

Carta de Smith

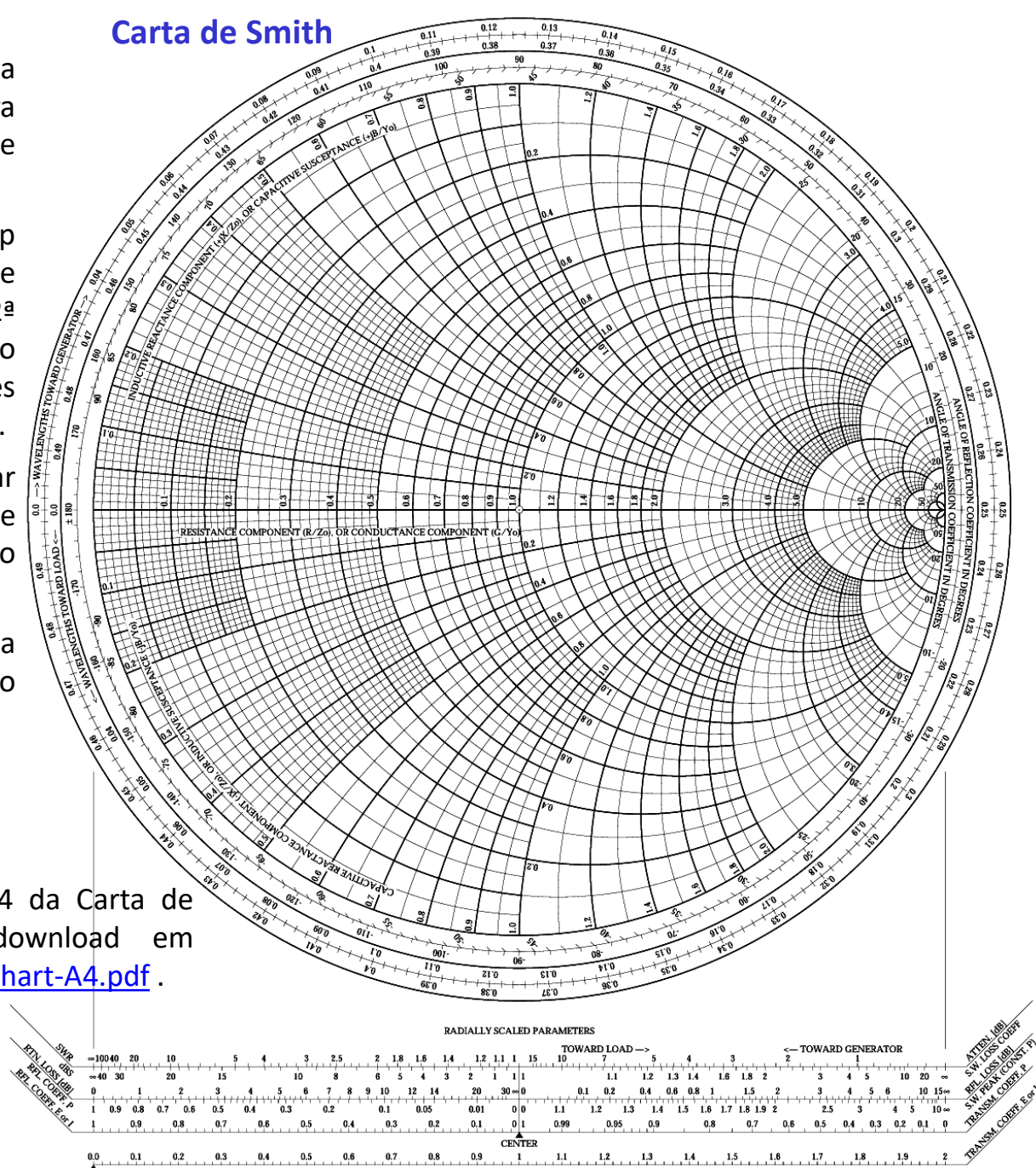
A Carta de Smith (CS) é uma ferramenta gráfica (ver figura ao lado) que objetiva resolver problemas envolvendo LTs e casamento de impedâncias usando LTs.

A CS foi desenvolvida em 1939 por Phillip Smith, engenheiro do Bell Telephone Labs, e foi extensivamente utilizada durante a 2ª guerra mundial no âmbito do desenvolvimento de sistemas de radares ([https://en.wikipedia.org/wiki/Smith chart](https://en.wikipedia.org/wiki/Smith_chart)).

Basicamente, a CS permite analisar graficamente o comportamento elétrico de LTs, comportamento que já foi estudado analiticamente no Cap V.

A CS é, portanto, uma abordagem gráfica alternativa aos métodos analíticos vistos no Cap V.

Um cópia para impressão em tamanho A4 da Carta de Smith padrão está disponível para download em <https://www.fccdecastro.com.br/pdf/SmithChart-A4.pdf>.



Carta de Smith

$$z = z_p = -0.102 \lambda_g$$

No presente estudo da CS, a LT a ser analisada é sem perdas, apresenta uma impedância característica $Z_o[\Omega]$ e tem um comprimento $\ell = \rho \lambda_g$, onde λ_g é o comprimento de onda da onda EM guiada na LT e ρ é um fator que varia no intervalo $[0.0, 0.5]$.

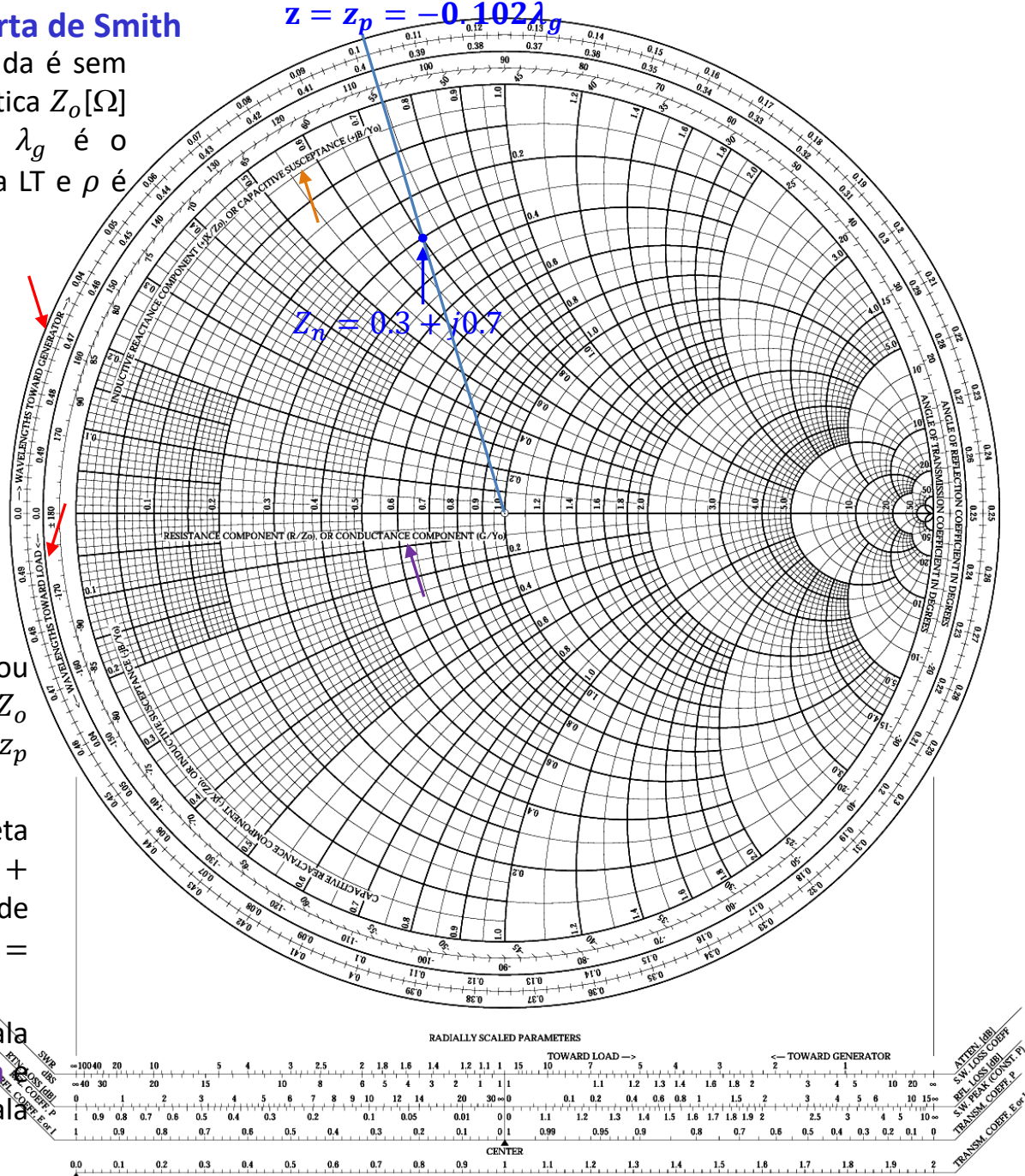
Note que, conforme vimos no slide 50 do Cap V.8, o comportamento elétrico de uma LT se repete a cada $0.5\lambda_g$, e esta é a razão de ρ variar apenas no intervalo $[0.0, 0.5]$, conforme se observa nas 1ª e 2ª escalas circulares mais externas na figura ao lado (“WAVELENGTHS TOWARD GENERATOR” e “WAVELENGTHS TOWARD LOAD” marcadas com as setas **vermelhas**).

A CS consiste de dois gráficos superpostos:

O 1º gráfico representa a impedância Z_n (ou admitância Y_n) normalizada em relação a Z_o (ou em relação a Y_o) e medida em um ponto z_p qualquer ao longo da coordenada z da LT.

Por exemplo, a bolinha **azul** indicada pela seta **azul** na figura mostra a impedância $Z_n = 0.3 + j0.7$ medida em $z = z_p$ distante $0.102 \lambda_g$ de $z = 0$ na LT e resulta da normalização de $Z = 15 + j35 [\Omega]$ em relação a $Z_o = 50 [\Omega]$.

A escala da resistência normalizada é a escala na diagonal horizontal indicada pela seta **roxa**
a escala da reatância normalizada é a escala circular indicada pela seta **laranja**.



Carta de Smith

O 2º gráfico representa o coeficiente de reflexão $\Gamma = |\Gamma|e^{j\theta}$ para o ponto em $z = z_p$ referido no slide anterior onde é medida a impedância normalizada $Z_n = 0.3 + j0.7$.

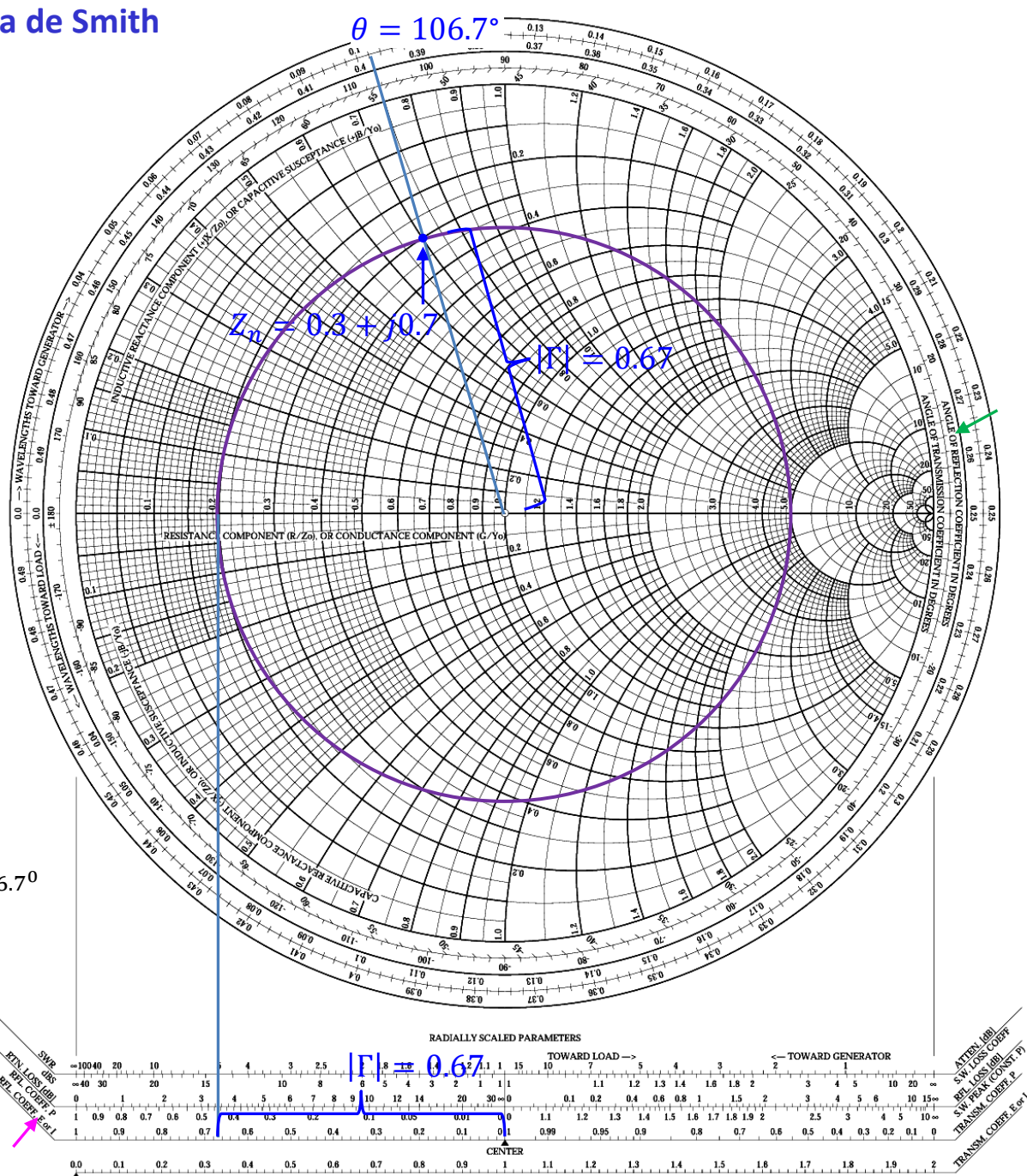
A magnitude $|\Gamma|$ do coeficiente de reflexão $\Gamma = |\Gamma|e^{j\theta}$ é plotada como um círculo de raio $|\Gamma|$ com centro no centro da CS (em **roxo** na figura). O raio $|\Gamma|$ é medido na escala “RFL COEFF, E or I” indicada pela seta **magenta** e resulta $|\Gamma| = 0.67$ conforme mostra a figura.

O ângulo θ ($-180^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$) do coeficiente de reflexão $\Gamma = |\Gamma|e^{j\theta}$ é medido no sentido anti-horário a partir do lado direito do diâmetro horizontal (ver escala “ANGLE OF REFLECTION COEFFICIENT IN DEGREES” indicada pela seta **verde**) e resulta $\theta = \angle \Gamma = 106.7^\circ$ conforme mostra a figura.

Note que o resultado gráfico na CS na figura ao lado confere com o resultado numérico:

$$\Gamma = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0} = -0.193 + j0.642 = 0.67e^{j106.7^\circ}$$

onde $Z = 15 + j35 [\Omega]$ e $Z_0 = 50 [\Omega]$.



Carta de Smith – Impedância e Admitância

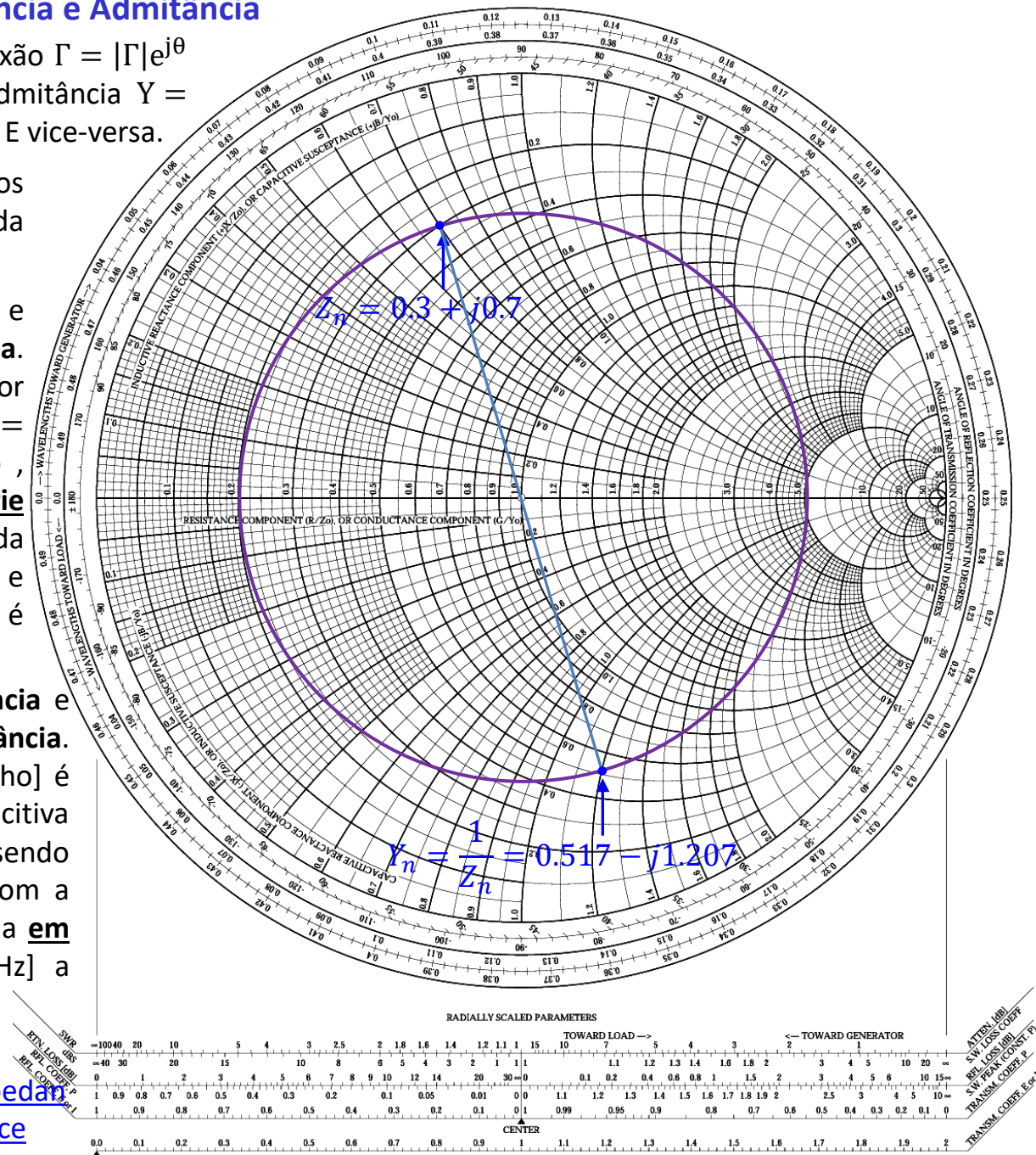
Portanto, a CS converte coeficiente de reflexão $\Gamma = |\Gamma|e^{j\theta}$ em impedância $Z = R + jX [\Omega]$ ou em admitância $Y = 1/Z = G + jB$ [mho], ambas normalizadas. E vice-versa.

Conforme já visto na disciplina de Circuitos Elétricos, impedância $Z [\Omega]$ é o inverso da admitância Y [mho], i.e., $Z = 1/Y$.

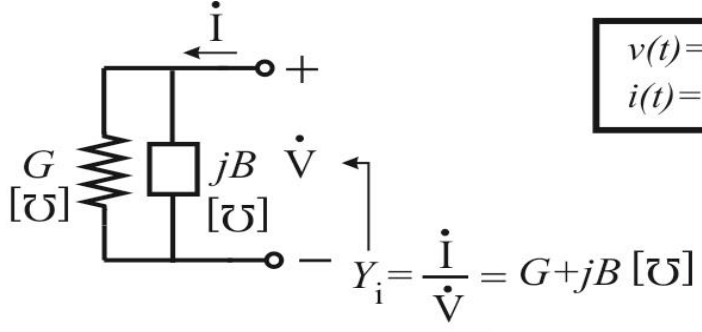
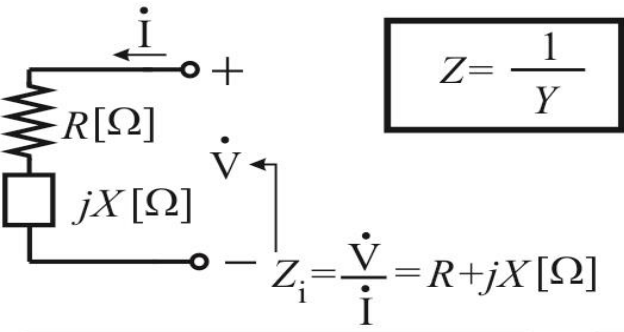
$R = \text{Re}(Z) [\Omega]$ é denominado **resistância** e $X = \text{Im}(Z) [\Omega]$ é denominado **reatância**. Reatância indutiva $X_L = 2\pi fL [\Omega]$ é um valor real positivo, reatância capacitiva $X_C = -1/(2\pi fC) [\Omega]$ é um valor real negativo, sendo L [H] o valor da indutância **em série** com a resistência R , C [F] o valor da capacitância **em série** com a resistência R e f [Hz] a frequência em que a impedância é medida.

$G = \text{Re}(Y)$ [mho] é denominado **condutância** e $B = \text{Im}(Y)$ [mho] é denominado **susceptância**. Susceptância indutiva $B_L = -1/(2\pi fL)$ [mho] é um valor real negativo, susceptância capacitiva $B_C = 2\pi fC$ [mho] é um valor real positivo, sendo L [H] o valor da indutância **em paralelo** com a condutância G , C [F] o valor da capacitância **em paralelo** com a condutância G e f [Hz] a frequência em que a admitância é medida.

Ver https://en.wikipedia.org/wiki/Electrical_impedance e <https://en.wikipedia.org/wiki/Admittance>



Impedância e Admitância – conceitos básicos



$v(t) = M \cos(\omega t + \theta) \Leftrightarrow \dot{V} = M \underline{\theta} \text{ [V]}$
 $i(t) = N \cos(\omega t + \phi) \Leftrightarrow \dot{I} = N \underline{\phi} \text{ [A]}$

$\frac{\dot{V}}{\dot{I}} = Z = R + jX \text{ [\Omega]}$

resistência
reatância
impedância

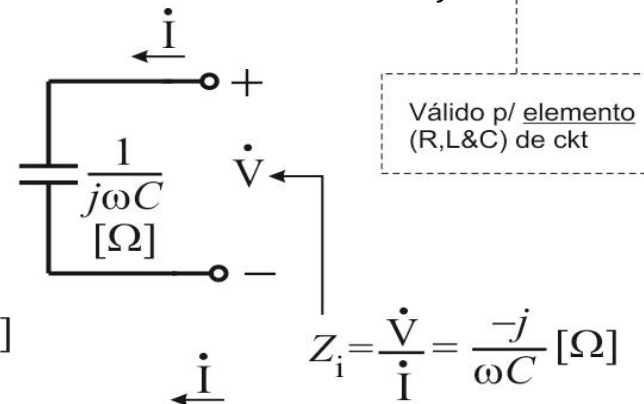
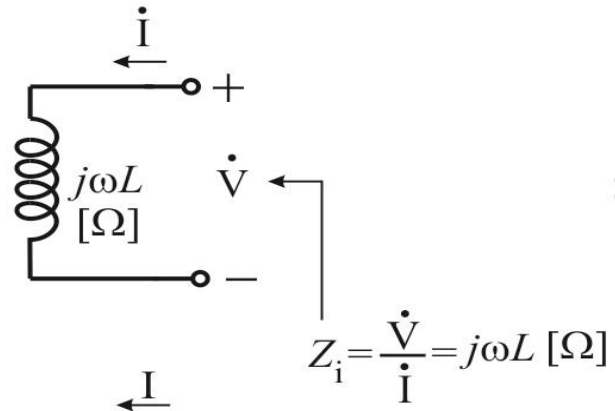
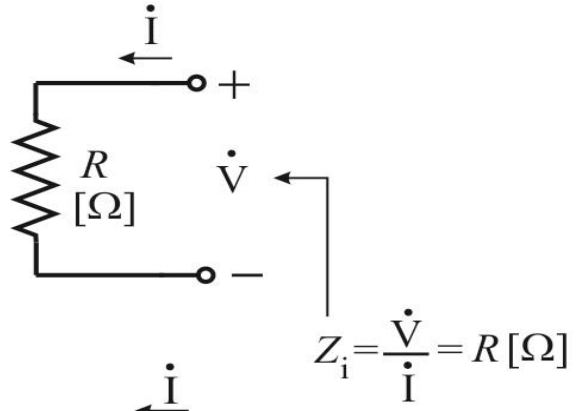
$\frac{\dot{I}}{\dot{V}} = Y = G + jB \text{ [\mathcal{U}]}$

condutância
susceptância
admitância

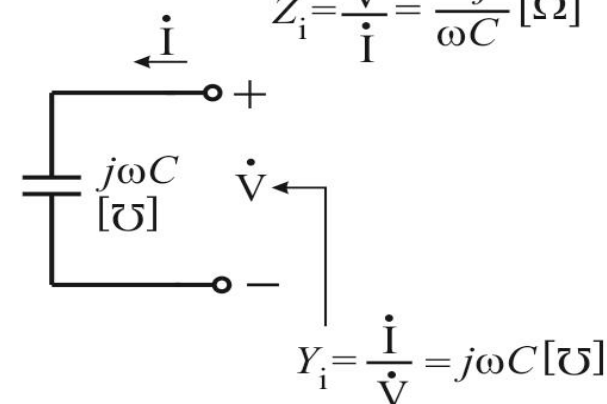
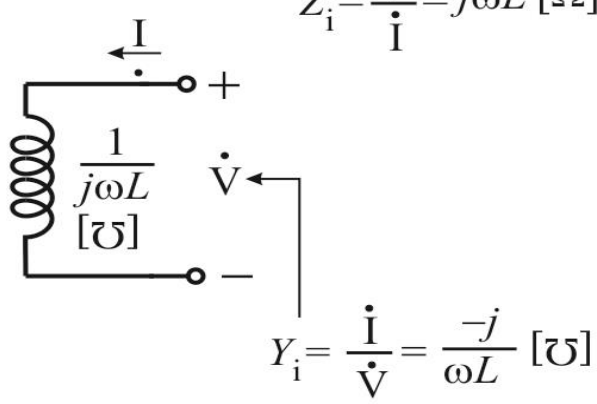
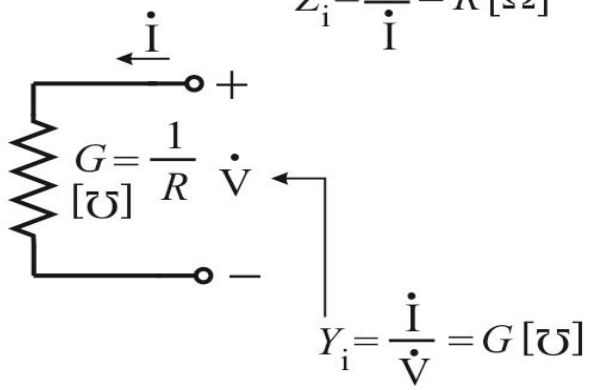
$R = \frac{1}{G} \quad X = \frac{-1}{B}$

$X_C = \frac{-1}{\omega C} \quad X_L = \omega L$
 $B_C = \omega C \quad B_L = \frac{-1}{\omega L}$

$\omega = 2\pi f$



Válido p/ elemento (R,L&C) de ckt



Carta de Smith

$$z = z_p = -0.102 \lambda_g$$

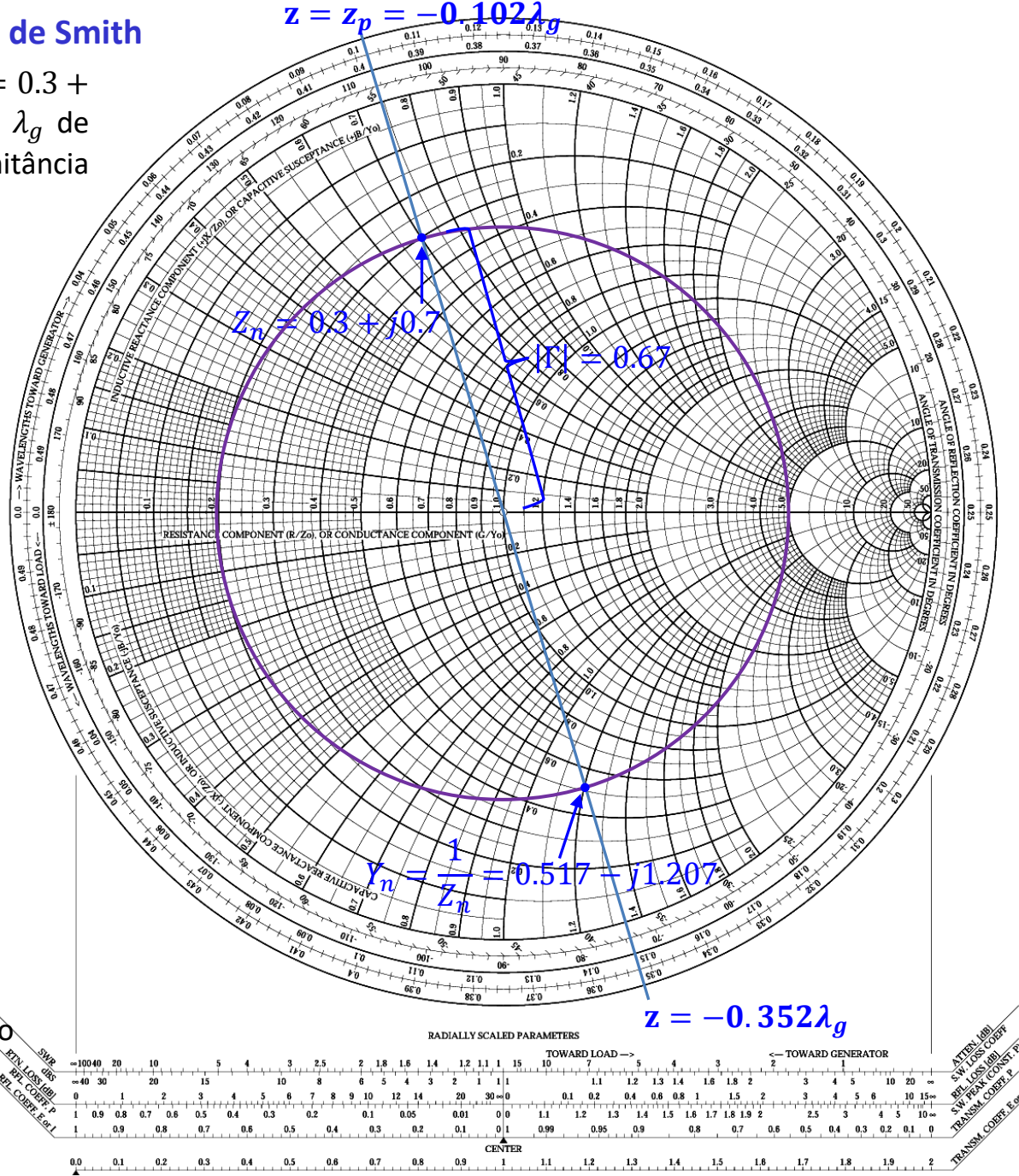
Note na figura ao lado que a impedância $Z_n = 0.3 + j0.7$ medida no ponto $z = z_p$ distante $0.102 \lambda_g$ de $z = 0$ na LT é convertida pela CS em admitância $Y_n = \frac{1}{Z_n} = 0.517 - j1.207$.

Para efetuar a conversão $Z_n \Rightarrow Y_n$ (ou vice-versa), basta percorrer uma distância z de $\lambda_g/4 = 0.25\lambda_g$ ao longo da escala "WAVELENGTHS TOWARD GENERATOR" a partir da intersecção do prolongamento do raio $|\Gamma|$ com a escala "WAVELENGTHS TOWARD GENERATOR" em $z = z_p = -0.102 \lambda_g$ e marcar no círculo roxo de raio $|\Gamma|$ o ponto Y_n .

Especificamente, percorrer uma distância z de $0.25\lambda_g$ na escala "WAVELENGTHS TOWARD GENERATOR" a partir do ponto $z = z_p = -0.102 \lambda_g$ onde a impedância $Z_n = 0.3 + j0.7$ é medida significa marcar no círculo roxo de raio $|\Gamma|$ o ponto antipodal à Z_n na CS, i.e., significa marcar o ponto girado de 180° correspondente à $Y_n = \frac{1}{Z_n} = 0.517 - j1.207$, conforme mostra a figura.

Note que o resultado gráfico na CS na figura ao lado confere com o resultado numérico:

$$\frac{1}{0.3 + j0.7} = 0.517 - j1.207$$



Carta de Smith – fundamentação analítica

Passamos agora a discutir os fundamentos analíticos da CS representativa de uma LT sem perdas, de impedância característica $Z_0[\Omega]$ e de comprimento $\ell = \rho \lambda_g$, onde λ_g é o comprimento de onda da onda EM guiada na LT, com ρ variando no intervalo $[0.0, 0.5]$. A impedância de carga da LT é $Z_L[\Omega]$.

Nota: Se a LT tiver um comprimento $\ell > 0.5\lambda_g$ deve-se utilizar como comprimento da LT na CS o valor resultante de $\text{mod}(\ell, 0.5\lambda_g)$, onde $\text{mod}(x, y)$ é o operador que retorna o resto da divisão de x por y (x modulo y). O valor de retorno apresenta o mesmo sinal de x . Conforme já discutido no slide 3, o comportamento elétrico de uma LT se repete a cada $0.5\lambda_g$, e esta é a razão de a CS contemplar LTs de comprimento $\ell = \rho \lambda_g$ com ρ variando no intervalo $[0.0, 0.5]$.

Conforme vimos no slide 38 do Cap V., o coeficiente de reflexão Γ_L na carga de uma LT é dado por

$$\Gamma_L = |\Gamma_L|e^{j\angle\Gamma_L} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \quad (1)$$

Normalizando Z_L pela impedância característica Z_0 da LT obtemos a impedância de carga normalizada z_L (atentar para não confundir com a variável z da coordenada na LT – sempre observar o contexto em que a variável z está sendo utilizada) :

$$z_L = \frac{Z_L}{Z_0} \quad (2)$$

Redefinindo o coeficiente de reflexão Γ_L na carga dado por (1) em termos da impedância de carga normalizada z_L dada por (2), obtemos:

$$\Gamma_L = \frac{z_L - 1}{z_L + 1} = |\Gamma_L|e^{j\theta} \quad (3)$$

Resolvendo (3) para a impedância de carga normalizada z_L :

$$z_L = \frac{1 + |\Gamma_L|e^{j\theta}}{1 - |\Gamma_L|e^{j\theta}} \quad (4)$$

onde $z_L = r_L + jx_L$ e $\Gamma_L = |\Gamma_L|e^{j\theta} = \text{Re}\{\Gamma_L\} + j\text{Im}\{\Gamma_L\} = |\Gamma_L| \cos \theta + j|\Gamma_L| \sin \theta = \Gamma_r + j\Gamma_i$.

Carta de Smith – fundamentação analítica

Dado que $z_L = r_L + jx_L$ e $\Gamma_L = |\Gamma_L|e^{j\theta} = \text{Re}\{\Gamma_L\} + j\text{Im}\{\Gamma_L\} = |\Gamma_L| \cos \theta + j|\Gamma_L| \sin \theta = \Gamma_r + j\Gamma_i$, então a equação (4) pode ser reescrita como:

$$r_L + jx_L = \frac{(1 + \Gamma_r) + j\Gamma_i}{(1 - \Gamma_r) - j\Gamma_i} \quad (5)$$

Multiplicando o numerador e o denominador pelo complexo conjugado $(1 - \Gamma_r) + j\Gamma_i$ do denominador de (5), obtemos:

$$r_L + jx_L = \frac{(1 - \Gamma_r^2 - \Gamma_i^2) + j2\Gamma_i}{(1 - \Gamma_r)^2 + \Gamma_i^2} \quad (6)$$

Separando as partes real e imaginária de (6):

$$r_L = \frac{1 - \Gamma_r^2 - \Gamma_i^2}{(1 - \Gamma_r)^2 + \Gamma_i^2} \quad (7)$$

$$x_L = \frac{2\Gamma_i}{(1 - \Gamma_r)^2 + \Gamma_i^2} \quad (8)$$

Rearranjando algebricamente as equações (7) e (8) obtemos respectivamente:

$$\left(\Gamma_r - \frac{r_L}{1 + r_L}\right)^2 + \Gamma_i^2 = \left(\frac{1}{1 + r_L}\right)^2 \quad (9)$$

$$(\Gamma_r - 1)^2 + \left(\Gamma_i - \frac{1}{x_L}\right)^2 = \left(\frac{1}{x_L}\right)^2 \quad (10)$$

Note que (9) e (10) representam duas famílias de círculos no plano $xy = \Gamma_r\Gamma_i$.

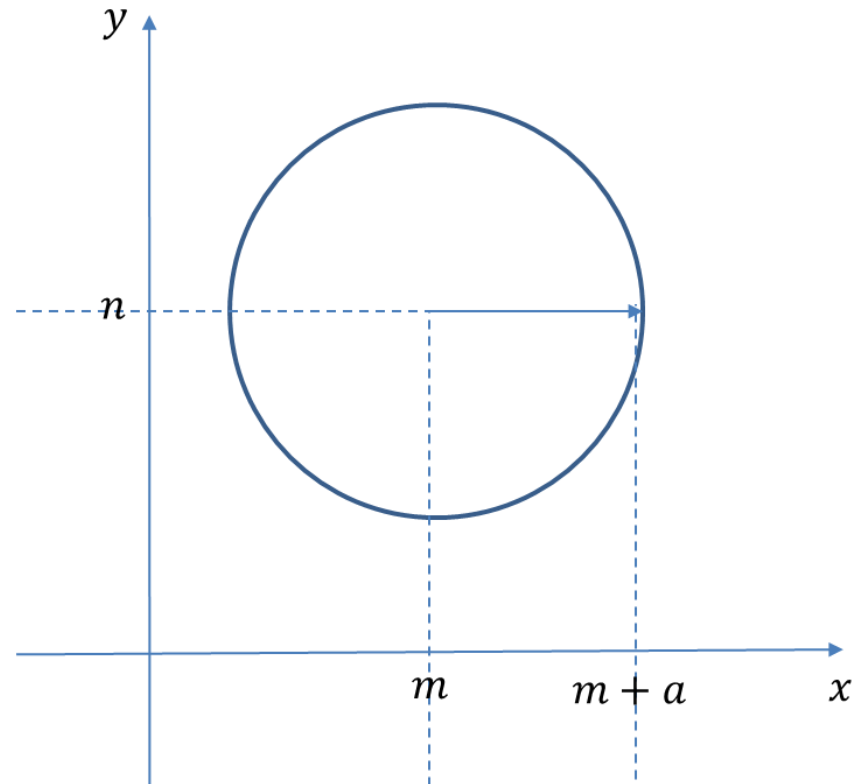
Carta de Smith – fundamentação analítica

Para efeito de interpretar as equações (9) e (10) como representativas de duas famílias de círculos no plano $xy = \Gamma_r \Gamma_i$, recordemos que a equação geral para um círculo de raio a , centrado em $x = m$ e $y = n$ é dada por

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = a^2 \quad (11)$$

raio a do círculo no plano $xy = \Gamma_r \Gamma_i$

Coordenadas (m, n) do centro do círculo de raio a no plano $xy = \Gamma_r \Gamma_i$



Carta de Smith – fundamentação analítica

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = a^2 \quad (11)$$

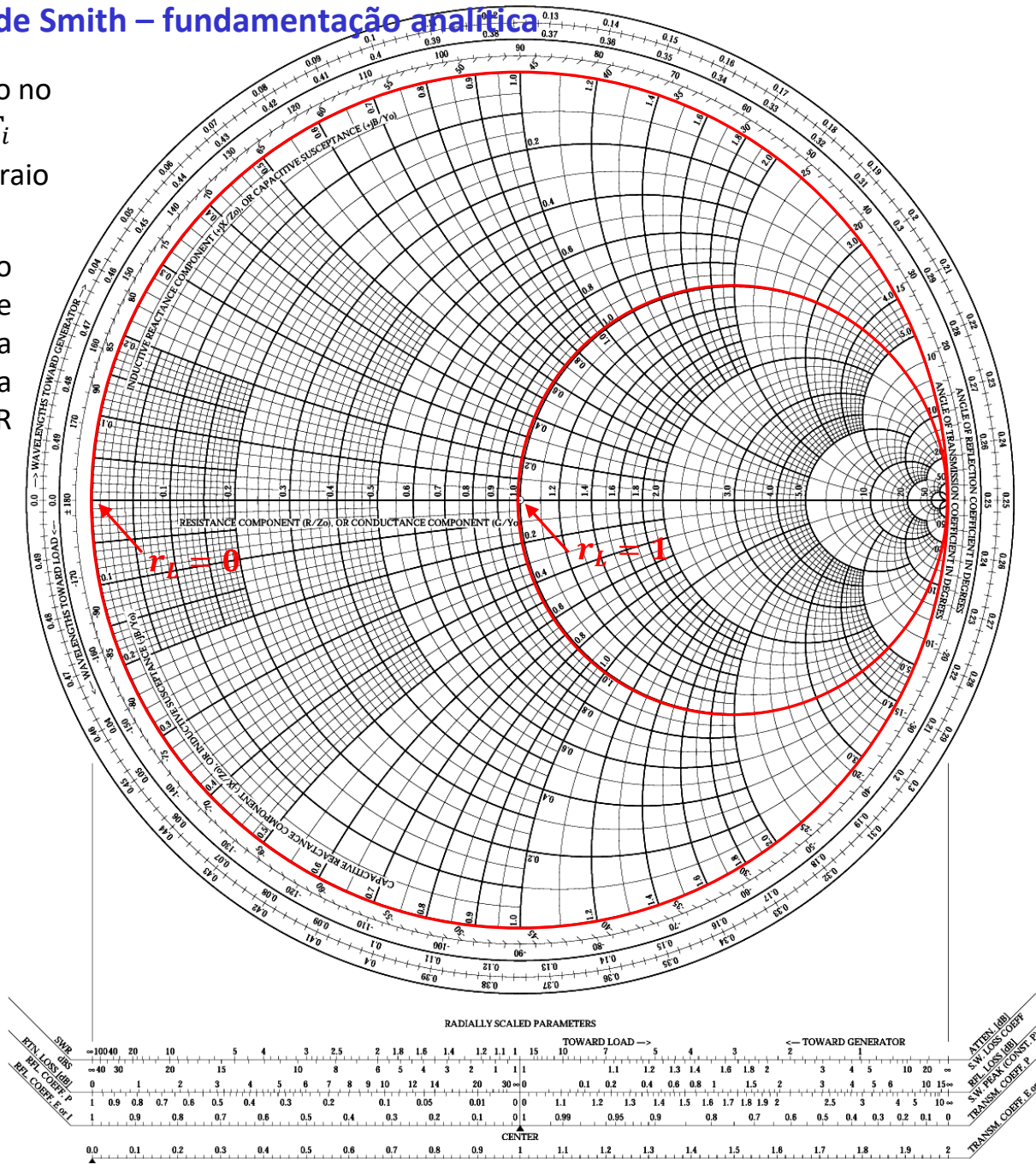
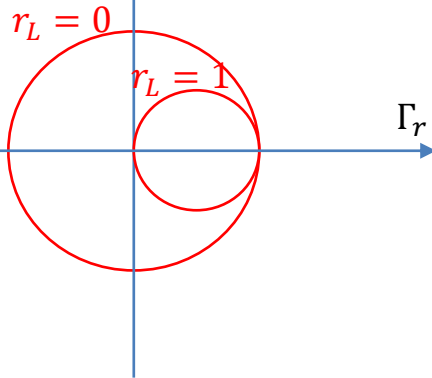
raio a do círculo no plano $xy = \Gamma_r \Gamma_i$

Coordenadas (m, n) do centro do círculo de raio a no plano $xy = \Gamma_r \Gamma_i$

Comparando a equação (11) com a equação (9) obtemos a equação para os círculos de resistência normalizada r_L (ou condutância normalizada g_L) identificados na escala "RESISTANCE COMPONENT (R/Zo) OR CONDUCTANCE COMPONENT (G/Yo)" :

$$\left(\Gamma_r - \frac{r_L}{1+r_L} \right)^2 + \Gamma_i^2 = \left(\frac{1}{1+r_L} \right)^2 \quad (9)$$

Coordenadas $\left(\frac{r_L}{1+r_L}, 0 \right)$ do centro do círculo de raio $\frac{1}{1+r_L}$ no plano $xy = \Gamma_r \Gamma_i$



Carta de Smith – fundamentação analítica

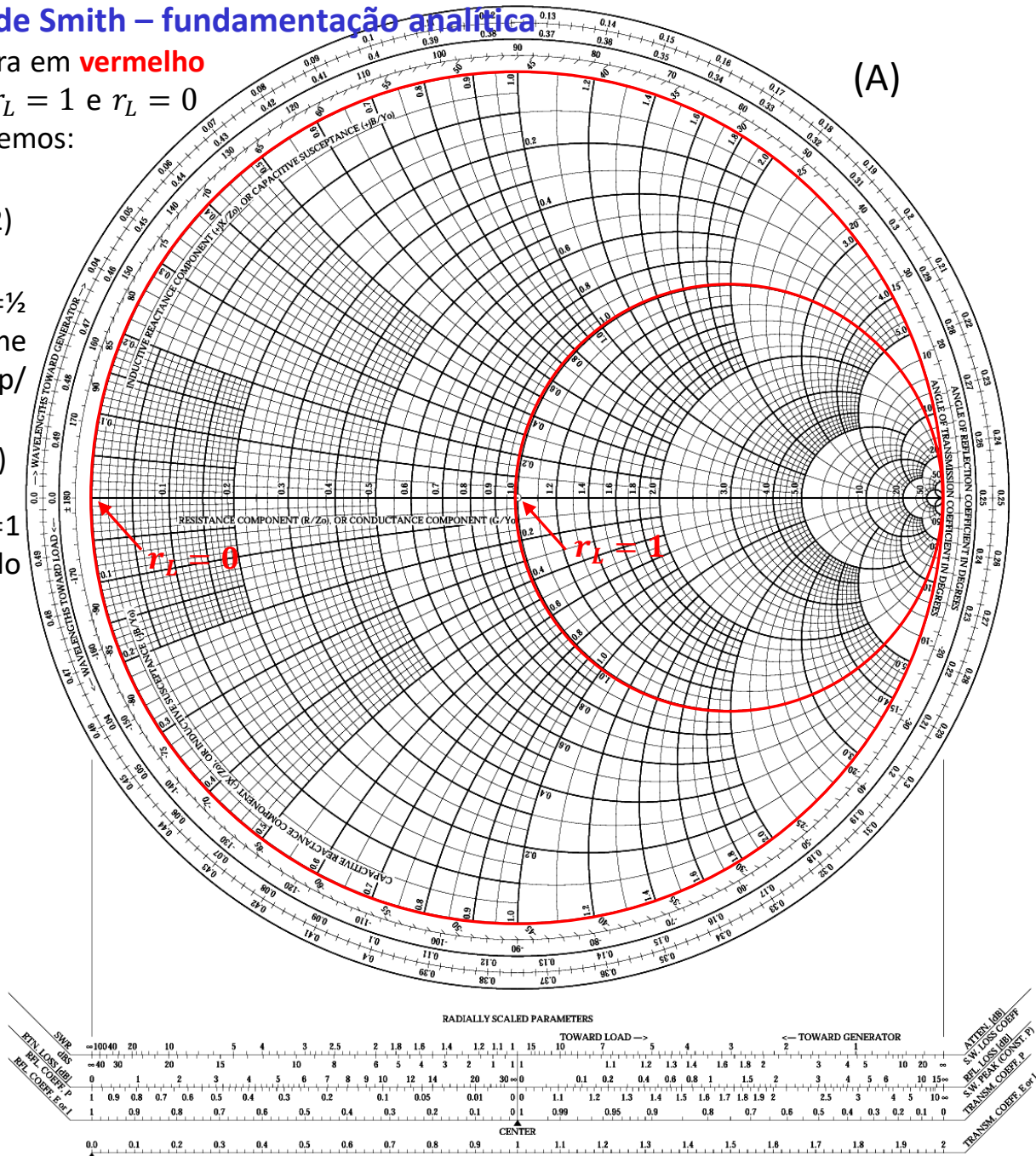
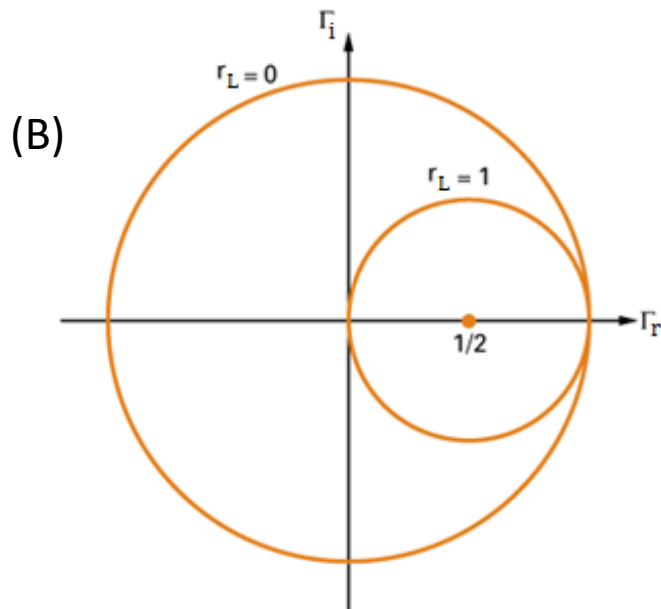
Por exemplo, a CS na figura (A) ao lado mostra em **vermelho** os círculos de resistência normalizada para $r_L = 1$ e $r_L = 0$ resultantes da equação (9). De (9) $p/r_L = 1$ temos:

$$\left(\Gamma_r - \frac{1}{2}\right)^2 + \Gamma_i^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad (12)$$

Note que (12) define um círculo de raio $a = 1/2$ centrado em $\Gamma_r = 1/2$ e $\Gamma_i = 0$, conforme círculo $r_L = 1$ nas figuras (A) e (B). De (9) $p/r_L = 0$ temos:

$$(\Gamma_r)^2 + \Gamma_i^2 = (1)^2 \quad (13)$$

Note que (13) define um círculo de raio $a = 1$ centrado em $\Gamma_r = 0$ e $\Gamma_i = 0$, conforme círculo $r_L = 0$ nas figuras (A) e (B).

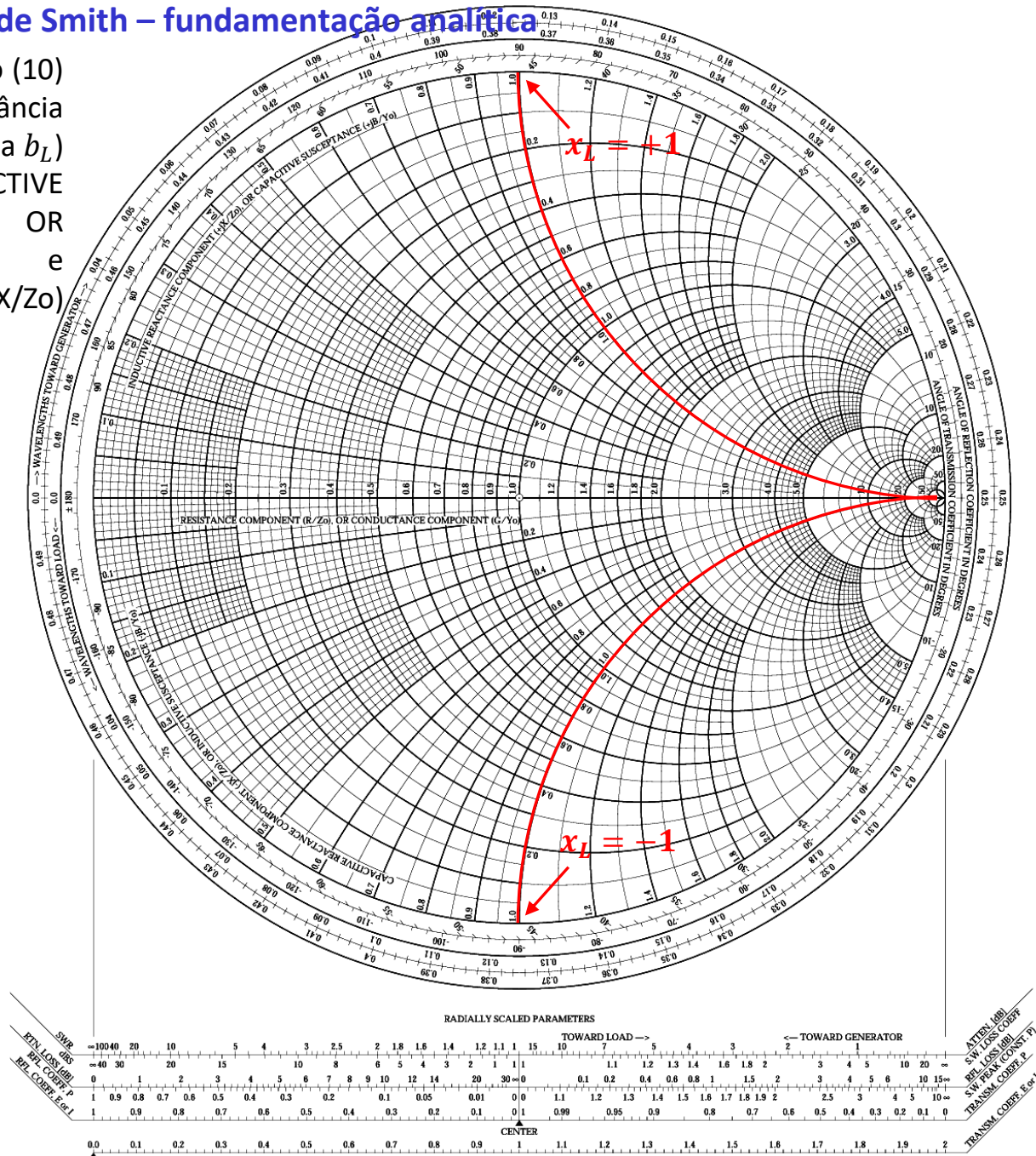
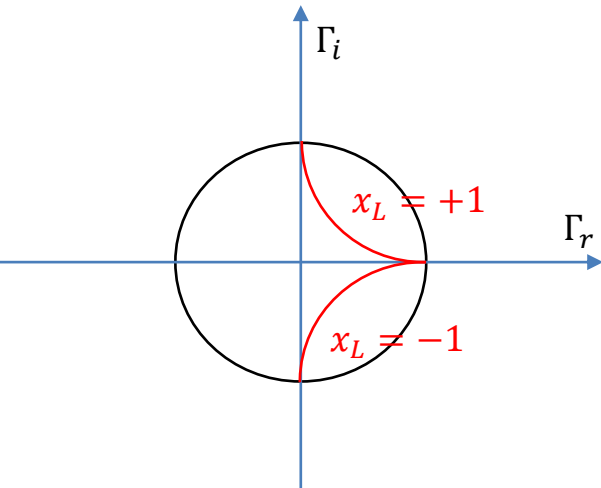


Carta de Smith – fundamentação analítica

Comparando a equação (11) com a equação (10) obtemos a equação para os círculos de reatância normalizada x_L (ou susceptância normalizada b_L) identificados nas escalas "INDUCTIVE REACTANCE COMPONENT (+jX/Zo) OR CAPACITIVE SUSCEPTANCE (+jB/Yo)" e "CAPACITIVE REACTANCE COMPONENT (-jX/Zo) OR INDUCTIVE SUSCEPTANCE (-jB/Yo)":

$$(\Gamma_r - 1)^2 + \left(\Gamma_i - \frac{1}{x_L}\right)^2 = \left(\frac{1}{x_L}\right)^2 \quad (10)$$

Coordenadas $(1, \frac{1}{x_L})$ do centro do círculo de raio $\frac{1}{x_L}$ no plano $xy = \Gamma_r \Gamma_i$



Carta de Smith – fundamentação analítica

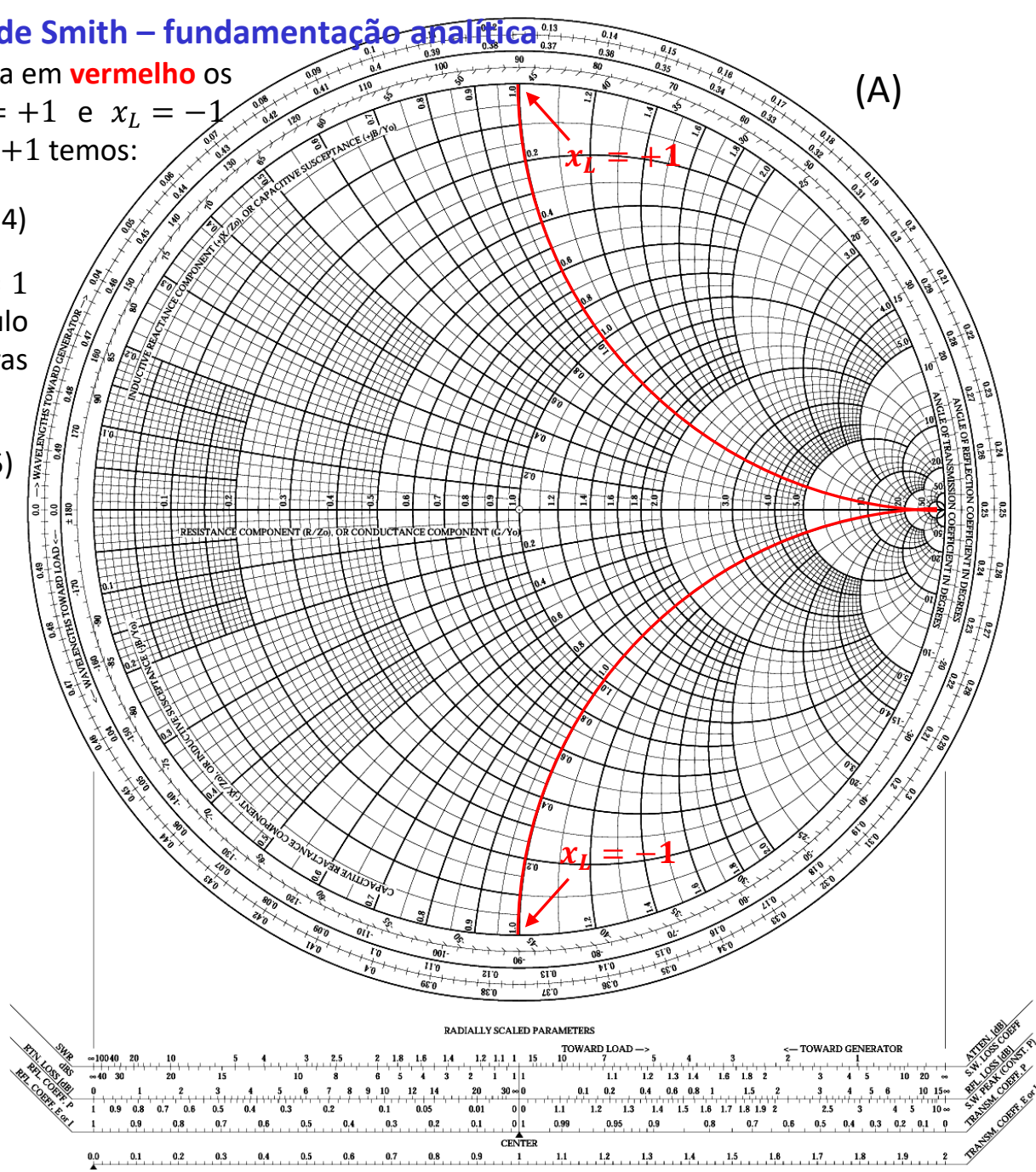
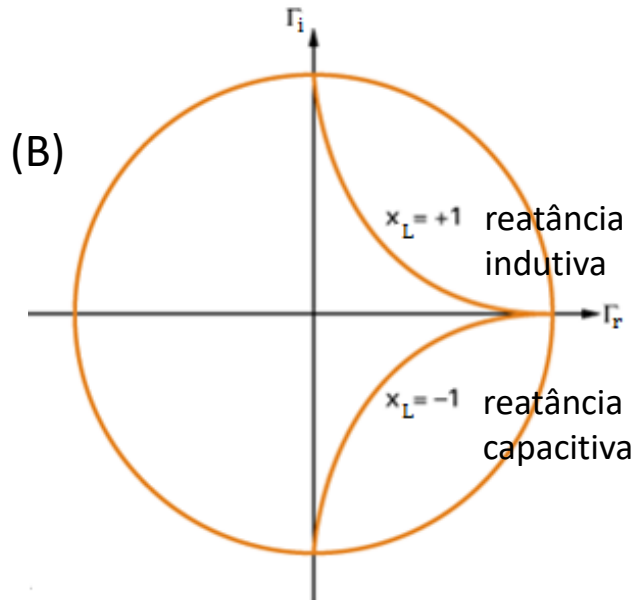
Por exemplo, a CS na figura (A) ao lado mostra em **vermelho** os círculos de reatância normalizada $p/ x_L = +1$ e $x_L = -1$ resultantes da equação (10). De (10) $p/ x_L = +1$ temos:

$$(\Gamma_r - 1)^2 + (\Gamma_i - 1)^2 = (1)^2 \quad (14)$$

Note que (14) define um círculo de raio $a = 1$ centrado em $\Gamma_r = 1$ e $\Gamma_i = 1$, conforme círculo $x_L = +1$ parcialmente mostrado nas figuras (A) e (B). De (10) $p/ x_L = -1$ temos:

$$(\Gamma_r - 1)^2 + (\Gamma_i + 1)^2 = (-1)^2 \quad (15)$$

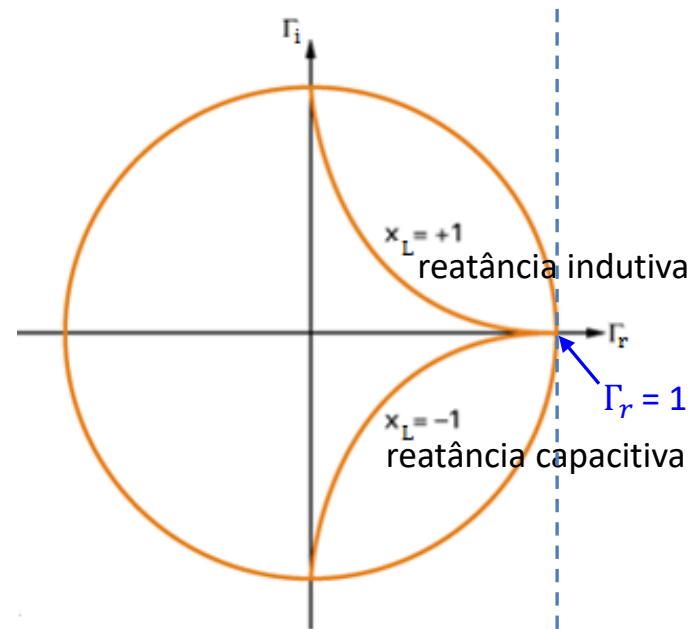
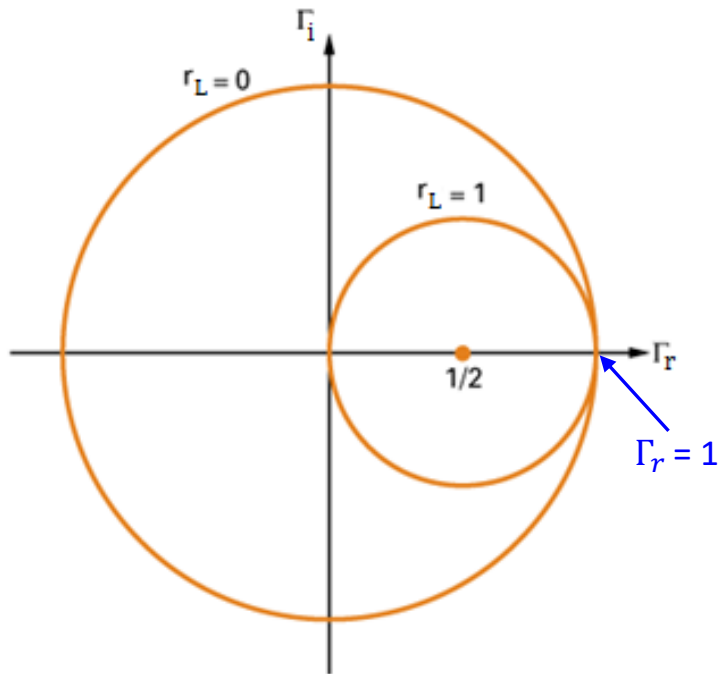
Note que (15) define um círculo de raio $a = 1$ centrado em $\Gamma_r = 1$ e $\Gamma_i = -1$, conforme círculo $x_L = -1$ parcialmente mostrado nas figuras (A) e (B).



Carta de Smith – fundamentação analítica

Observe na figura abaixo que:

- Todos os círculos de resistência (ou condutância) têm centros no eixo horizontal Γ_r ($\Gamma_i = 0$) e passam pelo ponto $\Gamma_r = 1$ localizado na extremidade direita da área gráfica da CS.
- Todos os círculos de reatância (ou susceptância) têm centros na linha vertical $\Gamma_r = 1$ (linha tracejada na figura) e passam pelo ponto $\Gamma_r = 1$.
- As curvas que definem os círculos de resistência (ou condutância) e reatância (ou susceptância) são ortogonais entre si.



Carta de Smith – impedância de entrada da LT

Conforme equação (49) do slide 45 do Cap V.8, a impedância de entrada Z_{in} [Ω] de uma LT com impedância característica Z_0 [Ω], constante de fase β [rad/m], comprimento l [m] e terminada por uma impedância Z_L [Ω] é dada por:

$$Z_{in} = \frac{V_S(z = -l)}{I_S(z = -l)} = Z_0 \frac{V_0^+ e^{+j\beta l} + V_0^- e^{-j\beta l}}{V_0^+ e^{+j\beta l} - V_0^- e^{-j\beta l}} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan(\beta l)}{Z_0 + jZ_L \tan(\beta l)} \quad [\Omega] \quad (16)$$

Dado que $V_0^- = \Gamma_L V_0^+$, sendo Γ_L o coeficiente de reflexão na carga, a equação (16) pode ser reescrita como:

$$Z_{in} = Z_0 \frac{V_0^+ e^{+j\beta l} + V_0^- e^{-j\beta l}}{V_0^+ e^{+j\beta l} - V_0^- e^{-j\beta l}} = Z_0 \frac{V_0^+ e^{+j\beta l} + \Gamma_L V_0^+ e^{-j\beta l}}{V_0^+ e^{+j\beta l} - \Gamma_L V_0^+ e^{-j\beta l}} = Z_0 \frac{e^{+j\beta l} + \Gamma_L e^{-j\beta l}}{e^{+j\beta l} - \Gamma_L e^{-j\beta l}} = Z_0 \frac{1 + \Gamma_L e^{-2j\beta l}}{1 - \Gamma_L e^{-2j\beta l}} \quad [\Omega] \quad (17)$$

E dado que $\Gamma_L = |\Gamma_L| e^{j\theta}$, então (17) é reescrita como:

$$Z_{in} = Z_0 \frac{1 + \Gamma_L e^{-2j\beta l}}{1 - \Gamma_L e^{-2j\beta l}} = Z_0 \frac{1 + |\Gamma_L| e^{j\theta} e^{-2j\beta l}}{1 - |\Gamma_L| e^{j\theta} e^{-2j\beta l}} = Z_0 \frac{1 + |\Gamma_L| e^{j(\theta - 2\beta l)}}{1 - |\Gamma_L| e^{j(\theta - 2\beta l)}} \quad [\Omega] \quad (18)$$

Normalizando Z_{in} dada por (18) pela impedância característica Z_0 da LT obtemos a impedância de entrada normalizada z_{in} da LT:

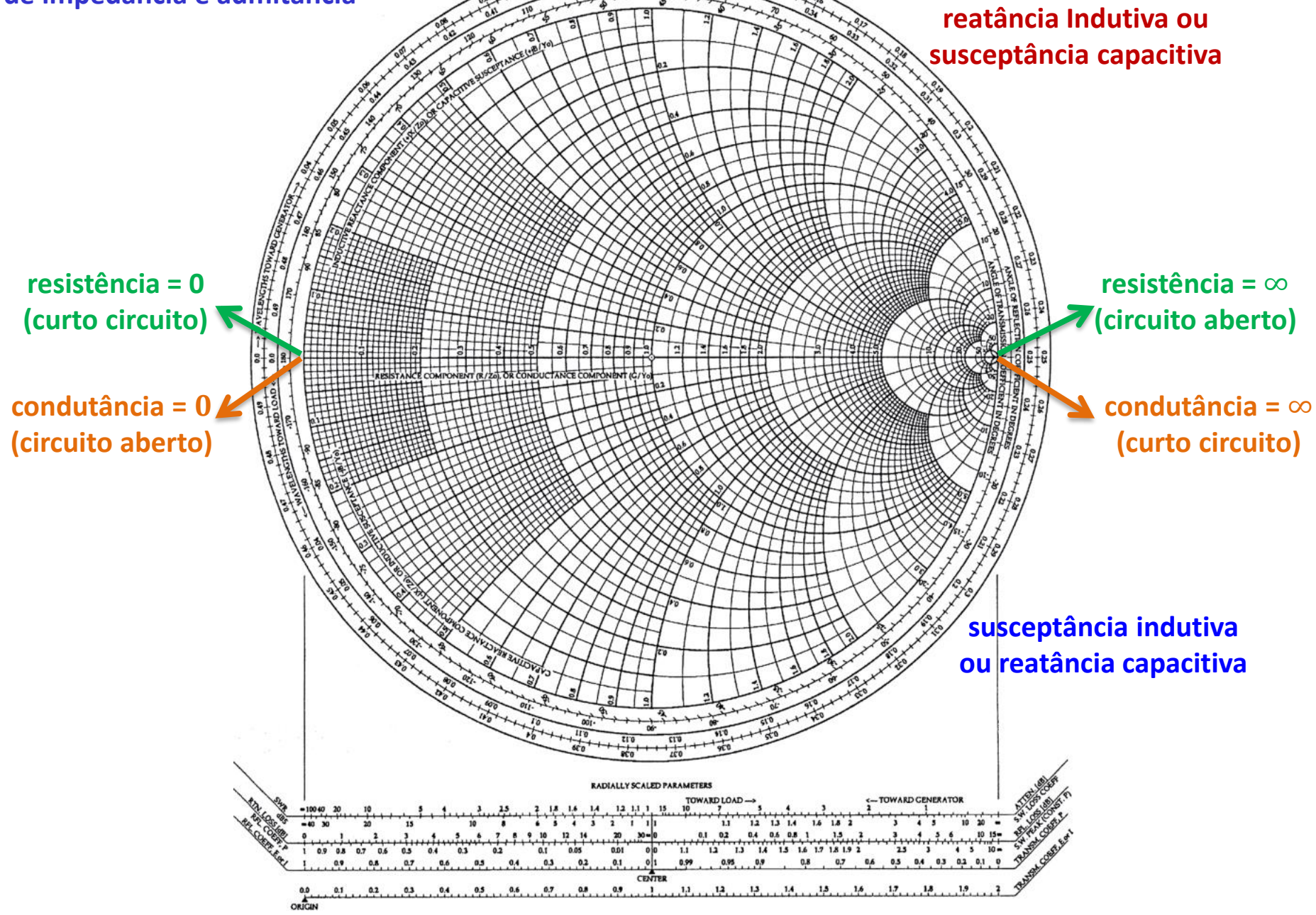
$$z_{in} = \frac{Z_{in}}{Z_0} = \frac{1 + |\Gamma_L| e^{j(\theta - 2\beta l)}}{1 - |\Gamma_L| e^{j(\theta - 2\beta l)}} \quad (19)$$

Comparemos agora a impedância de entrada normalizada z_{in} dada por (19) c/ a impedância de carga normalizada z_L dada pela equação (4) do slide 8, abaixo reproduzida:

$$z_L = \frac{1 + |\Gamma_L| e^{j\theta}}{1 - |\Gamma_L| e^{j\theta}} \quad (4)$$

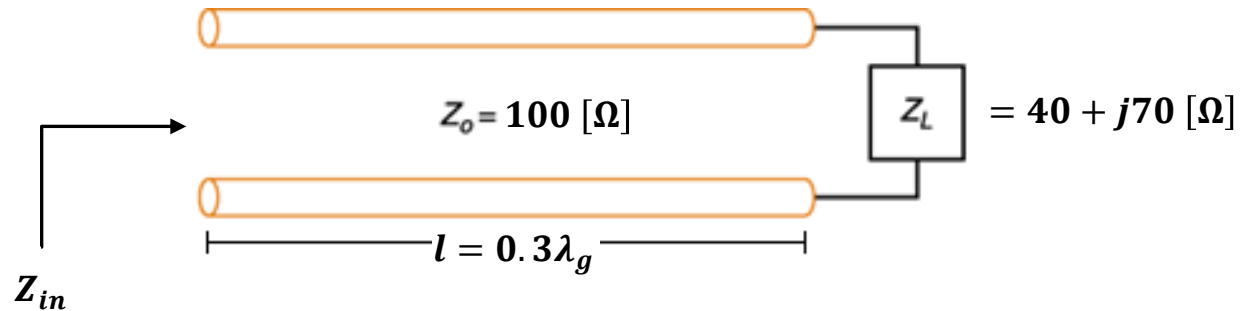
Note a similaridade entre as equações (19) e (4), em que a única diferença entre a expressão de z_{in} e a expressão de z_L é o ângulo de fase $-2\beta l$ sendo adicionado ao ângulo θ do coeficiente de reflexão $\Gamma_L = |\Gamma_L| e^{j\theta}$ na carga. Isto sugere que, se plotarmos o ponto z_L na CS plotando também o correspondente círculo de raio $|\Gamma_L|$ (ver slide 4) para uma LT de comprimento l , a impedância z_{in} vista na entrada da LT terminada pela impedância z_L pode ser encontrada girando o ponto z_L sobre o círculo de raio $|\Gamma_L|$ de um ângulo $2\beta l$ no sentido horário (i.e., subtraindo $2\beta l$ de θ). Isto equivale a percorrer uma distância l na escala “WAVELENGTHS TOWARD GENERATOR” da CS a partir do ponto z_L .

Carta de Smith – escalas gráficas de impedância e admitância



Carta de Smith – procedimento de uso

Exemplo 1: Uma LT sem perdas, com impedância característica $Z_0 = 100 \text{ } [\Omega]$ é terminada em uma impedância de carga $Z_L = 40 + j70 \text{ } [\Omega]$. O comprimento da LT é $l = 0.3\lambda_g$, onde λ_g é o comprimento de onda da onda EM guiada na LT.



Utilizando a Carta de Smith, **pede-se:**

- (a) Determine o coeficiente de reflexão Γ_L na carga da LT.
- (b) Determine o coeficiente de reflexão Γ_i na entrada da LT.
- (c) Determine impedância de entrada $Z_{in} \text{ } [\Omega]$ da LT.
- (d) Determine a relação de onda estacionária ROE na LT.
- (e) Determine a perda de retorno RL na LT.

Solução:

Carta de Smith – procedimento de uso

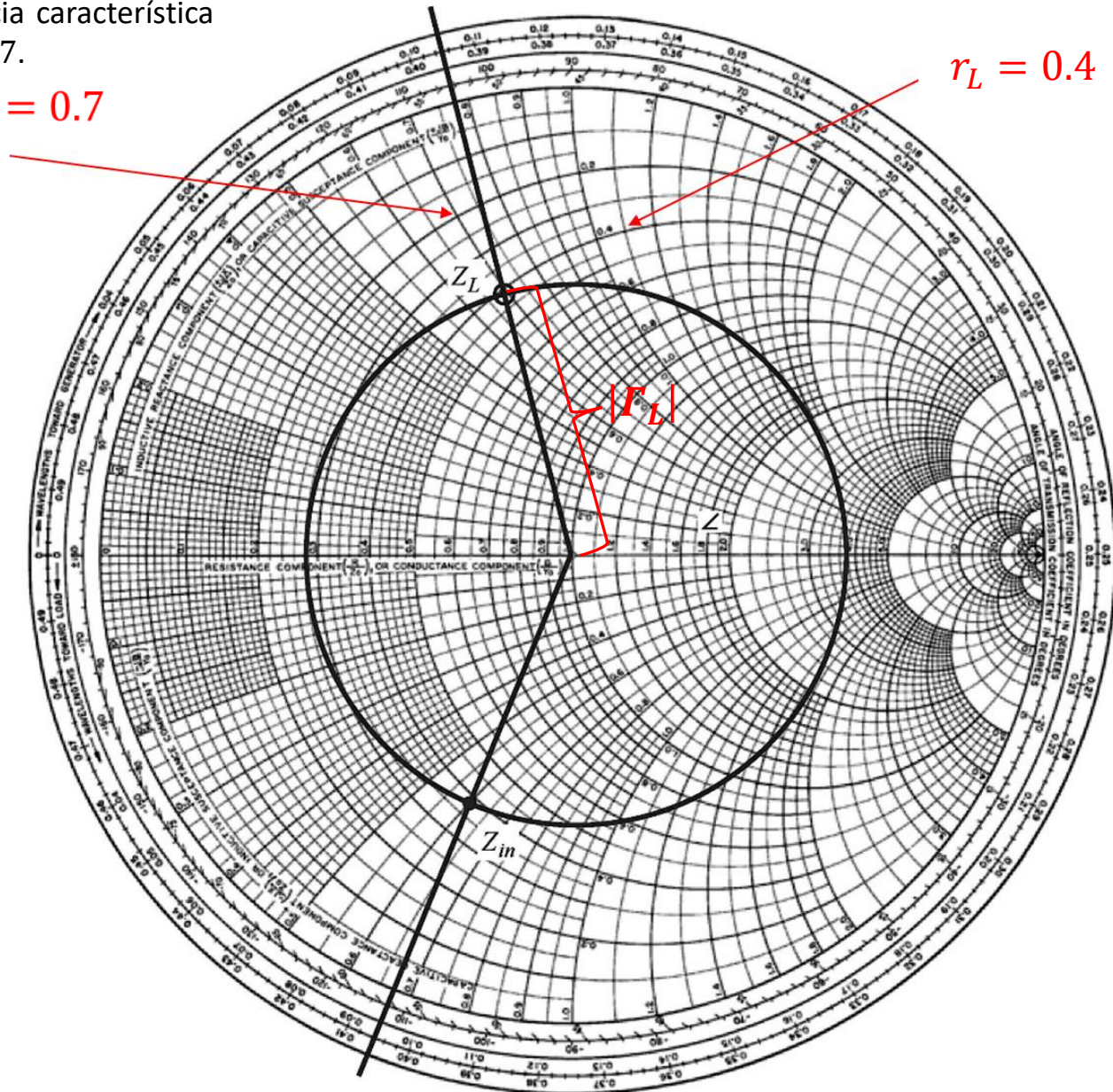
Primeiramente é necessário normalizar a impedância de carga $Z_L = 40 + j70 \text{ } [\Omega]$ pela impedância característica $Z_0 = 100 \text{ } [\Omega]$, resultando $z_L = 0.4 + j0.7$.

$$x_L = 0.7$$

$$r_L = 0.4$$

Daí, marca-se $z_L = 0.4 + j0.7$ nas escalas "RESISTANCE COMPONENT (R/Z₀) OR CONDUCTANCE COMPONENT (G/Y₀)" e "INDUCTIVE REACTANCE COMPONENT (+jX/Z₀) OR CAPACITIVE SUSCEPTANCE (+jB/Y₀)".

A seguir, a partir de $z_L = 0.4 + j0.7$, traça-se com um compasso o círculo de raio $|r_L|$, conforme mostra a figura.



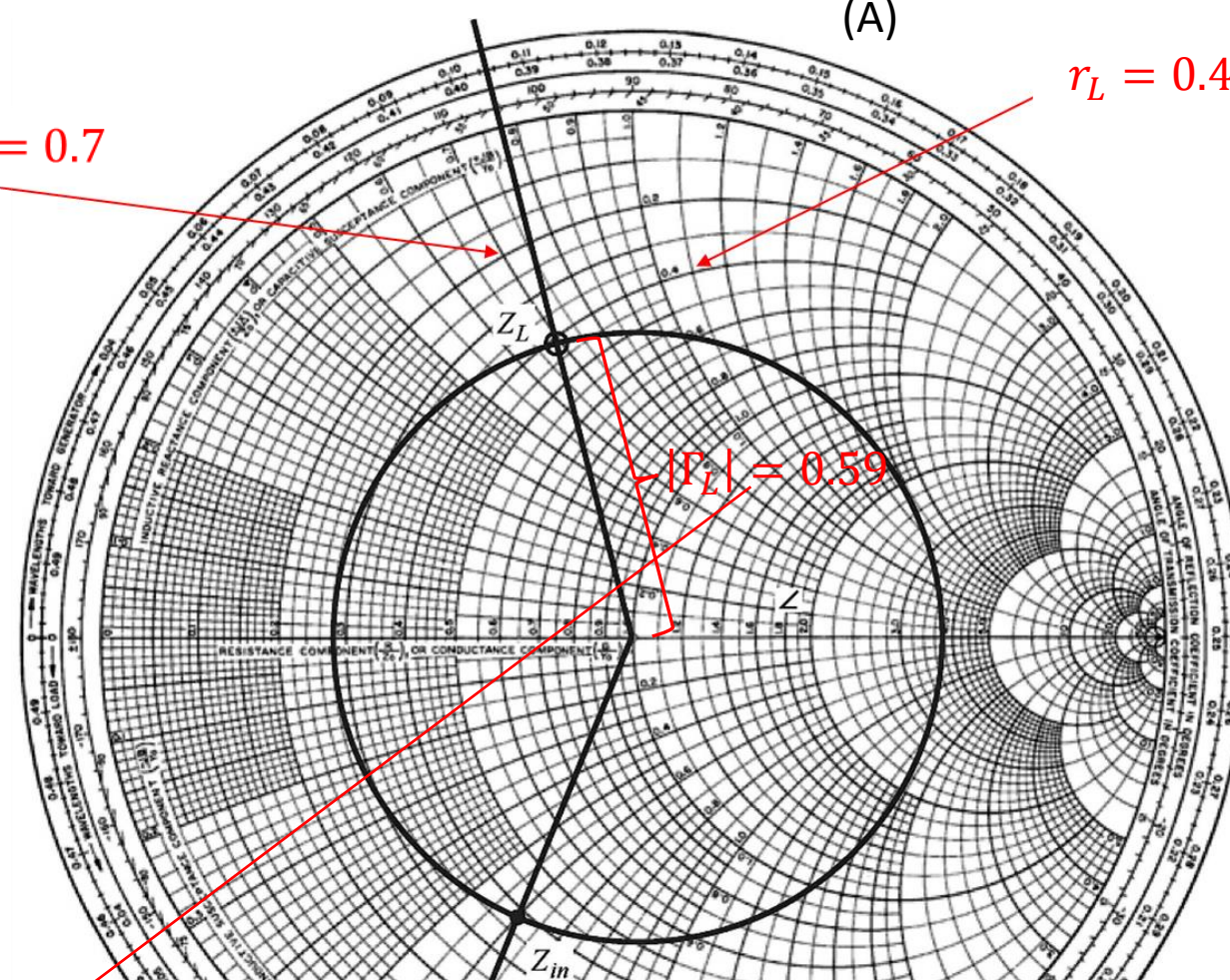
Carta de Smith – procedimento de uso

(A)

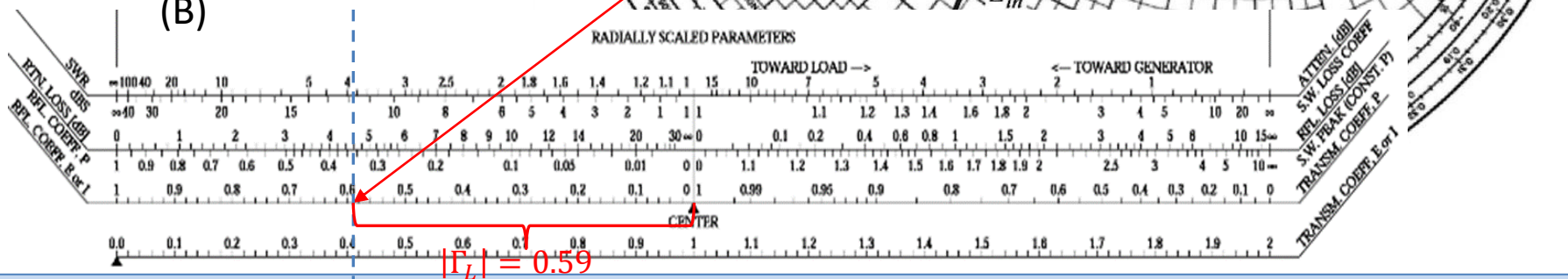
$x_L = 0.7$

$r_L = 0.4$

$|\Gamma_L| = 0.59$



(B)



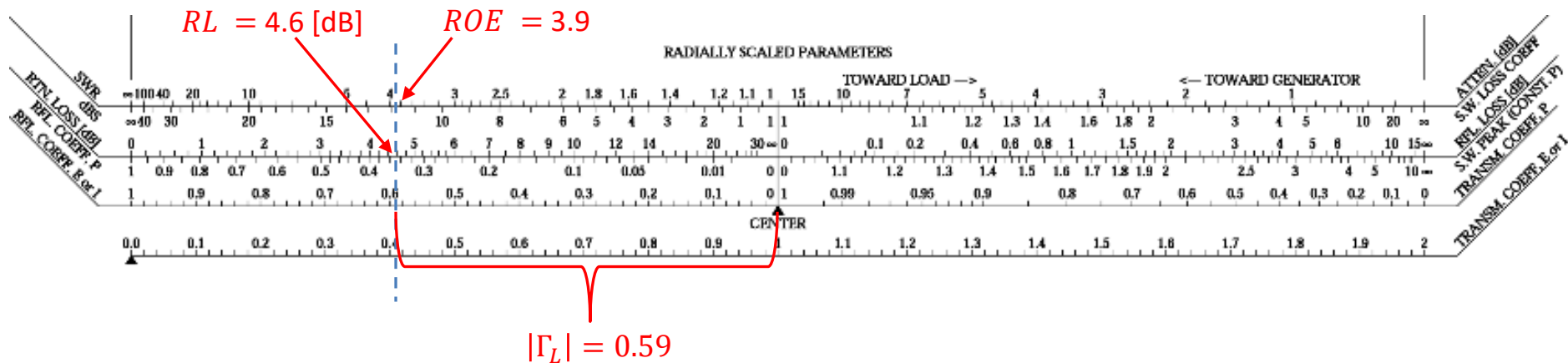
$|\Gamma_L| = 0.59$

Utilizando novamente o compasso e a escala “RFL COEFF, E or I” reproduzida em (B) abaixo, determina-se o valor do raio $|\Gamma_L|$ do círculo plotado na CS em (A) ao lado, resultando $|\Gamma_L| = 0.59$, valor que corresponde à magnitude do coeficiente de reflexão Γ_L na carga.

Carta de Smith – procedimento de uso

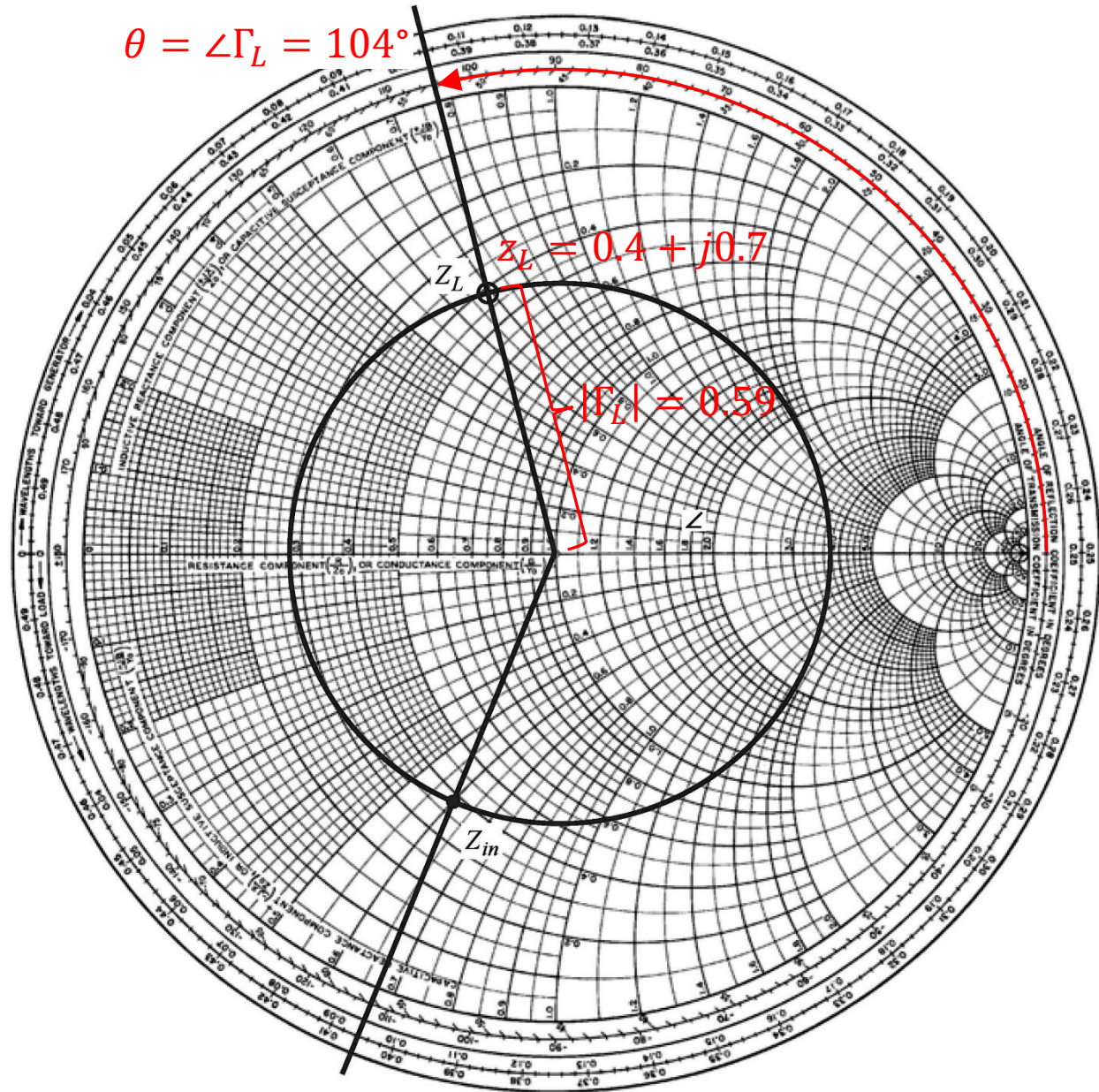
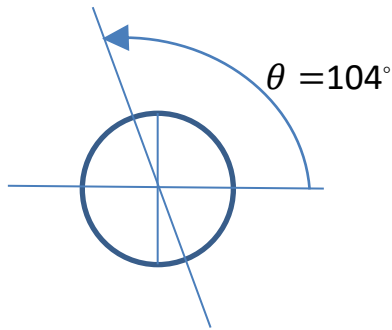
A medida $|\Gamma_L| = 0.59$ obtida com o compasso na escala “RFL COEFF, E or I” no slide anterior é aplicada à escala “SWR”, resultando $ROE = 3.9$ conforme mostrado abaixo.

De mesma forma, a medida $|\Gamma_L| = 0.59$ obtida com o compasso na escala “RFL COEFF, E or I” no slide anterior é aplicada à escala “RTN LOSS [dB]”, resultando $RL = 4.6$ [dB] conforme mostrado abaixo.



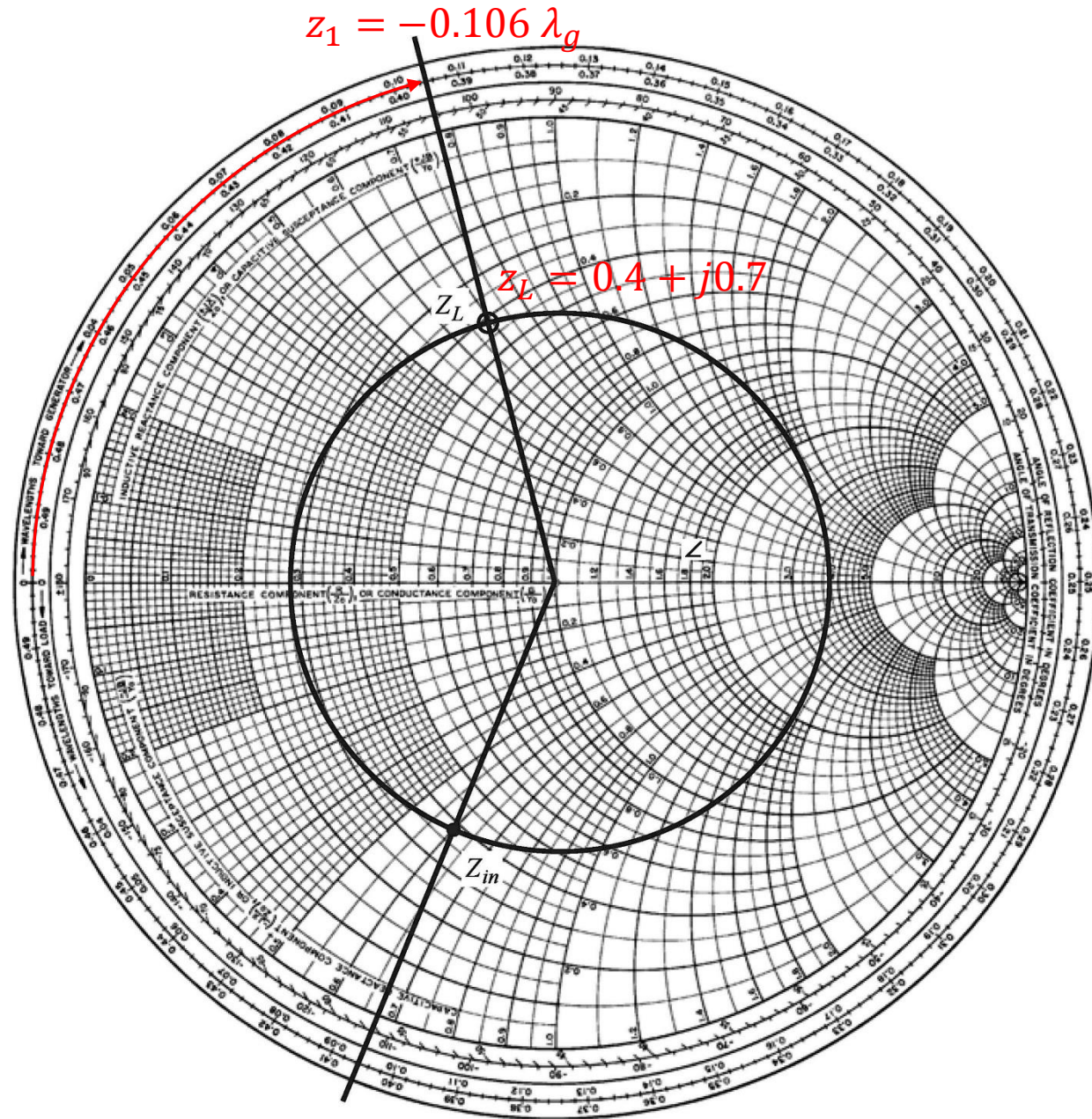
Carta de Smith – procedimento de uso

Prolongando o raio $|\Gamma_L|$ em $z_L = 0.4 + j0.7$ até que a reta radial intercepte a escala “ANGLE OF REFLECTION COEFFICIENT IN DEGREES” obtemos o ângulo $\theta = \angle\Gamma_L = 104^\circ$, sendo θ o ângulo do coeficiente de reflexão $\Gamma_L = |\Gamma_L|e^{j\theta}$ na carga.



Carta de Smith – procedimento de uso

Prolongando o raio $|\Gamma_L|$ em $z_L = 0.4 + j0.7$ até que a reta radial intercepte a escala “WAVELENGTHS TOWARD GENERATOR” obtemos o ponto $z_1 = -0.106 \lambda_g$ na referida escala.



Carta de Smith – procedimento de uso

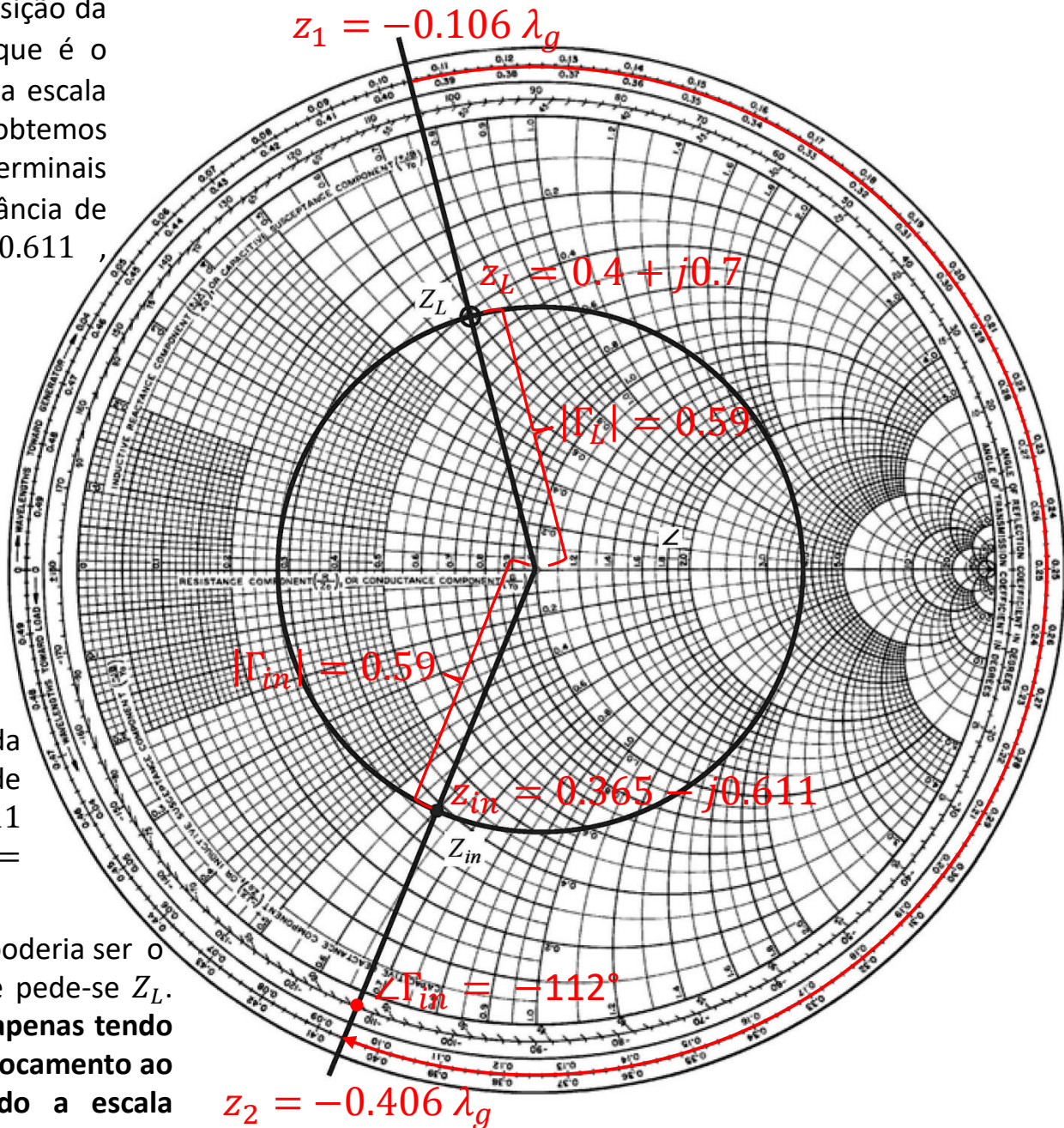
Partindo do ponto $z_1 = -0.106 \lambda_g$ (na posição da carga da LT) e percorrendo $l = 0.3\lambda_g$ (que é o comprimento da LT) no sentido horário na escala “WAVELENGTHS TOWARD GENERATOR” obtemos o ponto $z_2 = -0.406 \lambda_g$ (na posição dos terminais de entrada da LT), e que define a impedância de entrada normalizada $z_{in} = 0.365 - j0.611$, conforme mostrado na figura ao lado.

Note na figura que a magnitude do coeficiente de reflexão na entrada é a mesma do coeficiente de reflexão na carga, i.e., $|\Gamma_{in}| = |\Gamma_L| = 0.59$.

O ângulo do coeficiente de reflexão na entrada da LT é medido na escala “ANGLE OF REFLECTION COEFFICIENT IN DEGREES” e resulta $\angle \Gamma_{in} = -112^\circ$, conforme mostra a bolhinha vermelha na referida escala.

A impedância Z_{in} de entrada da LT é obtida da desnormalização da impedância de entrada normalizada $z_{in} = 0.365 - j0.611$ em relação a $Z_0 = 100 [\Omega]$. Ou seja, $Z_{in} = Z_0 z_{in} = 36.5 - j61.1 [\Omega]$.

Note que o problema dado no enunciado poderia ser o problema inverso, i.e., é dado Z_{in} e Z_0 e pede-se Z_L . Neste caso o procedimento é o mesmo, apenas tendo o cuidado de que a representação do deslocamento ao longo da LT deve ser efetuada usando a escala “WAVELENGTHS TOWARD LOAD” da CS.



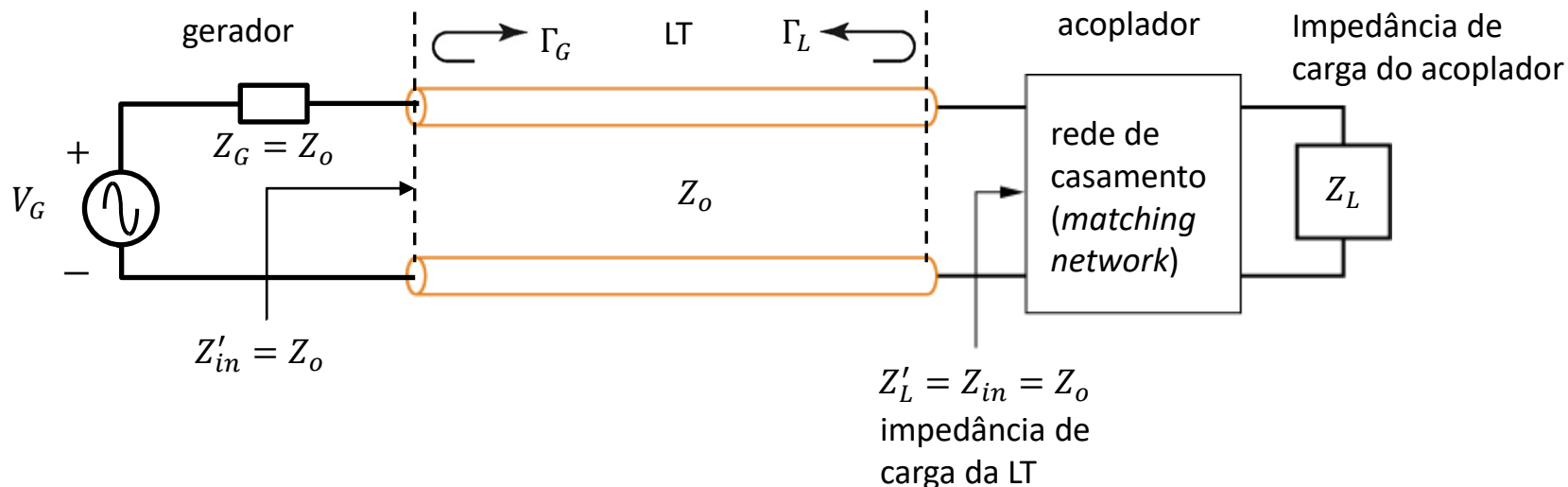
Casamento de impedância

Conforme discutimos nos slides 67 a 69 do Cap V.8, para obter a máxima transferência de potência à impedância de carga de uma LT sem perdas e simultaneamente manter a integridade do sinal de informação transportado pela onda EM que se propaga na LT é necessário que as duas condições (I) e (II) abaixo sejam simultaneamente atendidas (vide figura abaixo):

(I) A impedância de carga Z'_L [Ω] da LT seja casada com a impedância característica Z_o [Ω] da LT, i.e., $Z'_L = Z_o$. Para esta situação $Z'_L = Z_o$ não há reflexão da onda EM na fronteira LT–carga ($\Gamma_L = 0$) e a impedância de entrada Z'_{in} [Ω] da LT resulta casada com Z_o , i.e., $Z'_{in} = Z_o$.

(II) A impedância interna Z_G [Ω] do gerador seja casada com a impedância característica Z_o [Ω] da LT, i.e., $Z_G = Z_o$, de modo que não há reflexão da onda EM na fronteira LT–gerador ($\Gamma_G = 0$).

Note na figura abaixo, que a impedância de carga Z'_L da LT é a impedância de entrada Z_{in} de uma rede de casamento (acoplador). O objetivo do acoplador é converter a impedância de carga Z_L [Ω] do acoplador em uma impedância Z_{in} em sua entrada de forma que $Z_{in} = Z_o$, o que, conseqüentemente, assegura o atendimento da condição (I) no parágrafo anterior.



Há várias técnicas para o casamento de impedâncias entre blocos funcionais de um sistema que transporta um sinal elétrico e/ou uma onda EM (ver https://en.wikipedia.org/wiki/Impedance_matching). Neste capítulo estudaremos duas técnicas: o acoplador com transformador de $\lambda/4$ e o acoplador com *stub* simples.

Casamento de impedância – transformador de $\lambda/4$

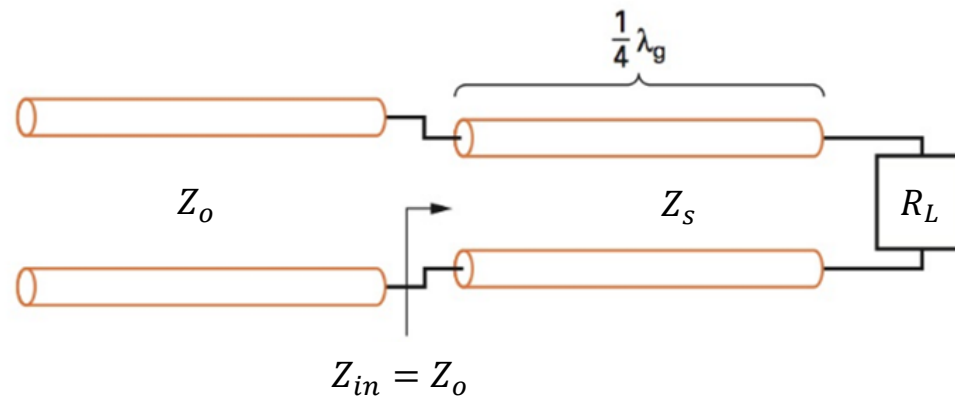
O acoplador com transformador de $\lambda_g/4$ é aplicável quando a impedância de carga do acoplador for não-reativa, i.e., $Z_L = R_L + j0 [\Omega]$. Conforme vimos no slide 50 do Cap V.8, toda LT sem perdas e de tamanho $l = \lambda_g/4$ (ou de tamanho l múltiplo inteiro ímpar de $\lambda_g/4$) é tal que sua impedância de entrada Z_{in} é dada por:

$$Z_{in} = \frac{Z_S^2}{R_L} \quad (21)$$

onde Z_S é a impedância característica do transformador de $\lambda_g/4$ (vide figura abaixo).

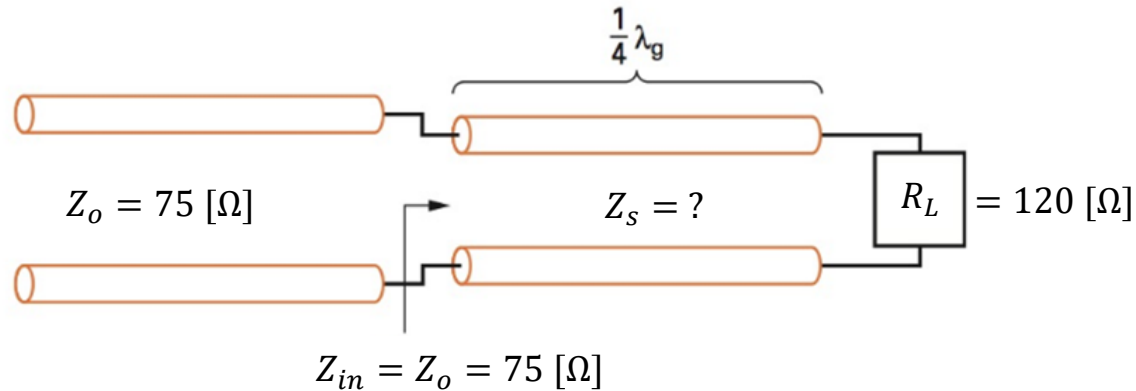
Dado que, conforme discutimos no slide anterior, o objetivo do acoplador é converter a impedância de carga $R_L [\Omega]$ do acoplador em uma impedância Z_{in} em sua entrada de forma que $Z_{in} = Z_0$, sendo Z_0 a impedância característica da LT que alimenta o acoplador, então de (21) temos que a impedância característica Z_S do transformador de $\lambda_g/4$ é dada por:

$$Z_{in} = \frac{Z_S^2}{R_L} = Z_0 \longrightarrow Z_S = \sqrt{Z_0 R_L} \quad (22)$$



Casamento de impedância – transformador de $\lambda/4$

Exemplo 2: Uma LT sem perdas com impedância característica $Z_0 = 75 [\Omega]$ deve ser casada com uma impedância de carga $R_L = 120 [\Omega]$ através de um transformador de $\lambda_g/4$, conforme mostra a figura abaixo:



Pede-se: Determine o valor da impedância característica $Z_S [\Omega]$ do transformador de $\lambda_g/4$ que efetua o referido casamento de impedâncias.

Solução:

Da equação (22):

$$Z_S = \sqrt{Z_0 R_L} = \sqrt{75[\Omega] \cdot 120[\Omega]} = 94.86 [\Omega]$$

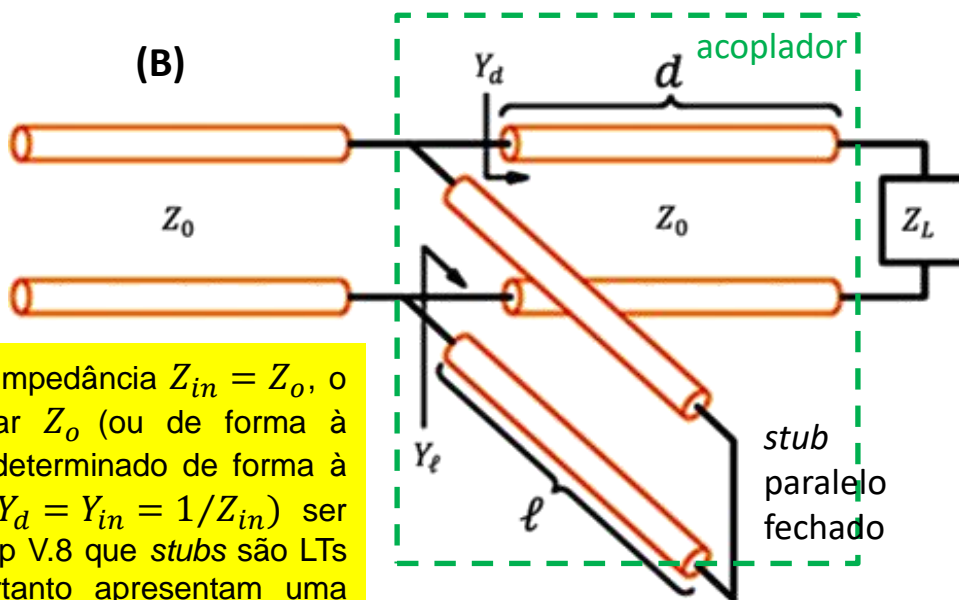
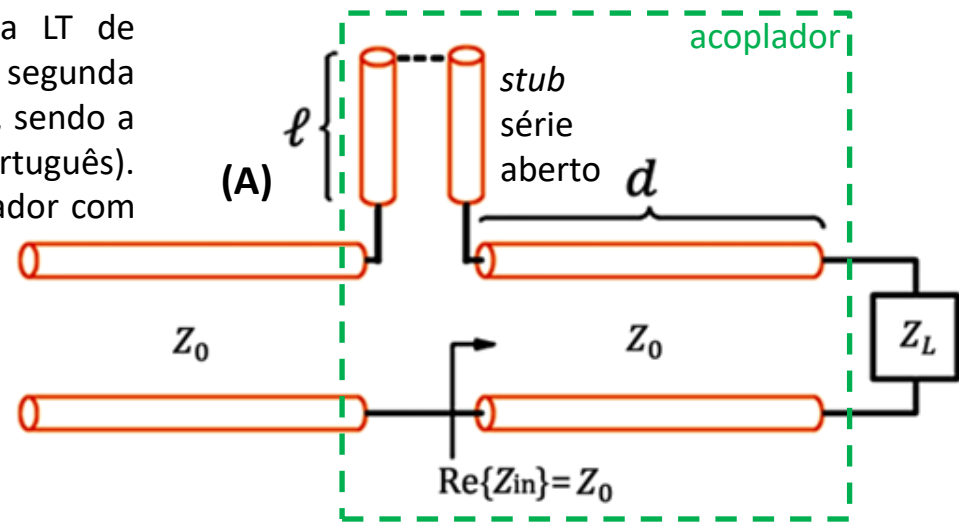
Note que o transformador de $\lambda_g/4$ manterá o tamanho $\lambda_g/4$ somente em uma faixa estreita de frequências em torno da frequência central $f_0 = \frac{v_p}{\lambda_g}$ [Hz], onde v_p [m/s] é a velocidade de propagação da onda que se propaga ao longo da LT (velocidade de fase). Portanto, quando a largura de banda do espectro do sinal é significativa em relação a f_0 , é necessário adotar abordagens alternativas para o casamento de impedâncias (ver [https://eng.libretexts.org/Bookshelves/Electrical_Engineering/Electronics/Microwave and RF Design III - Networks \(Steer\)/07%3A Chapter 7/7.4%3A Stepped-Impedance Transmission Line Transformer](https://eng.libretexts.org/Bookshelves/Electrical_Engineering/Electronics/Microwave_and_RF_Design_III_-_Networks_(Steer)/07%3A_Chapter_7/7.4%3A_Stepped-Impedance_Transmission_Line_Transformer)).

Casamento de impedância – acoplador com *stub* simples

Conforme discutimos no slide 25, o objetivo do acoplador é converter a impedância de carga Z_L [Ω] do acoplador em uma impedância Z_{in} na sua entrada de forma que $Z_{in} = Z_o$, sendo Z_o a impedância característica da LT que alimenta o acoplador. Duas maneiras de implementar um acoplador construído com LTs são mostradas em (A) e (B) abaixo.

Em (A) é mostrado um acoplador construído com uma LT de comprimento d em cuja entrada é conectada **em série** uma segunda LT de comprimento ℓ com os terminais de carga **em aberto**, sendo a LT de comprimento ℓ denominada de **stub** (= “tôco” em português). E, em função disto, este acoplador é denominado de acoplador com *stub* série aberto (*series open stub*). Alternativamente, o *stub* pode ter seus terminais de carga fechados com um curto circuito, situação em que o acoplador é denominado de acoplador com *stub* série fechado (*series shorted stub*).

Em (B) é mostrado um acoplador construído com uma LT de comprimento d em cuja entrada é conectada **em paralelo** uma segunda LT de comprimento ℓ com os terminais de carga **fechados por um curto circuito**, que, assim como em (A), é também denominada de **stub**. Em função disto, este acoplador é denominado de acoplador com *stub* paralelo fechado (*parallel shorted stub*). Alternativamente, o *stub* pode ter seus terminais de carga abertos, situação em que o acoplador é denominado de acoplador com *stub* paralelo aberto (*parallel open stub*).



Para converter a impedância de carga Z_L [Ω] do acoplador na impedância $Z_{in} = Z_o$, o comprimento d é determinado de forma à $\text{Re}(Z_{in})$ igualar Z_o (ou de forma à $\text{Re}(Y_d = Y_{in} = 1/Z_{in})$ igualar $Y_o = 1/Z_o$). Em seguida ℓ é determinado de forma à $\text{Im}(Z_{in})$ ser cancelado pelo *stub* série (ou de forma à $\text{Im}(Y_d = Y_{in} = 1/Z_{in})$ ser cancelado pelo *stub* paralelo). Lembre dos slides 46 a 49 do Cap V.8 que *stubs* são LTs terminadas em curto-circuito e/ou em circuito aberto, e portanto apresentam uma impedância de entrada puramente reativa, o que permite cancelar $\text{Im}(Z_{in})$ e $\text{Im}(Y_d)$.

Casamento de impedância – acoplador com *stub* série

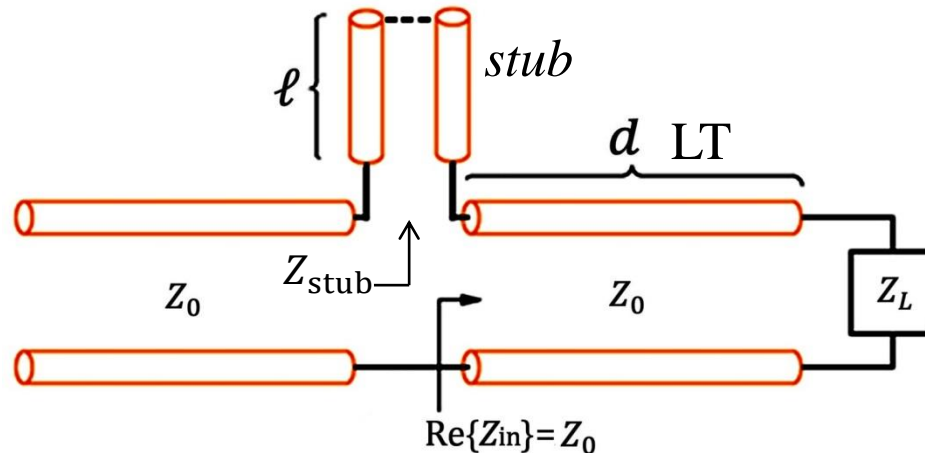
No acoplador com *stub* série (aberto ou fechado) mostrado na figura a impedância de carga Z_L [Ω] do acoplador é convertida pela LT de comprimento d na impedância de entrada $Z_{in} = R_{in} + jX_{in}$ [Ω] de tal forma que se obtenha os seguintes resultados:

(1) $R_{in} = \text{Re}(Z_{in})$ resulte igual a Z_0 , i.e., $R_{in} = Z_0$.

(2) $X_{in} = \text{Im}(Z_{in})$ seja cancelado pela reatância $Z_{\text{stub}} = jX_{\text{stub}}$ do *stub* de comprimento ℓ , i.e., $X_{in} + X_{\text{stub}} = 0$.

Para este fim, primeiramente, a partir de Z_L , o comprimento d é determinado graficamente em uma CS de tal forma que $\text{Re}(Z_{in}) = Z_0$.

A seguir ℓ é determinado em outra CS de tal forma que a reatância $X_{\text{stub}} = \text{Im}(Z_{\text{stub}})$ do *stub* série cancele a reatância $X_{in} = \text{Im}(Z_{in})$, i.e., de forma que $X_{\text{stub}} = -X_{in}$.



O acoplador com *stub* série (aberto ou fechado) é prático para LTs do tipo *twin wire* ou *ladder*, mas não é muito adequado para uso com LTs do tipo cabo coaxial (por causa da necessidade de conectar a malha externa do *stub* ao condutor interno da LT) e é totalmente inadequado para LTs do tipo *microstrip* (por causa da impossibilidade de interconectar o *ground* da placa de circuito impresso do *stub* com o *ground* da placa de circuito impresso da LT). Portanto, para acopladores com cabo coaxial e *microstrips* é usual adotar o *stub* em paralelo, conforme veremos nos próximos *slides*.

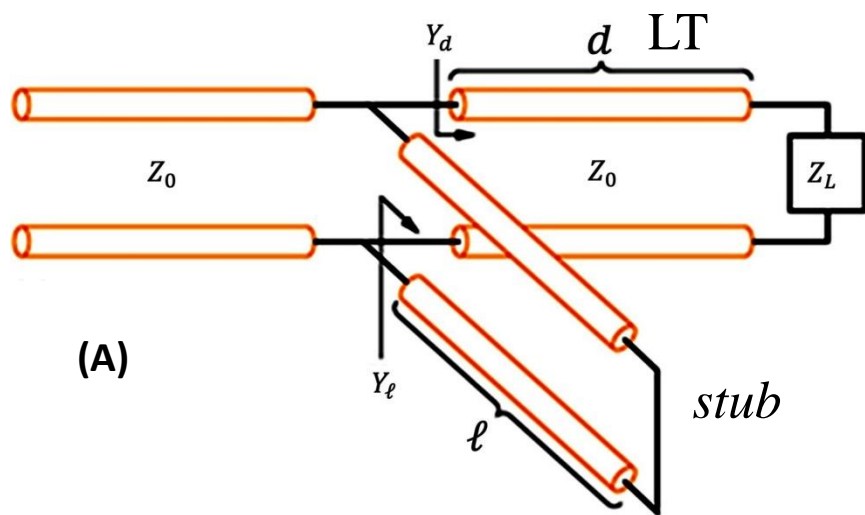
Casamento de impedância – acoplador com *stub* paralelo

No acoplador com *stub* paralelo (aberto ou fechado) mostrado na figura (A) a impedância de carga Z_L [Ω] do acoplador é convertida pela LT de comprimento d na admitância de entrada $Y_d = 1/Z_{in} = G_{in} + jB_{in}$ [mho], onde $Z_{in} = R_{in} + jX_{in}$ [Ω] é a impedância de entrada da LT, de tal forma que se obtenha os seguintes resultados:

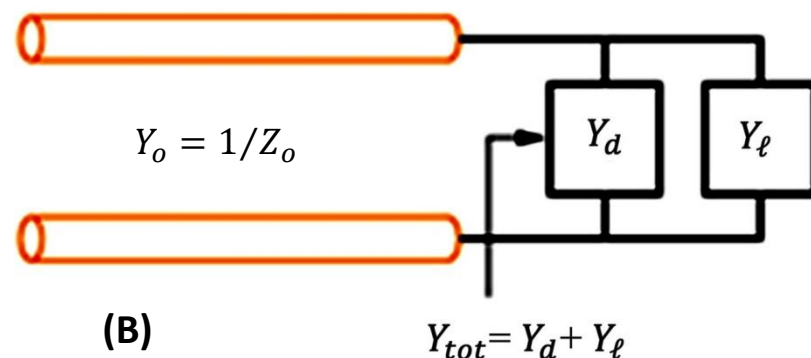
- (1) $G_{in} = \text{Re}(Y_d)$ resulte igual a Y_o , i.e., $G_{in} = Y_o$, onde $Y_o = 1/Z_o$.
- (2) $B_{in} = \text{Im}(Y_d)$ seja cancelado pela susceptância $Y_\ell = Y_{\text{stub}} = jB_{\text{stub}}$ do *stub* de comprimento ℓ , i.e., $B_{in} + B_{\text{stub}} = 0$.

Para este fim, primeiramente, a partir de Z_L , o comprimento d é determinado graficamente em uma CS de tal forma que $\text{Re}(Y_d) = Y_o$.

A seguir ℓ é determinado em outra CS de tal forma que a susceptância $B_{\text{stub}} = \text{Im}(Y_\ell)$ do *stub* paralelo cancele a susceptância $B_{in} = \text{Im}(Y_d)$, i.e., de forma que $B_{\text{stub}} = -B_{in}$.



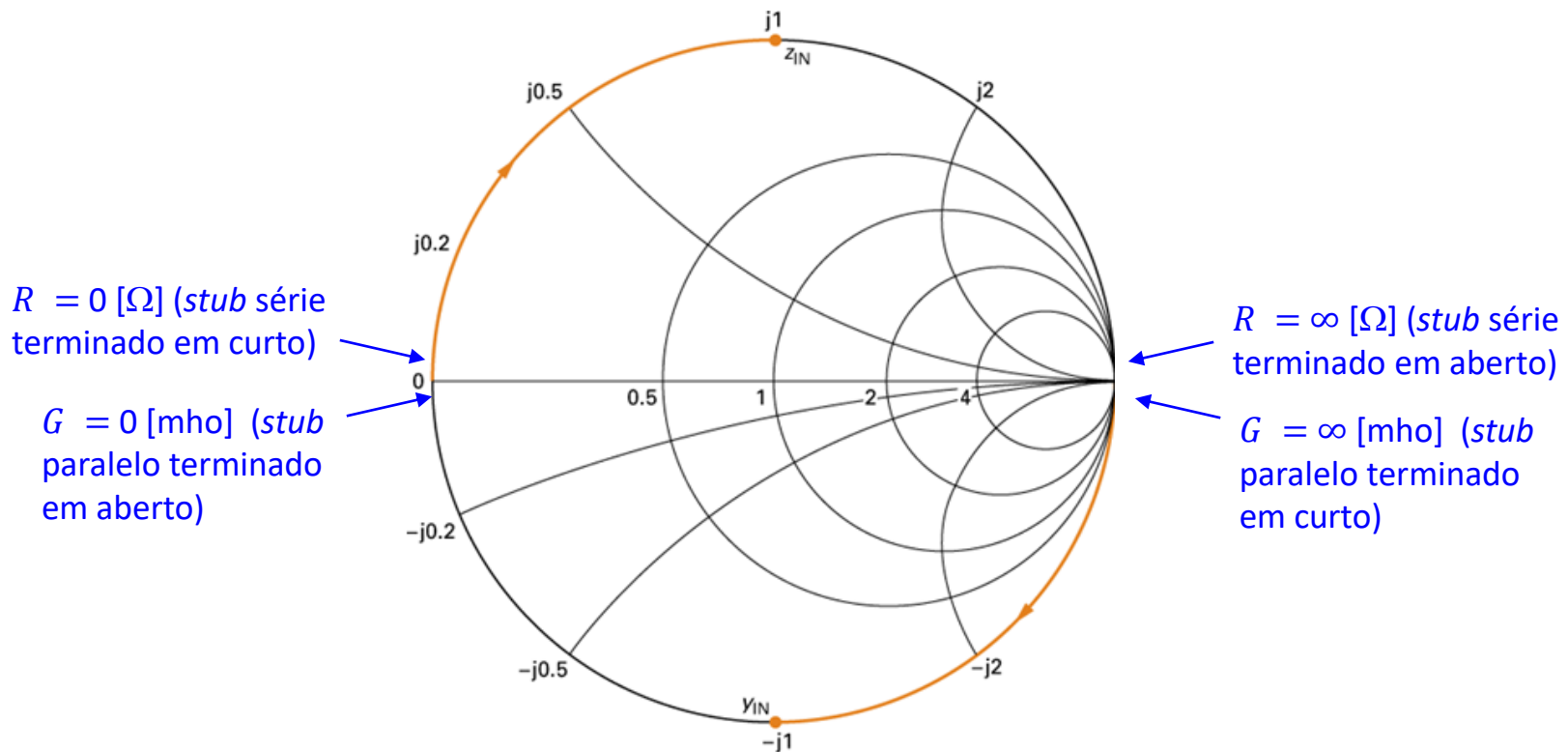
Note que a admitância Y_{tot} vista na entrada do acoplador é dada por $Y_{tot} = Y_d + Y_\ell$, conforme mostra a figura (B) abaixo:



Casamento de impedância – acoplador com *stub* paralelo

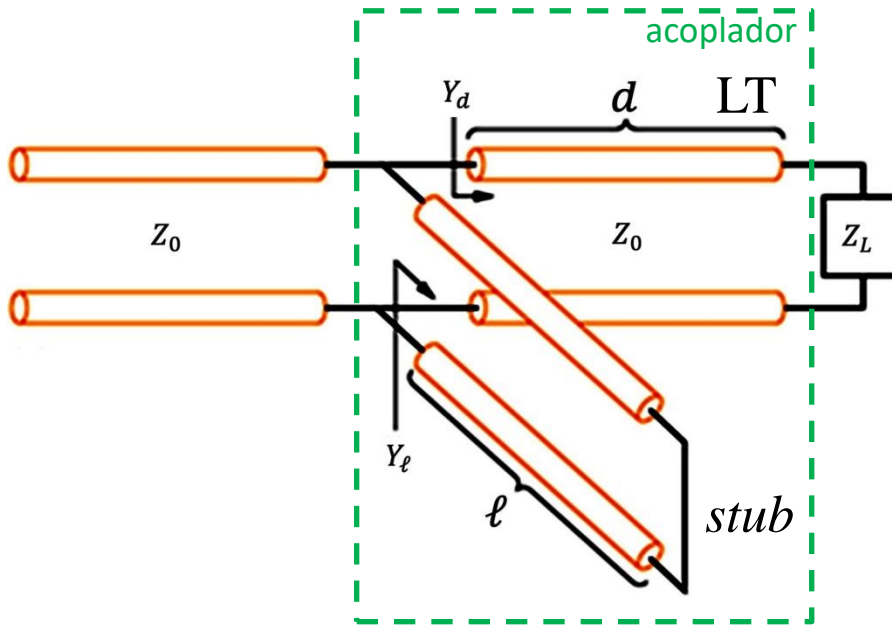
Conforme vimos nos slides anteriores, o *stub* do acoplador é uma LT de comprimento ℓ terminada em curto-circuito ou terminada em circuito aberto. A impedância (ou admitância) de entrada de uma LT com terminação em curto-circuito ou com terminação em circuito aberto é representada na CS sobre o círculo de raio $|\Gamma| = 1$ na periferia da Carta de Smith, conforme mostrado em **laranja** na figura, onde Γ é o coeficiente de reflexão. O círculo de raio $|\Gamma| = 1$ representa uma reatância pura (ou susceptância pura), que é identificada nas escalas "INDUCTIVE REACTANCE COMPONENT (+jX/Zo) OR CAPACITIVE SUSCEPTANCE (+jB/Yo)" e "CAPACITIVE REACTANCE COMPONENT (-jX/Zo) OR INDUCTIVE SUSCEPTANCE (-jB/Yo)" – ver slides 46 a 49 do Cap V.8.

Para determinar o comprimento ℓ do *stub, parte-se do valor da terminação do *stub* mostrada em **azul** na figura, e percorre-se a distância ℓ no sentido horário na escala "WAVELENGTHS TOWARD GENERATOR" até obtermos na escala "INDUCTIVE REACTANCE COMPONENT (+jX/Zo) OR CAPACITIVE SUSCEPTANCE (+jB/Yo)" ou "CAPACITIVE REACTANCE COMPONENT (-jX/Zo) OR INDUCTIVE SUSCEPTANCE (-jB/Yo)" o valor da reatância (ou susceptância) desejada na entrada do *stub*.*



Casamento de impedância – acoplador com *stub* paralelo

Exemplo 3: Uma LT sem perdas com impedância característica $Z_0 = 50 \text{ } [\Omega]$ deve ser casada com uma impedância de carga $Z_L = 20 - j55 \text{ } [\Omega]$. O acoplador que efetua o casamento de impedâncias é construído com uma LT de comprimento d e com um *stub* paralelo em curto de comprimento ℓ , conforme mostra a figura abaixo.

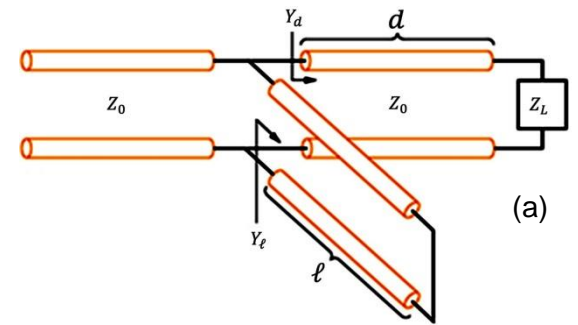
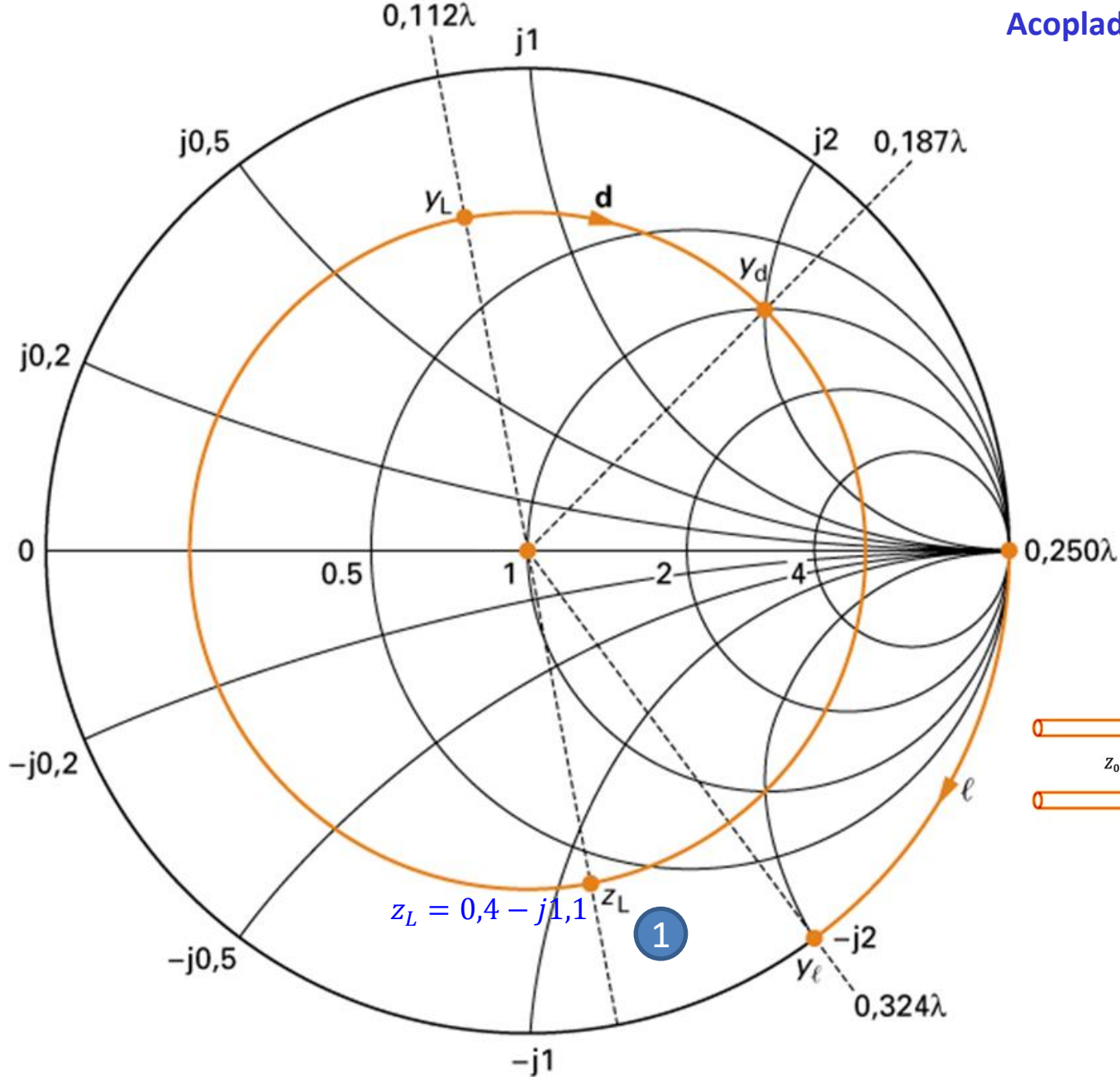


Pede-se: Utilizando a Carta de Smith determine o comprimento d da LT do acoplador e o comprimento ℓ do *stub*.

(b)

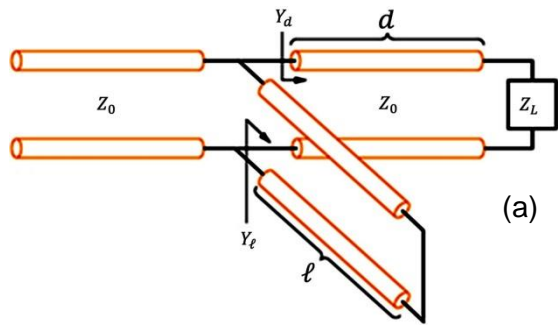
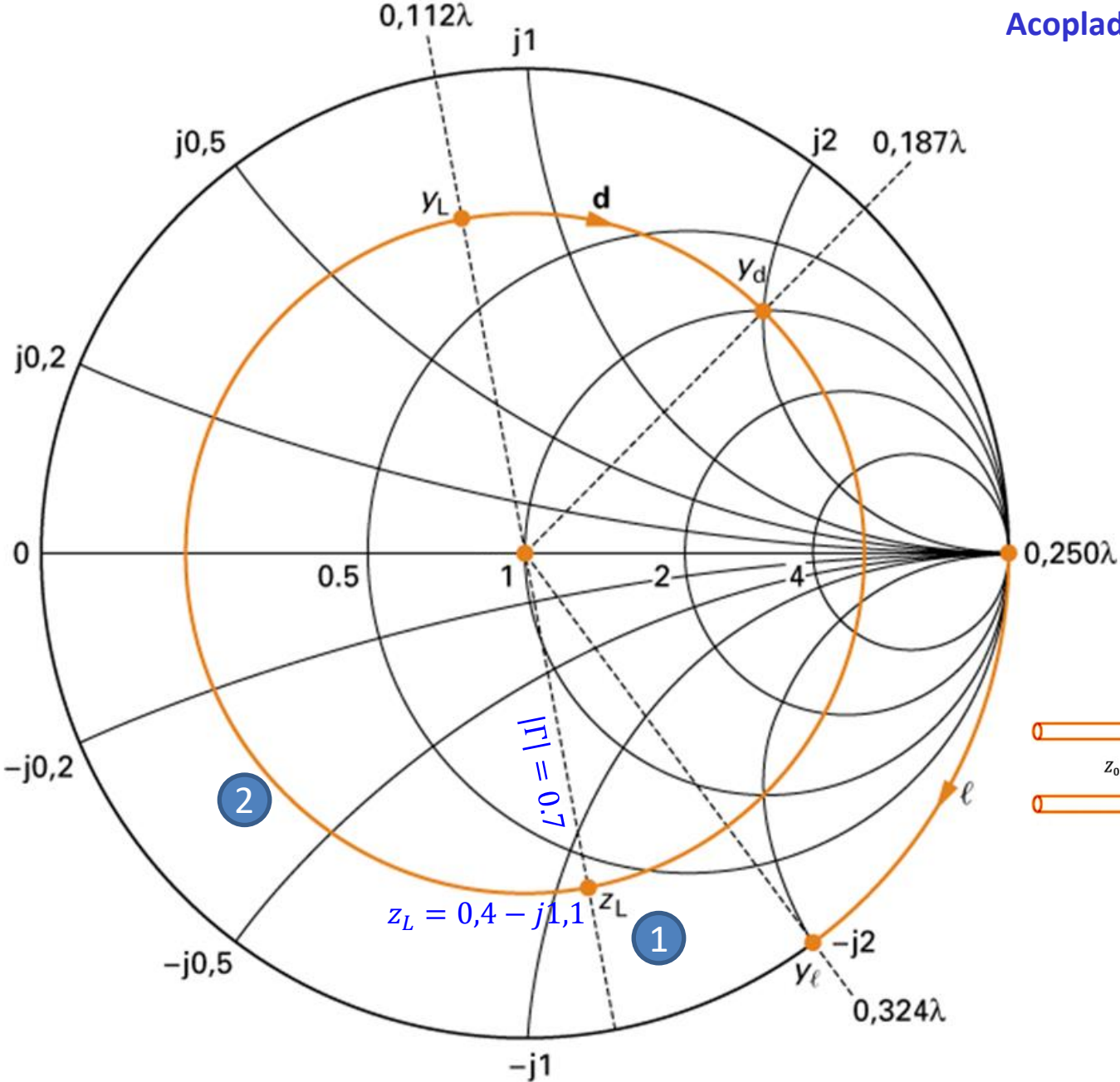
Casamento de impedância – acoplador com *stub* paralelo

- 1 Identificar na CS a impedância de carga normalizada $z_L = Z_L/Z_0 = 0.4 - j1.1$.



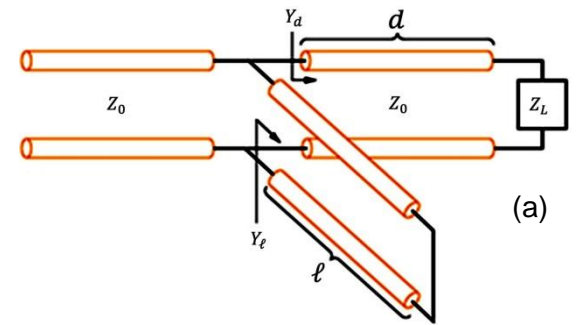
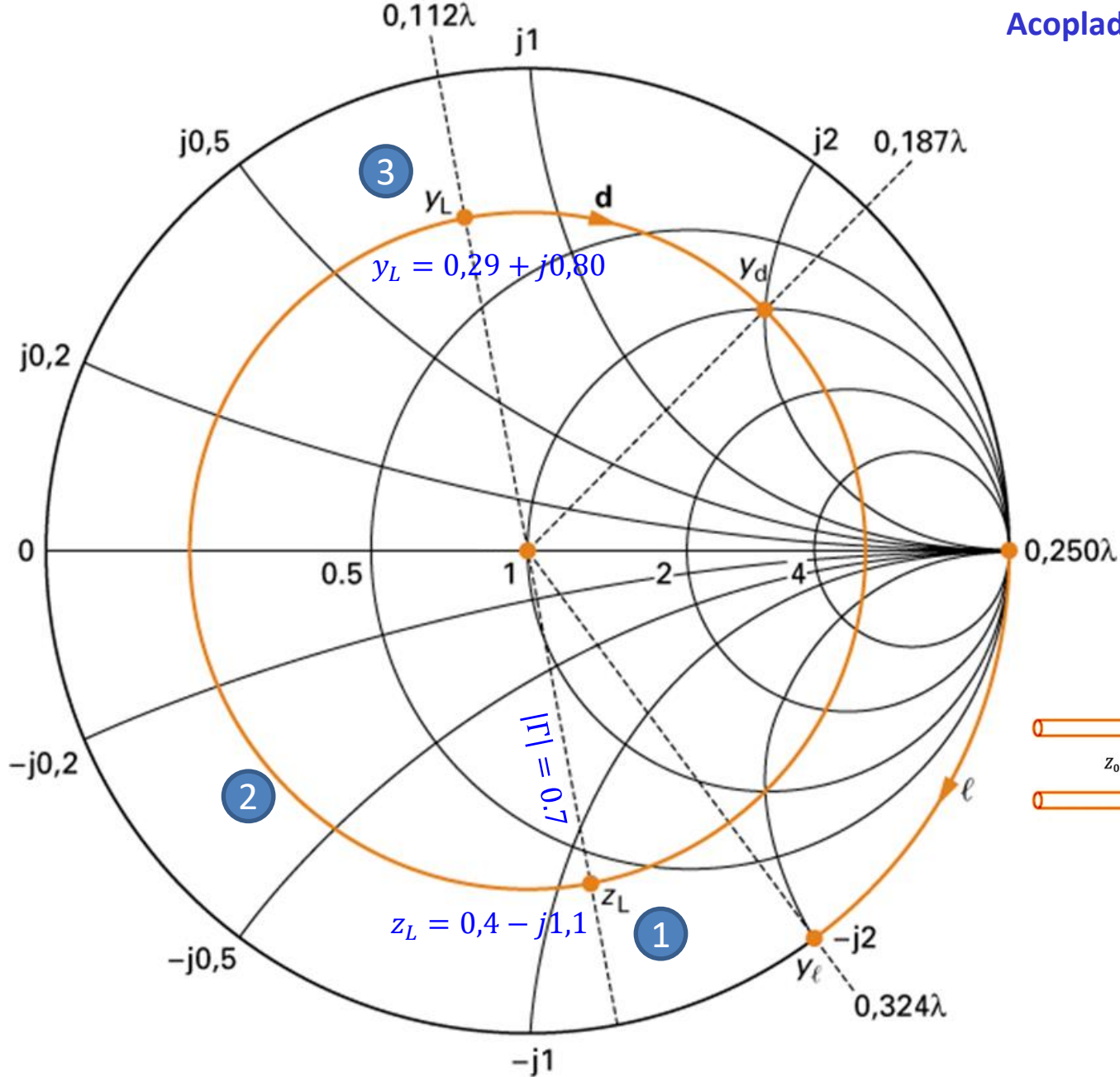
Casamento de impedância – acoplador com *stub* paralelo

- 1 Identificar na CS a impedância de carga normalizada $z_L = Z_L/Z_0 = 0.4 - j1.1$.
- 2 Traçar o círculo de raio $|\Gamma|$, sendo Γ o coeficiente de reflexão associado a z_L .



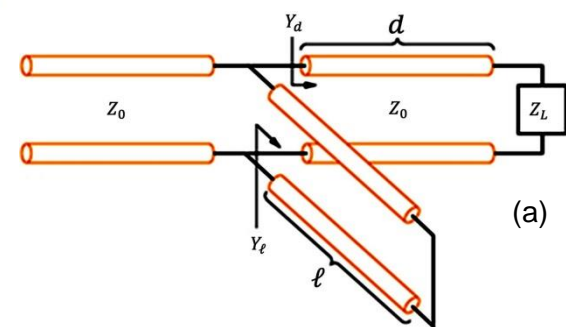
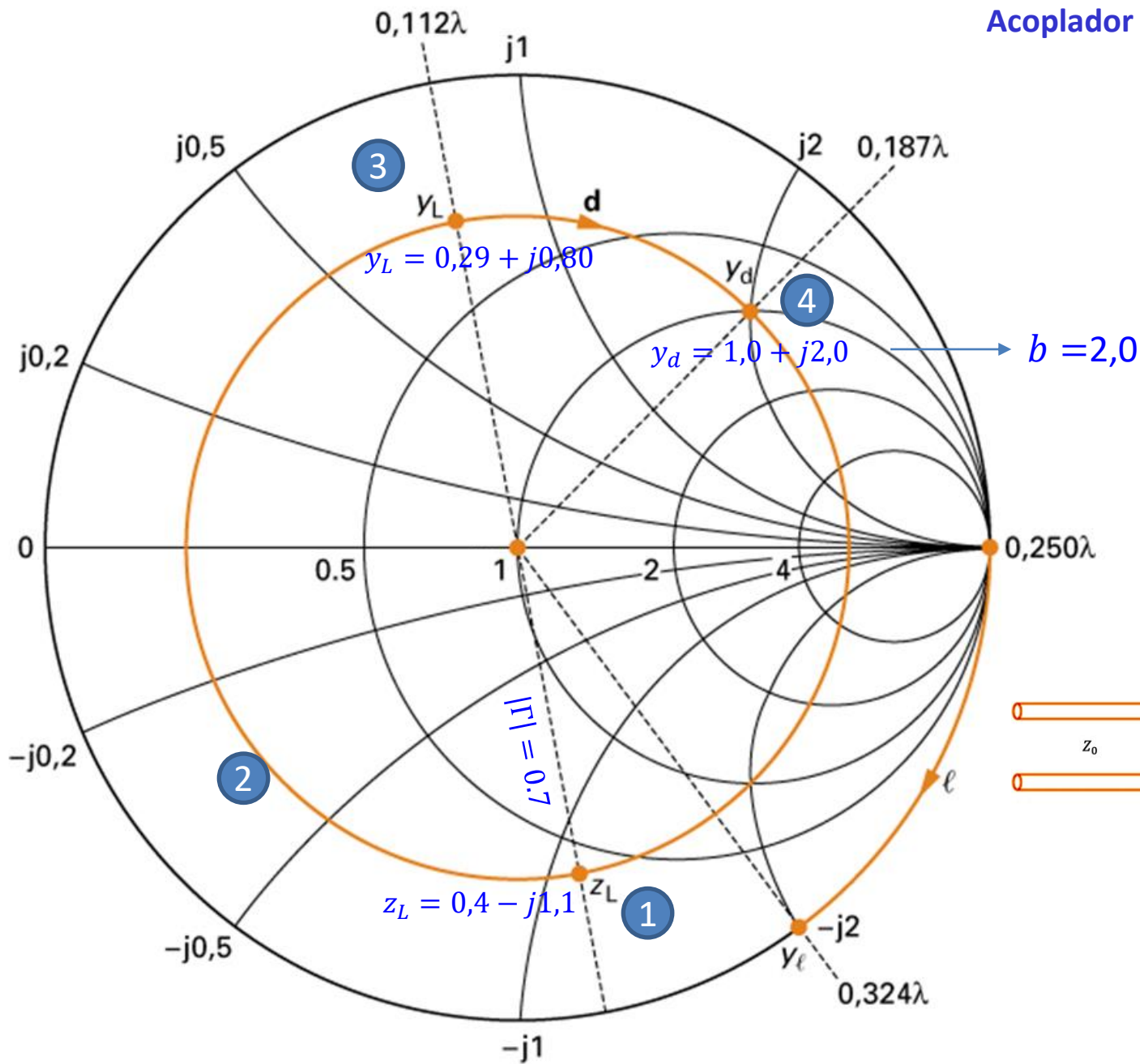
Casamento de impedância – acoplador com *stub* paralelo

- 1 Identificar na CS a impedância de carga normalizada $z_L = Z_L/Z_0 = 0.4 - j1.1$.
- 2 Traçar o círculo de raio $|\Gamma|$, sendo Γ o coeficiente de reflexão associado a z_L .
- 3 Transformar a impedância normalizada z_L em admitância normalizada y_L . Para os passos seguintes, vamos considerar a Carta de Smith como carta de admitância.



Casamento de impedância – acoplador com *stub* paralelo

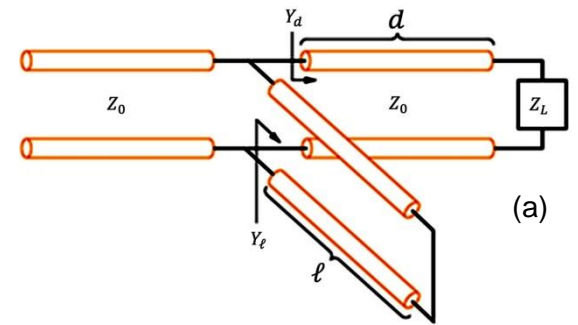
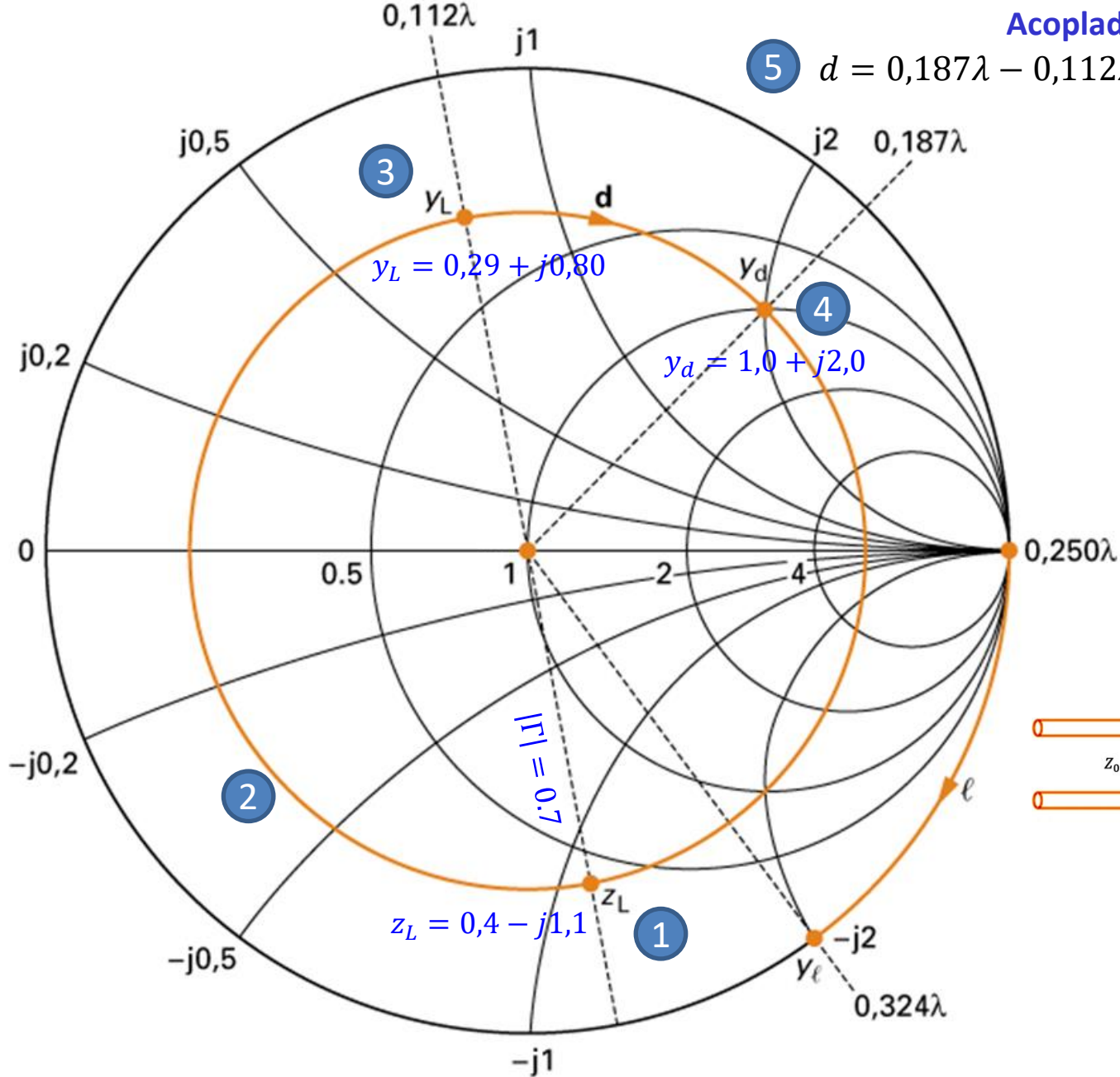
- 1 Identificar na CS a impedância de carga normalizada $z_L = Z_L/Z_0 = 0.4 - j1.1$.
- 2 Traçar o círculo de raio $|\Gamma|$, sendo Γ o coeficiente de reflexão associado a z_L .
- 3 Transformar a impedância normalizada z_L em admitância normalizada y_L . Para os passos seguintes, vamos considerar a Carta de Smith como carta de admitância.
- 4 Partindo de y_L mover-se no sentido horário ao longo do círculo de raio $|\Gamma|$, até interceptar o círculo $1 + jb$, onde a condutância normalizada é unitária, e assim identificando a admitância normalizada $y_d = 1 + jb$. Ler na escala de susceptância o valor da susceptância normalizada b de y_d .



Casamento de impedância – acoplador com *stub* paralelo

- 1 Identificar na CS a impedância de carga normalizada $z_L = Z_L/Z_0 = 0.4 - j1.1$.
- 2 Traçar o círculo de raio $|\Gamma|$, sendo Γ o coeficiente de reflexão associado a z_L .
- 3 Transformar a impedância normalizada z_L em admitância normalizada y_L . Para os passos seguintes, vamos considerar a Carta de Smith como carta de admitância.
- 4 Partindo de y_L mover-se no sentido horário ao longo do círculo de raio $|\Gamma|$, até interceptar o círculo $1 + jb$, onde a condutância normalizada é unitária, e assim identificando a admitância normalizada $y_d = 1 + jb$. Ler na escala de susceptância o valor da susceptância normalizada b de y_d .
- 5 Determinar a distância d entre y_L e y_d nos respectivos pontos marcados na escala “WAVELENGTHS TOWARD GENERATOR”.

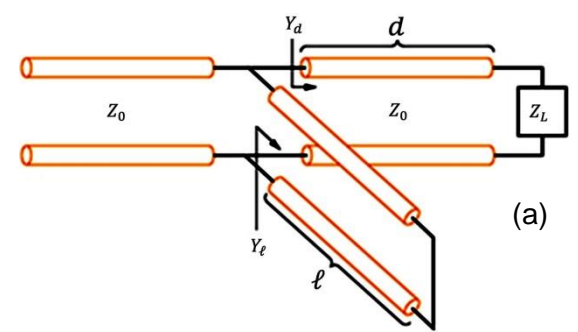
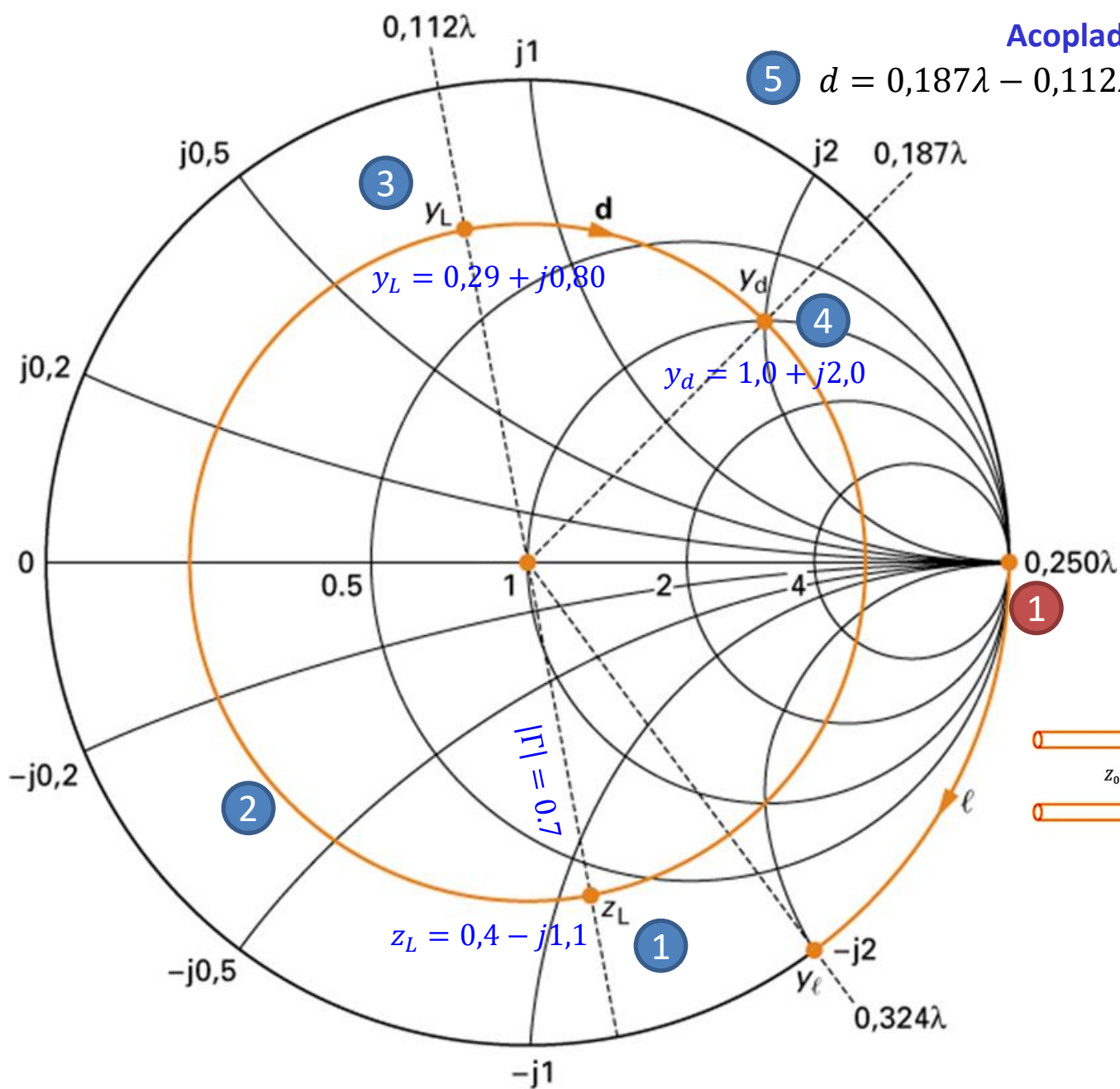
5 $d = 0,187\lambda - 0,112\lambda = 0,075\lambda$



Casamento de impedância – acoplador com *stub* paralelo

- 1 Identificar na CS a impedância de carga normalizada $z_L = Z_L/Z_0 = 0.4 - j1.1$.
 - 2 Traçar o círculo de raio $|\Gamma|$, sendo Γ o coeficiente de reflexão associado a z_L .
 - 3 Transformar a impedância normalizada z_L em admitância normalizada y_L . Para os passos seguintes, vamos considerar a Carta de Smith como carta de admitância.
 - 4 Partindo de y_L mover-se no sentido horário ao longo do círculo de raio $|\Gamma|$, até interceptar o círculo $1 + jb$, onde a condutância normalizada é unitária, e assim identificando a admitância normalizada $y_d = 1 + jb$. Ler na escala de susceptância o valor da susceptância normalizada b de y_d .
 - 5 Determinar a distância d entre y_L e y_d nos respectivos pontos marcados na escala “WAVELENGTHS TOWARD GENERATOR”.
- 1 Identificar a terminação do *stub* paralelo (curto circuito $g = \infty$ ou aberto $g = 0$).

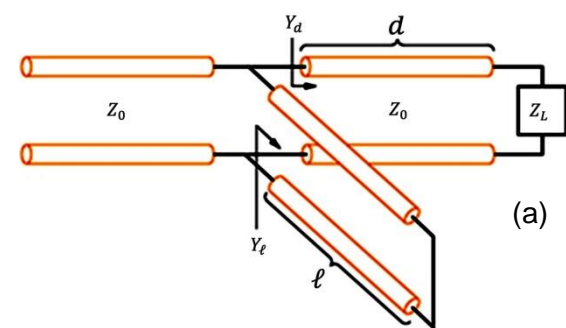
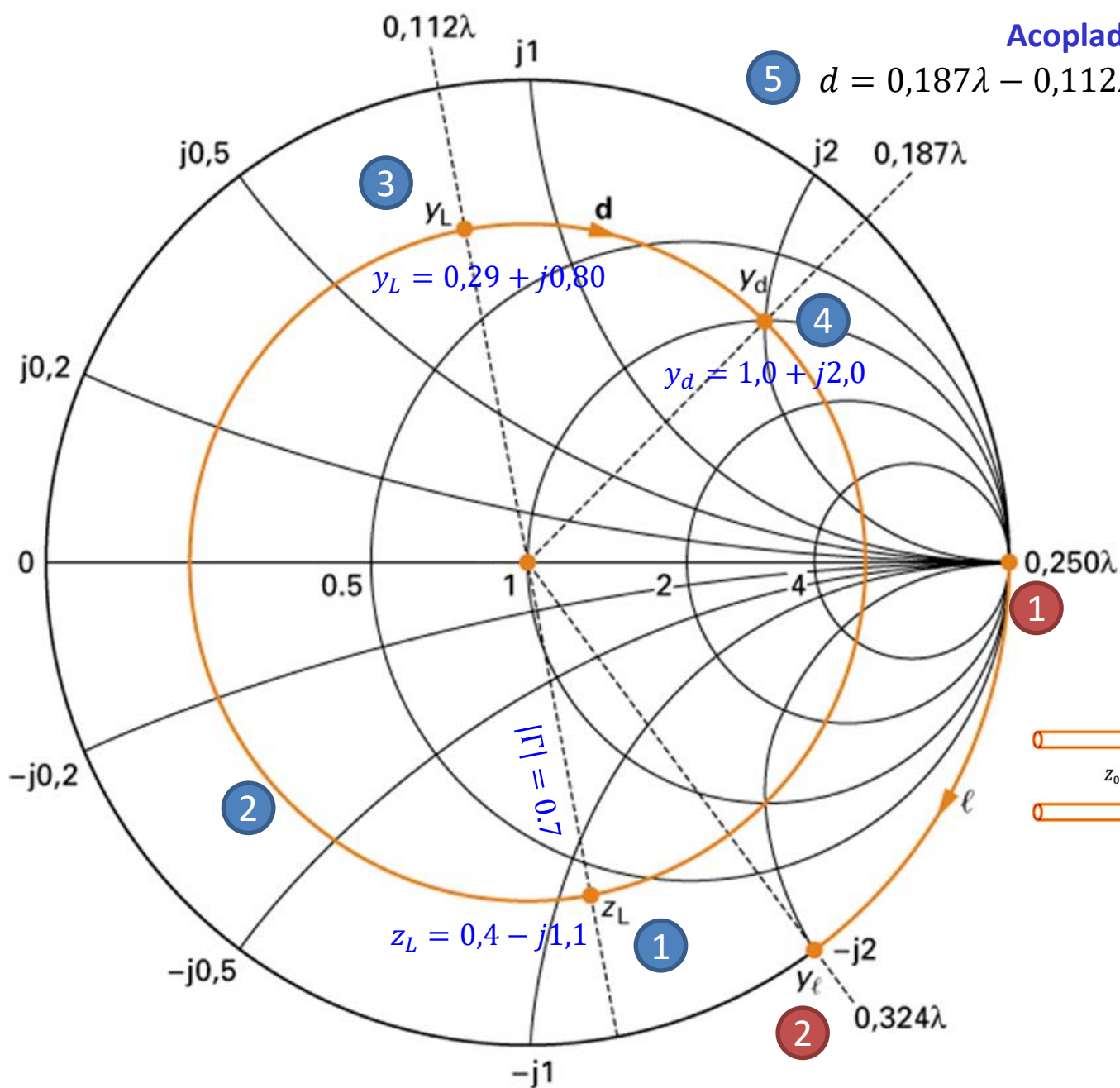
5 $d = 0,187\lambda - 0,112\lambda = 0,075\lambda$



Casamento de impedância – acoplador com *stub* paralelo

- 1 Identificar na CS a impedância de carga normalizada $z_L = Z_L/Z_0 = 0.4 - j1.1$.
 - 2 Traçar o círculo de raio $|\Gamma|$, sendo Γ o coeficiente de reflexão associado a z_L .
 - 3 Transformar a impedância normalizada z_L em admitância normalizada y_L . Para os passos seguintes, vamos considerar a Carta de Smith como carta de admitância.
 - 4 Partindo de y_L mover-se no sentido horário ao longo do círculo de raio $|\Gamma|$, até interceptar o círculo $1 + jb$, onde a condutância normalizada é unitária, e assim identificando a admitância normalizada $y_d = 1 + jb$. Ler na escala de susceptância o valor da susceptância normalizada b de y_d .
 - 5 Determinar a distância d entre y_L e y_d nos respectivos pontos marcados na escala “WAVELENGTHS TOWARD GENERATOR”.
- 1 Identificar a terminação do *stub* paralelo (curto circuito $g = \infty$ ou aberto $g = 0$).
 - 2 Mover-se na escala de susceptância na periferia da CS partindo da terminação do *stub* em $g = \infty$ ao longo de uma distância ℓ verificada na escala “WAVELENGTHS TOWARD GENERATOR” até encontrar na escala de susceptância o valor negativo da susceptância b obtida no passo 4. A distância ℓ assim determinada é o comprimento necessário p/ o *stub*.

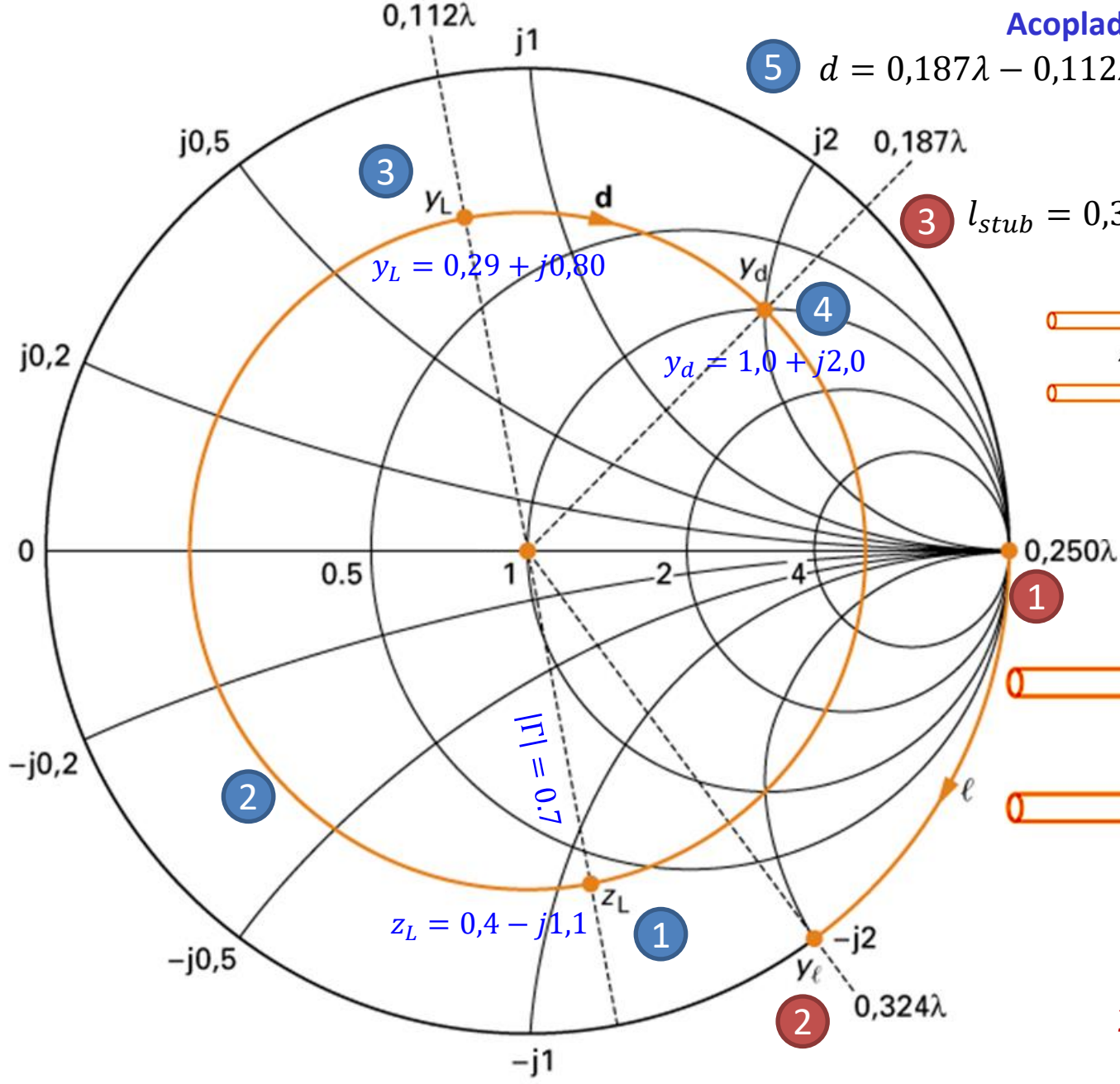
5 $d = 0,187\lambda - 0,112\lambda = 0,075\lambda$



Casamento de impedância – acoplador com *stub* paralelo

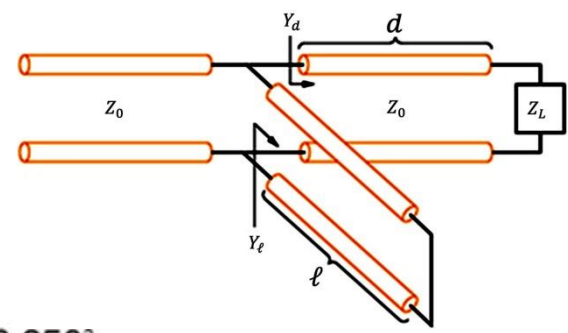
- 1 Identificar na CS a impedância de carga normalizada $z_L = Z_L/Z_0 = 0.4 - j1.1$.
 - 2 Traçar o círculo de raio $|\Gamma|$, sendo Γ o coeficiente de reflexão associado a z_L .
 - 3 Transformar a impedância normalizada z_L em admitância normalizada y_L . Para os passos seguintes, vamos considerar a Carta de Smith como carta de admitância.
 - 4 Partindo de y_L mover-se no sentido horário ao longo do círculo de raio $|\Gamma|$, até interceptar o círculo $1 + jb$, onde a condutância normalizada é unitária, e assim identificando a admitância normalizada $y_d = 1 + jb$. Ler na escala de susceptância o valor da susceptância normalizada b de y_d .
 - 5 Determinar a distância d entre y_L e y_d nos respectivos pontos marcados na escala “WAVELENGTHS TOWARD GENERATOR”.
- 1 Identificar a terminação do *stub* paralelo (curto circuito $g = \infty$ ou aberto $g = 0$).
 - 2 Mover-se na escala de susceptância na periferia da CS partindo da terminação do *stub* em $g = \infty$ ao longo de uma distância ℓ verificada na escala “WAVELENGTHS TOWARD GENERATOR” até encontrar na escala de susceptância o valor negativo da susceptância b obtida no passo 4. A distância ℓ assim determinada é o comprimento necessário p/ o *stub*.
 - 3 Calcular o comprimento do *stub*.

Acoplador com stub paralelo

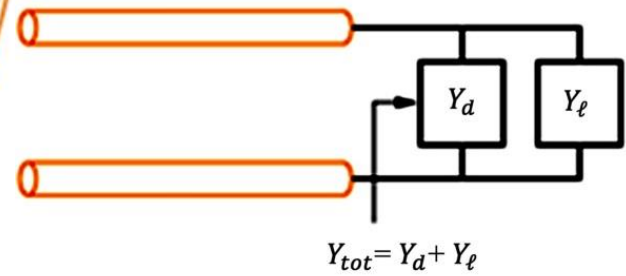


5 $d = 0,187\lambda - 0,112\lambda = 0,075\lambda$

3 $l_{stub} = 0,324\lambda - 0,250\lambda = 0,074\lambda$



Verificando:



$$y_{tot} = y_d + y_l$$

$$y_{tot} = 1 + j2 - j2$$

$$y_{tot} = 1$$