = \Gamma$

$$= \underline{\hat{k}}\frac{|E_0|^2}{2\eta_0}\left(1-\Gamma^*e^{-j2k_0z}+\Gamma e^{j2k_0z}-|\Gamma|^2\right) = \underline{\hat{k}}\frac{|E_0|^2}{2\eta_0}\left(1-|\Gamma|^2+\Gamma e^{j2k_0z}-\Gamma e^{-j2k_0z}\right) =$$

$$= \underline{\hat{k}}\frac{|E_0|^2}{2\eta_0}\left(1-|\Gamma|^2+2j\Gamma\frac{\left(e^{j2k_0z}-e^{-j2k_0z}\right)}{2j}\right) = \underline{\hat{k}}\frac{|E_0|^2}{2\eta_0}\left(1-|\Gamma|^2+2j\Gamma\sin(2k_0z)\right) \quad [\mathrm{VA/m^2}] \qquad (23)$$

Para o *half-space* $z > 0$ (Região 2) o vetor de Poynting $\underline{\mathcal{S}}^+$ é determinado da equação (13) do Cap III.1 e das equações (5) e (6):

equação (18)

$$\underline{\mathcal{S}}^+ = \tfrac{1}{2}\underline{E}\times\underline{H}^* = \tfrac{1}{2}\underline{E_{\mathrm{t}}}\times\underline{H_{\mathrm{t}}}^* = \tfrac{1}{2}E_0\mathrm{T}e^{-\gamma z}\underline{\hat{\imath}}\times\left(\frac{E_0\mathrm{T}}{\eta}e^{-\gamma z}\underline{\hat{\jmath}}\right)^* = \underline{\hat{k}}\,E_0\mathrm{T}e^{-j\beta z}\frac{{E_0}^*\mathrm{T}^*}{2\eta}e^{+j\beta z} = \underline{\hat{k}}\frac{|E_0|^2|\mathrm{T}|^2}{2\eta} = \underline{\hat{k}}\frac{|E_0|^2\left|\frac{2\eta}{\eta+\eta_0}\right|^2}{2\eta} =$$

equação (17)

$$= \underline{\hat{k}}\frac{|E_0|^2\left|\frac{2\eta}{\eta+\eta_0}\right|^2}{2\eta} = \underline{\hat{k}}\frac{|E_0|^2\frac{4\eta^2}{(\eta+\eta_0)^2}}{2\eta} = \underline{\hat{k}}\,|E_0|^2\frac{2\eta}{(\eta+\eta_0)^2} = \underline{\hat{k}}\,\frac{|E_0|^2}{2}\frac{1}{\eta_0}\left(1-|\Gamma|^2\right) \quad [\mathrm{VA/m^2}] \qquad (24)$$

Note de (23) e (24) que $\underline{\mathcal{S}}^- = \underline{\mathcal{S}}^+$ na fronteira em $z = 0$. Isto indica que quando a onda EM atravessa a fronteira o fluxo direcional de potência complexa (fluxo de potência útil e fluxo de potência reativa) é conservado na vizinhança infinitesimal da fronteira entre o espaço livre e o material dielétrico sem perdas.

Reflexão e transmissão da onda EM plana em fronteira entre o espaço livre e um meio sem perdas

Vamos agora analisar o fluxo direcional de potência útil na Região 1 e na Região 2.

Para obter o fluxo direcional de potência útil P^- na Região 1 (i.e. a potência útil em [W] que atravessa um plano de área 1 m^2 perpendicular à direção de propagação no eixo z) vamos usar a seguinte expressão (o produto escalar entre o vetor de Poynting $\underline{\mathcal{S}}^-$ e o vetor unitário $\underline{\hat{k}}$ se faz necessário para que o resultado seja uma potência escalar):

$$P^- = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\underline{\mathcal{S}}^- \cdot \underline{\hat{k}}\right) \quad [\mathrm{W/m^2}] \tag{25}$$

Substituindo (23) em (25):

$$P^- = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\underline{\hat{k}}\frac{|E_0|^2}{\eta_0}\left(1-|\Gamma|^2+2j\Gamma\sin(2k_0 z)\right)\cdot\underline{\hat{k}}\right) = \frac{1}{2}\frac{|E_0|^2}{\eta_0}\left(1-|\Gamma|^2\right) \quad [\mathrm{W/m^2}] \tag{26}$$

De maneira similar, de (24), para obter o fluxo direcional de potência útil P^+ na Região 2 (i.e. a potência útil em [W] que atravessa um plano de área 1 m^2 perpendicular à direção de propagação no eixo z) fazemos:

$$P^+ = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\underline{\mathcal{S}}^+ \cdot \underline{\hat{k}}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\underline{\hat{k}}\,|E_0|^2\frac{1}{\eta_0}\left(1-|\Gamma|^2\right)\cdot\underline{\hat{k}}\right) = \frac{1}{2}|E_0|^2\frac{1}{\eta_0}\left(1-|\Gamma|^2\right) \quad [\mathrm{W/m^2}] \tag{27}$$

Portanto, como $P^- = P^+$ para o caso em que o *half-space* $z > 0$ (Região 2) é um material dielétrico sem perdas e a Região 1 é o espaço livre, então, para este caso, o fluxo direcional de potência útil é conservado quando a onda EM se propaga da Região 1 para a Região 2. **Em termos práticos isto significa que uma onda EM se propagando no espaço livre, quando esta incide e penetra em uma parede de material dielétrico de baixas perdas (teflon, poliestireno, polietileno, etc ...), a atenuação resultante por perdas dielétricas é desprezível no interior da parede.**

Reflexão e transmissão da onda EM plana em fronteira entre o espaço livre e um meio bom condutor

Para o caso em que o *half-space* $z > 0$ é um material bom condutor (mas não um condutor perfeito), a constante de propagação γ é dada pela equação (46) no slide 31 do Cap II.5, abaixo reproduzida:

$$\gamma = \alpha + j\beta = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = (1+j)\frac{1}{\delta} \quad \text{[1/m]} \tag{28}$$

onde $\delta = 1/\alpha$ é o *skin depth* (ver equação (51) no lide 33 do Cap II.5). A impedância característica do meio bom condutor é dada pela equação (47) no slide 31 do Cap II.5, abaixo reproduzida:

$$\eta = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} = 1e^{j45^\circ}\sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} = (1+j)\frac{1}{\sigma\delta} \quad [\Omega] \tag{29}$$

Como a impedância característica η do meio bom condutor dada por (29) tem um ângulo de fase de 45° então o campo $\underline{H}$ está atrasado de 45° em relação ao campo $\underline{E}$. E daí o coeficiente de reflexão Γ e o coeficiente de transmissão T dados por (17) e (18) serão valores complexos.

Passamos agora a determinar o fluxo direcional de potência das ondas EM que se propagam na Região 1 e na Região 2 através do Vetor de Poynting $\underline{\mathcal{S}}$, da mesma forma que fizemos para o caso em que a Região 2 é um dielétrico sem perdas.

Dado que a Região 1 ($z < 0$) é o espaço livre sem perdas, e dado que quando a onda EM atravessa a fronteira o fluxo direcional de potência complexa (fluxo de potência útil e fluxo de potência reativa) é conservado na vizinhança infinitesimal da fronteira, então basta determinar $\underline{\mathcal{S}}^-$ para $z = 0$. Efetuando um desenvolvimento algébrico similar ao do slide 8 e **mantendo em mente que agora $\boldsymbol{\Gamma}$ e $\boldsymbol{T}$ são valores complexos**, obtemos:

$$\underline{\mathcal{S}}^-(z=0) = \tfrac{1}{2}\underline{E} \times \underline{H}^*(z=0) = \underline{\hat{k}}\frac{|E_0|^2}{2\eta_0}(1 - |\Gamma|^2 + \Gamma - \Gamma^*) = \underline{\hat{k}}\frac{|E_0|^2}{2\eta_0}(1 - |\Gamma|^2 + 2j\,\mathrm{Im}(\Gamma)) \quad \text{[VA/m}^2\text{]} \tag{30}$$

Para o *half-space* $z > 0$ (Região 2) o vetor de Poynting $\underline{\mathcal{S}}^+$ é determinado através de

$$\underline{\mathcal{S}}^+ = \tfrac{1}{2}\underline{E} \times \underline{H}^* = \tfrac{1}{2}\underline{E_\mathrm{t}} \times \underline{H_\mathrm{t}}^* = \tfrac{1}{2}E_0\mathrm{T}e^{-\gamma z}\underline{\hat{\imath}} \times \left(\frac{E_0\mathrm{T}}{\eta}e^{-\gamma z}\underline{\hat{\jmath}}\right)^* = \underline{\hat{k}}\,E_0\mathrm{T}e^{-(\alpha+j\beta)z}\frac{E_0{}^*\mathrm{T}^*}{2\eta^*}e^{-(\alpha-j\beta)z} = \underline{\hat{k}}\frac{|E_0|^2|\mathrm{T}|^2}{2\eta^*}e^{-2\alpha z} \quad \text{[VA/m}^2\text{]} \tag{31}$$

Reflexão e transmissão da onda EM plana em fronteira entre o espaço livre e um meio bom condutor

Substituindo T dado por (18) em (31) e a seguir substituindo Γ dado por (17) e fazendo simplificações algébricas obtemos:

$$\underline{\mathcal{S}}^{+}=\underline{\hat{k}}\frac{|E_0|^2\left|\frac{2\eta}{\eta+\eta_0}\right|^2}{2\eta^*}e^{-2\alpha z}=\underline{\hat{k}}\frac{|E_0|^2\frac{4|\eta|^2}{|\eta+\eta_0|^2}}{2\eta^*}e^{-2\alpha z}=\underline{\hat{k}}\frac{|E_0|^2\frac{4\eta\eta^*}{|\eta+\eta_0|^2}}{2\eta^*}e^{-2\alpha z}=\underline{\hat{k}}\frac{|E_0|^2}{2}\frac{4\eta}{|\eta+\eta_0|^2}e^{-2\alpha z}=$$

$$=\underline{\hat{k}}\frac{|E_0|^2}{2}\frac{1}{\eta_0}(1-|\Gamma|^2+\Gamma-\Gamma^*)e^{-2\alpha z}=\underline{\hat{k}}\frac{|E_0|^2}{2}\frac{1}{\eta_0}(1-|\Gamma|^2+2j\,\mathrm{Im}(\Gamma))e^{-2\alpha z}\quad [\mathrm{VA/m^2}] \qquad (32)$$

Note de (30) e (32) que $\underline{\mathcal{S}}^{-}=\underline{\mathcal{S}}^{+}$ na fronteira em $z=0$. Isto indica que quando a onda EM atravessa a fronteira o fluxo direcional de potência complexa (fluxo de potência útil e fluxo de potência reativa) é conservado na vizinhança infinitesimal da fronteira entre o espaço livre e o material bom condutor.

Vamos agora analisar o fluxo direcional de potência útil na Região 1 e na Região 2.

Para obter o fluxo direcional de potência útil P^{-} na Região 1 (i.e. a potência útil em [W] que atravessa um plano de área 1 m² perpendicular à direção de propagação no eixo z) vamos usar novamente a parte real do produto escalar entre o vetor de Poynting $\underline{\mathcal{S}}^{-}$ dado por (30) e o vetor unitário $\underline{\hat{k}}$, de modo que o resultado seja uma potência escalar:

$$P^{-}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\underline{\mathcal{S}}^{-}\cdot\underline{\hat{k}}\right)=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\underline{\hat{k}}\frac{|E_0|^2}{\eta_0}(1-|\Gamma|^2+\Gamma-\Gamma^*)\cdot\underline{\hat{k}}\right)=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\underline{\hat{k}}\frac{|E_0|^2}{\eta_0}(1-|\Gamma|^2+2j\,\mathrm{Im}(\Gamma))\cdot\underline{\hat{k}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{|E_0|^2}{\eta_0}(1-|\Gamma|^2)\quad [\mathrm{W/m^2}] \qquad (33)$$

O fluxo direcional de potência útil P^{+} na Região 2 vamos usar a parte real do produto escalar entre o vetor de Poynting $\underline{\mathcal{S}}^{+}$ dado por (32) e o vetor unitário $\underline{\hat{k}}$, de modo que o resultado seja uma potência escalar:

$$P^{+}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\underline{\mathcal{S}}^{+}\cdot\underline{\hat{k}}\right)=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\underline{\hat{k}}\frac{|E_0|^2}{\eta_0}(1-|\Gamma|^2+\Gamma-\Gamma^*)e^{-2\alpha z}\cdot\underline{\hat{k}}\right)=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\underline{\hat{k}}\frac{|E_0|^2}{\eta_0}(1-|\Gamma|^2+2j\,\mathrm{Im}(\Gamma))e^{-2\alpha z}\cdot\underline{\hat{k}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{|E_0|^2}{\eta_0}(1-|\Gamma|^2)\,e^{-2\alpha z}\quad [\mathrm{W/m^2}] \qquad (34)$$

Reflexão e transmissão da onda EM plana em fronteira entre o espaço livre e um meio bom condutor

Note de (33) e (34) que $P^{-} = P^{+}$ na fronteira em $z = 0$. Isto indica que quando a onda EM atravessa a fronteira o fluxo direcional de potência de potência útil é conservado na vizinhança infinitesimal da fronteira entre o espaço livre e o material bom condutor.

Note também em (33) que podemos definir uma densidade de **potência incidente** na fronteira dada por $P_i = \frac{1}{2}\frac{|E_0|^2}{\eta_0}$ [W/m²] e uma densidade de **potência refletida** na fronteira dada por $P_r = -\frac{1}{2}\frac{|E_0|^2|\Gamma|^2}{\eta_0}$ [W/m²] , de modo que (33) pode ser colocada na forma $P^{-} = P_i + P_r$ [W/m²] . Isto indica que o fluxo direcional de potência útil na Região 1 ($z < 0$) pode ser decomposto em um fluxo de potência útil devido à onda incidente e em um fluxo de potência útil devido à onda refletida. Esta mesma análise é válida para equação (26) para o caso em que a Região 2 é um material dielétrico sem perdas.

Observe ainda que a densidade de potência $\underline{\mathcal{S}}^{+}$ no condutor (Região 2) dada por (32) decai exponencialmente de acordo com o fator de atenuação $e^{-2\alpha z}$ à medida que a onda transmitida através da fronteira se propaga ao longo do eixo $+z$. **Isso significa que a energia está sendo dissipada nas perdas Joule do meio bom condutor (mas imperfeito) à medida que a onda se propaga no meio na direção $+z$. A potência do sinal, e também a intensidade dos campos $\underline{\boldsymbol{E}}$ e $\underline{\boldsymbol{H}}$, decaem para um valor insignificante bastando que a onda EM se propague uma distância de algumas poucas *skin depth* $\boldsymbol{\delta}$ ao longo do caminho de propagação.** Para qualquer condutor razoavelmente bom esta distância é extremamente pequena em frequências de microondas e acima.

Reflexão e transmissão da onda EM plana em fronteira entre o espaço livre e um meio condutor perfeito

Quando a Região 2, i.e., o *half space* $z > 0$ (ver figura no slide 2), é um PEC (*perfect electric conductor*) considera-se que a condutividade σ tende ao infinito nesta região, i.e., $\sigma \to \infty$. Daí, de (28), $\alpha \to \infty$ e $\delta = \frac{1}{\alpha} \to 0$. De (29), $\eta \to 0$. E, consequentemente, de (17) $\Gamma = -1 = 1e^{j180°}$ e de (18) $\mathrm{T} = 0$.

Os campos $\underline{E}$ e $\underline{H}$ decaem infinitamente rápido com a distância quando a onda EM se propaga em um PEC e são identicamente nulos no interior do PEC.

O PEC pode ser imaginado como um “curto circuito” para o campo elétrico $\underline{E}$ incidente na fronteira entre espaço livre (Região 1) e PEC (Região 2).

Para o *half-space* $z < 0$ (Região 1) as ondas de $\underline{E}$ e $\underline{H}$ resultam da superposição das respectivas onda incidente e onda refletida dadas pelas equações (1), (2), (3) e (4), mantendo em mente que $\Gamma = -1$ quando a Região 2 é um PEC:

$$\underline{E} = \underline{E}_\mathrm{i} + \underline{E}_\mathrm{r} = \left(E_0 e^{-jk_0 z}\underline{\hat{\imath}} + E_0 \Gamma e^{jk_0 z}\underline{\hat{\imath}}\right) = E_0\left(e^{-jk_0 z} - e^{jk_0 z}\right)\underline{\hat{\imath}} = -2jE_0\left(\frac{e^{jk_0 z} - e^{-jk_0 z}}{2j}\right)\underline{\hat{\imath}} =$$
$$= -2jE_0 \sin(k_0 z)\underline{\hat{\imath}} \;\; [\mathrm{V/m}] \tag{35}$$

$$\underline{H} = \underline{H}_\mathrm{i} + \underline{H}_\mathrm{r} = \left(\frac{E_0}{\eta_0} e^{-jk_0 z}\underline{\hat{\jmath}} - \frac{E_0 \Gamma}{\eta_0} e^{jk_0 z}\underline{\hat{\jmath}}\right) = \frac{E_0}{\eta_0}\left(e^{-jk_0 z} + e^{jk_0 z}\right)\underline{\hat{\jmath}} = \frac{2E_0}{\eta_0}\left(\frac{e^{jk_0 z} + e^{-jk_0 z}}{2}\right)\underline{\hat{\jmath}}$$
$$= \frac{2E_0}{\eta_0}\cos(k_0 z)\,\underline{\hat{\jmath}} \;\; [\mathrm{A/m}] \tag{36}$$

Note que na fronteira em $z = 0$, onde ocorre o “curto circuito” do campo elétrico devido ao PEC, $\underline{E} = 0$ [V/m] conforme equação (35). Note também que na fronteira $\underline{H} = \frac{2E_0}{\eta_0}$ [A/m] conforme equação (36).

Para o *half-space* $z < 0$ (Região 1) o vetor de Poynting $\underline{\mathcal{S}}^-$ é determinado da equação (13) do Cap III.1 a partir do campo $\underline{E}$ total e do campo $\underline{H}$ total que resultam da superposição da onda incidente e da onda refletida, tanto para $\underline{E}$ como para $\underline{H}$, conforme equações (35) e (36) :

$$\underline{\mathcal{S}}^- = \tfrac{1}{2}\underline{E} \times \underline{H}^* = \tfrac{1}{2}\left(\underline{E}_\mathrm{i} + \underline{E}_\mathrm{r}\right) \times \left(\underline{H}_\mathrm{i} + \underline{H}_\mathrm{r}\right)^* = \tfrac{1}{2}\left(-2jE_0 \sin(k_0 z)\underline{\hat{\imath}}\right) \times \left(\frac{2E_0}{\eta_0}\cos(k_0 z)\,\underline{\hat{\jmath}}\right)^*$$

$$= -2j\,\frac{|E_0|^2}{\eta_0}\sin(k_0 z)\cos(k_0 z)\,\underline{\hat{k}} \qquad [\mathrm{VA/m^2}] \qquad (37)$$

Note que a parte real de $\underline{\mathcal{S}}^-$ dado por (37) é nula, indicando que nenhuma potência útil é transmitida para a Região 2 constituída pelo PEC.

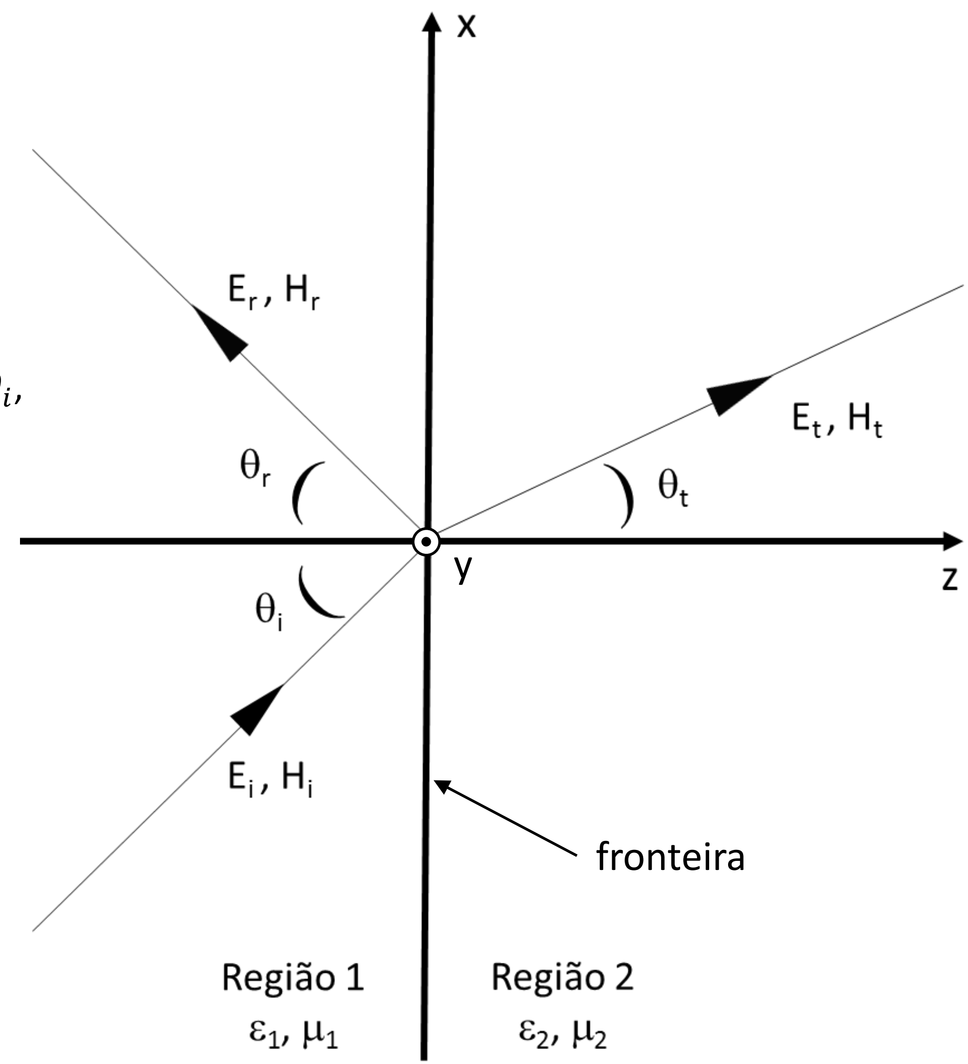
Reflexão e transmissão da onda EM plana sob incidência oblíqua à fronteira

Consideremos agora o caso em que uma onda EM plana uniforme, ao se propagar, incida obliquamente na fronteira entre a Região 1 e a Região 2, conforme mostra a figura abaixo. **Os meios 1 e 2 são meios dielétricos e sem perdas**.

Observe na figura ao lado, que o **ângulo de incidência** é θ_i, o **ângulo de reflexão** é θ_r, e o **ângulo de transmissão** é θ_t.

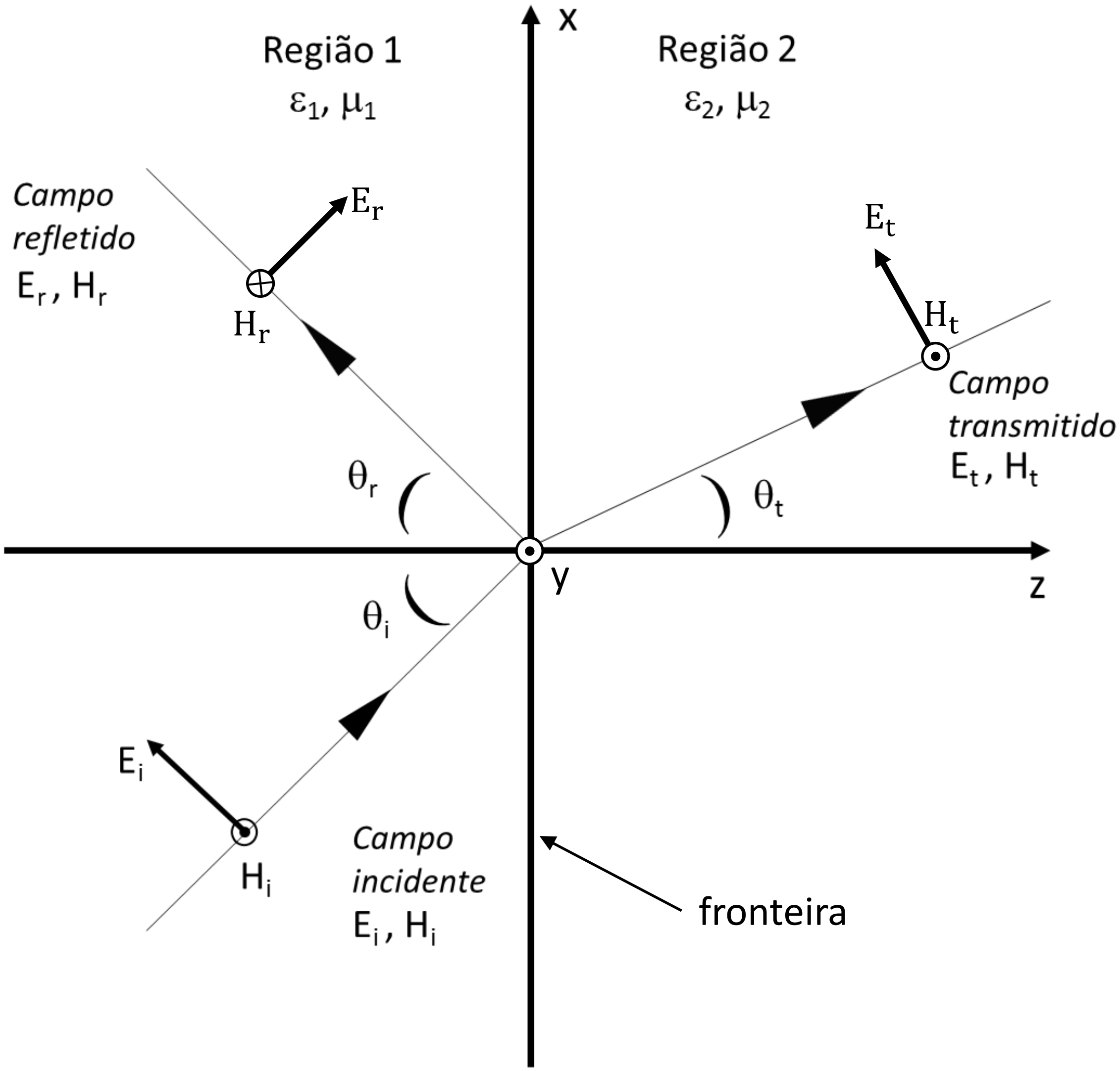
Há dois casos a considerar:

- **Polarização paralela**
- **Polarização perpendicular**



Incidência oblíqua à fronteira – polarização paralela

Para o caso de **polarização paralela**, o vetor campo elétrico $\underline{E}$ está contido no plano xz (que é o plano de incidência), enquanto que o vetor campo magnético $\underline{H}$ está ortogonal ao campo elétrico $\underline{E}$, com $\underline{H}$ incidente e transmitido saindo do plano xz e $\underline{H}$ refletido entrando no plano xz conforme mostra a figura abaixo.

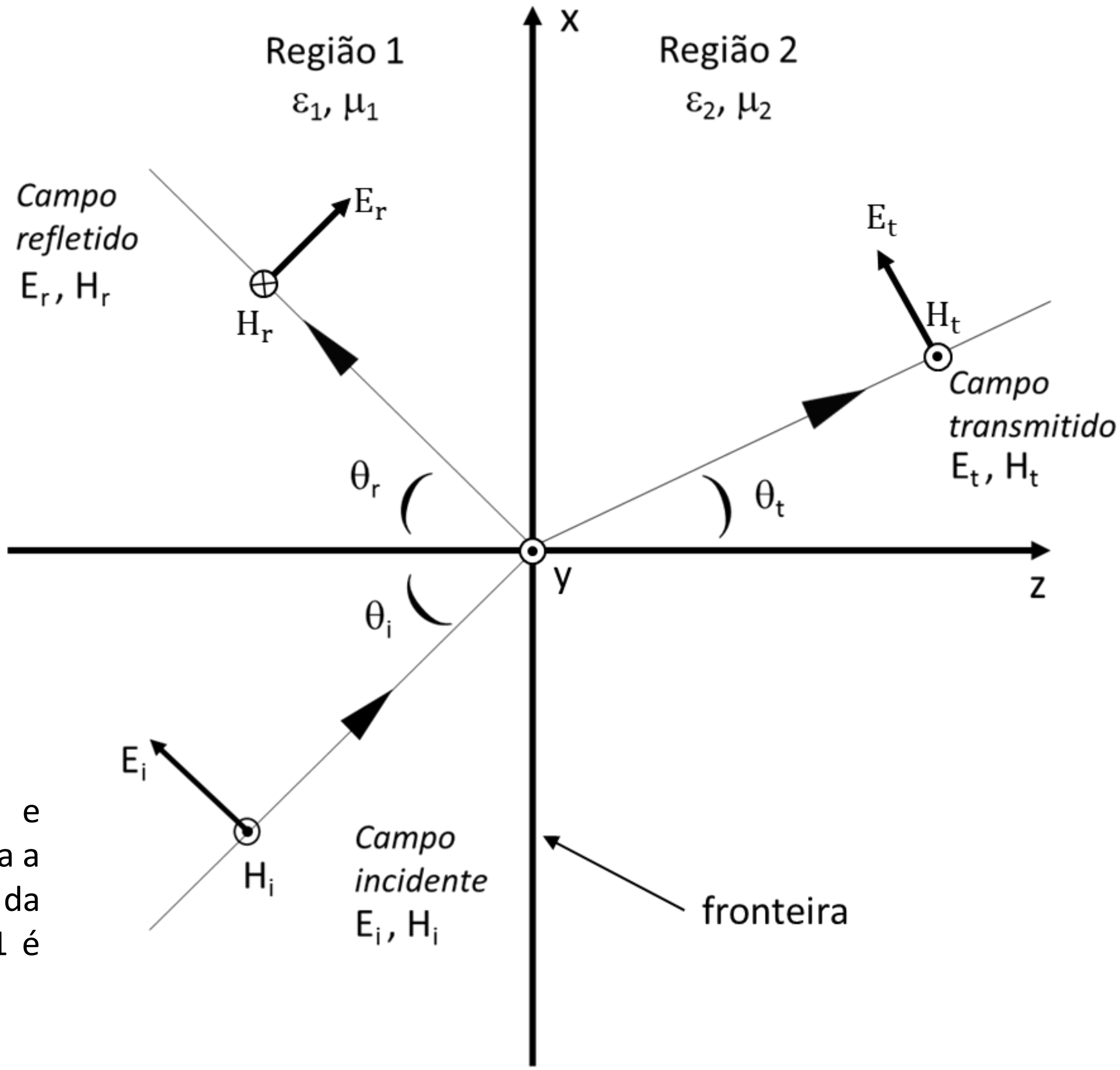


Incidência oblíqua à fronteira – polarização paralela

Definição dos campos incidentes:

$$\underline{E_{\mathrm{i}}} = E_0^i\left(\cos\theta_i\,\underline{\hat{\imath}} - \sin\theta_i\underline{\hat{k}}\right)e^{-j\beta_1(x\ \sin\theta_i+z\ \ \cos\theta_i)} \qquad (38)$$

$$\underline{H_{\mathrm{i}}} = \frac{E_0^i}{\eta_1}e^{-j\beta_1(x\ \sin\theta_i+z\ \ \cos\theta_i)}\underline{\hat{\jmath}} \qquad (39)$$



$\beta_1 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_1}$ e $\beta_2 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_2}$ são as constantes de propagação das regiões 1 e 2, $\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}}$ e $\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_2}}$ são as impedâncias características das regiões 1 e 2. θ_i é o ângulo de incidência, θ_r é o ângulo de reflexão, θ_t é o ângulo de transmissão.

Nos próximos slides analisaremos e interpretaremos a equação (38). Uma vez feita a análise da equação (38), a interpretação da equação (39) é imediata dado que o meio 1 é um dielétrico sem perdas.

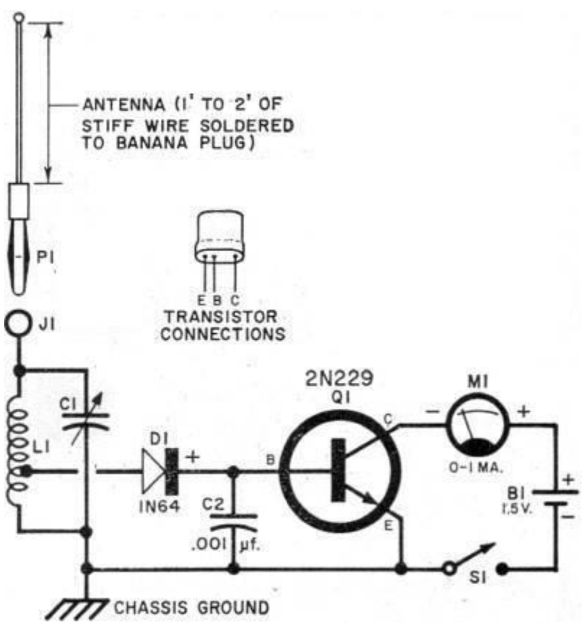
Incidência oblíqua à fronteira – polarização paralela

$E_0^i \cos\theta_i$ é a projeção de $\underline{E}_\text{i}$ sobre o eixo x

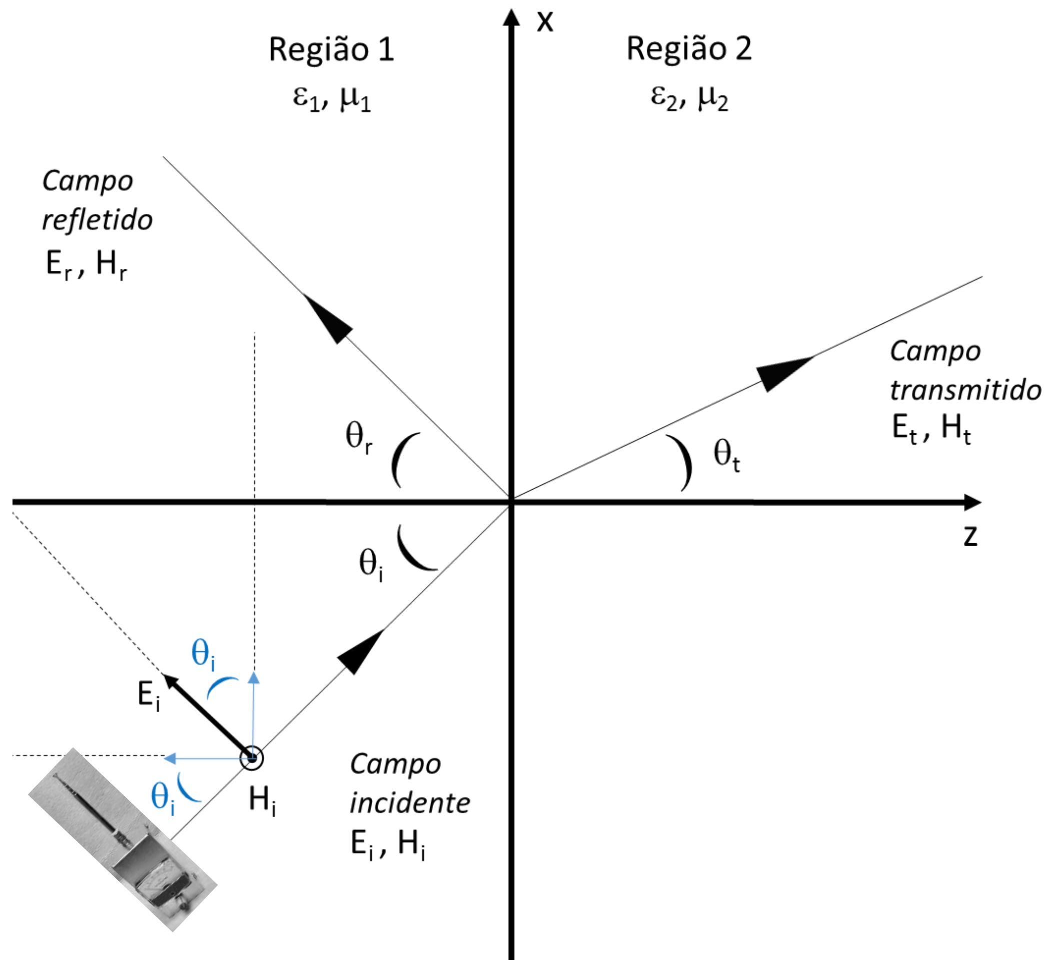
E_0^i é a magnitude de $\underline{E}_\text{i}$ medida com um *field strength meter* na direção (polarização) perpendicular à direção de propagação da onda. A orientação da antena do *field strength meter* p/ medir E_0^i é mostrada na figura abaixo (a orientação deve ser paralela ao vetor $\underline{E}_\text{i}$).

$$\underline{E}_\text{i} = E_0^i\left(\cos\theta_i\,\underline{\hat{\imath}} - \sin\theta_i\underline{\hat{k}}\right)e^{-j\beta_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)} \qquad (38)$$

$E_0^i \,\text{sen}\,\theta_i$ é a projeção de $\underline{E}_\text{i}$ sobre o eixo z



field strength meter



Incidência oblíqua à fronteira – polarização paralela

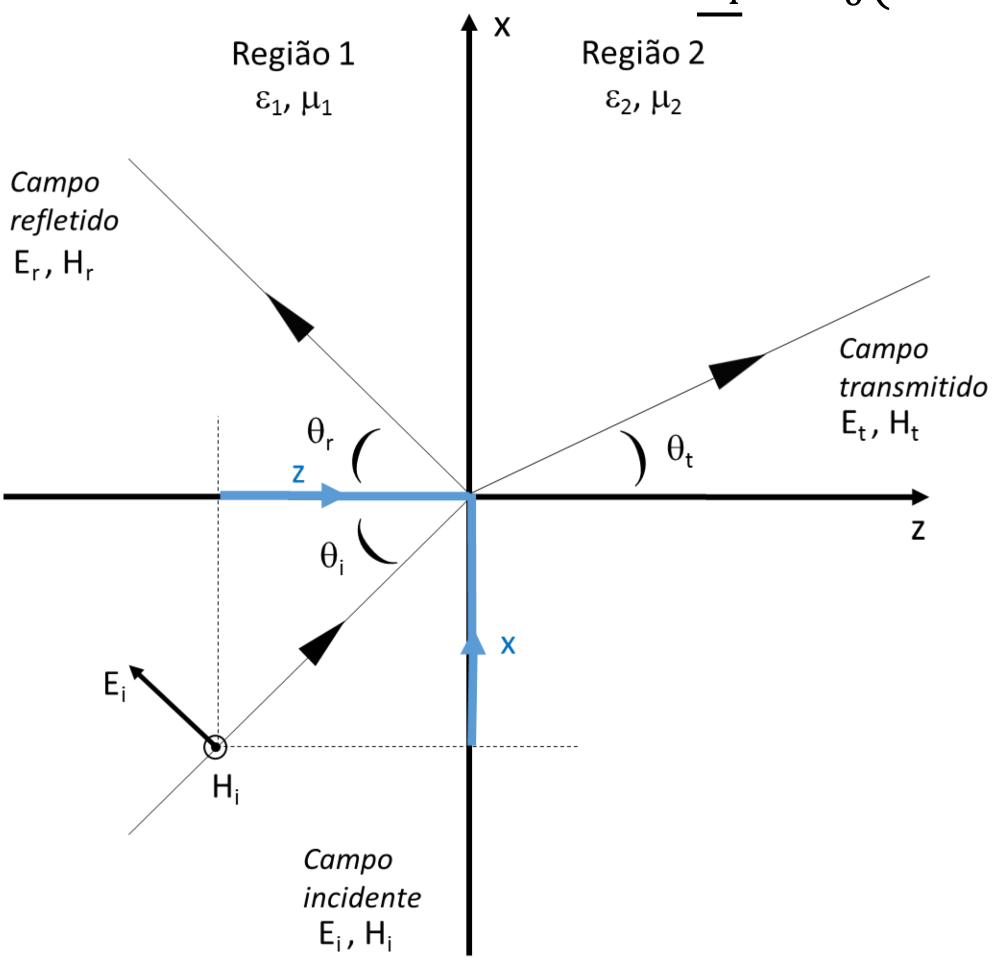
Este termo expressa a localização ao longo do caminho de propagação da onda incidente em que o campo E_{i} está sendo considerado. A localização onde E_{i} está sendo considerado é dada pela coordenada (x, z) na expressão de E_{i}.

$$\underline{E_{\mathrm{i}}} = E_0^i\left(\cos\theta_i\,\underline{\hat{\imath}} - \sin\theta_i\underline{\hat{k}}\right)e^{-j\beta_1\left(\boxed{x\sin\theta_i}+\boxed{z\cos\theta_i}\right)}$$

É a projeção da coordenada x sobre a direção de propagação

É a projeção da coordenada z sobre a direção de propagação

A localização do campo E_i na direção de propagação é dada pela soma das duas projeções, isto é, $(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)$



Incidência oblíqua à fronteira – polarização paralela

Através de análise semelhante com base nas projeções vetoriais feita nos slides anteriores para o campo elétrico incidente $\underline{E}_{\mathrm{i}}$, obtemos as seguintes expressões analíticas para os campos refletidos e transmitidos:

Definição dos campos refletidos:

$$\underline{E}_{\mathrm{r}} = E_0^r\, \Gamma\left(\cos\theta_r\, \underline{\hat{\imath}} + \sin\theta_r \underline{\hat{k}}\right) e^{-j\beta_1(x\,\sin\theta_r - z\;\cos\theta_r)} \qquad (40)$$

$$\underline{H}_{\mathrm{r}} = \frac{-E_0^r\Gamma}{\eta_1} e^{-j\beta_1(x\,\sin\theta_r - z\;\cos\theta_r)} \underline{\hat{\jmath}} \qquad (41)$$

Definição dos campos transmitidos:

$$\underline{E}_{\mathrm{t}} = E_0^t\, \mathrm{T}\left(\cos\theta_t\, \underline{\hat{\imath}} - \sin\theta_t \underline{\hat{k}}\right) e^{-j\beta_2(x\,\sin\theta_t + z\;\cos\theta_t)} \qquad (42)$$

$$\underline{H}_{\mathrm{t}} = \frac{E_0^t\mathrm{T}}{\eta_2} e^{-j\beta_2(x\,\sin\theta_t + z\;\cos\theta_t)} \underline{\hat{\jmath}} \qquad (43)$$

onde $\beta_1 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_1}$ e $\beta_2 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_2}$ são as constantes de propagação das regiões 1 e 2, $\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}}$ e $\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_2}}$ são as impedâncias características das regiões 1 e 2, θ_r é o ângulo de reflexão, θ_t é o ângulo de transmissão. Γ é o coeficiente de reflexão dado por (17) e T é o coeficiente de reflexão dado por (18) com $\eta_0 = \eta_1$ e $\eta = \eta_2$.

Incidência oblíqua à fronteira – polarização paralela

Para efeito de determinar os coeficientes de reflexão Γ e de transmissão T, note que a condição geral de continuidade dos campos tangenciais E_x e H_y na fronteira entre os dois meios deve ser obedecida , ou seja, as seguintes condições devem ser obedecidas em $z = 0$:

$\underline{E_\mathrm{i}} + \underline{E_r} = \underline{E_t}$ (44) → válida p/ a componente E_x do campo elétrico (que é a componente de $\underline{E}$ tangencial à fronteira – ver figura no slide 16).

$\underline{H_\mathrm{i}} + \underline{H_r} = \underline{H_t}$ (45) → válida p/ a componente H_y do campo magnético (que é a componente de $\underline{H}$ tangencial à fronteira – ver figura no slide 16)

Considerando que $E_0^i = E_0^r = E_0^t$ na fronteira em $z = 0$, substituindo em (44) as equações (38), (40) e (42) e substituindo em (45) as equações (39), (41) e (43) obtemos para $z = 0$:

$$\cos\theta_i\, e^{-j\beta_1 x \sin\theta_i} + \Gamma\cos\theta_r\, e^{-j\beta_1 x \sin\theta_r} = \mathrm{T}\cos\theta_t\, e^{-j\beta_2 x \sin\theta_t} \quad (46)$$

$$\frac{1}{\eta_1} e^{-j\beta_1 x \sin\theta_i} - \frac{\Gamma}{\eta_1} e^{-j\beta_1 x \sin\theta_r} = \frac{\mathrm{T}}{\eta_2} e^{-j\beta_2 x \sin\theta_t} \quad (47)$$

Note que os ângulos de fase (argumento das exponenciais complexas) respectivas aos três termos de (46) e de (47) são função da coordenada x:

$$\angle_i = -(\beta_1 \sin\theta_i)x \quad (48)$$

$$\angle_r = -(\beta_1 \sin\theta_r)x \quad (49)$$

$$\angle_t = -(\beta_2 \sin\theta_t)x \quad (50)$$

Incidência oblíqua à fronteira – polarização paralela

Dado que a condição de continuidade dos campos tangenciais E_x e H_y na fronteira em $z = 0$ entre os dois meios deve ser obedecida para todo x, então para que esta continuidade seja obtida a razão de variação da fase em relação à variação de x deve ser a mesma nos três termos de (46) como também nos três termos de (47). Ou seja, as derivadas $\frac{d}{dx}$ de (48), (49) e (50) devem ser iguais entre si:

$$\beta_1 \sin\theta_i = \beta_1 \sin\theta_r = \beta_2 \sin\theta_t \qquad (51)$$

Para que a igualdade de (51) seja obedecida é necessário que o ângulo de incidência $\boldsymbol{\theta_i}$ seja igual ao ângulo de reflexão $\boldsymbol{\theta_r}$ e que $\boldsymbol{\beta_1 \, sin\,\theta_i = \beta_2 \, sin\,\theta_t}$. Esta condição nada mais é do que a **Lei de Snell** da física (ver https://en.wikipedia.org/wiki/Snell%27s_law). Substituindo estas condições nas equações (46) e (47) e resolvendo para os coeficientes de reflexão Γ e de transmissão T obtemos:

$$\Gamma = \frac{\eta_2 \cos\theta_t - \eta_1 \cos\theta_i}{\eta_2 \cos\theta_t + \eta_1 \cos\theta_i} \qquad (52)$$

$$\mathrm{T} = \frac{2\,\eta_2 \cos\theta_i}{\eta_2 \cos\theta_t + \eta_1 \cos\theta_i} \qquad (53)$$

Note que para incidência normal, situação em que $\theta_i = \theta_r = \theta_t = 0$, as equações (52) e (53) simplificam para

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \qquad (54) \qquad\qquad \mathrm{T} = \frac{2\,\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \qquad (55)$$

que são as equações (17) e (18) do slide 6 do Cap IV.1.

Note que o numerador de (52) é nulo para $\eta_2 \cos\theta_t = \eta_1 \cos\theta_i$ resultando $\Gamma = 0$, situação em que $\mathrm{T} = 1 + \Gamma = 1$, e, portanto **a onda é transmitida totalmente ao meio 2 sem qualquer perda por reflexão na fronteira.**

O ângulo de incidência θ_i que anula o numerador de (52) resultando em um coeficiente de reflexão $\Gamma = 0$, é denominado **Ângulo de Brewster** θ_b. O ângulo de Brewster θ_b é determinado, portanto, da solução de $\eta_2 \cos\theta_t = \eta_1 \cos\theta_b$ para θ_b e que resulta em:

$$\cos\theta_b = \frac{\eta_2}{\eta_1}\cos\theta_t = \frac{\sqrt{\mu_0/\varepsilon_2}}{\sqrt{\mu_0/\varepsilon_1}}\cos\theta_t = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\cos\theta_t \qquad (56)$$

Usando a relação trigonométrica $\cos\theta_t = \sqrt{1 - (\sin\theta_t)^2}$ e usando (51) na referida relação trigonométrica obtemos:

$$\cos\theta_t = \sqrt{1 - (\sin\theta_t)^2} = \sqrt{1 - \frac{\beta_1^2}{\beta_2^2}(\sin\theta_i)^2} = \sqrt{1 - \frac{\left(\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_1}\right)^2}{\left(\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_2}\right)^2}(\sin\theta_i)^2} = \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}(\sin\theta_i)^2} \qquad (57)$$

Substituindo (57) em (56) com $\theta_i = \theta_b$ obtemos:

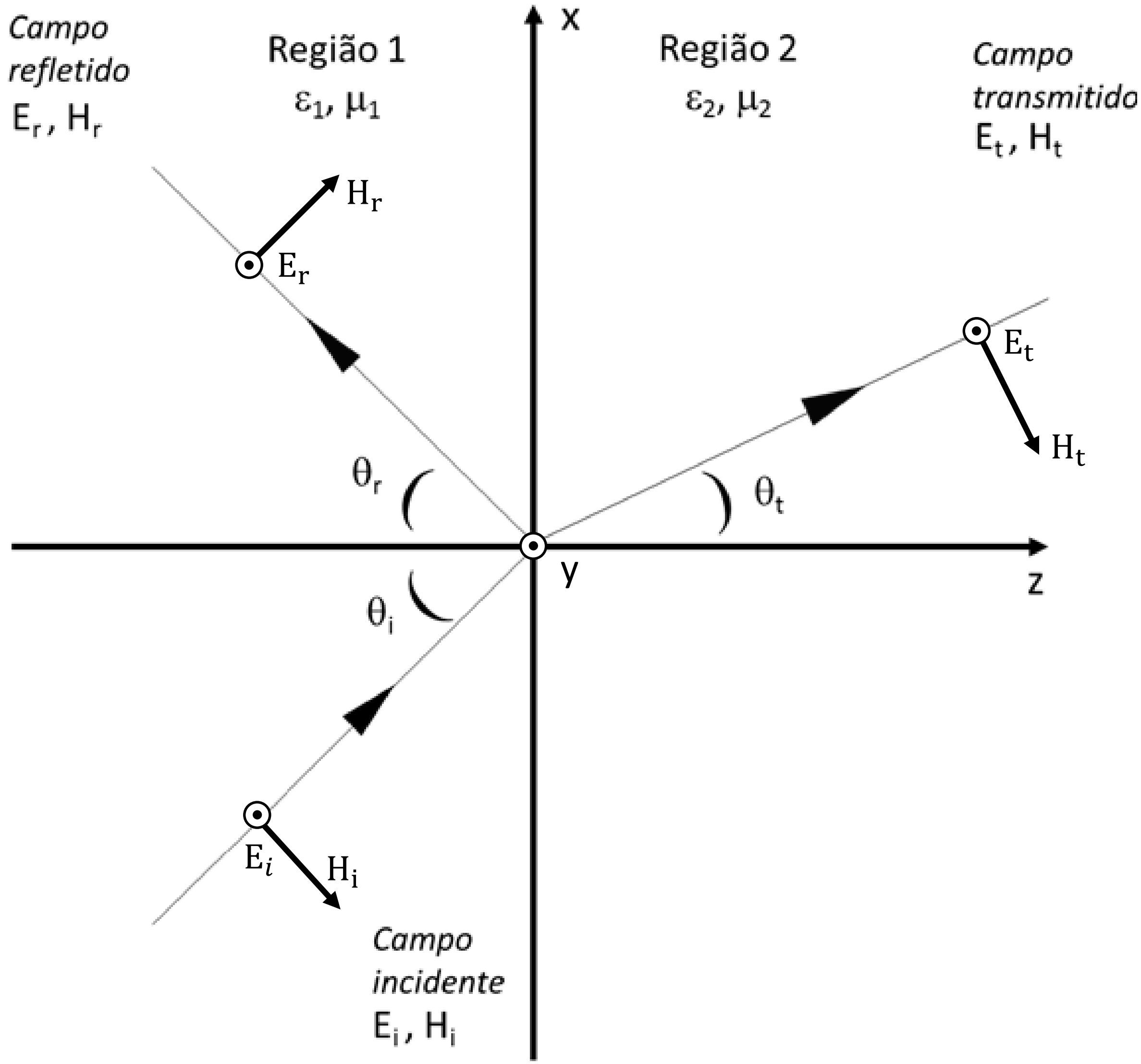
$$\cos\theta_b = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\cos\theta_t = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\sqrt{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}(\sin\theta_b)^2} \qquad (58)$$

Simplificando (58) e resolvendo para θ_b resulta em:

$$\sin\theta_b = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}} \longrightarrow \theta_b = \tan^{-1}\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \qquad (59)$$

Incidência oblíqua à fronteira – polarização perpendicular

Para o caso de **polarização perpendicular**, o vetor campo magnético $\underline{H}$ está contido no plano xz (que é o plano de incidência), enquanto que o vetor campo elétrico $\underline{E}$ está ortogonal ao campo magnético $\underline{H}$, com $\underline{E}$ incidente, refletido e transmitido saindo do plano xz conforme mostra a figura abaixo.



Incidência oblíqua à fronteira – polarização perpendicular

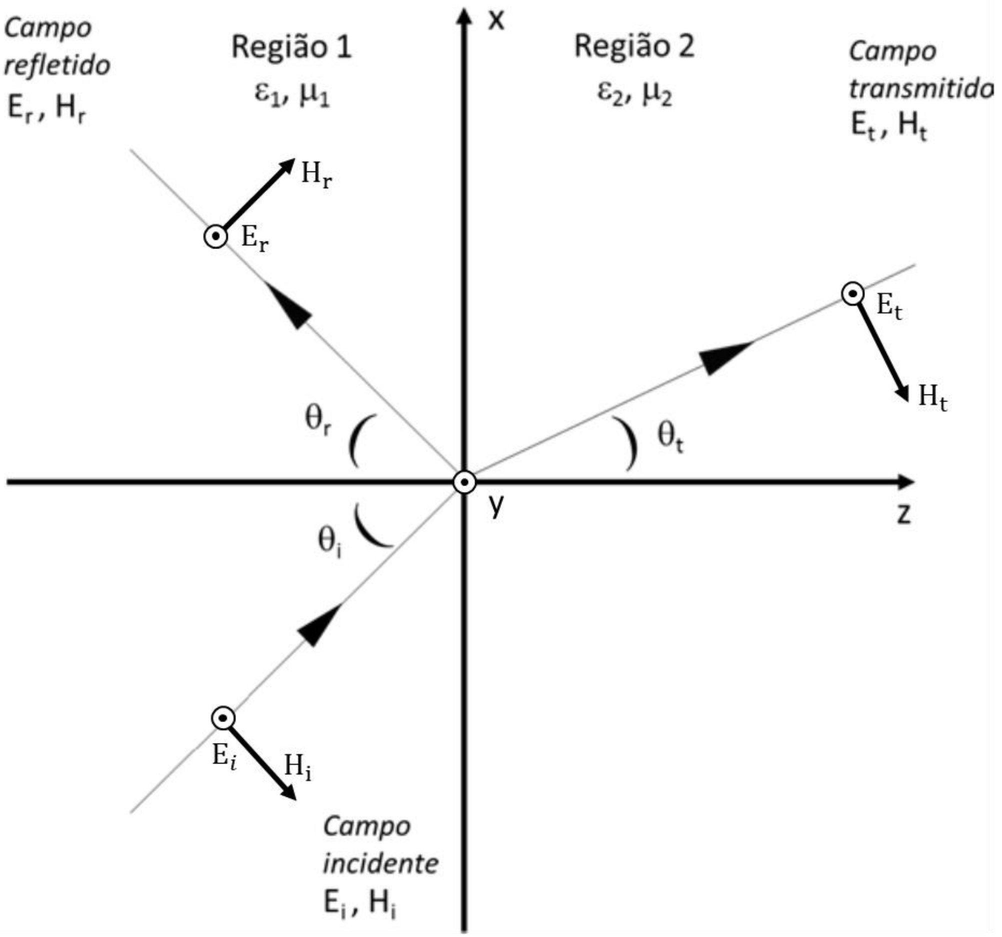
Através de análise semelhante à análise das projeções vetoriais feita para polarização paralela, obtemos as seguintes expressões analíticas para os campos incidentes com polarização perpendicular:

Definição dos campos incidentes:

$$\underline{E_\text{i}} = E_0^i e^{-j\beta_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)}\underline{\hat{j}} \qquad (60)$$

$$\underline{H_\text{i}} = \frac{E_0^i}{\eta_1}\left(-\cos\theta_i\,\underline{\hat{\imath}} + \sin\theta_i\underline{\hat{k}}\right)e^{-j\beta_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)} \qquad (61)$$

$\beta_1 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_1}$ e $\beta_2 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_2}$ são as constantes de propagação das regiões 1 e 2, $\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}}$ e $\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_2}}$ são as impedâncias características das regiões 1 e 2. θ_i é o ângulo de incidência, θ_r é o ângulo de reflexão, θ_t é o ângulo de transmissão.

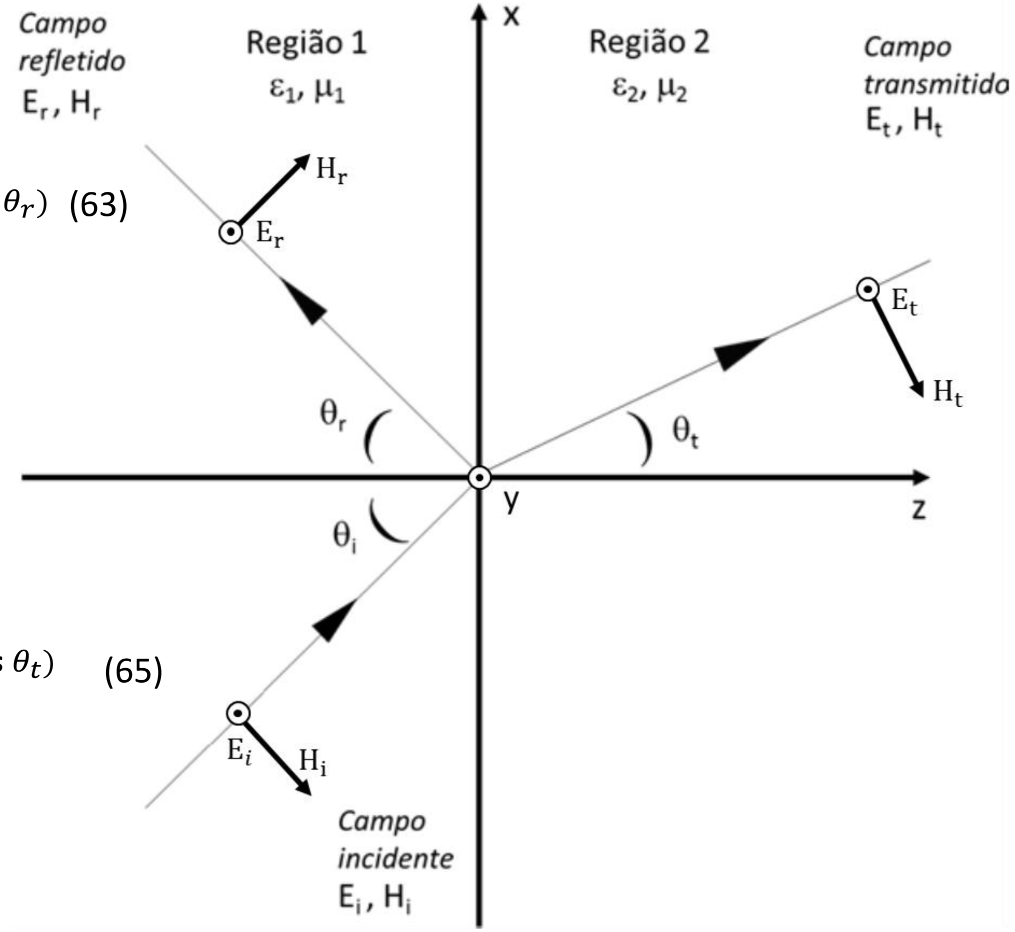


De mesma forma, através de análise semelhante à análise das projeções vetoriais feita para polarização paralela, obtemos as seguintes expressões analíticas para os campos refletidos e transmitidos com polarização perpendicular:

Definição dos campos refletidos:

$$\underline{E_r} = E_0^r \Gamma e^{-j\beta_1(x \sin\theta_r - z\cos\theta_r)}\underline{\hat{j}} \qquad (62)$$

$$\underline{H_r} = \frac{E_0^r \Gamma}{\eta_1}\left(\cos\theta_r\,\underline{\hat{\imath}} + \sin\theta_r \underline{\hat{k}}\right)e^{-j\beta_1(x \sin\theta_r - z\cos\theta_r)} \qquad (63)$$



Definição dos campos transmitidos:

$$\underline{E_t} = E_0^t \mathrm{T} e^{-j\beta_2(x \sin\theta_t + z\cos\theta_t)}\underline{\hat{j}} \qquad (64)$$

$$\underline{H_t} = \frac{E_0^t \mathrm{T}}{\eta_2}\left(-\cos\theta_t\,\underline{\hat{\imath}} + \sin\theta_t \underline{\hat{k}}\right)e^{-j\beta_2(x \sin\theta_t + z\cos\theta_t)} \qquad (65)$$

onde $\beta_1 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_1}$ e $\beta_2 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_2}$ são as constantes de propagação das regiões 1 e 2, $\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}}$ e $\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_2}}$ são as impedâncias características das regiões 1 e 2, θ_r é o ângulo de reflexão, θ_t é o ângulo de transmissão, Γ é o coeficiente de reflexão dado por (17) e T é o coeficiente de reflexão dado por (18) com $\eta_0 = \eta_1$ e $\eta = \eta_2$.

Incidência oblíqua à fronteira – polarização perpendicular

De maneira similar à que procedemos para polarização paralela, para efeito de determinar os coeficientes de reflexão Γ e de transmissão T com polarização perpendicular, note que a condição geral de continuidade dos campos tangenciais E_y e H_x na fronteira entre os dois meios deve ser obedecida , ou seja, as seguintes condições devem ser obedecidas em $z = 0$:

$\underline{E_{\mathrm{i}}} + \underline{E_r} = \underline{E_t}$ (66) → válida p/ a componente E_y do campo elétrico (que é a componente de $\underline{E}$ tangencial à fronteira – ver figura no slide 24).

$\underline{H_{\mathrm{i}}} + \underline{H_r} = \underline{H_t}$ (67) → válida p/ a componente H_x do campo magnético (que é a componente de $\underline{H}$ tangencial à fronteira – ver figura no slide 24).

Considerando que $E_0^i = E_0^r = E_0^t$ na fronteira em $z = 0$, substituindo em (66) as equações (60), (62) e (64) e substituindo em (67) as equações (61), (63) e (65) obtemos para $z = 0$:

$$e^{-j\beta_1 x \sin\theta_i} + \Gamma e^{-j\beta_1 x \sin\theta_r} = \mathrm{T} e^{-j\beta_2 x \sin\theta_t} \qquad (68)$$

$$\frac{-1}{\eta_1}\cos\theta_i\, e^{-j\beta_1 x \sin\theta_i} + \frac{\Gamma}{\eta_1}\cos\theta_r\, e^{-j\beta_1 x \sin\theta_r} = \frac{-\mathrm{T}}{\eta_2}\cos\theta_t\, e^{-j\beta_2 x \sin\theta_t} \qquad (69)$$

Note que os ângulos de fase (argumento das exponenciais complexas) respectivas aos três termos de (68) e de (69) são função da coordenada x:

$$\angle_i = -(\beta_1 \sin\theta_i)x \qquad (70)$$

$$\angle_r = -(\beta_1 \sin\theta_r)x \qquad (71)$$

$$\angle_t = -(\beta_2 \sin\theta_t)x \qquad (72)$$

Incidência oblíqua à fronteira – polarização perpendicular

Dado que a condição de continuidade dos campos tangenciais E_y e H_x na fronteira em $z\ =\ 0$ entre os dois meios deve ser obedecida para todo x, então para que esta continuidade seja obtida a razão de variação da fase em relação à variação de x deve ser a mesma nos três termos de (68) como também nos três termos de (69). Ou seja, as derivadas $\frac{d}{dx}$ de (70), (71) e (72) devem ser iguais entre si:

$$\beta_1 \sin\theta_i = \beta_1 \sin\theta_r = \beta_2 \sin\theta_t \qquad (73)$$

Para que a igualdade de (73) seja obedecida é necessário que o ângulo de incidência θ_i seja igual ao ângulo de reflexão θ_r e que $\beta_1 \sin\theta_i = \beta_2 \sin\theta_t$. Esta condição é novamente a Lei de Snell já referida no slide 22. Substituindo estas condições nas equações (68) e (69) e resolvendo para os coeficientes de reflexão Γ e de transmissão T obtemos:

$$\Gamma = \frac{\eta_2 \cos\theta_i - \eta_1 \cos\theta_t}{\eta_2 \cos\theta_i + \eta_1 \cos\theta_t} \qquad (74)$$

$$\mathrm{T} = \frac{2\,\eta_2 \cos\theta_i}{\eta_2 \cos\theta_i + \eta_1 \cos\theta_t} \qquad (75)$$

Note que para incidência normal, situação em que $\theta_i = \theta_r = \theta_t = 0$, as equações (74) e (75) simplificam para

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \qquad\qquad \mathrm{T} = \frac{2\,\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}$$

que são as equações (17) e (18) do slide 6 do Cap IV.1.

Para a polarização perpendicular não existe um Ângulo de Brewster.

Incidência oblíqua à fronteira – reflexão total

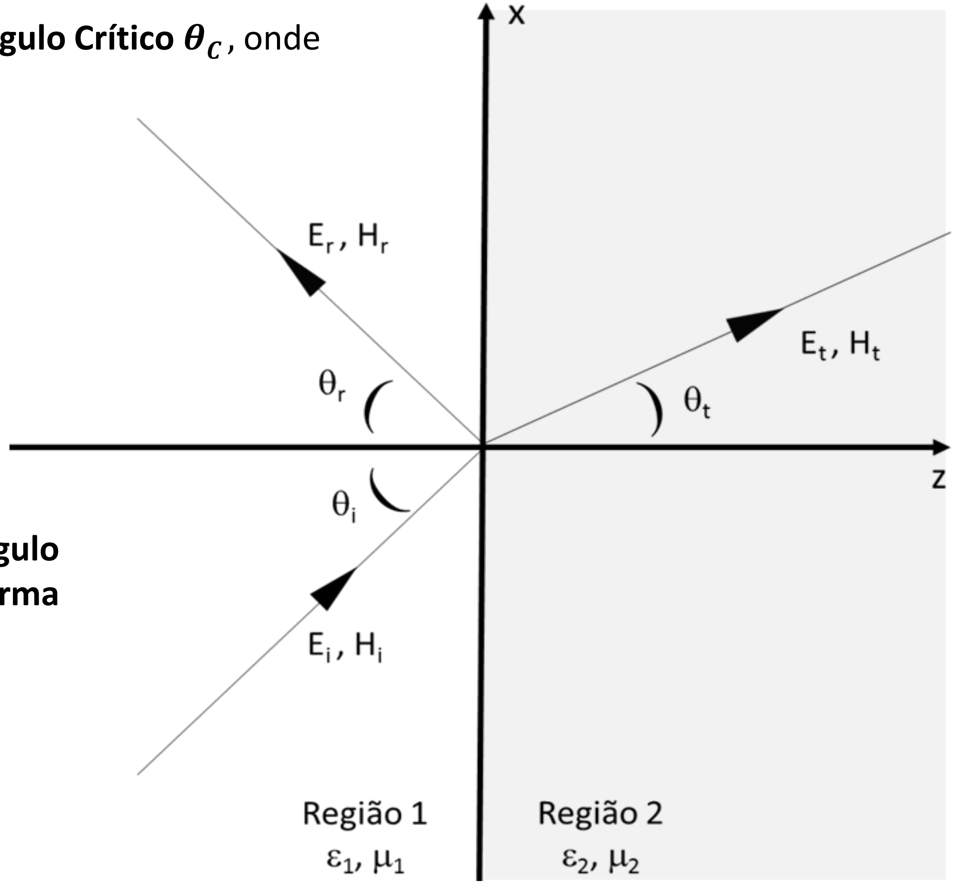
A Lei de Snell discutida no slide 22 pode ser reescrita como $\sin\theta_t = (\beta_1/\beta_2)\ \sin\theta_i = \sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_2}\ \sin\theta_i$.

Consideremos o caso (tanto p/ polarização paralela como p/ polarização perpendicular), em que a permissividade do meio 1 é maior que a permissividade do meio 2, i.e., $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$. Este é o caso, por exemplo, de uma onda luminosa se propagando em um meio 1 constituído de vidro ($\varepsilon_1 = 50$ [pF/m] - ver https://pt.wikipedia.org/wiki/Permissividade) sendo o meio 2 o espaço livre ($\varepsilon_2 = 8.85$ [pF/m]).

Dado que $\sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_2} > 1$, à medida que θ_i aumenta, o ângulo de refração θ_t irá aumentar, mas a uma taxa maior do que θ_i aumenta. Quando θ_i aumenta ao ponto de resultar $\theta_t > 90^\circ$ a onda incidente será totalmente refletida, não havendo onda transmitida no meio 2.

O ângulo de incidência θ_i para o qual $\theta_t = 90^\circ$ é chamado **Ângulo Crítico $\boldsymbol{\theta_C}$**, onde

$$\sin\theta_C = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \qquad (76)$$



Para ângulos de incidência $\boldsymbol{\theta_i}$ iguais ou maiores que o Ângulo Crítico $\boldsymbol{\theta_C}$, a onda incidente é totalmente refletida, de tal forma que a onda transmitida não se propagará para a região 2.

Exemplo 1: Uma onda EM plana se propaga no ar (Região 1 na figura abaixo) com fasor do vetor campo elétrico $\underline{E}$ incidente dado por:

$$\underline{E}_{\mathrm{i}}(x,z) = \left(E_x^i\,\underline{\hat{\imath}} + E_y^i\,\underline{\hat{\jmath}} + E_z^i\,\underline{\hat{k}}\right) e^{-j\,(\beta_x x+\beta_z z)}$$

onde $E_x^i = 9.0$ [V/m], $E_y^i = -4.0$ [V/m], $E_z^i = -6.0$ [V/m], $\beta_x = 2.0$ [rad/m] e $\beta_y = 3.0$ [rad/m].

A onda que se propaga na Região 1 incide na fronteira e passa a se propagar na Região 2 com direção de propagação distinta da direção de propagação na Região 1, conforme mostra a figura ao lado. A Região 2 é um meio dielétrico (e não-magnético), sem perdas e com permissividade relativa $\varepsilon_r = 2.25$.

Pede-se:

(a) Determine o ângulo de incidência θ_i e o ângulo de transmissão θ_t (ver figura ao lado).

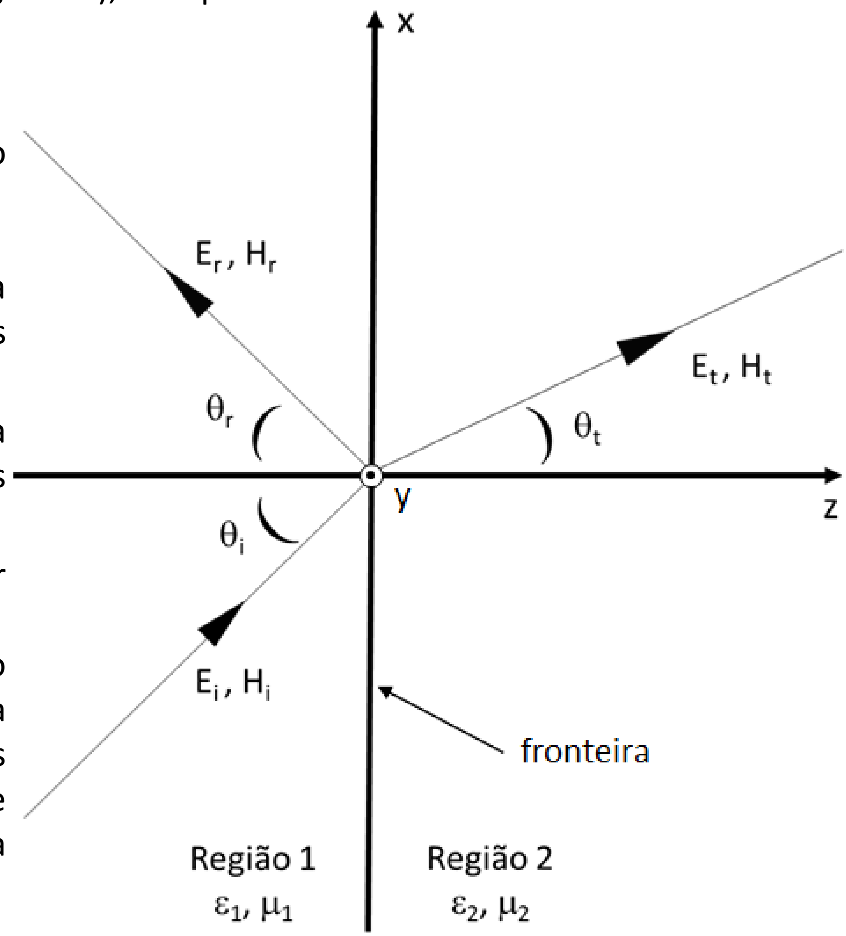
(b) Determine a frequência f [MHz] da onda EM.

(c) Determine no ponto P1 (0.0, 0.0, 0.0) [m] localizado na fronteira e no ponto P2(1.0, 0.0, −1.0) [m] localizado na Região 1 os respectivos fasores do campo elétrico $\underline{E_r}$ refletido .

(d) Determine no ponto P1 (0.0, 0.0, 0.0) [m] localizado na fronteira e no ponto P3 (1.0, 0.0, 1.0) [m] localizado na Região 2 os respectivos fasores do campo elétrico $\underline{E_t}$ transmitido.

(e) Determine a densidade de potência média (parte real do vetor de Poynting) na Região 2.

(f) Mostre numericamente que as componentes do campo elétrico tangenciais à fronteira (componentes x e y) se anulam entre si na fronteira em x=z=0, demonstrando assim a continuidade dos campos ao atravessar a fronteira (i.e., mostre numericamente que na fronteira as componentes tangenciais x e y obedecem a relação $\underline{E}_{\mathrm{i}} + \underline{E_r} = \underline{E_t}$ ou, equivalentemente, $\underline{E}_{\mathrm{i}} + \underline{E_r} - \underline{E_t} = \underline{0}$).



Solução:

Para a solução deste exemplo vamos usar o *script* Mathcad Exemplo1.xmcd disponível em https://www.fccdecastro.com.br/ZIP/OLT_C4_E1S30.zip .

Sejam os vetores unitários dos eixos x,y e z do sistema cartesiano R^3 dados por:

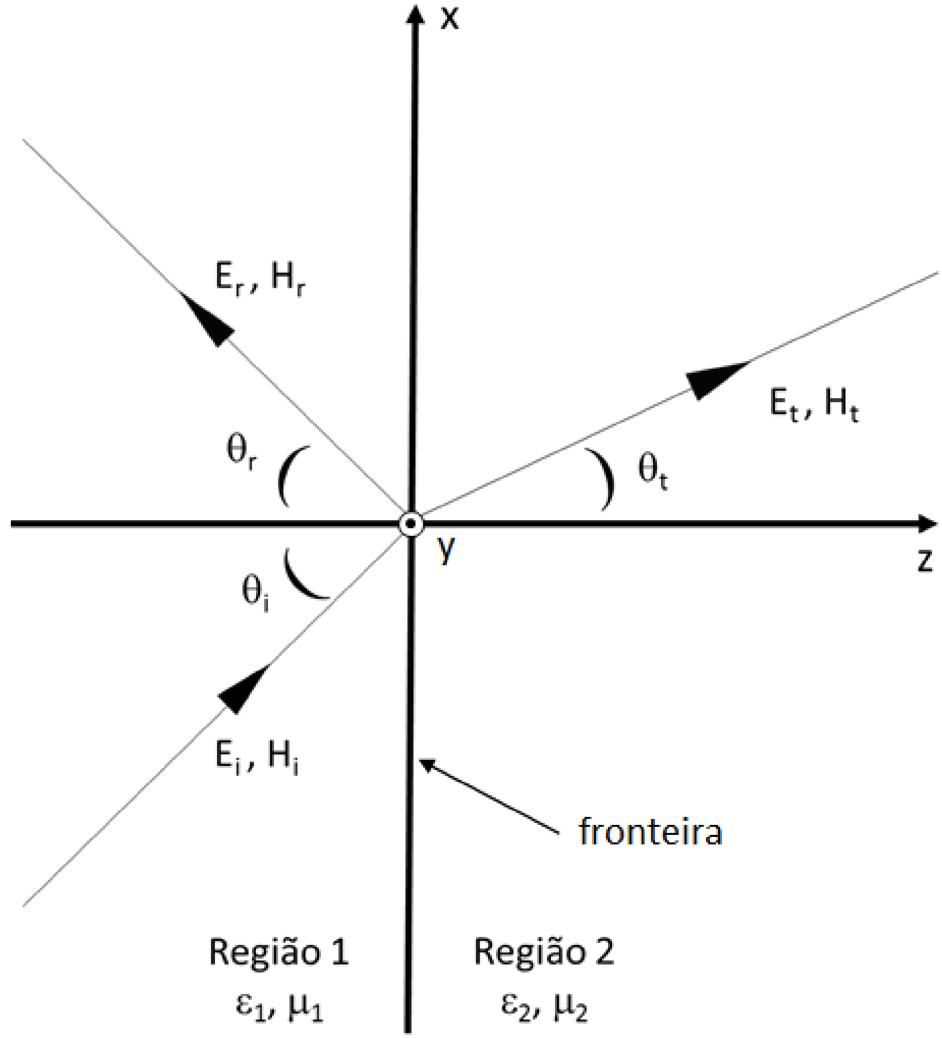
$$i\_ := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad j\_ := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad k\_ := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Uma onda plana se propaga no ar (Região 1 da figura abaixo) com fasor do campo elétrico definido por:

$$Ei(x,z) = (Eix \cdot i\_ + Eiy \cdot j\_ + Eiz \cdot k\_) \cdot e^{-j \cdot (\beta x \cdot x + \beta z \cdot z)} \qquad \text{(A)}$$

onde $Eix := 9.0 \frac{V}{m}$ $\quad Eiy := -4.0 \frac{V}{m}$ $\quad Eiz := -6.0 \frac{V}{m}$ $\quad \beta x := 2.0 \cdot \frac{rad}{m}$ $\quad \beta z := 3.0 \cdot \frac{rad}{m}$

A onda que se propaga na Região 1 incide na fronteira e passa a se propagar na Região 2 com direção de propagação distinta da direção de propagação na Região 1, conforme mostra a figura abaixo. A Região 2 é um meio dielétrico (e não-magnético), sem perdas e com permissividade relativa $\varepsilon r := 2.25$.


x
E_r, H_r
E_t, H_t
θ_r
θ_t
y
z
θ_i
E_i, H_i
fronteira
Região 1
ε_1, μ_1
Região 2
ε_2, μ_2

(a) Comparando o argumento da exponencial complexa na expressão de $Ei(x,z)$ na equação (A) acima com o argumento da exponencial complexa na equação (38) do slide 17 do Cap IV.2 para o campo incidente Ei com polarização paralela, ou, alternativamente, comparando o argumento da exponencial complexa na expressão de $Ei(x,z)$ na equação (A) acima com o argumento da exponencial complexa na equação (60) do slide 25 do Cap IV.2 para o campo incidente Ei com polarização perpendicular, obtemos::

$$\beta x = \beta 1 \cdot \sin(\theta i) \qquad \text{(B)}$$

$$\beta z = \beta 1 \cdot \cos(\theta i) \qquad \text{(C)}$$

Daí, de (B) e (C) obtemos:

$$\theta i := \operatorname{atan}\left(\frac{\beta x}{\beta z}\right) = 33.69^\circ \qquad \text{(D)}$$

Note que, pela Lei de Snell, o ângulo de incidência θi é igual ao ângulo de reflexão θr.

A constante de propagação $\beta 1$ na Região 1 é a soma vetorial de suas componentes βx e βz nas direções x e z:

$$\beta 1 := \sqrt{(\beta x)^2 + (\beta z)^2} = 3.606 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

Do $\varepsilon r = 2.25$ dado no enunciado para a Região 2 e das definições para $\beta 1$ e $\beta 2$ no slide 17 do Cap IV.2 ,obtemos:

$$\beta 1 = \omega \cdot \sqrt{\mu_0 \cdot \varepsilon_0}$$

$$\beta 2 = \omega \cdot \sqrt{\mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon r}$$

e, portanto,

$$\beta 2 := \beta 1 \cdot \sqrt{\varepsilon r} = 5.408 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

Da Lei de Snell no slide 22 do Cap IV.2 temos:

$$\beta 1 \cdot \sin(\theta i) = \beta 2 \cdot \sin(\theta t)$$

Resolvendo p/ θt:

$$\theta t = \operatorname{asin}\left(\frac{\beta 1 \cdot \sin(\theta i)}{\beta 2}\right) \quad \text{(E)}$$

(D)→(E):

$$\theta t := \operatorname{asin}\left(\frac{\sin(\theta i)}{\sqrt{\varepsilon r}}\right) = 21.703\,°$$

Nota: Observe que a lei de Snell vale tanto p/ o caso de onda incidente com polarização paralela como p/ o caso de onda incidente com polarização perpendicular. Observe também que para os dois casos o ângulo de reflexão θr é igual ao ângulo de incidência θi, isto é $\theta r := \theta i$.

(b)

$$\beta 1 = \frac{2 \cdot \pi \cdot f}{c} \quad \rightarrow \quad f := \frac{c \cdot \beta 1}{2 \cdot \pi} = 172.033\ \text{MHz}$$

(c) & (d) Para determinar o campo elétrico da onda refletida, primeiro temos que determinar a polarização da onda incidente. Da expressão de Ei na equação (A) acima observa-se que a onda incidente é uma superposição de duas ondas, uma com polarização paralela e outra com polarização perpendicular. Conforme equação (60) no slide 25 do Cap IV.2, no caso de incidência sob polarização perpendicular, $Ei(x,z)$ tem apenas componente na direção y. E conforme equação (38) no slide 17 do Cap IV.2, no caso de incidência sob polarização paralela, $Ei(x,z)$ possui componentes na direção x e na direção z. Conseqüentemente, é necessário decompor a onda do campo elétrico incidente Ei como a superposição da onda EiPara de polarização paralela com a onda EiPerp de polarização perpendicular:

$$Ei = EiPerp + EiPara$$

Portanto, desta decomposição $Ei = EiPerp + EiPara$ e da expressão de Ei na equação (A) acima, e tendo em mente que no caso de incidência sob polarização perpendicular o campo Ei tem apenas componente na direção y , e que no caso de incidência sob polarização paralela o campo Ei possui componentes na direção x e na direção z, temos:

$$EiPerp(x,z) := Eiy \cdot j\_ \cdot e^{-j\cdot(\beta x\cdot x+\beta z\cdot z)} \qquad \text{(F)}$$

$$EiPara(x,z) := (Eix\cdot i\_ + Eiz\cdot k\_)\cdot e^{-j\cdot(\beta x\cdot x+\beta z\cdot z)} \qquad \text{(G)}$$

De (F) e (G), na coordenada ($x = 0$, $z = 0$) onde a onda incidente Ei incide na fronteira e dá origem à onda transmitida Et e também à onda refletida Er , temos que as componentes nas direções x,y e z do vetor campo elétrico EiPerp e as componentes nas direções x,y e z do vetor campo elétrico EiPara são:

$$EiPerp(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\frac{V}{m} \qquad EiPara(0,0) = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}\cdot\frac{V}{m}$$

e que estão de acordo com os valores do campo incidente dados no enunciado.

Na fronteira, na coordenada ($x = 0$, $z = 0$), o vetor campo elétrico $EiPerp0$ da onda EM incidente na fronteira sob polarização perpendicular e sob ângulo de incidência θi é a componente $EiPerp(0,0)_1$ na direção y do vetor campo elétrico $EiPerp(0,0)$ dado por (F) :

$$EiPerp0 := EiPerp(0,0)_1 = -4\,\frac{V}{m}$$

De mesma forma, na fronteira na coordenada ($x = 0$, $z = 0$) , o vetor campo elétrico $EiPara0$ da onda EM incidente na fronteira sob polarização paralela e sob ângulo de incidência θi é o vetor resultante da soma vetorial da componente $EiPara(0,0)_0$ na direção x e da componente $EiPara(0,0)_2$ na direção z do vetor campo elétrico $EiPara(0,0)$ dado por (G):

$$EiPara0 := \sqrt{\left(EiPara(0,0)_0\right)^2 + \left(EiPara(0,0)_2\right)^2} = 10.817\,\frac{V}{m}$$

Note que, pelo princípio da continuidade dos campos na fronteira, $EiPerp0$ e $EiPara0$ darão origem à onda transmitida Et e também à onda refletida Er, que serão respectivamente obtidas a partir da aplicação dos coeficientes de reflexão Γ e transmissão T aos campos $EiPerp0$ e $EiPara0$ na fronteira, conforme desenvolvimento que segue:

Das definições para $\eta 1$ e $\eta 2$ no slide 26 do Cap IV.2, temos que as impedâncias $\eta 1$ e $\eta 2$ respectivas aos meios 1 e 2 são dadas por:

$$\eta 1 := \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 376.73\cdot\Omega$$

$$\eta 2 := \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0\cdot\varepsilon r}} = 251.154\cdot\Omega$$

Os coeficientes de reflexão $\Gamma Para$ e de transmissão $TPara$ válidos para a onda EM incidindo na fronteira sob polarização paralela são dados pelas equações (52) e (53) no slide 22 do Cap IV.2:

$$\Gamma Para := \frac{\eta 2\cdot\cos(\theta t) - \eta 1\cdot\cos(\theta i)}{\eta 2\cdot\cos(\theta t) + \eta 1\cdot\cos(\theta i)} = -0.147$$

$$TPara := \frac{2\eta 2\cdot\cos(\theta i)}{\eta 2\cdot\cos(\theta t) + \eta 1\cdot\cos(\theta i)} = 0.764$$

Os coeficientes de reflexão $\Gamma Perp$ e de transmissão $TPerp$ válidos para a onda EM incidindo na fronteira sob polarização perpendicular são dados pelas equações (74) e (75) no slide 28 do Cap IV.2:

$$\Gamma Perp := \frac{\eta 2\cdot\cos(\theta i) - \eta 1\cdot\cos(\theta t)}{\eta 2\cdot\cos(\theta i) + \eta 1\cdot\cos(\theta t)} = -0.252$$

$$TPerp := \frac{2\eta 2\cdot\cos(\theta i)}{\eta 2\cdot\cos(\theta i) + \eta 1\cdot\cos(\theta t)} = 0.748$$

Das equações (40) e (42) do slide 20 do Cap IV.2, temos que para a onda EM incidindo na fronteira sob polarização paralela, o campo elétrico da onda refletida $ErPara$ e o campo elétrico $EtPara$ da onda transmitida são dados por:

$$ErPara(x,z) := EiPara0\cdot\Gamma Para\cdot(\cos(\theta r)\cdot i\_ + \sin(\theta r)\cdot k\_)\cdot e^{-j\cdot\beta 1\cdot(x\cdot\sin(\theta r) - z\cdot\cos(\theta r))}$$

$$EtPara(x,z) := EiPara0\cdot TPara\cdot(\cos(\theta t)\cdot i\_ - \sin(\theta t)\cdot k\_)\cdot e^{-j\cdot\beta 2\cdot(x\cdot\sin(\theta t) + z\cdot\cos(\theta t))}$$

Das equações (62) e (64) slide 26 do Cap IV.2 temos que para a onda EM incidindo na fronteira sob polarização perpendicular, o campo elétrico da onda refletida ErPerp e o campo elétrico EtPerp da onda transmitida são dados por:

$$\mathrm{ErPerp}(x,z) := \mathrm{EiPerp0}\cdot\Gamma\mathrm{Perp}\cdot e^{-j\cdot\beta1\cdot(x\cdot\sin(\theta r)-z\cdot\cos(\theta r))}\cdot j\_$$

$$\mathrm{EtPerp}(x,z) := \mathrm{EiPerp0}\cdot\mathrm{TPerp}\cdot e^{-j\cdot\beta2\cdot(x\cdot\sin(\theta t)+z\cdot\cos(\theta t))}\cdot j\_$$

Ocorre que a onda do campo elétrico E em qualquer coordenada é uma superposição da onda EPara de polarização paralela com a onda EPerp de polarização perpendicular, seja a onda incidente, refletida ou transmitida. Portanto, temos que:

$$\mathrm{Er}(x,z) := \mathrm{ErPara}(x,z) + \mathrm{ErPerp}(x,z) \quad \text{(H)}$$

$$\mathrm{Et}(x,z) := \mathrm{EtPara}(x,z) + \mathrm{EtPerp}(x,z) \quad \text{(I)}$$

Para o ponto P1 (na fronteira), $x1 = 0$ e $z1 = 0$ e daí, de (H) e (I) obtemos os fasores:

$$\mathrm{Er}(x1,z1) = \begin{pmatrix} -1.319 \\ 1.009 \\ -0.879 \end{pmatrix}\cdot\frac{V}{m} \qquad \mathrm{Et}(x1,z1) = \begin{pmatrix} 7.681 \\ -2.991 \\ -3.057 \end{pmatrix}\cdot\frac{V}{m}$$

Para o ponto P2 (na Região 1), $x2 = 1\,m$ e $z2 = -1\,m$ e daí, de (H) e (I) obtemos os fasores:

$$\mathrm{Er}(x2,z2) = \begin{pmatrix} -0.374 - 1.264i \\ 0.286 + 0.968i \\ -0.249 - 0.843i \end{pmatrix}\cdot\frac{V}{m} \qquad \overrightarrow{\left|\mathrm{Er}(x2,z2)\right|} = \begin{pmatrix} 1.319 \\ 1.009 \\ 0.879 \end{pmatrix}\cdot\frac{V}{m} \qquad \arg(\mathrm{Er}(x2,z2)) = \begin{pmatrix} -106.479 \\ 73.521 \\ -106.479 \end{pmatrix}\cdot{}^\circ$$

Para o ponto P3 (na Região 2), $x3 = 1\,\mathrm{m}$ e $z3 = 1\,\mathrm{m}$ e daí, de (H) e (I) obtemos os fasores:

$$Et(x3,z3) = \begin{pmatrix} 5.663 - 5.189i \\ -2.205 + 2.02i \\ -2.254 + 2.065i \end{pmatrix} \cdot \frac{V}{m} \qquad \overrightarrow{|Et(x3,z3)|} = \begin{pmatrix} 7.681 \\ 2.991 \\ 3.057 \end{pmatrix} \cdot \frac{V}{m} \qquad \arg(Et(x3,z3)) = \begin{pmatrix} -42.499 \\ 137.501 \\ 137.501 \end{pmatrix} \cdot ^{\circ}$$

(e) Como ambos os meios são sem perdas, a densidade de potência média é conservada em ambas Região 1 e Região 2, como também é conservada na fronteira. Daí basta calcular a densidade de potência média na fronteira. Na fronteira (x=0 e z=0) o campo Et transmitido é:

$$Et(0,0) = \begin{pmatrix} 7.681 \\ -2.991 \\ -3.057 \end{pmatrix} \cdot \frac{V}{m}$$

Cujo módulo é obtido a partir de suas componentes nas direções x, y e z:

$$Eo := \sqrt{\left(Et(0,0)_0\right)^2 + \left(Et(0,0)_1\right)^2 + \left(Et(0,0)_2\right)^2} \qquad Eo = 8.792 \cdot \frac{V}{m}$$

E daí a densidade de potência média na Região 2 (e também na Região 1) é obtida através de:

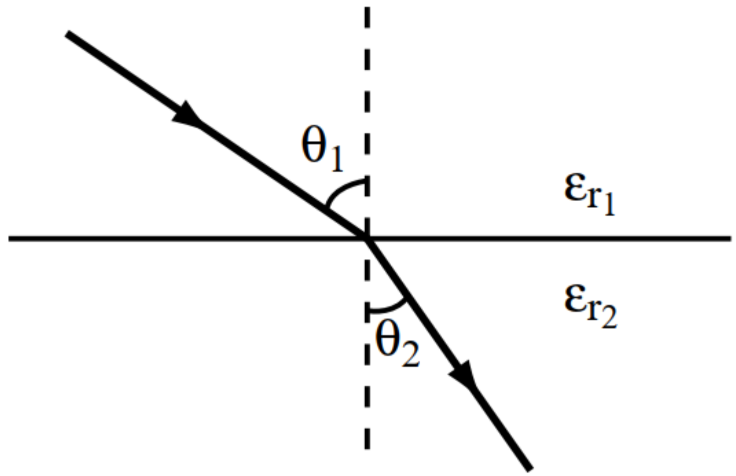
$$S := \frac{\left(\frac{Eo}{\sqrt{2}}\right)^2}{\eta 2} \qquad S = 153.883 \cdot \frac{mW}{m^2}$$

(f) Da equação (44) do slide 21 do Cap IV.2 e da equação (66) do slide 27 do Cap IV.2 :

$$Ei(0,0) + Er(0,0) - Et(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3.822 \end{pmatrix} \cdot \frac{V}{m}$$

Note no resultado acima que as componentes do campo elétrico tangenciais à fronteira (componentes x e y) se anulam entre si quando elas se superpõe na fronteira em x=z=0, o que demonstra a continuidade dos campos em ambos os lados da fronteira.

Exemplo 2: Uma onda EM plana com polarização paralela se propaga no ar (ε_{r1} =1.0) e incide na fronteira com um meio dielétrico de $\varepsilon_{r2} = 9.0$ sob um ângulo de incidência θ_1, conforme figura abaixo. O ângulo de incidência θ_1 é tal que não ocorre reflexão na fronteira (ângulo de Brewster). Determine o ângulo de refração θ_2 .



Solução:

Da equação (59) do slide 23 com $\theta_1 = \theta_b$:

$$\theta 1 := \operatorname{atan}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon r2}{\varepsilon r1}}\right) = 71.565°$$

Da equação (56) do slide 23 com $\theta_2 = \theta_t$:

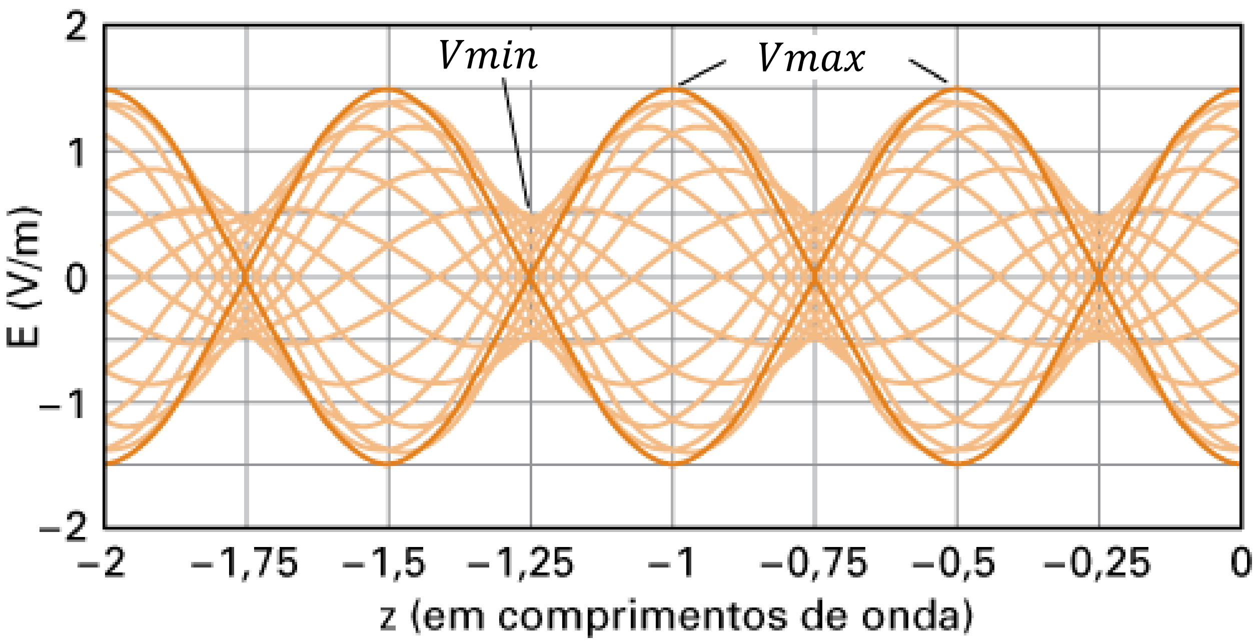
$$\theta 2 := \operatorname{acos}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon r2}{\varepsilon r1}} \cdot \cos(\theta 1)\right) = 18.435°$$

Ondas estacionárias

Conforme vimos no Cap IV.1, o meio 1 propaga não somente a onda incidente como também propaga a onda refletida gerada por reflexão na fronteira com o meio 2.

Ocorre que a superposição das ondas incidente e refletida produz um padrão de interferência entre a onda incidente e a onda refletida ao longo do eixo z, e esta onda resultante da interferência entre a onda incidente e a onda refletida é denominada de **onda estacionária**. Em determinados posições z as ondas incidente e refletida se interferem construtivamente e em outras posições z se interferem destrutivamente, conforme mostra a figura abaixo. A distância no eixo z entre um valor máximo $Vmax$ da onda estacionária (interferência construtiva entre as ondas incidente e refletida) e um valor mínimo $Vmin$ (interferência destrutiva entre as ondas incidente e refletida) é sempre de $\lambda_g/4$.

A onda estacionária abaixo (representada pelo envelope resultante da superposição das ondas incidente e refletida em instantes de tempo distintos) é gerada por uma onda $E^i = 1.0\cos\,(\omega t - \beta z)\underline{\hat{\imath}}$ [V/m] que incide na fronteira $z = 0$, e que apresenta um coeficiente de reflexão $\Gamma = {}^{E_0^r}/_{E_0^i} = 0.5$. Como $\Gamma = 0.5 = {}^{E_0^r}/_{E_0^i}$, o campo E resultante da superposição das ondas incidente e refletida é dado por $E = 1.0\cos(\omega t - \beta z)\underline{\hat{\imath}} + 0.5\cos(\omega t + \beta z)\underline{\hat{\imath}}$ [V/m].



⇒ Note na figura que $|E|$ varia de 0.5 [V/m] a 1.5 [V/m] a cada $z = \lambda_g/4$.

⇒ As diversas ondas mostradas em laranja claro são *snapshots* (= fotos instantâneas) das ondas incidente e refletida em instantes de tempo distintos.

Ondas estacionárias

Vamos determinar numericamente os valores de amplitude da onda estacionária $E(z,t) = 1.0\cos(\omega t - \beta z)\underline{\hat{\imath}} + 0.5\cos(\omega t + \beta z)\underline{\hat{\imath}}$ resultante da superposição da onda incidente $1.0\cos\,(\omega t - \beta z)\underline{\hat{\imath}}$ [V/m] e da onda refletida $0.5\cos(\omega t + \beta z)\underline{\hat{\imath}}$, conforme definido no slide anterior.

Determinando o fasor da onda estacionária $E(z,t)$, notando que $\Gamma = 0.5$ é o coeficiente de reflexão:

$$\dot{E}(z) = 1.0e^{-j\beta z} + 0.5e^{j\beta z} = \frac{e^{j\beta z}}{e^{j\beta z}}(1.0e^{-j\beta z} + 0.5e^{j\beta z}) = \frac{1 + 0.5e^{2j\beta z}}{e^{j\beta z}} \quad \text{[V/m]}$$

Como queremos determinar a amplitude da onda estacionária, o que nos interessa é o módulo do fasor $\dot{E}(z)$:

$$\left|\dot{E}(z)\right| = \frac{\left|1 + 0.5e^{2j\beta z}\right|}{\left|e^{j\beta z}\right|} = \left|1 + 0.5e^{2j\beta z}\right| = \left|1 + 0.5e^{2j\frac{2\pi}{\lambda}z}\right| = \left|1 + 0.5e^{j\frac{4\pi}{\lambda}z}\right|$$

Determinando $\left|\dot{E}(z)\right|$ para vários valores de z de interesse, obtemos:

z	$\left\|\dot{E}(z)\right\|$
0	|1+(0.5)(1.0)|=1.5
-λ/4	|1+(0.5)(−1.0)|= 0.5
-λ/2	|1+(0.5)(1.0)|=1.5
-3λ/4	|1+(0.5)(−1.0)|= 0.5
-λ	|1+(0.5)(1.0)|=1.5

Note na tabela acima que que a distância no eixo z entre um valor máximo $Vmax = 1.5$ da onda estacionária (interferência construtiva entre as ondas incidente e refletida) e um valor mínimo $Vmin$ (interferência destrutiva entre as ondas incidente e refletida) é sempre de $\lambda_g/4$.

ROE – Relação de Ondas Estacionárias (SWR – *Standing Wave Ratio*)

A razão entre a amplitude máxima $Vmax$ e a amplitude mínima $Vmin$ da onda estacionária é conhecida como **relação de onda estacionária** (ROE) ou *standing wave ratio* (SWR):

$$ROE = \frac{Vmax}{Vmin} = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} \qquad (77)$$

A equação (77) resulta da expressão geral do módulo fasor $\dot{E}(z)$ que representa a amplitude da onda estacionária (numericamente discutido no slide anterior) :

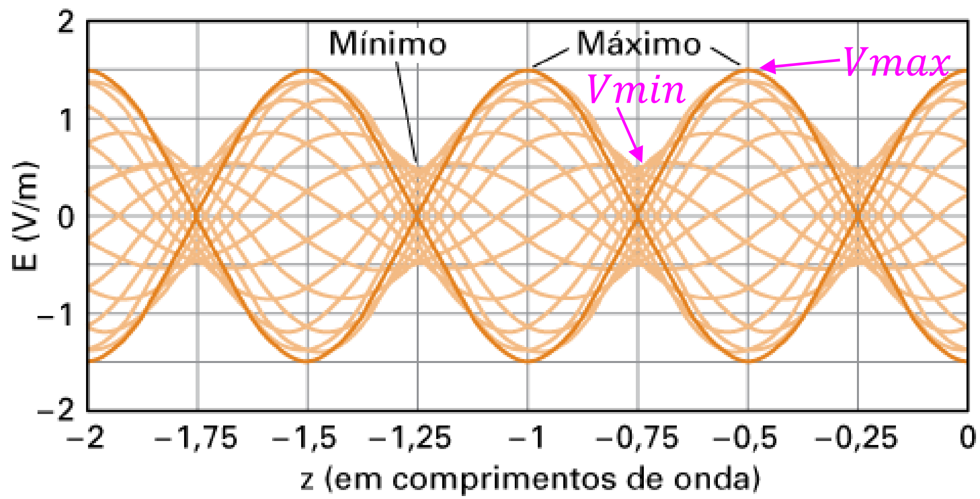
$$\left|\dot{E}(z)\right| = \left|\underbrace{{E_0}^i}_{E\text{ incidente}} + \underbrace{{E_0}^i\Gamma e^{2j\beta z}}_{E\text{ refletido}}\right| = \left|{E_0}^i\right|\left|1+|\Gamma|e^{j\angle\Gamma}e^{2j\beta z}\right| = \left|{E_0}^i\right|\left|1+|\Gamma|e^{j(2\beta z+\angle\Gamma)}\right| \qquad (78)$$

Note o efeito do argumento $2\beta z + \angle\Gamma$ da exponencial em (78):

$$2\beta z + \angle\Gamma = 0 \rightarrow e^{j(2\beta z+\angle\Gamma)} = 1 \rightarrow Vmax = \left|{E_0}^i\right|\left|1+|\Gamma|\right| = \left|{E_0}^i\right|(1+|\Gamma|)$$

$$2\beta z + \angle\Gamma = \pi \rightarrow e^{j(2\beta z+\angle\Gamma)} = -1 \rightarrow Vmin = \left|{E_0}^i\right|\left|1-|\Gamma|\right| = \left|{E_0}^i\right|(1-|\Gamma|)$$

$0 \leq |\Gamma| \leq 1.0$



Ondas estacionária gerada na fronteira ar/condutor perfeito

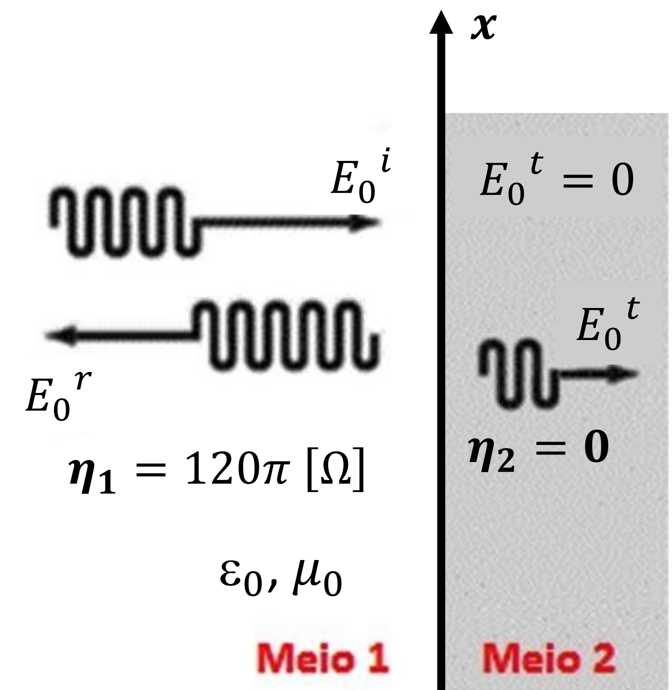
Ver animação em https://www.fccdecastro.com.br/PPT/OLT_C4_A1S45.pptx

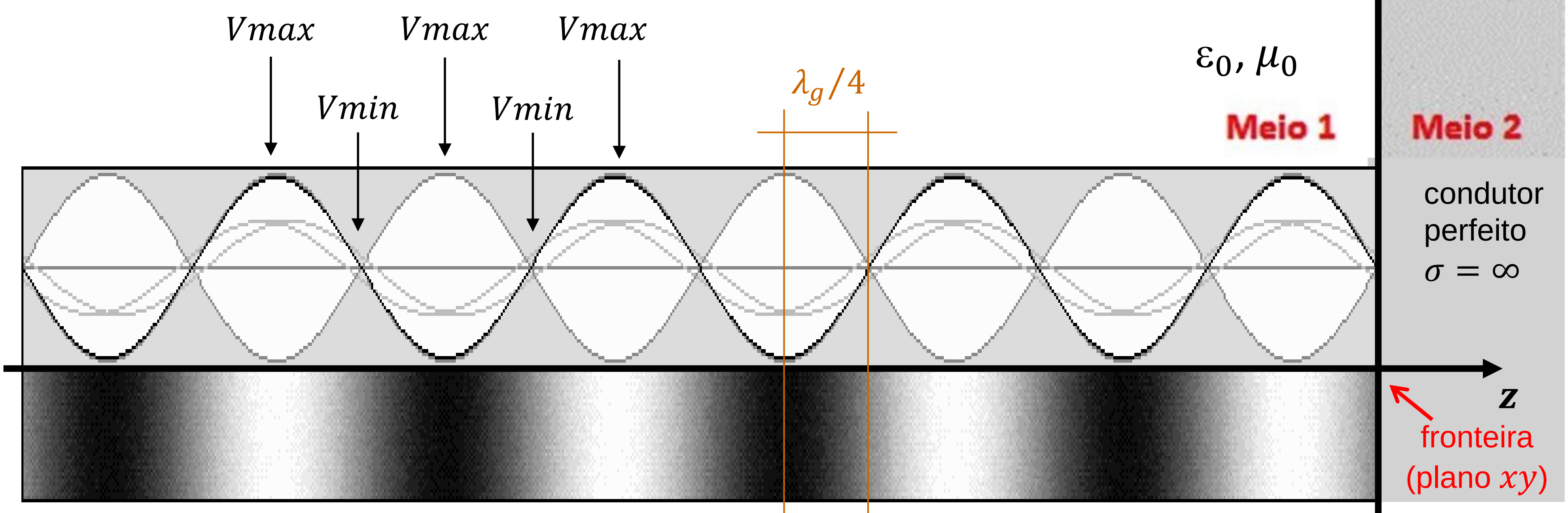
$$\Gamma = \frac{E_0{}^r}{E_0{}^i} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{0 - 120\pi\ [\Omega]}{0 + 120\pi\ [\Omega]} = -1 = 1.0e^{j180°}$$

$\Gamma = 1.0e^{j180°}$ significa que a onda refletida tem mesma amplitude mas está defasada de 180° da onda incidente, conforme mostra a animação abaixo.

$\mathrm{T} = 1 + \Gamma = 0$

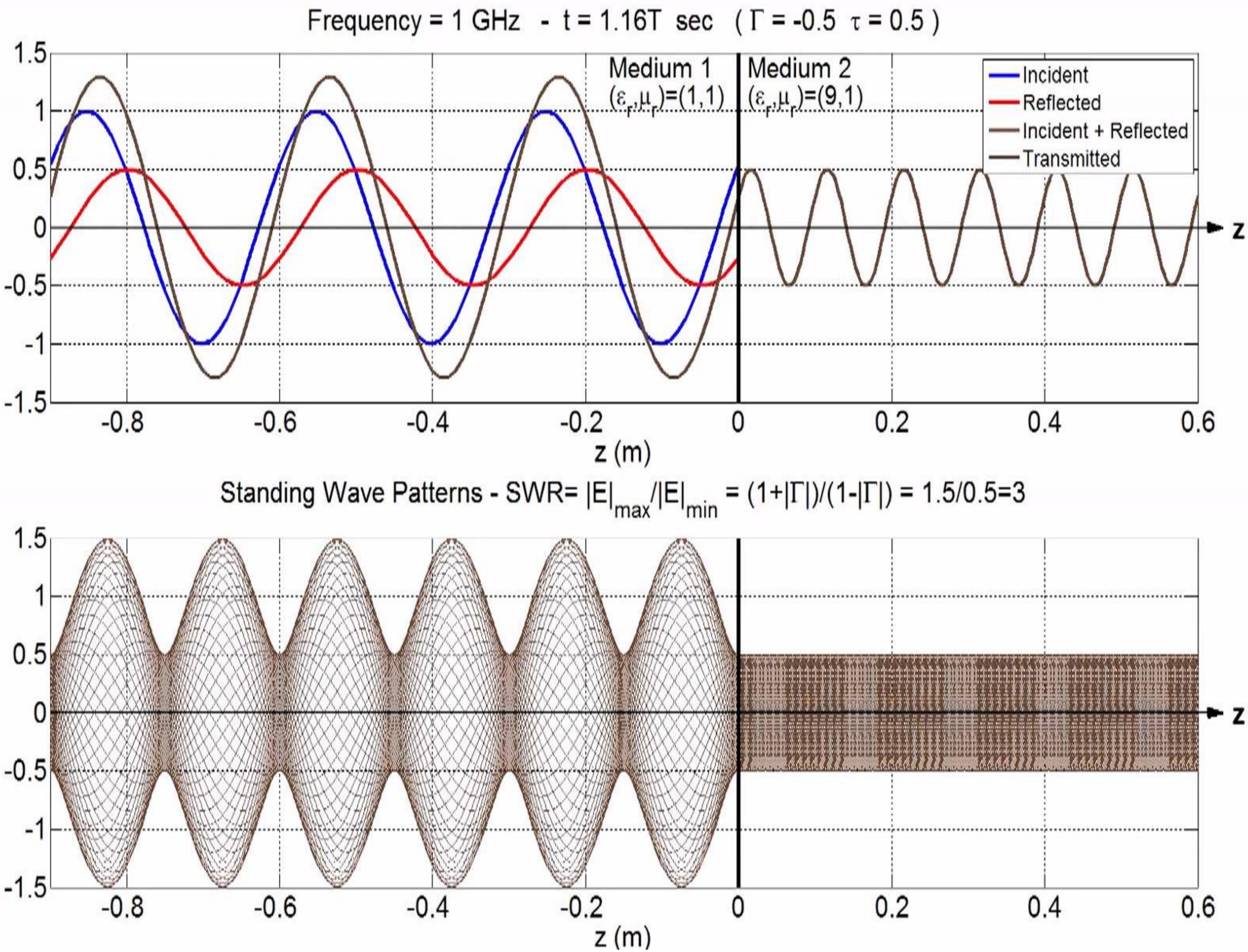
$$ROE = \frac{Vmax}{Vmin} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = \infty$$





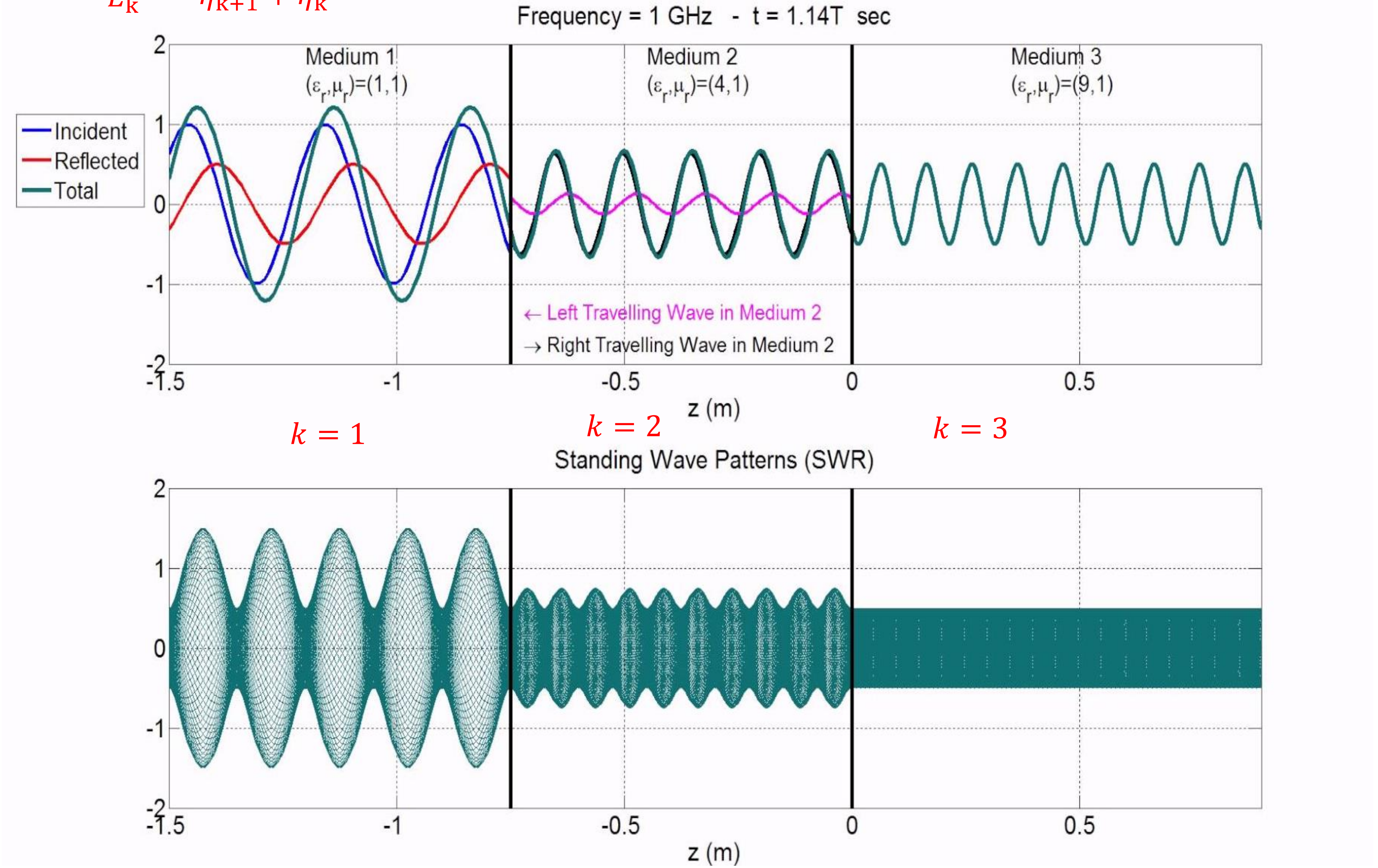
Ondas estacionária gerada na fronteira ar/ dielétrico sem perdas

$\Gamma = E_0{}^r / E_0{}^i = (\eta_2 - \eta_1)/(\eta_2 + \eta_1)$ $\quad T = 1 + \Gamma$ $\quad \eta = 120\pi \sqrt{\mu_r/\varepsilon_r}$) [Ω]



Onda estacionárias geradas por reflexão nas fronteiras entre múltiplas camadas dielétricas

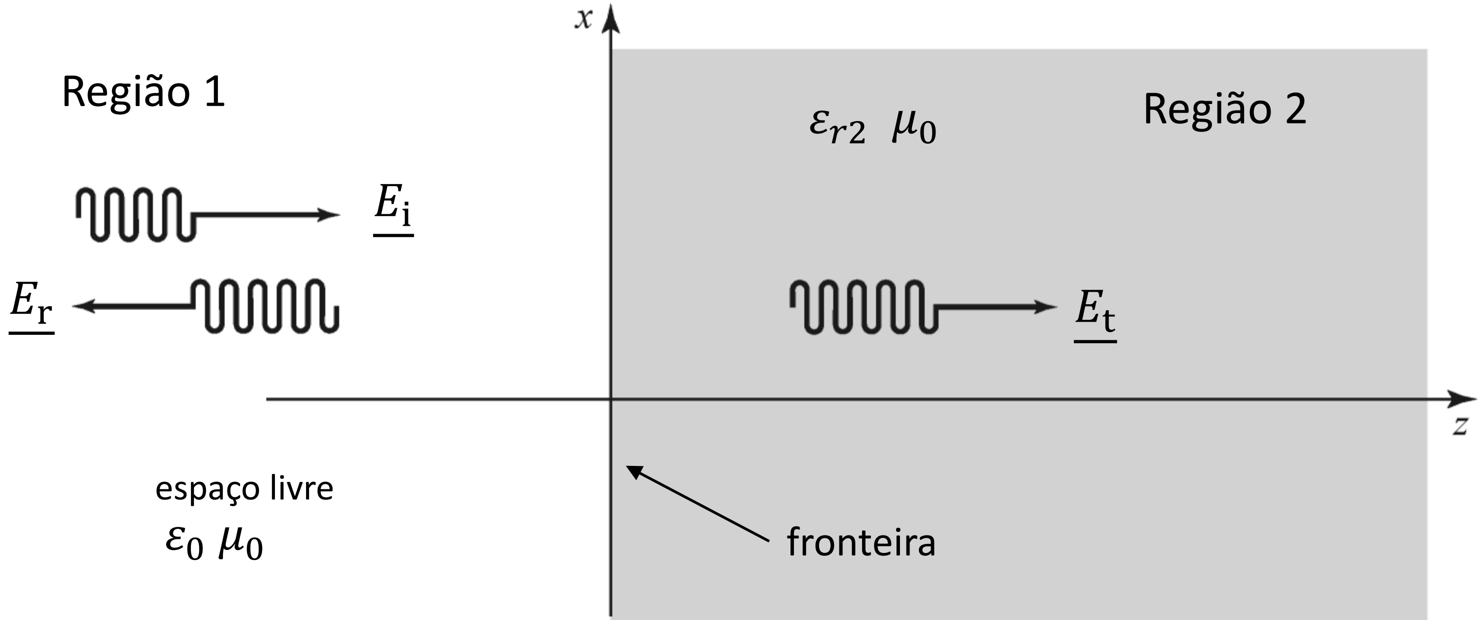
$$\Gamma_k = \frac{E_k^{-}}{E_k^{+}} = \frac{\eta_{k+1} - \eta_k}{\eta_{k+1} + \eta_k} \qquad \eta = 120\pi\sqrt{\mu_r/\varepsilon_r}\ [\Omega] \qquad T_k = 1 + \Gamma_k$$



Ondas estacionária – animação regime transiente até o regime permanente (*steady state*)

Ver animação em https://www.fccdecastro.com.br/PPT/OLT_C4_A2S48.pptx

Exemplo 3: Uma onda EM plana se propaga no espaço livre (ε_{r1} =1.0) e incide na fronteira com um meio dielétrico de permissividade $\varepsilon_{r2} = 9.0$, conforme mostra a figura. A onda do campo incidente $\underline{E_\mathrm{i}}$ se reflete na fronteira gerando a onda do campo refletido $\underline{E_\mathrm{r}}$. As ondas $\underline{E_\mathrm{i}}$ e $\underline{E_\mathrm{r}}$ se superpõem na Região 1, interferindo-se mutuamente ora construtivamente ora destrutivamente, e assim estabelecendo uma onda estacionária com máximos e mínimos na Região 1. **Pede-se**: Determine a razão entre os valores máximo e mínimo da onda estacionária estabelecida na Região 1 pela interferência mútua entre as ondas $\underline{E_\mathrm{i}}$ e $\underline{E_\mathrm{r}}$.



Solução:

Para a solução deste exemplo vamos usar o *script* Mathcad Exemplo3.xmcd disponível em https://www.fccdecastro.com.br/ZIP/OLT_C4_E3S49.zip .

Das definições para η1 e η2 no slide 26 do Cap IV.2, temos que as impedâncias η1 e η2 respectivas às regiões 1 e 2 são dadas por:

$$\eta 1 := \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon r1}} = 376.73 \cdot \Omega \qquad \eta 2 := \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon r2}} = 125.577 \cdot \Omega$$

Da equação (17) no slide 6 do Cap IV.1, temos que o coeficiente de reflexão Γ na fronteira resulta em:

$$\Gamma := \frac{\eta 2 - \eta 1}{\eta 2 + \eta 1} = -0.5$$

Da equação (77) no slide 44 do Cap IV.3, temos que a razão Vmax/Vmin = ROE, resulta em:

$$ROE := \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = 3$$