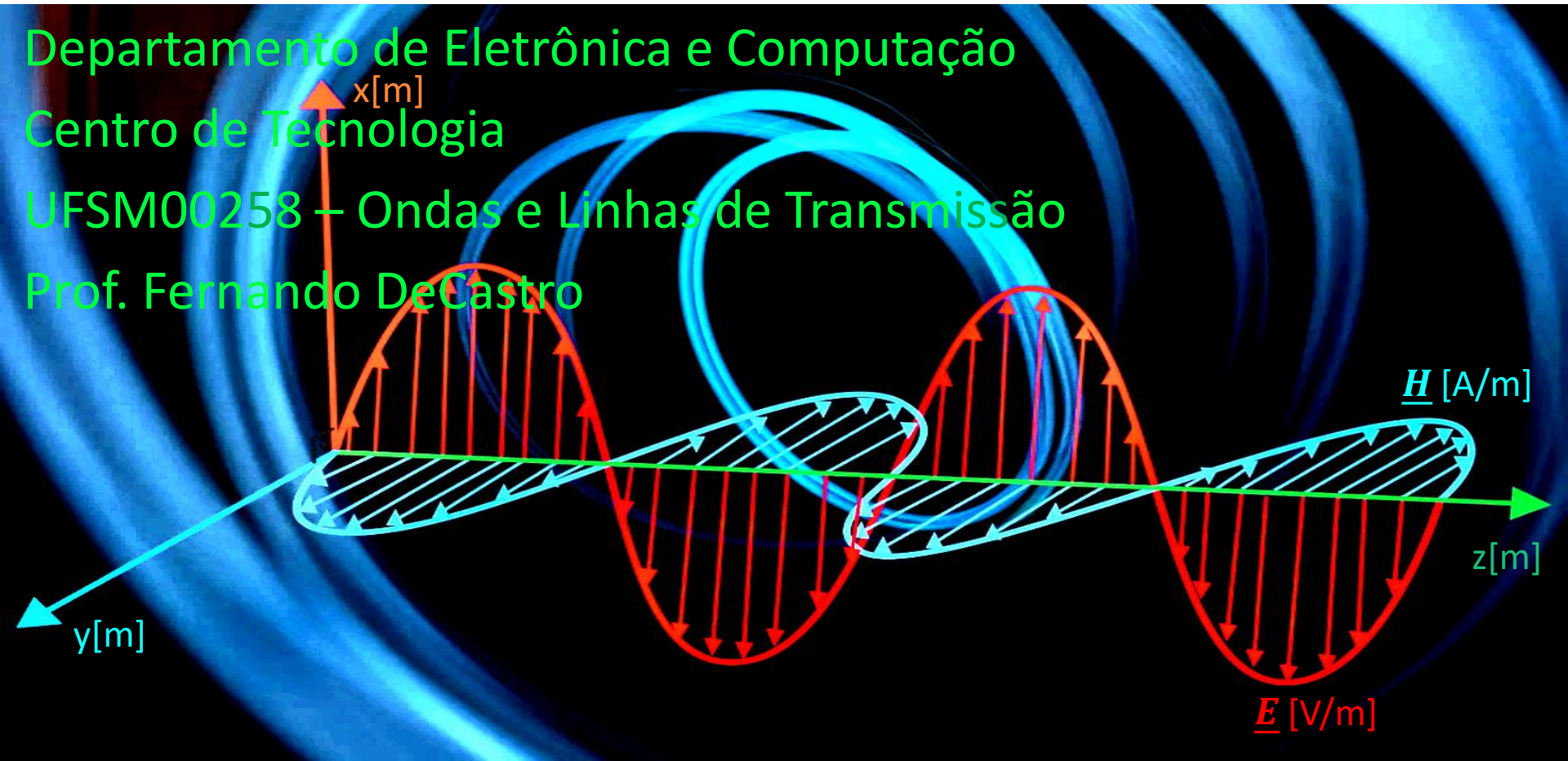


Guias de onda



## Aspectos históricos

Um dos primeiros marcos na engenharia de microondas foi o desenvolvimento do guia de ondas (GO) para a transmissão sob baixas perdas de uma onda EM de alta frequência. A ideia inicial surgiu em 1893 proposta por Oliver Heaviside, que considerou a possibilidade de propagação de ondas EM no interior de um tubo oco fechado, da mesma forma que se propagam as ondas sonoras. No entanto, em seguida, o próprio Heaviside rejeitou (erroneamente) a ideia deste modo de propagação porque, possivelmente influenciado pela sua experiência com linhas de transmissão telegráficas (<https://www.pa3fwm.nl/technotes/tn28-heaviside-transmission-lines.html>), considerou (erroneamente) que dois condutores seriam absolutamente necessários para a transferência de energia eletromagnética (<https://www.fccdecastro.com.br/pdf/TOOW.pdf>).

Poucos anos depois, em 1897, Lord Rayleigh provou matematicamente que a propagação de ondas EM em GOs era possível no interior de tubos ocos metálicos com seções transversais circulares e retangulares. Rayleigh também estabeleceu matematicamente que há um conjunto infinito de modos de propagação da onda EM no interior de uma GO. Cada modo de propagação é caracterizado por um par de números de ordem que identifica a distribuição espacial das linhas do campo elétrico  $\underline{E}$  e do campo magnético  $\underline{H}$  na seção transversal do tubo da GO. Estes modos se subdividem basicamente em dois grandes grupos: (I) Modos de propagação com uma componente do campo elétrico  $\underline{E}$  na direção de propagação (= direção longitudinal), denominados modos TM – *Transverse Magnetic* e (II) Modos de propagação com uma componente do campo magnético  $\underline{H}$  na direção de propagação, denominados modos TE – *Transverse Electric*. Ambos os modos TE ou TM, adicionalmente à componente longitudinal, apresentam uma componente de  $\underline{E}$  transversal à direção de propagação e simultaneamente uma componente de  $\underline{H}$  transversal à direção de propagação. Rayleigh descobriu também que há uma limitação fundamental para a existência de uma onda EM que se propaga no interior da GO sob um determinado modo: Para cada modo possível de a onda EM se propagar no interior da GO há uma frequência de operação mínima abaixo da qual a onda EM não se propaga no respectivo modo. Esta frequência mínima é denominada de frequência de corte e depende das dimensões transversais da GO e dos índices do número de ordem do modo, conforme veremos adiante.

Nenhuma verificação experimental da análise matemática de GOs proposta por Rayleigh foi feita na época. O GO foi então essencialmente esquecido até ser redescoberto de forma independente em 1936 por dois pesquisadores. Após experimentos preliminares em 1932, George C. Southworth da AT&T Company em Nova York apresentou um artigo sobre o GOs em 1936. Simultaneamente, W. L. Barrow do MIT apresentou um artigo sobre GO circular, com confirmação experimental da propagação da onda EM em seu interior.

## Guias de ondas × linhas de transmissão

Comparando com LTs, GOs têm a vantagem de poder operar com um nível de potência maior e com menor perda de potência. No entanto, GOs são volumosos e caros, especialmente em baixas frequências. LTs *twin wire* estudadas no Cap V são de baixo custo mas carecem de blindagem, irradiando e/ou captando toda sorte de sinais espúrios. LTs coaxiais são blindadas, mas não são práticas para efeito da construção industrial de componentes de microondas (filtros, acopladores, divisores de potência, *stubs*, etc...).

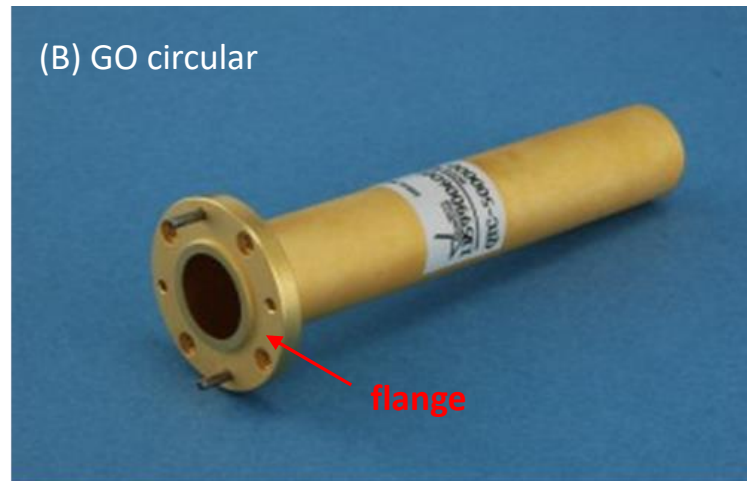
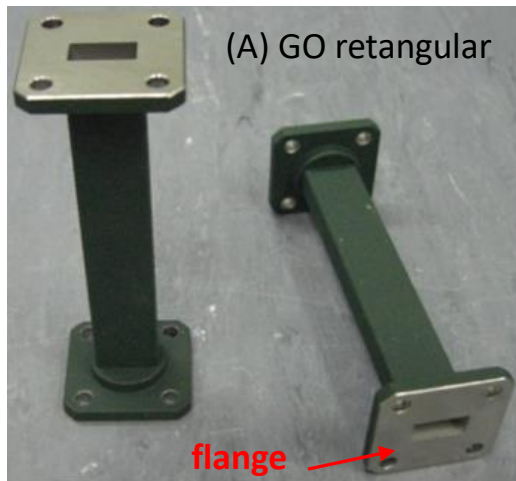
Para efeito de construir componentes de microondas, LTs planares ([https://en.wikipedia.org/wiki/Planar\\_transmission\\_line](https://en.wikipedia.org/wiki/Planar_transmission_line)) constituem uma alternativa construtiva frequentemente adotada, seja na forma de *striplines* (<https://en.wikipedia.org/wiki/Stripline>), *microstrips* (já estudadas no Cap V.10), *slotlines* ([https://en.wikipedia.org/wiki/File:Slotline\\_variants.svg](https://en.wikipedia.org/wiki/File:Slotline_variants.svg)), GOs coplanares ([https://en.wikipedia.org/wiki/Coplanar\\_waveguide](https://en.wikipedia.org/wiki/Coplanar_waveguide)) bem como vários outros tipos de geometrias.

Tais LTs são compactas, de baixo custo e capazes de serem facilmente integradas com dispositivos de circuitos ativos, como diodos e transistores, possibilitando inclusive a construção de circuitos integrados de microondas. Nenhuma delas, no entanto, tem a capacidade de transportar o alto nível de potência com a baixa atenuação propiciada por GOs retangulares ou circulares.

## Tipos de guias de onda

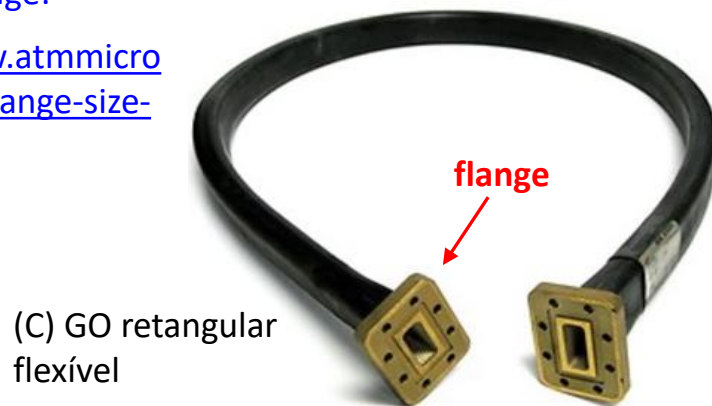
GOs são usadas para transporte de sinal em frequências de algumas centenas de MHz até frequências ópticas (3 THz e acima) – fibras ópticas são GOs ([https://en.wikipedia.org/wiki/Waveguide\\_\(optics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Waveguide_(optics)) ).

Basicamente, GOs são tubos metálicos ocios no interior dos quais a onda EM é propagada. Em GOs não há um par de condutores, como é o caso de LTs. A seção transversal dos tubos pode ser retangular, circular ou elíptica (<https://www.radartutorial.eu/03.linetheory/tl51.en.html> ). Limitaremos o escopo de nosso estudo à análise de GOs retangulares e circulares. Abaixo são mostradas GOs retangulares e circulares típicas:



### Tipos de flange:

<https://www.atmmicrowave.com/flange-size-type/>



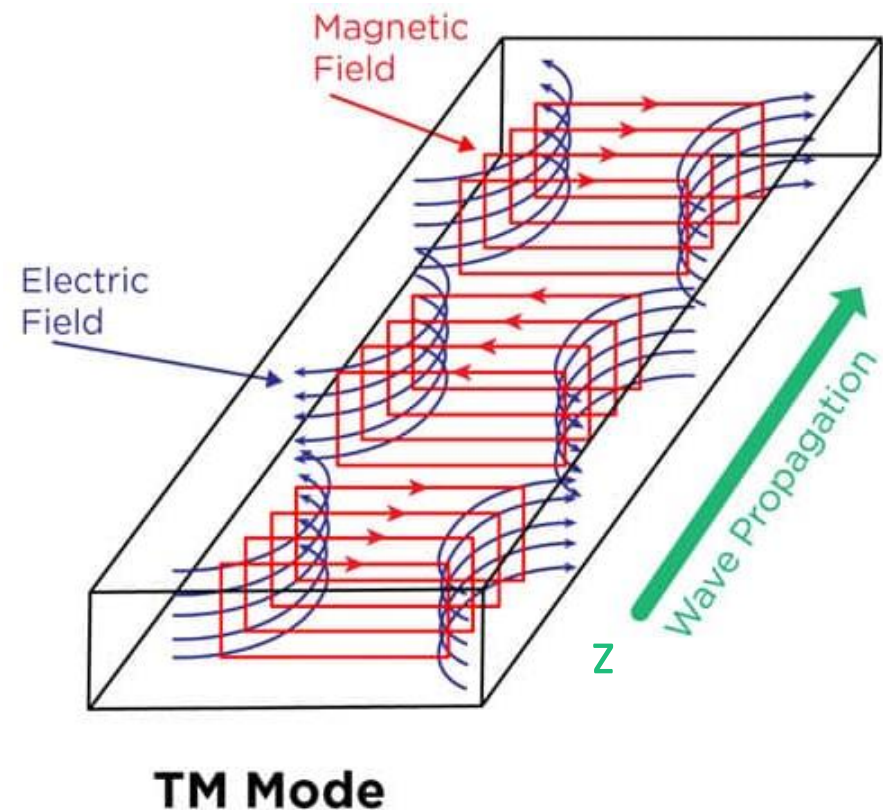
As paredes condutoras metálicas são geralmente de latão, cobre ou alumínio e precisam ser suficientemente espessas para efeito de rigidez mecânica (1 a 3 mm). Além disto, a espessura deve ser de pelo menos 4 vezes o *skin depth* na frequência de operação para minimizar as perdas Joule resultante das correntes nas paredes geradas pelo campo magnético. A superfície interna da GO é suavemente polida para minimizar o coeficiente de rugosidade e maximizar a refletância da superfície. Adicionalmente a superfície interna pode ser galvanizada com prata ou ouro para melhorar a condutividade e reduzir as perdas Joule.

## Modos básicos de propagação da onda EM no interior da GO

A onda EM se propaga no interior do tubo metálico que constitui a GO. Há dois modos básicos de propagação da onda EM ao longo da GO: (I) O modo **TM** (*Transverse Magnetic mode*), em que, para qualquer instante de tempo e para qualquer ponto do caminho de propagação, as linhas do campo magnético  $\underline{H}$  estão sempre contidas em um plano que é perpendicular à direção de propagação. (II) O modo **TE** (*Transverse Electric mode*), em que, para qualquer instante de tempo e para qualquer ponto do caminho de propagação, as linhas do campo elétrico  $\underline{E}$  estão sempre contidas em um plano que é perpendicular à direção de propagação.

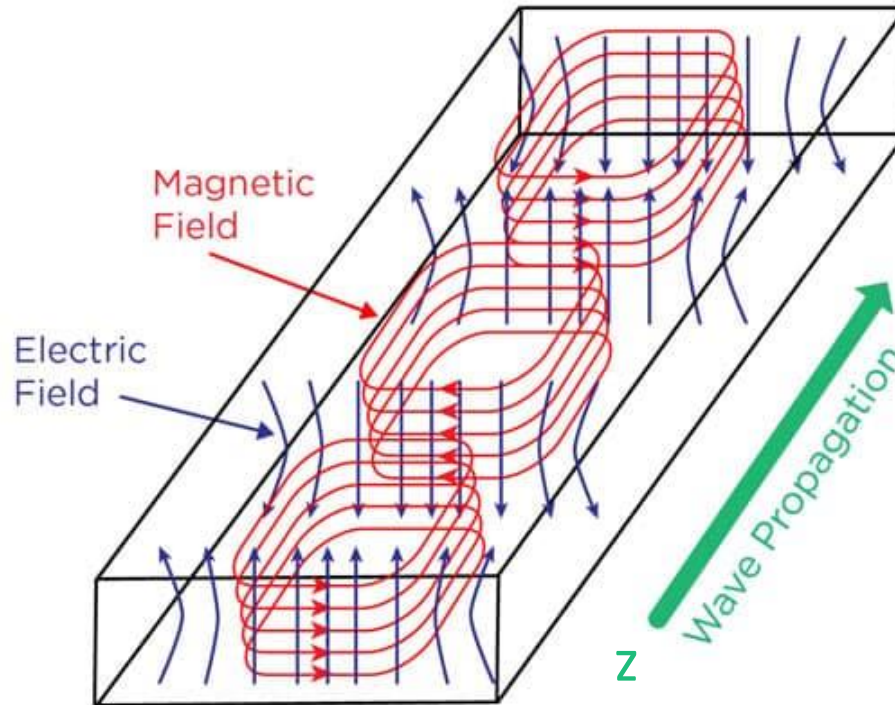
O termo **modo de propagação**, se refere às diferentes soluções para as equações do campo magnético  $\underline{H}$  e do campo elétrico  $\underline{E}$  no interior de uma GO. O ponto de partida para a solução da onda EM que se propaga em uma GO é a equação de onda de Helmholtz, já vista no Cap II.2 para a onda EM plana, mas **sujeita às condições de fronteira estabelecidas pelas paredes metálicas da GO que refletem integralmente a onda EM nelas incidente estabelecendo um padrão de ondas estacionárias no interior da GO. O tipo da distribuição espacial das linhas do campo magnético  $\underline{H}$  e do campo elétrico  $\underline{E}$  do padrão de ondas estacionárias no interior da GO é o que define o respectivo tipo de modo de propagação.**

Assumindo que o caminho de propagação da onda EM seja o eixo  $z$  do sistema cartesiano, uma solução do modo TM é caracterizada pelo campo elétrico  $\underline{E}$  apresentar uma componente  $E_z$  adicional às componentes  $E_x$  e  $E_y$  transversais à direção  $z$ . No entanto, o campo magnético  $\underline{H}$  apresenta unicamente as componentes transversais  $H_x$  e  $H_y$ , não apresentando componente na direção  $z$  em qualquer instante e em qualquer posição do eixo  $z$ , conforme mostrado ao lado para uma GO retangular.



## Modos básicos de propagação da onda EM no interior da GO

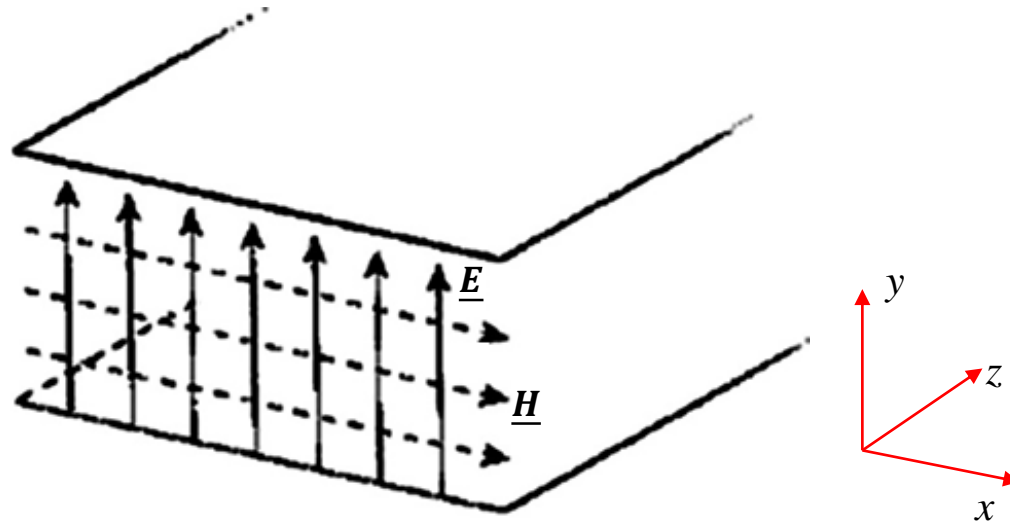
Por outro lado, uma solução do modo TE é caracterizada pelo campo magnético  $\underline{H}$  apresentar uma componente  $H_z$  adicional às componentes  $H_x$  e  $H_y$  transversais à direção de propagação  $z$ . No entanto, o campo elétrico  $\underline{E}$  apresenta unicamente as componentes transversais  $E_x$  e  $E_y$ , não apresentando componente na direção  $z$  em qualquer instante e em qualquer posição do eixo  $z$ , conforme mostrado abaixo para uma GO retangular.



**TE Mode**

## Guia de onda de placas paralelas

Consideremos uma onda EM que se propaga ao longo do eixo  $z$  no interior de uma GO formada por duas placas metálicas paralelas ao plano  $xz$  e de dimensões infinitas, conforme mostra a figura abaixo. Note que o campo elétrico  $\underline{E}$  é orientado na direção  $y$  e o campo magnético  $\underline{H}$  é orientado na direção  $x$ .



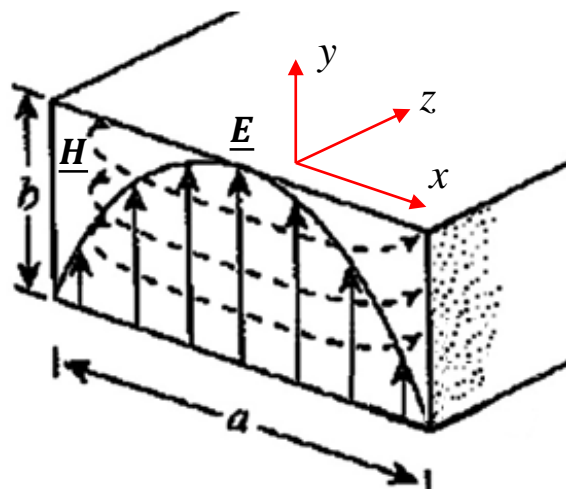
Note também que a onda EM se propaga de modo livre e desimpedido no interior desta GO de placas metálicas paralelas, e, portanto, a onda EM é uma onda plana porque não há descontinuidade no percurso de propagação da onda, conseqüentemente não ocorrendo reflexão da onda EM. Não há descontinuidade na propagação dado que não há condições de fronteira ao longo do percurso de propagação (eixo  $z$ ) a serem atendidas para efeito de continuidade das componentes tangenciais dos campos  $\underline{E}$  e  $\underline{H}$  na fronteira, conforme vimos no Cap IV.

No entanto, se houvessem duas paredes laterais metálicas paralelas ao plano  $zy$  de forma a onda do campo elétrico  $\underline{E}$  e a onda do campo magnético  $\underline{H}$  se refletirem na fronteira ar-metal destas paredes laterais, então forçosamente seria estabelecido um padrão espacial de ondas estacionárias resultante da interferência entre as ondas incidentes e refletidas nas paredes internas do tubo retangular (GO retangular). Conforme já comentado em slides anteriores, este padrão espacial de ondas estacionárias é o que caracteriza o modo de propagação em uma GO.

Consideremos agora uma onda EM que se propaga ao longo do eixo  $z$  no interior de uma GO retangular de largura  $a$  e altura  $b$ , sendo  $a > b$  conforme mostra a figura abaixo. O campo elétrico  $\underline{E}$  é orientado na direção  $y$  e varia no tempo de acordo com uma senoide de frequência  $f$ . A distribuição espacial das amplitudes de  $\underline{E}$  ao longo do eixo  $x$  mostrada na figura resulta para  $a = \lambda g/2$ , sendo  $\lambda g$  o comprimento da onda guiada do campo  $\underline{E}$  na seção retangular da GO.

Comparando a GO retangular com a GO de placas metálicas paralelas brevemente discutida no slide anterior, note que agora há duas paredes laterais metálicas paralelas ao plano  $zy$  fechando as laterais. Portanto, na fronteira ar-metal a condição de fronteira de que o campo elétrico tangencial é nulo nas paredes laterais precisa ser obedecida na expressão que define o campo  $\underline{E}$  no interior da GO.

Dado que o campo  $\underline{E}$  varia no tempo de acordo com uma senoide de frequência  $f$ , então a variação espacial de  $\underline{E}$  na seção transversal da GO também será senoidal obedecendo o mesmo padrão de variação espacial da tensão da onda estacionária que é estabelecida ao longo de uma LT terminada em curto circuito, com a parede metálica da GO modelando o curto-circuito na terminação da LT (ver gráfico (a) no slide 47 do Cap V.8). **Portanto, para efeito de simplificação do modelamento e análise da GO retangular, as linhas horizontais da seção transversal retangular representam uma LT de condutores paralelos curto-circuitadas nas extremidades pelas paredes laterais da GO, curto-circuito que é representado pelas linhas verticais da seção retangular.** O campo  $\underline{E}$  incide na parede metálica lateral, se reflete e a onda refletida interfere com a onda incidente estabelecendo uma onda estacionária com máximo ocorrendo a  $\lambda g/4$  da parede metálica. Isto ocorre para ambas paredes laterais.

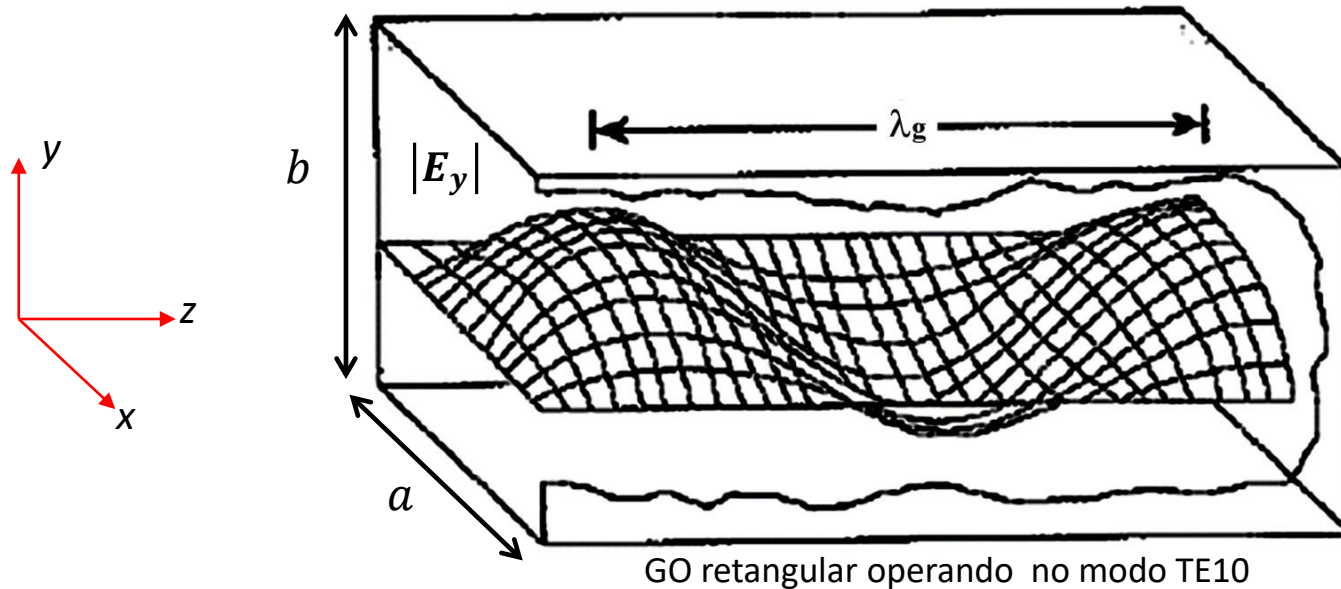


Este padrão de onda estacionária se estabelece em cada uma das infinitas seções transversais de espessura infinitesimal que ocorrem ao longo do eixo  $z$  de uma GO retangular. A onda estacionária é estabelecida por meio da interferência destrutiva entre onda incidente e onda refletida do campo  $\underline{E}$  que ocorre nas paredes laterais e por meio da interferência construtiva entre onda incidente e onda refletida do campo  $\underline{E}$  que ocorre a  $\lambda g/4$  de cada parede lateral. Para que este padrão de interferência se estabeleça é preciso que a largura  $a$  da GO seja pelo menos 2 vezes  $\lambda g/4$ , o que define a largura  $a$  mínima da GO p/ uma desejada frequência mínima de operação, denominada frequência de corte  $f_c$ . A altura  $b$  não afeta a frequência de corte  $f_c$ , no entanto deve ser de um tamanho suficiente p/ evitar arcos elétricos no interior da GO devido a uma magnitude do campo  $\underline{E}$  capaz de romper a rigidez dielétrica do ar por excesso de potência da onda EM que se propaga no interior da GO.



## Guias de onda

Embora um padrão de onda estacionária seja estabelecido em cada seção transversal  $xy$  da GO, com componente  $y$  do campo  $\underline{E}$  sendo transversal à direção  $z$  de propagação (caracterizando um modo TE), ao longo da direção de propagação  $z$  a onda não é estacionária, mas sim é uma onda EM que se propaga ao longo do eixo  $z$ , conforme mostra a figura abaixo para o campo  $\underline{E}$  (especificamente, para a magnitude  $|E_y|$ ).



Importante reiterar e deixar claro que se a frequência  $f$  do sinal que excita a GO (= frequência  $f$  de operação da GO) for baixa de modo que o comprimento de onda  $\lambda_g$  da onda guiada no interior da GO resultar grande e, portanto, a largura  $a$  resultar menor do que o tamanho correspondente a  $\lambda_g/2$  na frequência  $f$  de operação, vai acontecer nesta situação que o padrão de onda estacionária não se estabelecerá na seção transversal  $xy$  da GO e não ocorrerá propagação da onda EM ao longo da direção  $z$ .

Portanto, GOs retangulares conseguem operar até uma frequência tão baixa quanto aquela em que  $\lambda_g/2$  ainda resulte menor ou igual à largura  $a$ , frequência esta que define a frequência de corte  $f_c$  da GO.

Se a frequência  $f$  de operação for menor que a frequência de corte  $f_c$  da GO, o comprimento de onda de operação  $\lambda_g$  aumenta e se torna incompatível com a largura  $a$  da GO (i.e., a largura  $a$  da guia se torna menor do que  $\lambda_g/2$ ) e a onda EM não se propaga no interior da GO.

## Guias de onda

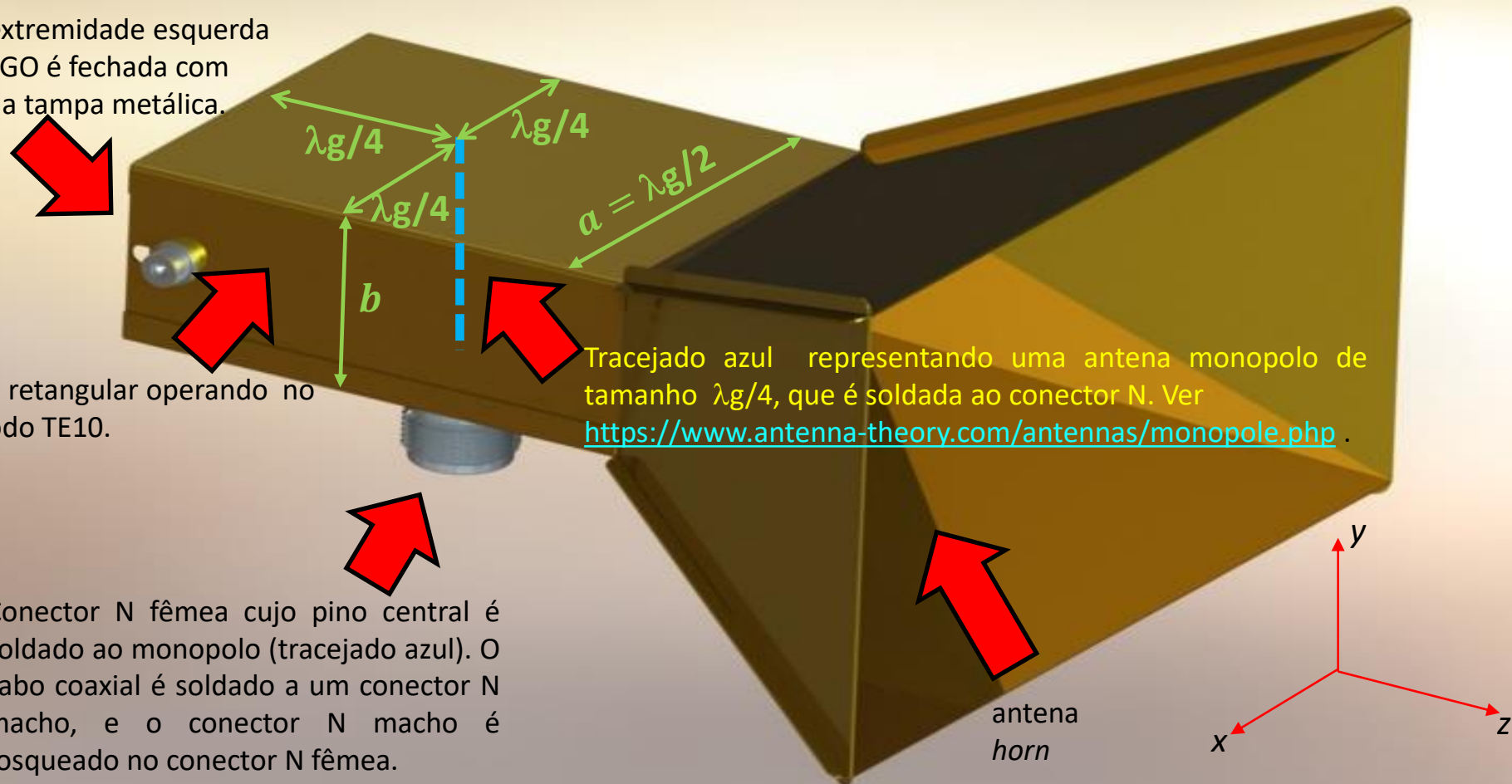
Neste momento é instrutivo retomar a análise da transição “GO – cabo coaxial” brevemente discutida no Cap I.1. Abaixo é mostrado uma antena *horn* excitada por uma GO retangular propagando uma onda EM no modo TE conforme figura no slide anterior. A GO, por sua vez, é excitada por um monopolo de tamanho  $\lambda_g/4$  distante  $\lambda_g/4$  da parede metálica na extremidade esquerda da GO e posicionado no centro da largura  $a = \lambda_g/2$  da seção transversal da GO. O monopolo é soldado no pino central de um conector N fêmea conectado a um cabo coaxial (não mostrado na figura) que recebe o sinal de RF de um amplificador. **Note que as distâncias que definem o posicionamento do monopolo contemplam as condições na fronteira ar-metal das paredes laterais e do fundo (fundo = extremidade esquerda) da GO em que o campo  $\underline{E}$  tangencial é nulo. Como o monopolo situa-se a  $\lambda_g/4$  das paredes laterais, o campo  $\underline{E}$  será máximo na sua localização.**

A extremidade esquerda da GO é fechada com uma tampa metálica.

GO retangular operando no modo TE<sub>10</sub>.

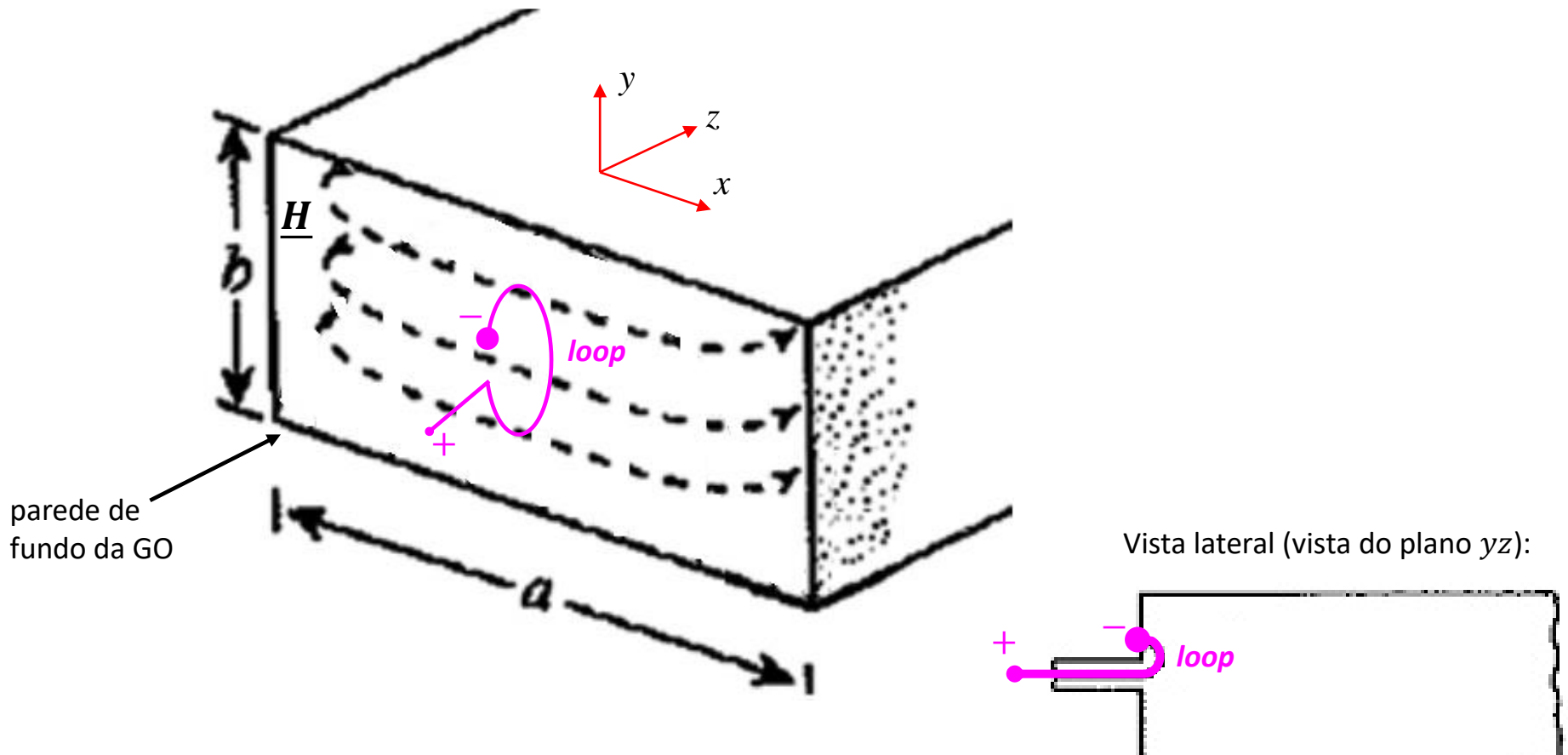
Conector N fêmea cujo pino central é soldado ao monopolo (tracejado azul). O cabo coaxial é soldado a um conector N macho, e o conector N macho é rosqueado no conector N fêmea.

Tracejado azul representando uma antena monopolo de tamanho  $\lambda_g/4$ , que é soldada ao conector N. Ver <https://www.antenna-theory.com/antennas/monopole.php>.



## Guias de onda

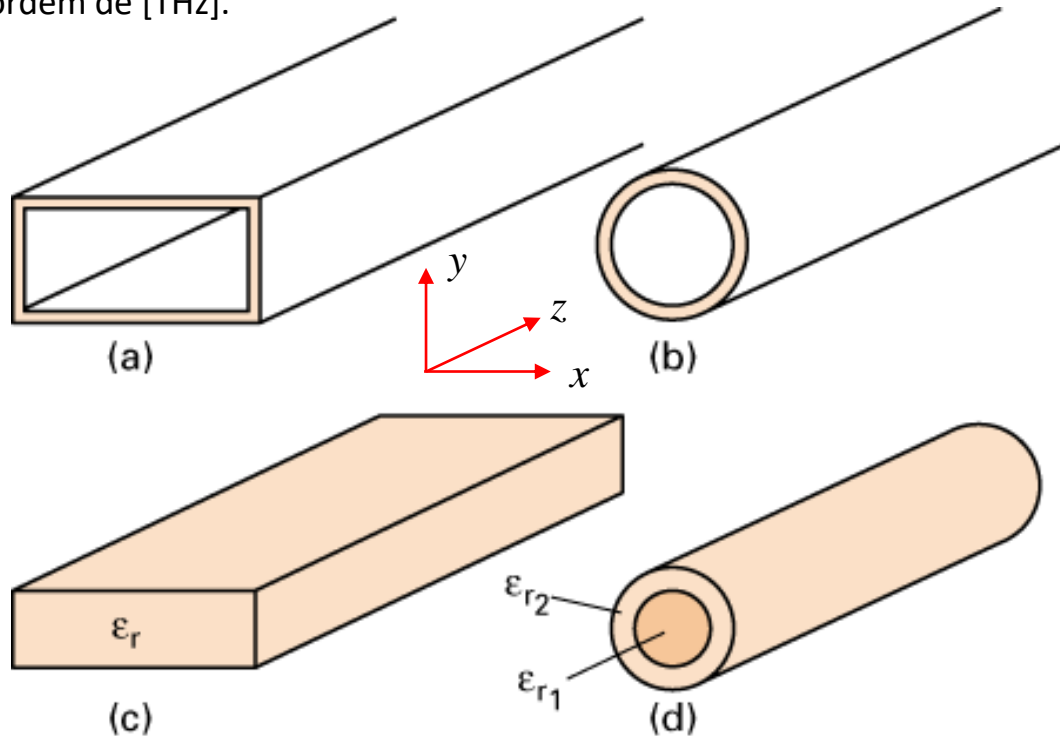
Uma maneira alternativa ao monopolo do slide anterior e que é frequentemente adotada para excitar o modo TE no interior da GO consiste em utilizar uma espira (*loop*) mostrada em magenta na figura abaixo. A espira é colocada no interior da GO posicionada no centro junto à parede de fundo da GO. O plano que contém a espira deve ser paralelo ao plano  $yz$ , de modo que as linhas do campo  $\underline{H}$  sejam perpendiculares ao plano da espira. O terminal " + " da espira é soldado no condutor interno do cabo alimentador externo à GO e o terminal " - " da espira é soldado na parede de fundo junto com o *ground* do cabo alimentador. Obviamente há um rol de considerações quanto à impedância do cabo alimentador e à impedância da espira, mas que fogem ao escopo deste estudo. Mesmas considerações de casamento de impedância valem para a excitação da GO através de um monopolo discutida no slide anterior.



## Guia de onda dielétrica

Conforme discutido no slide 8, uma onda estacionária com máximos e mínimos distribuídos espacialmente no interior da GO é estabelecida como consequência da interferência destrutiva e construtiva entre a onda EM incidente e onda EM refletida, sendo a onda refletida gerada na descontinuidade de propagação que ocorre nas paredes do guia. Conforme vimos, a onda EM é estacionária na seção transversal da GO (plano  $xy$ ) e se propaga no sentido longitudinal (eixo  $z$ ).

Embora o escopo de nosso estudo sejam GOs de paredes metálicas, conforme mostrado abaixo em (a) para GOs metálicas retangulares e em (b) para GOs metálicas circulares, é importante mencionar que GOs dielétricas geram a necessária descontinuidade de propagação nas paredes da GO através da descontinuidade originada por um degrau no valor da permissividade elétrica  $\epsilon_r$  do meio de propagação. Por exemplo, em (c) abaixo é mostrado uma *dielectric slab waveguide* que gera a descontinuidade de propagação através do degrau da permissividade  $\epsilon_r$  em relação à permissividade  $\epsilon_0$  do espaço livre e em (d) é mostrado uma fibra óptica que gera a descontinuidade de propagação pelo degrau da permissividade  $\epsilon_{r2}$  em relação à permissividade  $\epsilon_{r1}$ . Note que uma fibra óptica nada mais é do que uma GO que opera em frequências da ordem de [THz].



Independente de serem metálicas ou dielétricas, as GOs suportam os dois modos de propagação TE (Transversal Elétrico) ou TM (Transversal Magnético) já referidos em slides anteriores:

- Modo TE: As linhas do campo elétrico da onda EM são todas transversais à direção de propagação da onda.
- Modo TM: As linhas do campo magnético da onda EM são todas transversais à direção de propagação da onda.

## Guia de ondas retangular

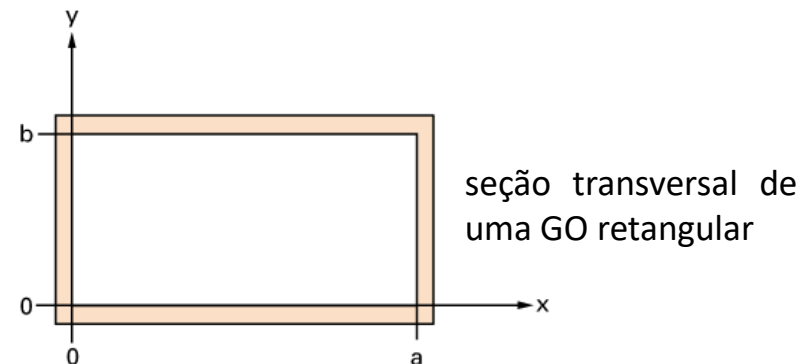
Conforme já discutido no slide 9, se a frequência  $f$  [Hz] do sinal que excita a GO for menor que a frequência de corte  $f_c$  [Hz] da GO, então isto significa que o comprimento  $\lambda_g$  [m] da onda guiada no interior da GO é excessivamente grande em relação à largura  $a$  da GO (i.e., a largura  $a$  da GO se torna menor do que  $\lambda_g/2$ ) e a onda EM não se propaga no interior da GO.

Portanto, a largura  $a$  [m] determina a faixa de frequência em que o modo de propagação denominado **modo de propagação dominante** se propaga de modo único no interior da GO. **O modo de propagação dominante é o modo com menores índices no número de ordem e é o que apresenta a menor frequência de corte  $f_c$** , conforme veremos nos próximos slides.

**Modos de maior ordem devem ser evitados porque se propagam com maior atenuação.** Isto ocorre porque em modos de maior ordem há mais máximos de campo elétrico e de campo magnético distribuídos espacialmente na seção transversal da GO, e, onde o campo elétrico é máximo maiores são as perdas dielétricas, como também, onde o campo magnético é máximo maiores são as perdas Joule (corrente superficial nas paredes do guia). **Portanto a absoluta maioria das GOs práticas propagam a onda EM através do modo com menores índices no número de ordem, e que caracteriza o modo dominante.**

A altura  $b$  [m] afeta a atenuação por perdas Joule nas paredes. Quanto menor  $b$ , maior a atenuação. Isto ocorre porque correntes circulam nas paredes laterais da GO e diminuindo  $b$  reduz a área de condução disponível para circulação destas correntes, o que aumenta as perdas Joule. A dimensão  $b$  também define a capacidade de potência máxima na GO, determinando em qual nível de potência ocorre a ruptura da rigidez dielétrica do ar (ou outro gás, como o nitrogênio, que é usado em GOs pressurizadas para evitar umidade em seu interior). As paredes horizontais se comportam como placas de um capacitor, podendo ocorrer arco elétrico entre elas, conforme já discutimos no slide 8.

Na prática, GOs comercialmente disponíveis usualmente adotam  $b = a/2$  [m].



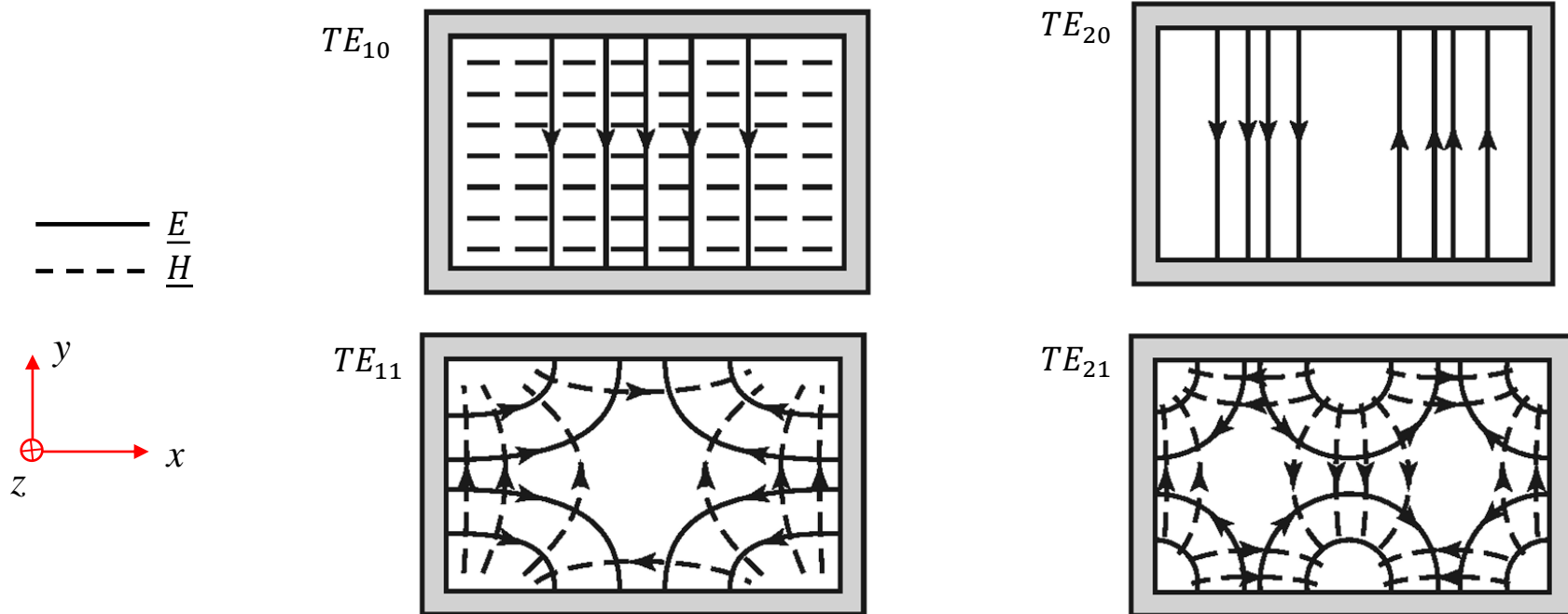
## Guia de onda retangular – modo $TE_{mn}$

No modo  $TE_{mn}$  as linhas do campo  $\underline{E}$  da onda EM são todas contidas na seção transversal  $xy$  da GO. Os índices  $m$  e  $n$  do número de ordem do modo se referem à distribuição espacial das linhas do campo  $\underline{E}$  na seção transversal da GO.

Para o modo  $TE_{mn}$  o índice  $m$  corresponde ao número de variações do mínimo ao máximo (ou vice versa) da amplitude do campo  $\underline{E}$  observadas na seção transversal da GO ao longo da direção  $x$ . O índice  $n$  corresponde ao número de variações do mínimo ao máximo (ou vice versa) da amplitude do campo  $\underline{E}$  observadas na seção transversal da GO ao longo da direção  $y$ .

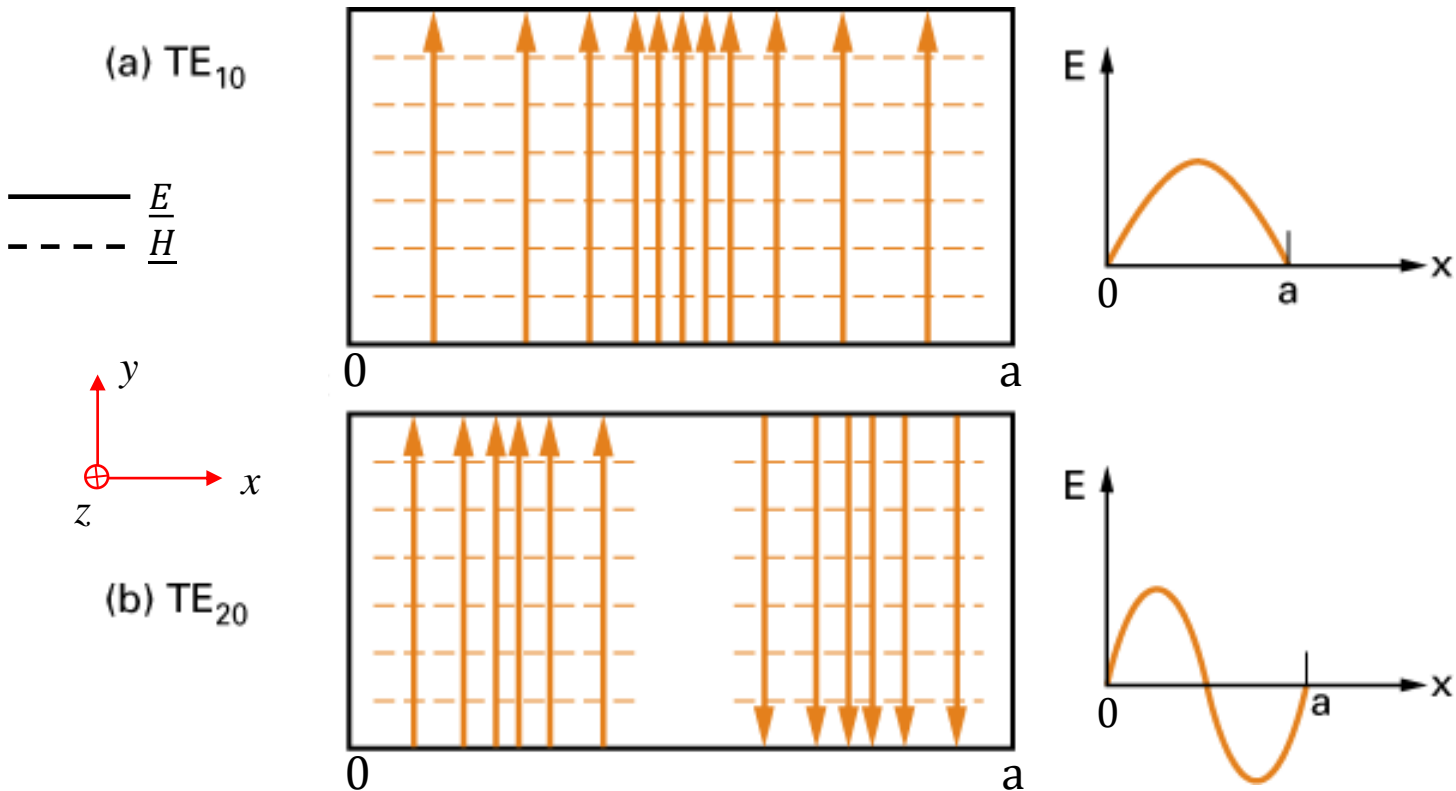
Quanto mais próximas entre si estiverem as linhas de um campo em uma determinada coordenada  $(x, y, z)$  maior será a amplitude do campo naquela coordenada. Consequentemente, quanto mais distantes entre si estiverem as linhas de um campo em uma determinada coordenada  $(x, y, z)$  menor será a amplitude do campo naquela coordenada.

Por exemplo, abaixo é mostrado as linhas dos campos  $\underline{E}$  e  $\underline{H}$  na seção transversal de uma GO retangular para os modos  $TE_{10}$ ,  $TE_{20}$ ,  $TE_{11}$  e  $TE_{21}$ .



## Guia de onda retangular – modo $TE_{mn}$

Para efeito de explicitar a regra “Quanto mais próximas entre si estiverem as linhas de um campo em uma determinada coordenada  $(x, y, z)$  maior será a amplitude do campo naquela coordenada e quanto mais distantes entre si estiverem as linhas de um campo em uma determinada coordenada  $(x, y, z)$  menor será a amplitude do campo naquela coordenada”, a figura abaixo mostra para os modos  $TE_{10}$  e  $TE_{20}$  os gráficos que relacionam a distribuição espacial das linhas do campo  $\underline{E}$  e a amplitude do campo  $\underline{E}$ :



Referindo-se ao modo de excitação discutido no slide 10, é instrutivo notar na figura (b) que para excitar o modo  $TE_{20}$  em uma GO retangular idealmente são necessários dois monopolos alimentados com sinais defasados  $180^\circ$  entre si e posicionados respectivamente em pontos do eixo  $x$  que correspondem ao máximo de magnitude (amplitude) do campo  $\underline{E}$ .

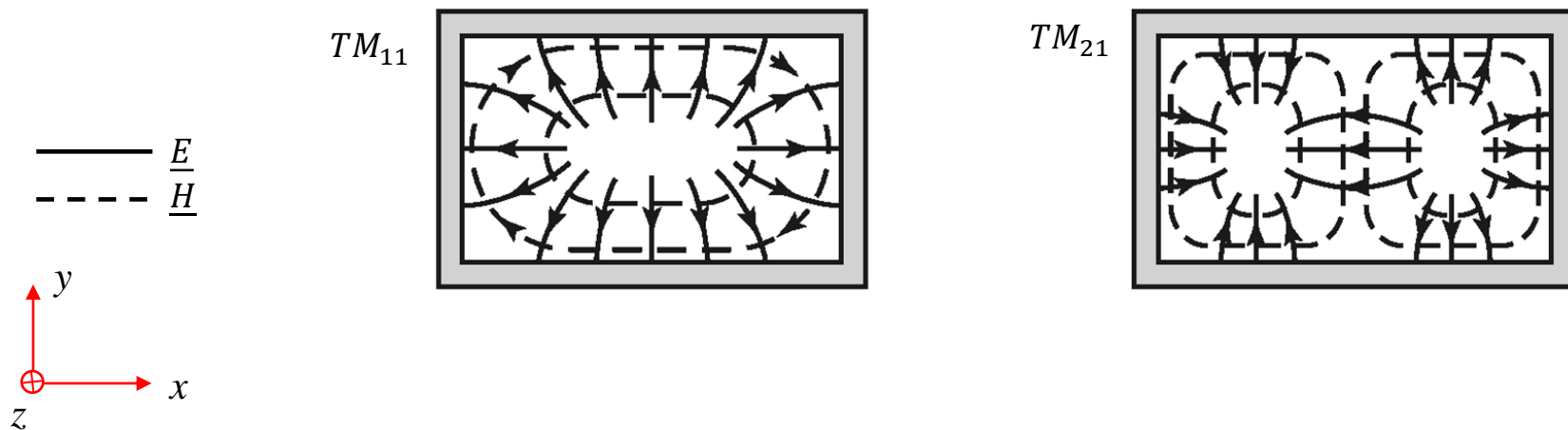
## Guia de onda retangular – modo $TM_{mn}$

No modo  $TM_{mn}$  as linhas do campo  $\underline{H}$  da onda EM são todas contidas na seção transversal  $xy$  da GO. Os índices  $m$  e  $n$  do número de ordem do modo se referem à distribuição espacial das linhas do campo  $\underline{H}$  na seção transversal da GO.

Para o modo  $TM_{mn}$  o índice  $m$  corresponde ao número de variações do mínimo ao máximo (ou vice versa) da amplitude do campo  $\underline{H}$  observadas na seção transversal da GO ao longo da direção  $x$ . O índice  $n$  corresponde ao número de variações do mínimo ao máximo (ou vice versa) da amplitude do campo  $\underline{H}$  observadas na seção transversal da GO ao longo da direção  $y$ .

Novamente, quanto mais próximas entre si estiverem as linhas de um campo em uma determinada coordenada  $(x, y, z)$  maior será a amplitude do campo naquela coordenada e quanto mais distantes entre si estiverem as linhas de um campo em uma determinada coordenada  $(x, y, z)$  menor será a amplitude do campo naquela coordenada.

Por exemplo, abaixo é mostrado as linhas dos campos  $\underline{E}$  e  $\underline{H}$  na seção transversal de uma GO retangular para os modos,  $TM_{11}$  e  $TM_{21}$ .





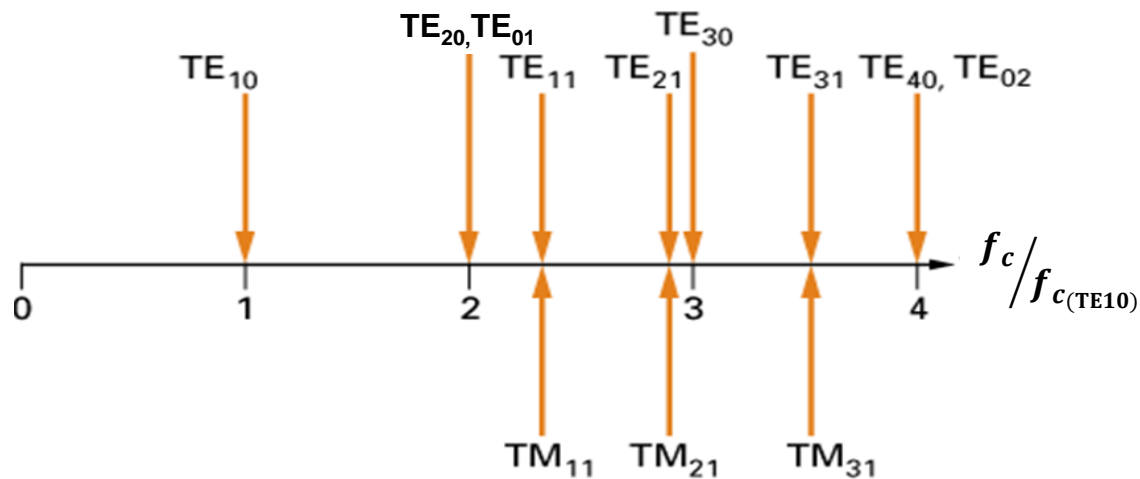
## Guia de onda retangular – faixa de frequência operacional

O gráfico abaixo mostra as frequências de corte  $f_c$  [Hz] dos modos  $TE_{mn}$  e  $TM_{mn}$  normalizadas em relação à frequência de corte  $f_{c(TE_{10})}$  [Hz] do modo dominante  $TE_{10}$  para uma GO retangular padrão, em que  $a = 2b$  [m].

**A frequência  $f$  [Hz] do sinal que excita a GO deve situar-se dentro da faixa que assegura haver propagação apenas do modo dominante  $TE_{10}$ .** Veremos a razão disto a seguir.

Consideremos, por exemplo, o caso em que a frequência do sinal que excita a GO seja  $f = 2.05f_{c(TE_{10})}$ , situação em que a onda EM pode se propagar no interior da GO em dois modos superpostos – o modo dominante  $TE_{10}$  e o modo  $TE_{20}$ , conforme mostra o gráfico abaixo.

O problema desta situação é que o modo dominante  $TE_{10}$  e o modo  $TE_{20}$  apresentam constantes de propagação  $\beta$  [rad/m] distintas (ver tabela no slide 21) e conseqüentemente apresentam velocidades de fase  $v_p = \omega/\beta$  [m/s] também distintas, efeito que é denominado **dispersão**. A dispersão compromete a integridade do sinal de informação que está sendo transportado pela onda EM que se propaga no interior da GO porque **as diferentes velocidades de fase dos modos  $TE_{10}$  e  $TE_{20}$  fazem com que os dois sinais de informação cheguem ao final do GO em instantes de tempo diferentes**, causando interferência intersimbólica (ISI – *intersymbol interference*) entre os sinais (ver [https://en.wikipedia.org/wiki/Intersymbol\\_interference](https://en.wikipedia.org/wiki/Intersymbol_interference)), de uma maneira muito similar ao eco gerado por multipercurso (*multipath*) em um canal de transmissão *wireless* estabelecido entre uma antena transmissora e uma antena receptora (ver [https://en.wikipedia.org/wiki/Multipath\\_propagation](https://en.wikipedia.org/wiki/Multipath_propagation)).

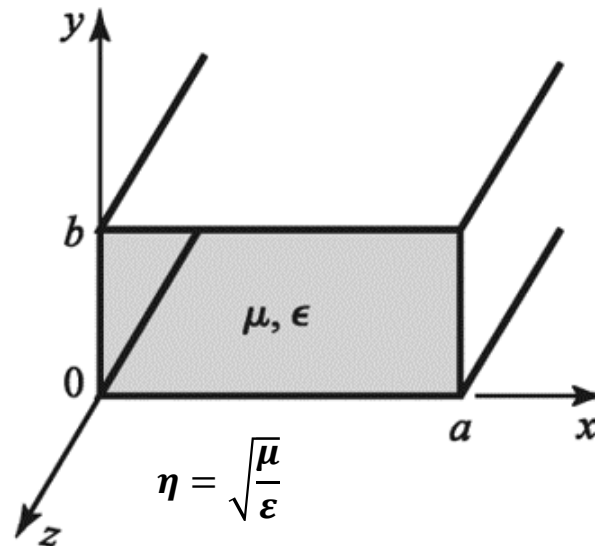


## Guia de onda retangular – equações dos campos $\underline{E}$ e $\underline{H}$ e parâmetros de propagação

Nos próximos slides analisaremos as equações dos campos  $\underline{E}$  [V/m] e  $\underline{H}$  [A/m] no interior de uma GO retangular e os parâmetros de propagação dos modos  $TE_{mn}$  e  $TM_{mn}$  da onda EM. As referidas equações encontram-se deduzidas na seção 3.3 de <https://www.fccdecastro.com.br/pdf/ME4P.pdf>.

As expressões analíticas para as componentes  $E_z, E_x, E_y$  e para as componentes  $H_z, H_x, H_y$  que analisaremos nos próximos slides resultam da solução tridimensional da Equação de Helmholtz, já vista no Cap II.2 para a onda EM plana, mas agora sujeita às condições de fronteira estabelecidas pelas paredes metálicas da GO que refletem integralmente a onda EM nelas incidente estabelecendo um padrão de ondas estacionárias no interior da GO resultante da interferência destrutiva e construtiva entre as ondas incidentes e refletidas.

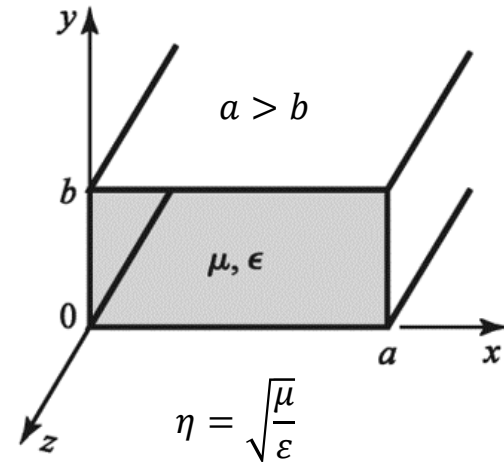
A geometria que consideraremos na análise dos próximos slides é conforme mostrado abaixo:



onde  $\eta$  é a impedância característica do meio de permeabilidade  $\mu$  permissividade  $\epsilon$  no qual a onda EM se propaga no interior da GO – a mesma impedância caso a onda EM se propagasse como uma onda plana em um meio sem discontinuidades e sem perdas de permeabilidade  $\mu$  e permissividade  $\epsilon$ .

# Guia de onda retangular – equações dos campos $\underline{E}$ e $\underline{H}$ e parâmetros de propagação

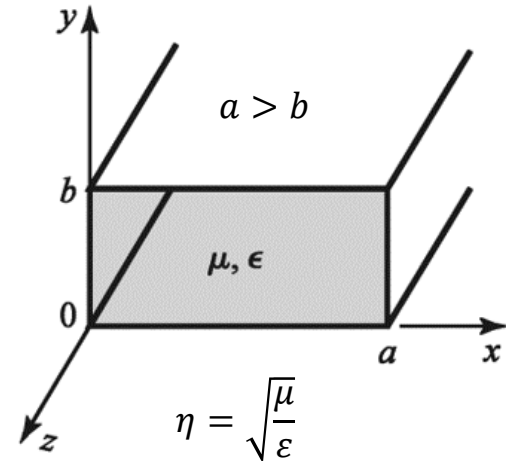
Quantity	TE <sub>mn</sub> Mode	TM <sub>mn</sub> Mode
$k$	$\omega\sqrt{\mu\epsilon}$	$\omega\sqrt{\mu\epsilon}$
$k_c$	$\sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2}$	$\sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2}$
$\beta$	$\sqrt{k^2 - k_c^2}$	$\sqrt{k^2 - k_c^2}$
$\lambda_c$	$\frac{2\pi}{k_c}$	$\frac{2\pi}{k_c}$
$\lambda_g$	$\frac{2\pi}{\beta}$	$\frac{2\pi}{\beta}$
$v_p$	$\frac{\omega}{\beta}$	$\frac{\omega}{\beta}$
$\alpha_d$	$\frac{k^2 \tan \delta}{2\beta}$	$\frac{k^2 \tan \delta}{2\beta}$



$k$  [rad/m] é a constante de propagação da onda EM caso a GO não tivesse paredes e a onda EM de frequência  $f = \omega/(2\pi)$  [Hz] fosse uma onda plana se propagando em um meio sem discontinuidades e sem perdas de permeabilidade  $\mu$  e permissividade  $\epsilon$ .

# Guia de onda retangular – equações dos campos $\underline{E}$ e $\underline{H}$ e parâmetros de propagação

Quantity	TE <sub>mn</sub> Mode	TM <sub>mn</sub> Mode
$k$	$\omega\sqrt{\mu\epsilon}$	$\omega\sqrt{\mu\epsilon}$
$k_c$	$\sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2}$	$\sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2}$
$\beta$	$\sqrt{k^2 - k_c^2}$	$\sqrt{k^2 - k_c^2}$
$\lambda_c$	$\frac{2\pi}{k_c}$	$\frac{2\pi}{k_c}$
$\lambda_g$	$\frac{2\pi}{\beta}$	$\frac{2\pi}{\beta}$
$v_p$	$\frac{\omega}{\beta}$	$\frac{\omega}{\beta}$
$\alpha_d$	$\frac{k^2 \tan \delta}{2\beta}$	$\frac{k^2 \tan \delta}{2\beta}$

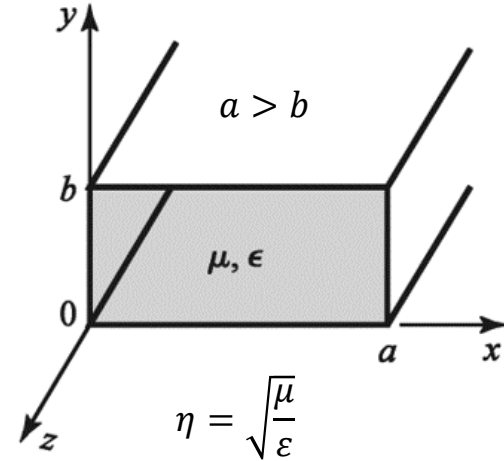


$k_c$  [rad/m] é a constante de propagação da onda EM na frequência de corte  $f_{c_{mn}}$  [Hz] do modo (TE ou TM) de índices  $m$  e  $n$ . A frequência de corte  $f_{c_{mn}}$  [Hz] é a frequência do sinal de excitação da GO abaixo da qual a onda EM não se propaga no modo (TE ou TM) de índices  $m$  e  $n$ , sendo dada por

$$f_{c_{mn}} = \frac{c}{2\pi\sqrt{\epsilon_r}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad (1)$$

onde  $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$ , com  $\epsilon_0 = 8.8541878128 \times 10^{-12}$  [F/m] e onde  $c = 2.99792458 \times 10^8$  [m/s] é a velocidade de propagação da luz no espaço livre.

Quantity	TE <sub>mn</sub> Mode	TM <sub>mn</sub> Mode
$k$	$\omega\sqrt{\mu\epsilon}$	$\omega\sqrt{\mu\epsilon}$
$k_c$	$\sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2}$	$\sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2}$
$\beta$	$\sqrt{k^2 - k_c^2}$	$\sqrt{k^2 - k_c^2}$
$\lambda_c$	$\frac{2\pi}{k_c}$	$\frac{2\pi}{k_c}$
$\lambda_g$	$\frac{2\pi}{\beta}$	$\frac{2\pi}{\beta}$
$v_p$	$\frac{\omega}{\beta}$	$\frac{\omega}{\beta}$
$\alpha_d$	$\frac{k^2 \tan \delta}{2\beta}$	$\frac{k^2 \tan \delta}{2\beta}$



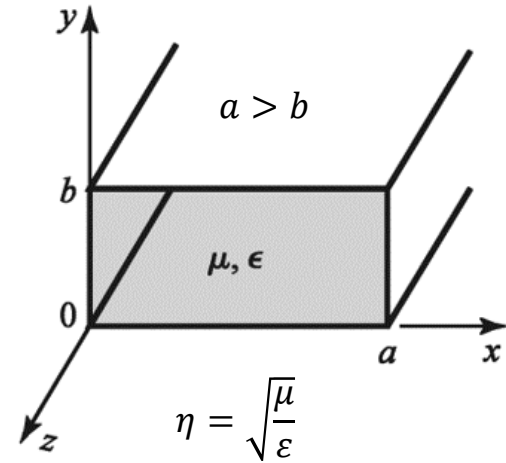
$\beta$  [rad/m] é a constante de propagação da onda EM guiada que se propaga no interior da GO para frequências  $f = \omega/(2\pi)$  [Hz] do sinal de excitação acima da frequência de corte  $f_{c_{mn}}$  [Hz] do modo (TE ou TM) de índices  $m$  e  $n$  no qual a onda EM se propaga no interior da GO.

Note que  $\beta$  [rad/m] depende de  $k_c$  [rad/m] que, por sua vez, depende dos índices  $m$  e  $n$  do modo (TE ou TM) no qual a onda EM se propaga no interior da GO.

Para uma determinada frequência  $f$  [Hz] do sinal de excitação da GO a onda EM somente pode se propagar nos modos (TE ou TM) de índices  $m$  e  $n$  para os quais  $f > f_{c_{mn}}$ , sendo  $f_{c_{mn}}$  [Hz] a frequência de corte do modo (TE ou TM) de índices  $m$  e  $n$ . Para os modos em que a condição  $f > f_{c_{mn}}$  não possa ser atendida, a constante de propagação  $\beta$  [rad/m] da onda EM guiada resulta imaginária (ou, equivalentemente, resulta em uma constante de atenuação  $\alpha$  [Np/m] real), o que significa que todas as componentes do campo EM atenuam exponencialmente ao longo do eixo  $z$  a partir da fonte de excitação. Tais modos são referidos como **modos evanescentes (cutoff modes ou evanescent modes)**. Se mais de um modo se propaga na GO, a GO é dita ser **overmoded**.

# Guia de onda retangular – equações dos campos $\underline{E}$ e $\underline{H}$ e parâmetros de propagação

Quantity	TE <sub>mn</sub> Mode	TM <sub>mn</sub> Mode
$k$	$\omega\sqrt{\mu\epsilon}$	$\omega\sqrt{\mu\epsilon}$
$k_c$	$\sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2}$	$\sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2}$
$\beta$	$\sqrt{k^2 - k_c^2}$	$\sqrt{k^2 - k_c^2}$
$\lambda_c$	$\frac{2\pi}{k_c}$	$\frac{2\pi}{k_c}$
$\lambda_g$	$\frac{2\pi}{\beta}$	$\frac{2\pi}{\beta}$
$v_p$	$\frac{\omega}{\beta}$	$\frac{\omega}{\beta}$
$\alpha_d$	$\frac{k^2 \tan \delta}{2\beta}$	$\frac{k^2 \tan \delta}{2\beta}$

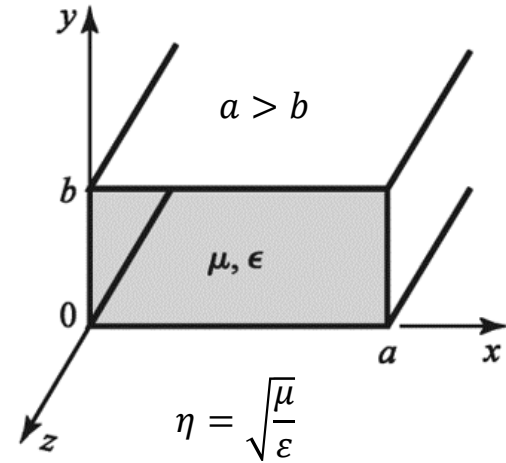


$\lambda_c$  [m] é o comprimento de onda da onda EM na frequência de corte  $f_{c_{mn}}$  [Hz] do modo (TE ou TM) de índices  $m$  e  $n$ .

Note que  $\lambda_c$  [m] depende de  $k_c$  [rad/m] que, por sua vez, depende dos índices  $m$  e  $n$  do modo (TE ou TM) no qual a onda EM se propaga no interior da GO.

# Guia de onda retangular – equações dos campos $\underline{E}$ e $\underline{H}$ e parâmetros de propagação

Quantity	TE <sub>mn</sub> Mode	TM <sub>mn</sub> Mode
$k$	$\omega\sqrt{\mu\epsilon}$	$\omega\sqrt{\mu\epsilon}$
$k_c$	$\sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2}$	$\sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2}$
$\beta$	$\sqrt{k^2 - k_c^2}$	$\sqrt{k^2 - k_c^2}$
$\lambda_c$	$\frac{2\pi}{k_c}$	$\frac{2\pi}{k_c}$
$\lambda_g$	$\frac{2\pi}{\beta}$	$\frac{2\pi}{\beta}$
$v_p$	$\frac{\omega}{\beta}$	$\frac{\omega}{\beta}$
$\alpha_d$	$\frac{k^2 \tan \delta}{2\beta}$	$\frac{k^2 \tan \delta}{2\beta}$

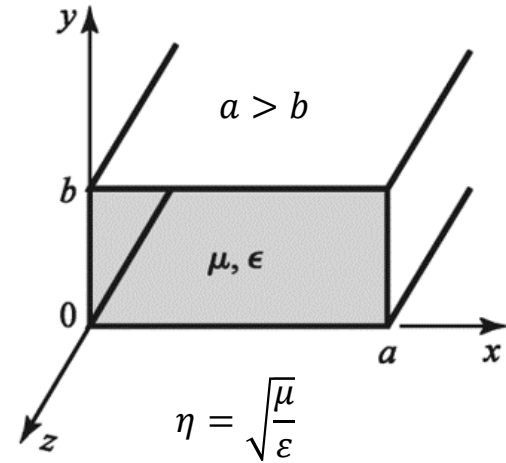


$\lambda_g$  [m] é o comprimento de onda da onda EM guiada que se propaga no interior da GO para frequências  $f = \omega/(2\pi)$  [Hz] do sinal de excitação acima da frequência de corte  $f_{c_{mn}}$  [Hz] do modo (TE ou TM) de índices  $m$  e  $n$  no qual a onda EM se propaga no interior da GO.

Note que  $\lambda_g$  [m] depende de  $\beta$  [rad/m], que depende de  $k_c$  [rad/m] e que, por sua vez, depende dos índices  $m$  e  $n$  do modo (TE ou TM) no qual a onda EM se propaga no interior da GO.

# Guia de onda retangular – equações dos campos $\underline{E}$ e $\underline{H}$ e parâmetros de propagação

Quantity	TE <sub>mn</sub> Mode	TM <sub>mn</sub> Mode
$k$	$\omega\sqrt{\mu\epsilon}$	$\omega\sqrt{\mu\epsilon}$
$k_c$	$\sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2}$	$\sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2}$
$\beta$	$\sqrt{k^2 - k_c^2}$	$\sqrt{k^2 - k_c^2}$
$\lambda_c$	$\frac{2\pi}{k_c}$	$\frac{2\pi}{k_c}$
$\lambda_g$	$\frac{2\pi}{\beta}$	$\frac{2\pi}{\beta}$
$v_p$	$\frac{\omega}{\beta}$	$\frac{\omega}{\beta}$
$\alpha_d$	$\frac{k^2 \tan \delta}{2\beta}$	$\frac{k^2 \tan \delta}{2\beta}$



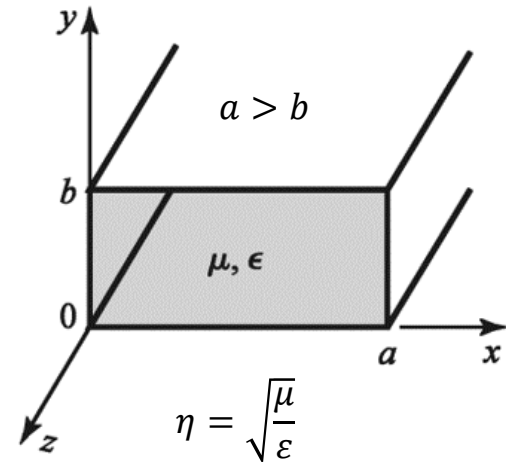
$v_p$  [m/s] é a velocidade de fase da onda EM guiada que se propaga no interior da GO para frequências  $f = \omega/(2\pi)$  [Hz] do sinal de excitação acima da frequência de corte  $f_{c_{mn}}$  [Hz] do modo (TE ou TM) de índices  $m$  e  $n$  no qual a onda EM se propaga no interior da GO.

Note que  $v_p$  [m/s] depende de  $\beta$  [rad/m], que depende de  $k_c$  [rad/m] e que, por sua vez, depende dos índices  $m$  e  $n$  do modo (TE ou TM) no qual a onda EM se propaga no interior da GO.



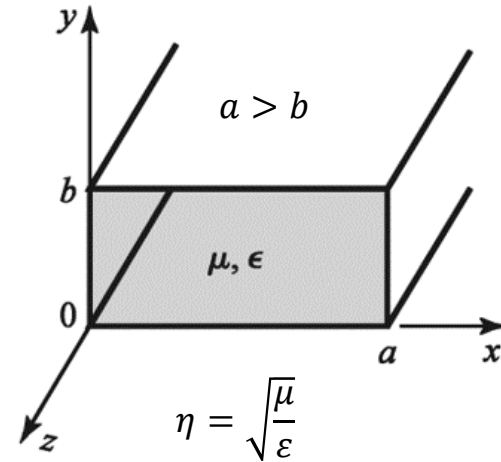
# Guia de onda retangular – equações dos campos $\underline{E}$ e $\underline{H}$ e parâmetros de propagação

Quantity	TE <sub>mn</sub> Mode	TM <sub>mn</sub> Mode
$k$	$\omega\sqrt{\mu\epsilon}$	$\omega\sqrt{\mu\epsilon}$
$k_c$	$\sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2}$	$\sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2}$
$\beta$	$\sqrt{k^2 - k_c^2}$	$\sqrt{k^2 - k_c^2}$
$\lambda_c$	$\frac{2\pi}{k_c}$	$\frac{2\pi}{k_c}$
$\lambda_g$	$\frac{2\pi}{\beta}$	$\frac{2\pi}{\beta}$
$v_p$	$\frac{\omega}{\beta}$	$\frac{\omega}{\beta}$
$\alpha_d$	$\frac{k^2 \tan \delta}{2\beta}$	$\frac{k^2 \tan \delta}{2\beta}$



$\alpha_d$  [Np/m] é a constante de atenuação resultante das perdas no material dielétrico que preenche a GO.  $\tan \delta$  é a tangente de perdas do material dielétrico que preenche a GO (ver slide 5 do Cap II.1). Se a GO for preenchida por ar ou um gás inerte pressurizado (nitrogênio, por exemplo) considera-se que não há perdas dielétricas e que  $\tan \delta = 0$ .

Quantity	TE <sub>mn</sub> Mode	TM <sub>mn</sub> Mode
$E_z$	0	$B \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$
$H_z$	$A \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$	0
$E_x$	$\frac{j\omega\mu n\pi}{k_c^2 b} A \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$	$\frac{-j\beta m\pi}{k_c^2 a} B \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$
$E_y$	$\frac{-j\omega\mu m\pi}{k_c^2 a} A \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$	$\frac{-j\beta n\pi}{k_c^2 b} B \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$
$H_x$	$\frac{j\beta m\pi}{k_c^2 a} A \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$	$\frac{j\omega\epsilon n\pi}{k_c^2 b} B \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$
$H_y$	$\frac{j\beta n\pi}{k_c^2 b} A \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$	$\frac{-j\omega\epsilon m\pi}{k_c^2 a} B \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$
$Z$	$Z_{TE} = \frac{k\eta}{\beta}$	$Z_{TM} = \frac{\beta\eta}{k}$

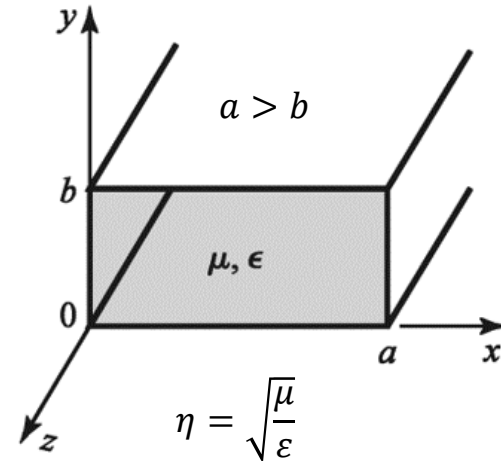


Note que  $E_z$  [V/m] é nulo para os modos TE<sub>mn</sub>. Para os modos TM<sub>mn</sub>, a componente  $E_z$  é não nula e varia sua fase ao longo do eixo z de acordo com  $e^{-j\beta z}$  (como era de se esperar p/ uma onda EM que se propaga a longo do eixo +z). A amplitude de  $E_z$  varia no plano xy de acordo com o padrão de onda estacionária dado por  $\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$ .

Dado que a amplitude de  $E_z$  varia no plano xy de acordo com  $\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$ , então basta que um dos índices m ou n do par de números que identificam a ordem do modo de propagação seja nulo para que  $E_z = 0$  e não ocorra a propagação da onda EM neste modo TM<sub>mn</sub>. **Portanto a onda EM não se propaga no interior da GO nos modos TM<sub>00</sub>, TM<sub>01</sub> e TM<sub>10</sub> ou em qualquer modo TM<sub>mn</sub> no qual um dos índices m ou n seja zero.**

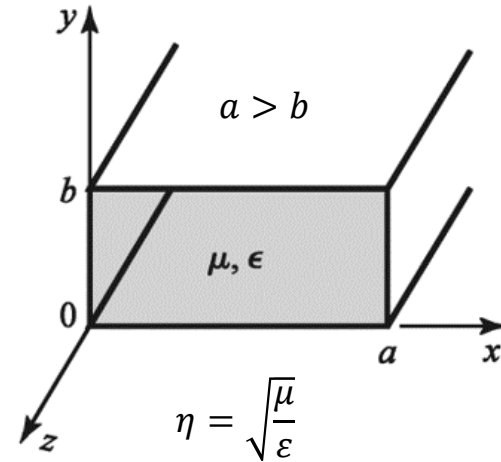
# Guia de onda retangular – equações dos campos $\underline{E}$ e $\underline{H}$ e parâmetros de propagação

Quantity	TE <sub>mn</sub> Mode	TM <sub>mn</sub> Mode
$E_z$	0	$B \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$
$H_z$	$A \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$	0
$E_x$	$\frac{j\omega\mu n\pi}{k_c^2 b} A \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$	$\frac{-j\beta m\pi}{k_c^2 a} B \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$
$E_y$	$\frac{-j\omega\mu m\pi}{k_c^2 a} A \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$	$\frac{-j\beta n\pi}{k_c^2 b} B \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$
$H_x$	$\frac{j\beta m\pi}{k_c^2 a} A \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$	$\frac{j\omega\epsilon n\pi}{k_c^2 b} B \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$
$H_y$	$\frac{j\beta n\pi}{k_c^2 b} A \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$	$\frac{-j\omega\epsilon m\pi}{k_c^2 a} B \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$
$Z$	$Z_{TE} = \frac{k\eta}{\beta}$	$Z_{TM} = \frac{\beta\eta}{k}$



Note que  $H_z$  [A/m] é nulo para os modos  $TM_{mn}$ . Para os modos  $TE_{mn}$ , a componente  $H_z$  é não nula e varia sua fase ao longo do eixo  $z$  de acordo com  $e^{-j\beta z}$  (como era de se esperar p/ uma onda EM que se propaga a longo do eixo  $+z$ ). A amplitude de  $H_z$  varia no plano  $xy$  de acordo com o padrão de onda estacionária dado por  $\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$ .

Quantity	TE <sub>mn</sub> Mode	TM <sub>mn</sub> Mode
$E_z$	0	$B \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$
$H_z$	$A \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$	0
$E_x$	$\frac{j\omega\mu n\pi}{k_c^2 b} A \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$	$\frac{-j\beta m\pi}{k_c^2 a} B \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$
$E_y$	$\frac{-j\omega\mu m\pi}{k_c^2 a} A \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$	$\frac{-j\beta n\pi}{k_c^2 b} B \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$
$H_x$	$\frac{j\beta m\pi}{k_c^2 a} A \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$	$\frac{j\omega\epsilon n\pi}{k_c^2 b} B \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$
$H_y$	$\frac{j\beta n\pi}{k_c^2 b} A \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$	$\frac{-j\omega\epsilon m\pi}{k_c^2 a} B \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$
$Z$	$Z_{TE} = \frac{k\eta}{\beta}$	$Z_{TM} = \frac{\beta\eta}{k}$

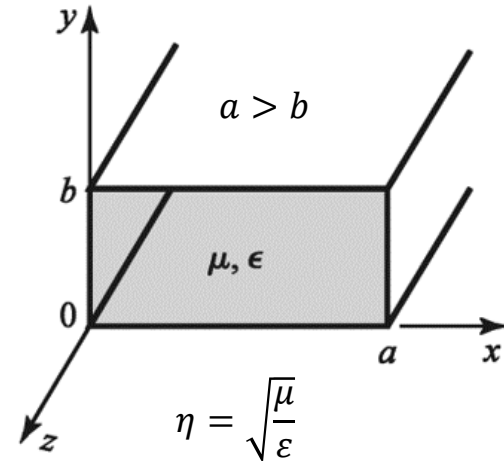


Para os modos  $TE_{mn}$  a menor frequência de corte  $f_{c_{mn}}$  [Hz] dada pela equação (1) no slide 20 ocorre para o modo  $TE_{10}$  ( $m=1, n=0$ ), o qual é o modo dominante para uma GO retangular. Nesta situação, note nas equações no interior do retângulo vermelho acima que  $E_x = 0$  e que  $H_y = 0$ , o que confere com as linhas dos campos  $\underline{E}$  e  $\underline{H}$  na seção transversal de uma GO retangular para o modo  $TE_{10}$  mostrada no slide 14.

Observe também nas equações no retângulo vermelho acima que **não há propagação da onda EM para o modo  $TE_{00}$**  ( $m=0, n=0$ ), dado que nesta situação todas as componentes do campo EM na seção transversal da GO resultam identicamente nulas, i.e.,  $E_x \equiv 0, E_y \equiv 0, H_x \equiv 0$  e  $H_y \equiv 0$ .

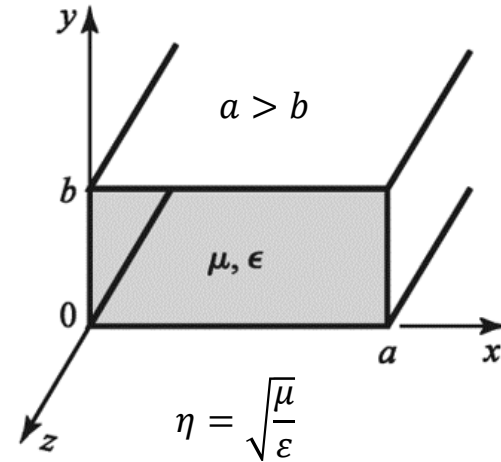
Os coeficientes  $A$  nas equações para os modos  $TE_{mn}$  e os coeficientes  $B$  nas equações para os modos  $TM_{mn}$  são constantes que dependem do tipo de excitação e da amplitude do sinal de excitação da GO.

Quantity	TE <sub>mn</sub> Mode	TM <sub>mn</sub> Mode
$E_z$	0	$B \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$
$H_z$	$A \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$	0
$E_x$	$\frac{j\omega\mu n\pi}{k_c^2 b} A \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$	$\frac{-j\beta m\pi}{k_c^2 a} B \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$
$E_y$	$\frac{-j\omega\mu m\pi}{k_c^2 a} A \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$	$\frac{-j\beta n\pi}{k_c^2 b} B \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$
$H_x$	$\frac{j\beta m\pi}{k_c^2 a} A \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$	$\frac{j\omega\epsilon n\pi}{k_c^2 b} B \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$
$H_y$	$\frac{j\beta n\pi}{k_c^2 b} A \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$	$\frac{-j\omega\epsilon m\pi}{k_c^2 a} B \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$
$Z$	$Z_{TE} = \frac{k\eta}{\beta}$	$Z_{TM} = \frac{\beta\eta}{k}$



Para os modos  $TM_{mn}$  a menor frequência de corte  $f_{c_{mn}}$  [Hz] dada pela equação (1) no slide 20 ocorre para o modo  $TM_{11}$  ( $m=1, n=1$ ). Nesta situação, note nas equações no interior do retângulo vermelho acima que todas as componentes do campo EM na seção transversal da GO não são identicamente nulas, i.e.,  $E_x \neq 0$ ,  $E_y \neq 0$ ,  $H_x \neq 0$  e  $H_y \neq 0$ , o que confere com as linhas dos campos  $\underline{E}$  e  $\underline{H}$  na seção transversal de uma GO retangular para o modo  $TM_{11}$  mostrada no slide 16.

Quantity	TE <sub>mn</sub> Mode	TM <sub>mn</sub> Mode
$E_z$	0	$B \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$
$H_z$	$A \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$	0
$E_x$	$\frac{j\omega\mu n\pi}{k_c^2 b} A \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$	$\frac{-j\beta m\pi}{k_c^2 a} B \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$
$E_y$	$\frac{-j\omega\mu m\pi}{k_c^2 a} A \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$	$\frac{-j\beta n\pi}{k_c^2 b} B \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$
$H_x$	$\frac{j\beta m\pi}{k_c^2 a} A \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$	$\frac{j\omega\epsilon n\pi}{k_c^2 b} B \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$
$H_y$	$\frac{j\beta n\pi}{k_c^2 b} A \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$	$\frac{-j\omega\epsilon m\pi}{k_c^2 a} B \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$
$Z$	$Z_{TE} = \frac{k\eta}{\beta}$	$Z_{TM} = \frac{\beta\eta}{k}$





As impedâncias  $Z_{TE}$  [Ω] e  $Z_{TM}$ [Ω] são impedâncias de onda definidas pela razão entre as componentes dos campos  $\underline{E}$  [V/m] e  $\underline{H}$  [A/m] na seção transversal da GO retangular para os respectivos modos TE e TM.

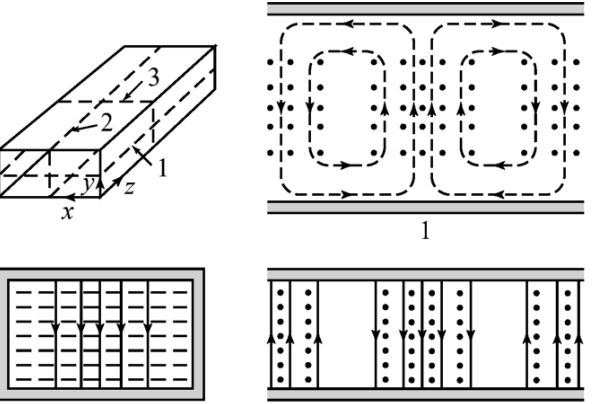
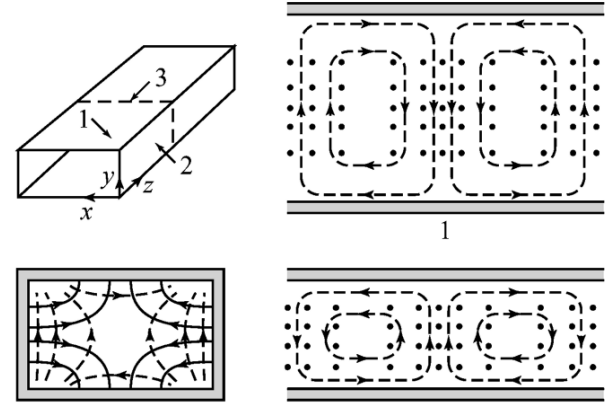
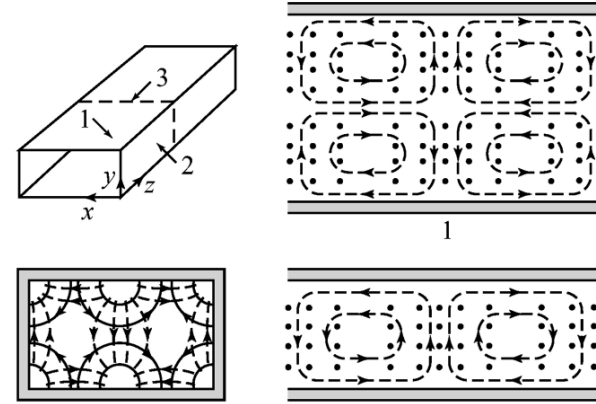
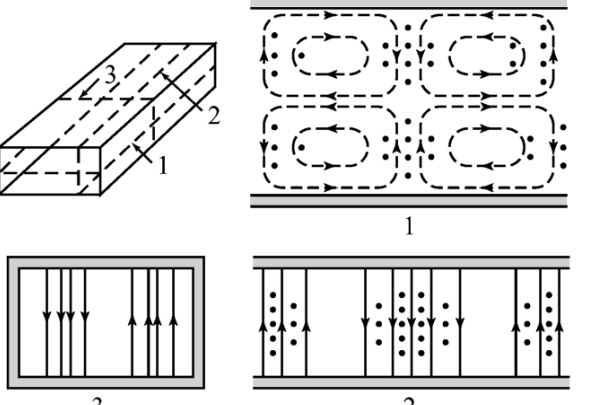
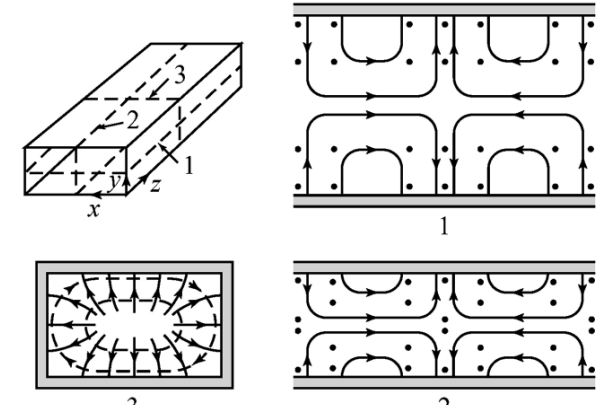
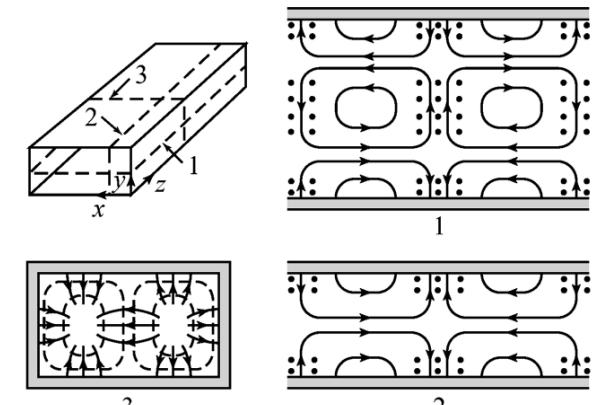
$$\left. \begin{array}{l} \text{As impedâncias } Z_{TE} \text{ [}\Omega\text{]} \text{ e } Z_{TM}\text{[}\Omega\text{]} \text{ são impedâncias de onda definidas pela razão} \\ \text{entre as componentes dos campos } \underline{E} \text{ [V/m]} \text{ e } \underline{H} \text{ [A/m]} \text{ na seção transversal da GO} \\ \text{retangular para os respectivos modos TE e TM.} \end{array} \right\} Z_{TE} = Z_{TM} = \frac{E_x}{H_y} = \frac{-E_y}{H_x} \quad (2)$$

A impedância  $Z_{TE}$  é real quando a condição  $f > f_{c_{mn}}$  é atendida de modo que a constante de propagação  $\beta$  é real e a onda EM se propaga no modo  $TE_{mn}$ . Se a condição  $f > f_{c_{mn}}$  não é atendida, a constante de propagação  $\beta$  é imaginária,  $Z_{TE}$  é imaginária e a onda EM se propaga em um modo  $TE_{mn}$  evanescente (i.e., se atenua exponencialmente ao longo do eixo z).

De mesma forma, a impedância  $Z_{TM}$  é real quando a condição  $f > f_{c_{mn}}$  é atendida de modo que a constante de propagação  $\beta$  é real e a onda EM se propaga no modo  $TM_{mn}$ . Se a condição  $f > f_{c_{mn}}$  não é atendida, a constante de propagação  $\beta$  é imaginária,  $Z_{TM}$  é imaginária e a onda EM se propaga em um modo  $TM_{mn}$  evanescente (i.e., se atenua exponencialmente ao longo do eixo z).

# Distribuição espacial das linhas dos campos $\underline{E}$ e $\underline{H}$ no interior da GO retangular

  $\underline{E}$   
  $\underline{H}$

$TE_{10}$	$TE_{11}$	$TE_{21}$
		
$TE_{20}$	$TM_{11}$	$TM_{21}$
		

## GO retangulares comercialmente disponíveis

Band*	Recommended Frequency Range (GHz)	TE <sub>10</sub> Cutoff Frequency (GHz)	EIA Designation WR-XX	Inside Dimensions [Inches (cm)]	Outside Dimensions [Inches (cm)]
L	1.12–1.70	0.908	WR-650	6.500 × 3.250 (16.51 × 8.255)	6.660 × 3.410 (16.916 × 8.661)
R	1.70–2.60	1.372	WR-430	4.300 × 2.150 (10.922 × 5.461)	4.460 × 2.310 (11.328 × 5.867)
S	2.60–3.95	2.078	WR-284	2.840 × 1.340 (7.214 × 3.404)	3.000 × 1.500 (7.620 × 3.810)
H (G)	3.95–5.85	3.152	WR-187	1.872 × 0.872 (4.755 × 2.215)	2.000 × 1.000 (5.080 × 2.540)
C (J)	5.85–8.20	4.301	WR-137	1.372 × 0.622 (3.485 × 1.580)	1.500 × 0.750 (3.810 × 1.905)
W (H)	7.05–10.0	5.259	WR-112	1.122 × 0.497 (2.850 × 1.262)	1.250 × 0.625 (3.175 × 1.587)
X	8.20–12.4	6.557	WR-90	0.900 × 0.400 (2.286 × 1.016)	1.000 × 0.500 (2.540 × 1.270)
Ku (P)	12.4–18.0	9.486	WR-62	0.622 × 0.311 (1.580 × 0.790)	0.702 × 0.391 (1.783 × 0.993)
K	18.0–26.5	14.047	WR-42	0.420 × 0.170 (1.07 × 0.43)	0.500 × 0.250 (1.27 × 0.635)
Ka (R)	26.5–40.0	21.081	WR-28	0.280 × 0.140 (0.711 × 0.356)	0.360 × 0.220 (0.914 × 0.559)

\* Letters in parentheses denote alternative designations.



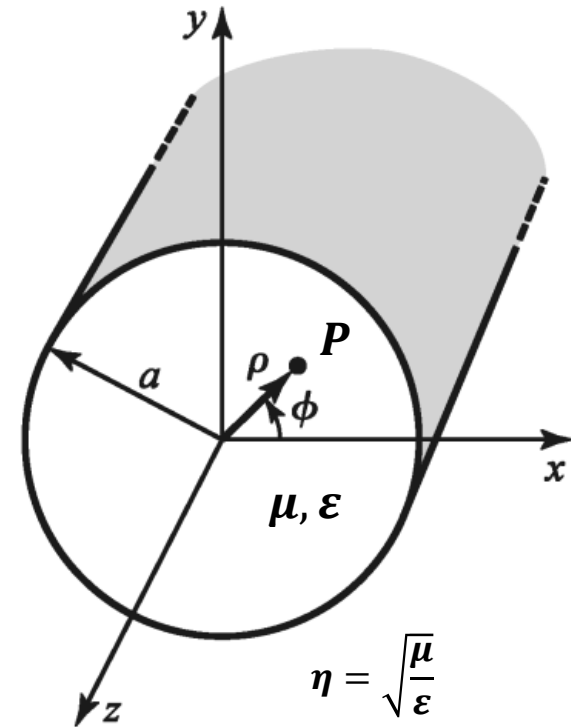
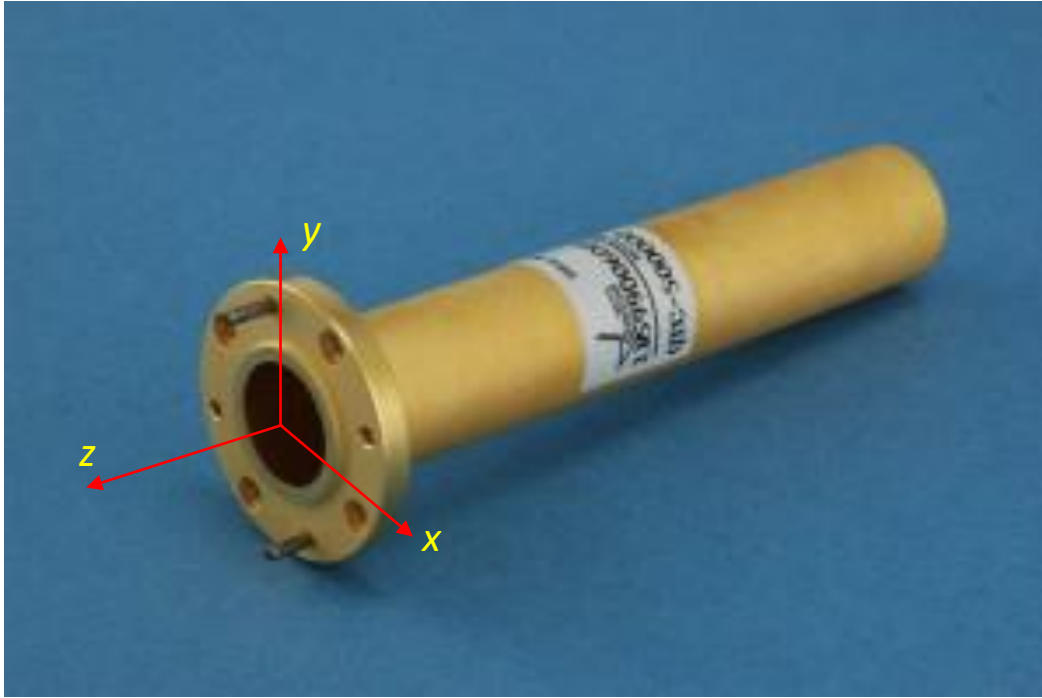
## GO retangulares comercialmente disponíveis

Band*	Recommended Frequency Range (GHz)	TE <sub>10</sub> Cutoff Frequency (GHz)	EIA Designation WR-XX	Inside Dimensions [Inches (cm)]	Outside Dimensions [Inches (cm)]
Q	33.0–50.5	26.342	WR-22	0.224 × 0.112 (0.57 × 0.28)	0.304 × 0.192 (0.772 × 0.488)
U	40.0–60.0	31.357	WR-19	0.188 × 0.094 (0.48 × 0.24)	0.268 × 0.174 (0.681 × 0.442)
V	50.0–75.0	39.863	WR-15	0.148 × 0.074 (0.38 × 0.19)	0.228 × 0.154 (0.579 × 0.391)
E	60.0–90.0	48.350	WR-12	0.122 × 0.061 (0.31 × 0.015)	0.202 × 0.141 (0.513 × 0.356)
W	75.0–110.0	59.010	WR-10	0.100 × 0.050 (0.254 × 0.127)	0.180 × 0.130 (0.458 × 0.330)
F	90.0–140.0	73.840	WR-8	0.080 × 0.040 (0.203 × 0.102)	0.160 × 0.120 (0.406 × 0.305)
D	110.0–170.0	90.854	WR-6	0.065 × 0.0325 (0.170 × 0.083)	0.145 × 0.1125 (0.368 × 0.2858)
G	140.0–220.0	115.750	WR-5	0.051 × 0.0255 (0.130 × 0.0648)	0.131 × 0.1055 (0.333 × .2680)
K	18.0–26.5	14.047	WR-42	0.420 × 0.170 (1.07 × 0.43)	0.500 × 0.250 (1.27 × 0.635)

\* Letters in parentheses denote alternative designations.

## Guia de onda circular

A geometria que consideraremos nos próximos slides para a análise da GO circular é conforme mostrado abaixo. Note que a seção transversal da GO é um círculo de raio  $a$ . Cada ponto  $P$  no interior da seção transversal é localizado pela coordenada polar  $(\rho, \phi)$ , onde  $\rho$  é o tamanho do raio vetor que vai de  $P$  ao centro do círculo localizado na origem do sistema cartesiano  $(x, y, z)$  e onde  $\phi$  é o ângulo a partir do eixo  $x$  até o raio vetor de tamanho  $\rho$ :

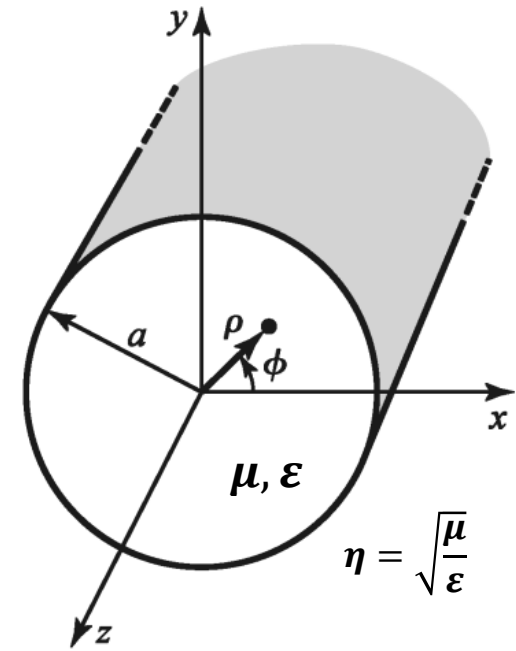


onde  $\eta$  é a impedância característica do meio de permeabilidade  $\mu$  permissividade  $\epsilon$  no qual a onda EM se propaga no interior da GO – a mesma impedância caso a onda EM se propagasse como uma onda plana em um meio sem descontinuidades e sem perdas de permeabilidade  $\mu$  e permissividade  $\epsilon$ .

Nos próximos slides analisaremos as equações dos campos  $\underline{E}$  [V/m] e  $\underline{H}$  [A/m] no interior de uma GO circular e os parâmetros de propagação dos modos  $TE_{nm}$  e  $TM_{nm}$  da onda EM. As referidas equações encontram-se deduzidas na seção 3.4 de <https://www.fccdecastro.com.br/pdf/ME4P.pdf>.

## Guia de onda circular – equações dos campos $\underline{E}$ e $\underline{H}$ e parâmetros de propagação

Quantity	TE <sub>nm</sub> Mode	TM <sub>nm</sub> Mode
$k$	$\omega\sqrt{\mu\epsilon}$	$\omega\sqrt{\mu\epsilon}$
$k_c$	$\frac{p'_{nm}}{a}$	$\frac{p_{nm}}{a}$
$\beta$	$\sqrt{k^2 - k_c^2}$	$\sqrt{k^2 - k_c^2}$
$\lambda_c$	$\frac{2\pi}{k_c}$	$\frac{2\pi}{k_c}$
$\lambda_g$	$\frac{2\pi}{\beta}$	$\frac{2\pi}{\beta}$
$v_p$	$\frac{\omega}{\beta}$	$\frac{\omega}{\beta}$
$\alpha_d$	$\frac{k^2 \tan \delta}{2\beta}$	$\frac{k^2 \tan \delta}{2\beta}$



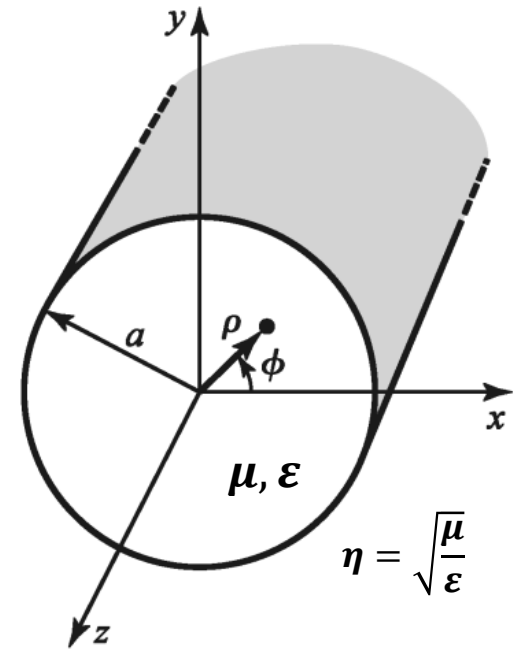
Na GO circular os modos de propagação são identificados por  $TE_{nm}$  e  $TM_{nm}$ . Note que os índices  $n$  e  $m$  estão em ordem inversa aos da GO retangular.

Para o modo  $TE_{nm}$  os índices  $n$  e  $m$  do número de ordem do modo se referem à distribuição espacial das linhas do campo  $\underline{E}$  na seção transversal da GO. O índice  $n$  se refere ao número de variações do mínimo ao máximo (ou vice versa) da amplitude de  $\underline{E}$  observadas ao longo de uma variação semi-circunferencial no sentido do ângulo  $\phi$ . O índice  $m$  se refere ao número de variações do mínimo ao máximo (ou vice versa) da amplitude de  $\underline{E}$  observadas ao longo do caminho radial definido na direção de  $\rho$ .

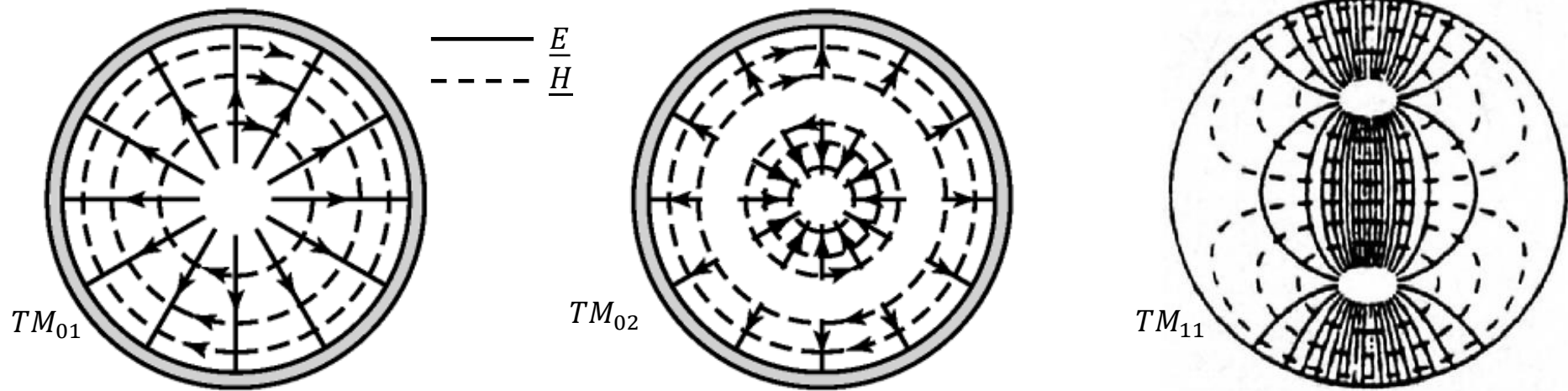
Para o modo  $TM_{nm}$  os índices  $n$  e  $m$  do número de ordem do modo se referem à distribuição espacial das linhas do campo  $\underline{H}$  na seção transversal da GO. O índice  $n$  se refere ao número de variações do mínimo ao máximo (ou vice versa) da amplitude de  $\underline{H}$  observadas ao longo de uma variação semi-circunferencial no sentido do ângulo  $\phi$ . O índice  $m$  se refere ao número de variações do mínimo ao máximo (ou vice versa) da amplitude de  $\underline{H}$  observadas ao longo do caminho radial definido na direção de  $\rho$ .

# Guia de onda circular – equações dos campos $\underline{E}$ e $\underline{H}$ e parâmetros de propagação

Quantity	TE <sub>nm</sub> Mode	TM <sub>nm</sub> Mode
$k$	$\omega\sqrt{\mu\epsilon}$	$\omega\sqrt{\mu\epsilon}$
$k_c$	$\frac{p'_{nm}}{a}$	$\frac{p_{nm}}{a}$
$\beta$	$\sqrt{k^2 - k_c^2}$	$\sqrt{k^2 - k_c^2}$
$\lambda_c$	$\frac{2\pi}{k_c}$	$\frac{2\pi}{k_c}$
$\lambda_g$	$\frac{2\pi}{\beta}$	$\frac{2\pi}{\beta}$
$v_p$	$\frac{\omega}{\beta}$	$\frac{\omega}{\beta}$
$\alpha_d$	$\frac{k^2 \tan \delta}{2\beta}$	$\frac{k^2 \tan \delta}{2\beta}$

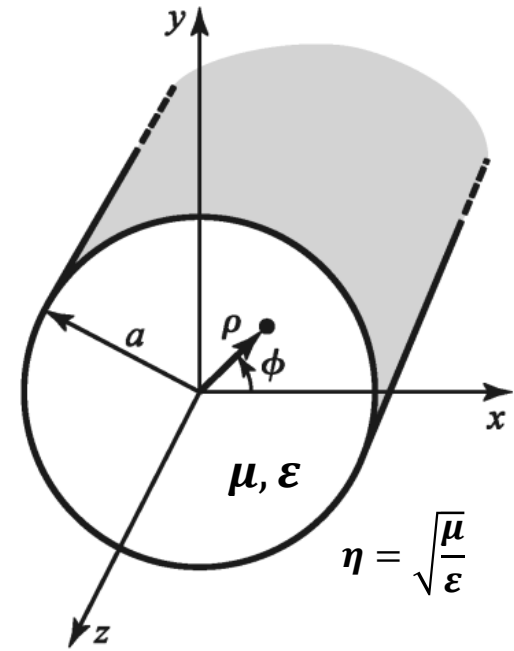


Por exemplo, abaixo é mostrado a distribuição espacial das linhas do campo  $\underline{H}$  (e do campo  $\underline{E}$ ) na seção transversal da GO circular  $\rho/a$ / alguns modos  $TM_{nm}$ :

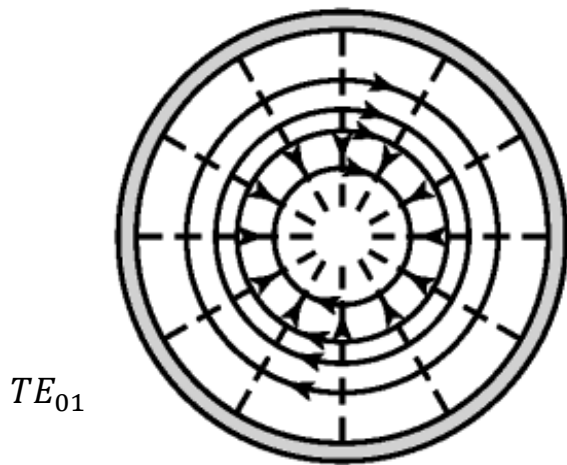


# Guia de onda circular – equações dos campos $\underline{E}$ e $\underline{H}$ e parâmetros de propagação

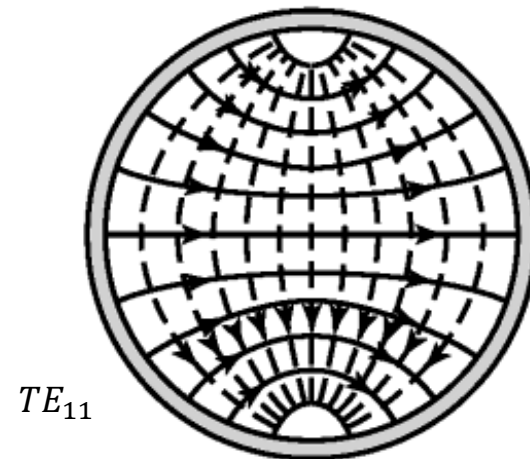
Quantity	TE <sub>nm</sub> Mode	TM <sub>nm</sub> Mode
$k$	$\omega\sqrt{\mu\epsilon}$	$\omega\sqrt{\mu\epsilon}$
$k_c$	$\frac{p'_{nm}}{a}$	$\frac{p_{nm}}{a}$
$\beta$	$\sqrt{k^2 - k_c^2}$	$\sqrt{k^2 - k_c^2}$
$\lambda_c$	$\frac{2\pi}{k_c}$	$\frac{2\pi}{k_c}$
$\lambda_g$	$\frac{2\pi}{\beta}$	$\frac{2\pi}{\beta}$
$v_p$	$\frac{\omega}{\beta}$	$\frac{\omega}{\beta}$
$\alpha_d$	$\frac{k^2 \tan \delta}{2\beta}$	$\frac{k^2 \tan \delta}{2\beta}$



E dando continuidade ao exemplo, abaixo é mostrado a distribuição espacial das linhas do campo  $\underline{E}$  (e do campo  $\underline{H}$ ) p/ alguns modos  $TE_{nm}$ :

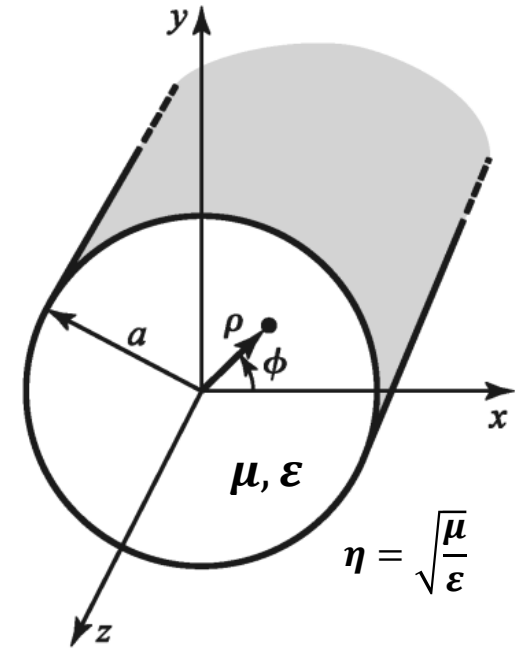


$\underline{E}$   
  $\underline{H}$



# Guia de onda circular – equações dos campos $\underline{E}$ e $\underline{H}$ e parâmetros de propagação

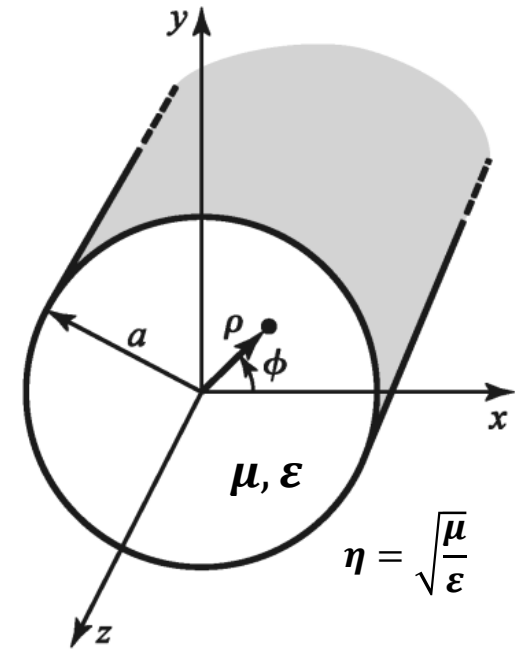
Quantity	TE <sub>nm</sub> Mode	TM <sub>nm</sub> Mode
$k$	$\omega\sqrt{\mu\epsilon}$	$\omega\sqrt{\mu\epsilon}$
$k_c$	$\frac{p'_{nm}}{a}$	$\frac{p_{nm}}{a}$
$\beta$	$\sqrt{k^2 - k_c^2}$	$\sqrt{k^2 - k_c^2}$
$\lambda_c$	$\frac{2\pi}{k_c}$	$\frac{2\pi}{k_c}$
$\lambda_g$	$\frac{2\pi}{\beta}$	$\frac{2\pi}{\beta}$
$v_p$	$\frac{\omega}{\beta}$	$\frac{\omega}{\beta}$
$\alpha_d$	$\frac{k^2 \tan \delta}{2\beta}$	$\frac{k^2 \tan \delta}{2\beta}$



Da mesma forma que para a GO retangular,  $k$  [rad/m] é a constante de propagação da onda EM caso a GO não tivesse paredes e a onda EM de frequência  $f = \omega/(2\pi)$  [Hz] fosse uma onda plana se propagando em um meio sem discontinuidades e sem perdas de permeabilidade  $\mu$  e permissividade  $\epsilon$ .

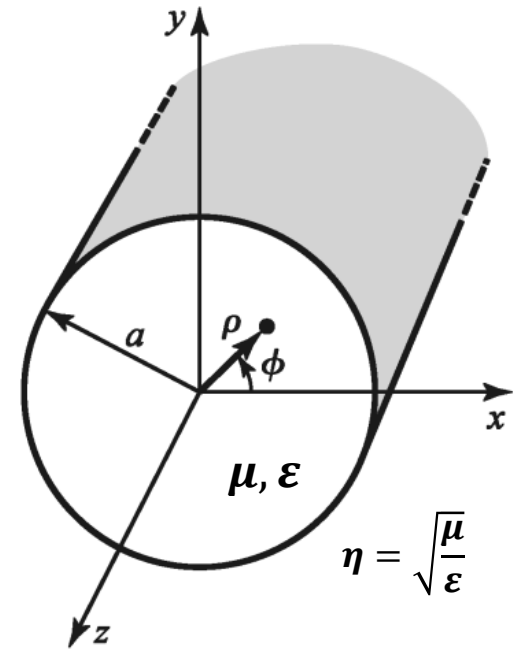
## Guia de onda circular – equações dos campos $\underline{E}$ e $\underline{H}$ e parâmetros de propagação

Quantity	TE <sub>nm</sub> Mode	TM <sub>nm</sub> Mode
$k$	$\omega\sqrt{\mu\epsilon}$	$\omega\sqrt{\mu\epsilon}$
$k_c$	$\frac{p'_{nm}}{a}$	$\frac{p_{nm}}{a}$
$\beta$	$\sqrt{k^2 - k_c^2}$	$\sqrt{k^2 - k_c^2}$
$\lambda_c$	$\frac{2\pi}{k_c}$	$\frac{2\pi}{k_c}$
$\lambda_g$	$\frac{2\pi}{\beta}$	$\frac{2\pi}{\beta}$
$v_p$	$\frac{\omega}{\beta}$	$\frac{\omega}{\beta}$
$\alpha_d$	$\frac{k^2 \tan \delta}{2\beta}$	$\frac{k^2 \tan \delta}{2\beta}$



Da mesma forma que para a GO retangular,  $k_c$  [rad/m] é a constante de propagação da onda EM na frequência de corte  $f_{c_{nm}}$  [Hz] do modo (TE ou TM) de índices  $n$  e  $m$ . A frequência de corte  $f_{c_{nm}}$  [Hz] é a frequência do sinal de excitação da GO abaixo da qual a onda EM não se propaga no modo (TE ou TM) de índices  $n$  e  $m$ .

Quantity	TE <sub>nm</sub> Mode	TM <sub>nm</sub> Mode
$k$	$\omega\sqrt{\mu\epsilon}$	$\omega\sqrt{\mu\epsilon}$
$k_c$	$\frac{p'_{nm}}{a}$	$\frac{p_{nm}}{a}$
$\beta$	$\sqrt{k^2 - k_c^2}$	$\sqrt{k^2 - k_c^2}$
$\lambda_c$	$\frac{2\pi}{k_c}$	$\frac{2\pi}{k_c}$
$\lambda_g$	$\frac{2\pi}{\beta}$	$\frac{2\pi}{\beta}$
$v_p$	$\frac{\omega}{\beta}$	$\frac{\omega}{\beta}$
$\alpha_d$	$\frac{k^2 \tan \delta}{2\beta}$	$\frac{k^2 \tan \delta}{2\beta}$

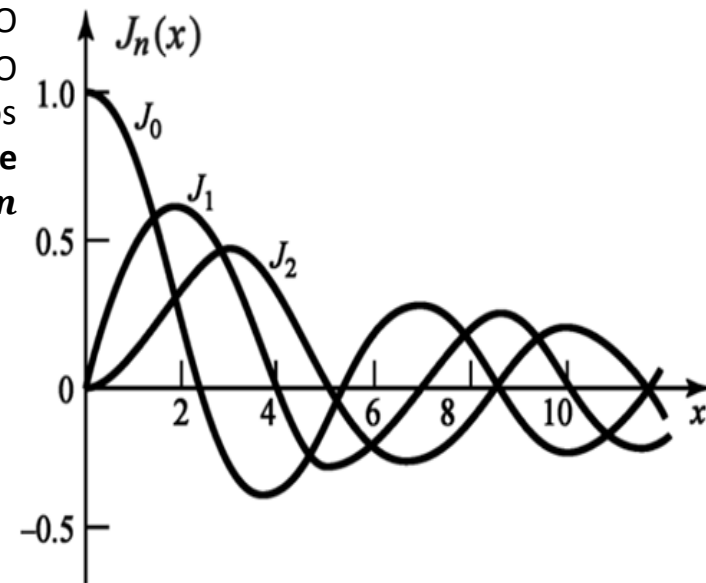


Especificamente, os parâmetros de propagação  $k_c$ ,  $\beta$ ,  $\lambda_c$ ,  $\lambda_g$ ,  $v_p$  e  $\alpha_d$  da GO circular tem a mesma interpretação que vimos quando analisamos a GO retangular. No entanto, diferentemente da GO retangular, estes parâmetros para a GO circular são todos determinados a partir da **Equação Diferencial de Bessel de índice  $p$**  cuja solução é a **função de Bessel de 1ª espécie de índice  $n$**  dada por ([https://pt.wikipedia.org/wiki/Fun%C3%A7%C3%A3o\\_de\\_Bessel](https://pt.wikipedia.org/wiki/Fun%C3%A7%C3%A3o_de_Bessel)):

$$J_n(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (x/2)^{n+2p}}{p! (n+p)!} \quad (3)$$

e a partir da derivada da função de Bessel de 1ª espécie de índice  $n$  dada por

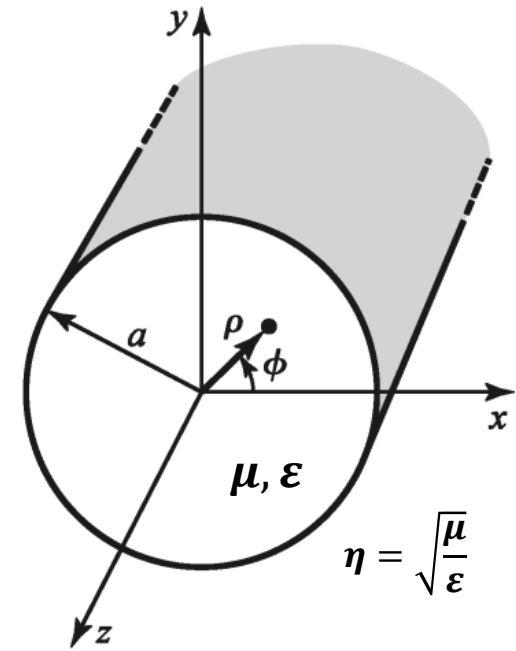
$$J'_n(x) = \frac{J_n(x)}{dx} \quad (4)$$





## Guia de onda circular – equações dos campos $\underline{E}$ e $\underline{H}$ e parâmetros de propagação

Quantity	$TE_{nm}$ Mode	$TM_{nm}$ Mode
$k$	$\omega\sqrt{\mu\epsilon}$	$\omega\sqrt{\mu\epsilon}$
$k_c$	$\frac{p'_{nm}}{a}$	$\frac{p_{nm}}{a}$
$\beta$	$\sqrt{k^2 - k_c^2}$	$\sqrt{k^2 - k_c^2}$
$\lambda_c$	$\frac{2\pi}{k_c}$	$\frac{2\pi}{k_c}$
$\lambda_g$	$\frac{2\pi}{\beta}$	$\frac{2\pi}{\beta}$
$v_p$	$\frac{\omega}{\beta}$	$\frac{\omega}{\beta}$
$\alpha_d$	$\frac{k^2 \tan \delta}{2\beta}$	$\frac{k^2 \tan \delta}{2\beta}$



A constante de propagação  $k_c$  [rad/m] da onda EM na frequência de corte  $f_{c_{nm}}$  [Hz] do **modo  $TE_{nm}$**  é dada por  $k_c = p'_{nm}/a$ , onde  $a$  é o raio da seção transversal da GO e  $p'_{nm}$  é o valor de  $x$  para o qual  $J'_n(x) = 0$ , sendo  $J'_n(x)$  dado pela equação (4) do slide anterior. A tabela abaixo mostra os valores de  $p'_{nm}$  que satisfazem  $J'_n(p'_{nm}) = 0$ , sendo  $m$  o índice de ocorrência da raiz  $p'_{nm}$  no domínio  $x$ .

$n$	$p'_{n1}$	$p'_{n2}$	$p'_{n3}$
0	3.832	7.016	10.174
1	1.841	5.331	8.536
2	3.054	6.706	9.970

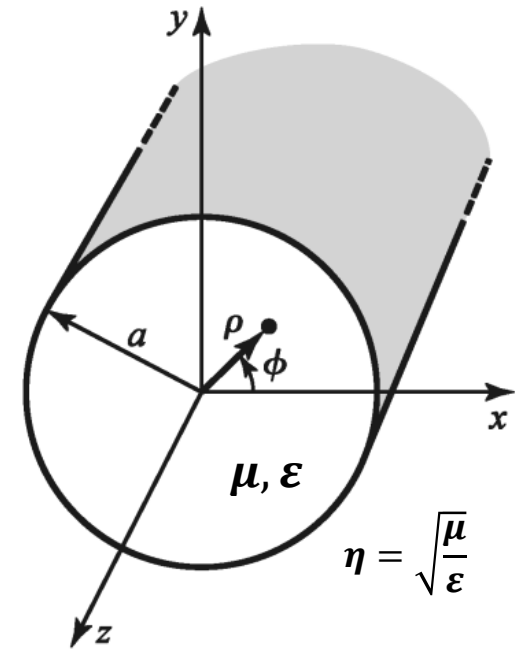
A frequência de corte  $f_{c_{nm}}$  [Hz] do modo  $TE_{nm}$  é dada por:

$$f_{c_{nm}} = \frac{p'_{nm}}{2\pi a \sqrt{\mu\epsilon}} \quad (5)$$

Note que  $p'_{nm} = 1.841$  é o menor valor na tabela, e ele ocorre para  $n = 1$  e  $m = 1$ , resultando na menor frequência de corte  $f_{c_{11}}$  dada por (5), o que caracteriza o modo  $TE_{11}$  como o modo dominante em uma GO circular. Note também que os índices  $m$  na tabela começam em 1, logo **não existem modos  $TE_{nm}$  p/ m = 0**.

## Guia de onda circular – equações dos campos $\underline{E}$ e $\underline{H}$ e parâmetros de propagação

Quantity	TE <sub>nm</sub> Mode	TM <sub>nm</sub> Mode
$k$	$\omega\sqrt{\mu\epsilon}$	$\omega\sqrt{\mu\epsilon}$
$k_c$	$\frac{p'_{nm}}{a}$	$\frac{p_{nm}}{a}$
$\beta$	$\sqrt{k^2 - k_c^2}$	$\sqrt{k^2 - k_c^2}$
$\lambda_c$	$\frac{2\pi}{k_c}$	$\frac{2\pi}{k_c}$
$\lambda_g$	$\frac{2\pi}{\beta}$	$\frac{2\pi}{\beta}$
$v_p$	$\frac{\omega}{\beta}$	$\frac{\omega}{\beta}$
$\alpha_d$	$\frac{k^2 \tan \delta}{2\beta}$	$\frac{k^2 \tan \delta}{2\beta}$



A constante de propagação  $k_c$  [rad/m] da onda EM na frequência de corte  $f_{c_{nm}}$  [Hz] do **modo TM<sub>nm</sub>** é dada por  $k_c = p_{nm}/a$ , onde  $a$  é o raio da seção transversal da GO e  $p_{nm}$  é o valor de  $x$  para o qual  $J_n(x) = 0$ , sendo  $J_n(x)$  dado pela equação (3) do slide 40. A tabela abaixo mostra os valores de  $p_{nm}$  que satisfazem  $J_n(p_{nm}) = 0$ , sendo  $m$  o índice de ocorrência da raiz  $p_{nm}$  no domínio  $x$ .

$n$	$p_{n1}$	$p_{n2}$	$p_{n3}$
0	2.405	5.520	8.654
1	3.832	7.016	10.174
2	5.135	8.417	11.620

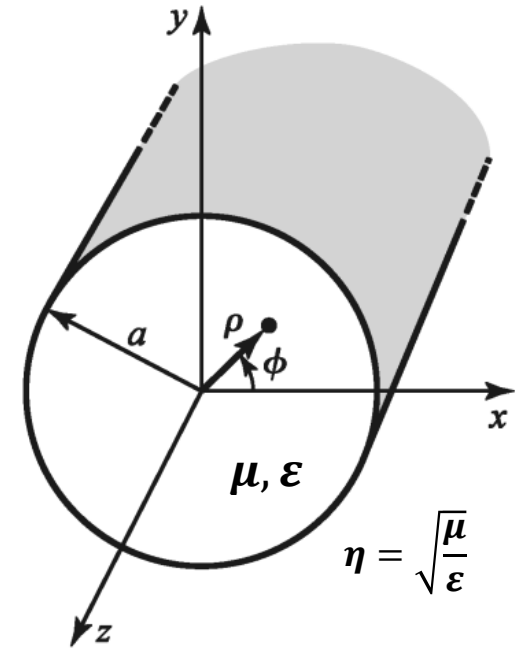
A frequência de corte  $f_{c_{nm}}$  [Hz] do modo **TM<sub>nm</sub>** é dada por:

$$f_{c_{nm}} = \frac{p_{nm}}{2\pi a \sqrt{\mu\epsilon}} \quad (6)$$

Note que  $p_{nm} = 2.405$  é o menor valor na tabela, e ele ocorre para  $n = 0$  e  $m = 1$ , resultando na menor frequência de corte  $f_{c_{01}}$  dada por (6), o que caracteriza o modo **TM<sub>01</sub>** como o modo TM de frequência de corte mais baixa. No entanto esta frequência de corte é maior do que a do modo modo dominante **TE<sub>11</sub>** resultante de  $p'_{nm} = 1.841$  na tabela do slide anterior. Note também que, como os índices  $m$  na tabela começam em 1, **não existem modos TM<sub>nm</sub> p/ m = 0**.

# Guia de onda circular – equações dos campos $\underline{E}$ e $\underline{H}$ e parâmetros de propagação

Quantity	TE <sub>nm</sub> Mode	TM <sub>nm</sub> Mode
$E_z$	0	$(A \sin n\phi + B \cos n\phi)J_n(k_c\rho)e^{-j\beta z}$
$H_z$	$(A \sin n\phi + B \cos n\phi)J_n(k_c\rho)e^{-j\beta z}$	0
$E_\rho$	$\frac{-j\omega\mu n}{k_c^2\rho}(A \cos n\phi - B \sin n\phi)J_n(k_c\rho)e^{-j\beta z}$	$\frac{-j\beta}{k_c}(A \sin n\phi + B \cos n\phi)J'_n(k_c\rho)e^{-j\beta z}$
$E_\phi$	$\frac{j\omega\mu}{k_c}(A \sin n\phi + B \cos n\phi)J'_n(k_c\rho)e^{-j\beta z}$	$\frac{-j\beta n}{k_c^2\rho}(A \cos n\phi - B \sin n\phi)J_n(k_c\rho)e^{-j\beta z}$
$H_\rho$	$\frac{-j\beta}{k_c}(A \sin n\phi + B \cos n\phi)J'_n(k_c\rho)e^{-j\beta z}$	$\frac{j\omega\epsilon n}{k_c^2\rho}(A \cos n\phi - B \sin n\phi)J_n(k_c\rho)e^{-j\beta z}$
$H_\phi$	$\frac{-j\beta n}{k_c^2\rho}(A \cos n\phi - B \sin n\phi)J_n(k_c\rho)e^{-j\beta z}$	$\frac{-j\omega\epsilon}{k_c}(A \sin n\phi + B \cos n\phi)J'_n(k_c\rho)e^{-j\beta z}$
Z	$Z_{TE} = \frac{k\eta}{\beta}$	$Z_{TM} = \frac{\beta\eta}{k}$

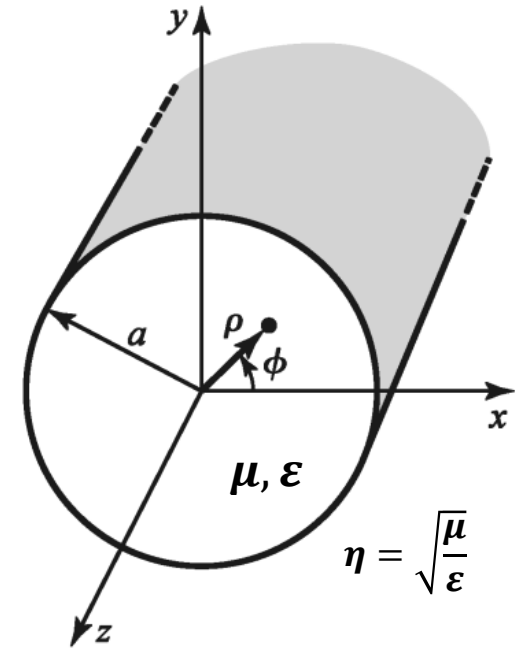


Note que  $E_z$  [V/m] é nulo para os modos  $TE_{nm}$ . Para os modos  $TM_{nm}$ , a componente  $E_z$  é não nula e varia sua fase ao longo do eixo  $z$  de acordo com  $e^{-j\beta z}$  (como era de se esperar p/ uma onda EM que se propaga a longo do eixo  $+z$ ).

A amplitude de  $E_z$  varia no plano  $xy$  de acordo com o padrão de onda estacionária dado por  $(A\sin(n\phi) + B\cos(n\phi))J_n(k_c\rho)$ .

## Guia de onda circular – equações dos campos $\underline{E}$ e $\underline{H}$ e parâmetros de propagação

Quantity	$TE_{nm}$ Mode	$TM_{nm}$ Mode
$E_z$	0	$(A \sin n\phi + B \cos n\phi) J_n(k_c \rho) e^{-j\beta z}$
$H_z$	$(A \sin n\phi + B \cos n\phi) J_n(k_c \rho) e^{-j\beta z}$	0
$E_\rho$	$\frac{-j\omega\mu n}{k_c^2 \rho} (A \cos n\phi - B \sin n\phi) J_n(k_c \rho) e^{-j\beta z}$	$\frac{-j\beta}{k_c} (A \sin n\phi + B \cos n\phi) J'_n(k_c \rho) e^{-j\beta z}$
$E_\phi$	$\frac{j\omega\mu}{k_c} (A \sin n\phi + B \cos n\phi) J'_n(k_c \rho) e^{-j\beta z}$	$\frac{-j\beta n}{k_c^2 \rho} (A \cos n\phi - B \sin n\phi) J_n(k_c \rho) e^{-j\beta z}$
$H_\rho$	$\frac{-j\beta}{k_c} (A \sin n\phi + B \cos n\phi) J'_n(k_c \rho) e^{-j\beta z}$	$\frac{j\omega\epsilon n}{k_c^2 \rho} (A \cos n\phi - B \sin n\phi) J_n(k_c \rho) e^{-j\beta z}$
$H_\phi$	$\frac{-j\beta n}{k_c^2 \rho} (A \cos n\phi - B \sin n\phi) J_n(k_c \rho) e^{-j\beta z}$	$\frac{-j\omega\epsilon}{k_c} (A \sin n\phi + B \cos n\phi) J'_n(k_c \rho) e^{-j\beta z}$
$Z$	$Z_{TE} = \frac{k\eta}{\beta}$	$Z_{TM} = \frac{\beta\eta}{k}$

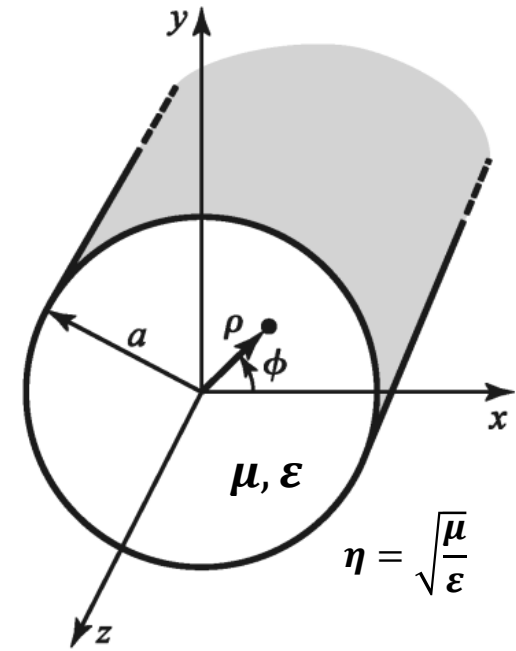


Note que  $H_z$  [A/m] é nulo para os modos  $TM_{nm}$ . Para os modos  $TE_{nm}$ , a componente  $H_z$  é não nula e varia sua fase ao longo do eixo  $z$  de acordo com  $e^{-j\beta z}$  (como era de se esperar p/ uma onda EM que se propaga a longo do eixo  $+z$ ).

A amplitude de  $H_z$  varia no plano  $xy$  de acordo com o padrão de onda estacionária dado por  $(A \sin(n\phi) + B \cos(n\phi)) J_n(k_c \rho)$ .

## Guia de onda circular – equações dos campos $\underline{E}$ e $\underline{H}$ e parâmetros de propagação

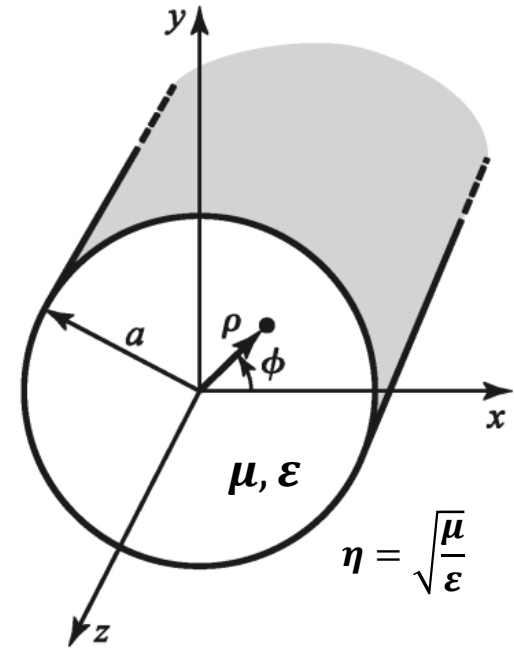
Quantity	TE <sub>nm</sub> Mode	TM <sub>nm</sub> Mode
$E_z$	0	$(A \sin n\phi + B \cos n\phi) J_n(k_c \rho) e^{-j\beta z}$
$H_z$	$(A \sin n\phi + B \cos n\phi) J_n(k_c \rho) e^{-j\beta z}$	0
$E_\rho$	$\frac{-j\omega\mu n}{k_c^2 \rho} (A \cos n\phi - B \sin n\phi) J_n(k_c \rho) e^{-j\beta z}$	$\frac{-j\beta}{k_c} (A \sin n\phi + B \cos n\phi) J'_n(k_c \rho) e^{-j\beta z}$
$E_\phi$	$\frac{j\omega\mu}{k_c} (A \sin n\phi + B \cos n\phi) J'_n(k_c \rho) e^{-j\beta z}$	$\frac{-j\beta n}{k_c^2 \rho} (A \cos n\phi - B \sin n\phi) J_n(k_c \rho) e^{-j\beta z}$
$H_\rho$	$\frac{-j\beta}{k_c} (A \sin n\phi + B \cos n\phi) J'_n(k_c \rho) e^{-j\beta z}$	$\frac{j\omega\epsilon n}{k_c^2 \rho} (A \cos n\phi - B \sin n\phi) J_n(k_c \rho) e^{-j\beta z}$
$H_\phi$	$\frac{-j\beta n}{k_c^2 \rho} (A \cos n\phi - B \sin n\phi) J_n(k_c \rho) e^{-j\beta z}$	$\frac{-j\omega\epsilon}{k_c} (A \sin n\phi + B \cos n\phi) J'_n(k_c \rho) e^{-j\beta z}$
$Z$	$Z_{TE} = \frac{k\eta}{\beta}$	$Z_{TM} = \frac{\beta\eta}{k}$



Note que os campos  $\underline{E}$  e  $\underline{H}$  estão expressos em coordenadas cilíndricas  $(\rho, \phi, z)$  e, portanto, as componentes dos campos apresentam orientação espacial em conformidade com os vetores unitários  $\underline{\hat{\rho}}$ ,  $\underline{\hat{\phi}}$  e  $\underline{\hat{z}}$  do sistema cilíndrico.

# Guia de onda circular – equações dos campos E e H e parâmetros de propagação

Quantity	TE <sub>nm</sub> Mode	TM <sub>nm</sub> Mode
$E_z$	0	$(A \sin n\phi + B \cos n\phi)J_n(k_c\rho)e^{-j\beta z}$
$H_z$	$(A \sin n\phi + B \cos n\phi)J_n(k_c\rho)e^{-j\beta z}$	0
$E_\rho$	$\frac{-j\omega\mu n}{k_c^2\rho}(A \cos n\phi - B \sin n\phi)J_n(k_c\rho)e^{-j\beta z}$	$\frac{-j\beta}{k_c}(A \sin n\phi + B \cos n\phi)J'_n(k_c\rho)e^{-j\beta z}$
$E_\phi$	$\frac{j\omega\mu}{k_c}(A \sin n\phi + B \cos n\phi)J'_n(k_c\rho)e^{-j\beta z}$	$\frac{-j\beta n}{k_c^2\rho}(A \cos n\phi - B \sin n\phi)J_n(k_c\rho)e^{-j\beta z}$
$H_\rho$	$\frac{-j\beta}{k_c}(A \sin n\phi + B \cos n\phi)J'_n(k_c\rho)e^{-j\beta z}$	$\frac{j\omega\epsilon n}{k_c^2\rho}(A \cos n\phi - B \sin n\phi)J_n(k_c\rho)e^{-j\beta z}$
$H_\phi$	$\frac{-j\beta n}{k_c^2\rho}(A \cos n\phi - B \sin n\phi)J_n(k_c\rho)e^{-j\beta z}$	$\frac{-j\omega\epsilon}{k_c}(A \sin n\phi + B \cos n\phi)J'_n(k_c\rho)e^{-j\beta z}$
$Z$	$Z_{TE} = \frac{k\eta}{\beta}$	$Z_{TM} = \frac{\beta\eta}{k}$



As impedâncias  $Z_{TE}$  [ $\Omega$ ] e  $Z_{TM}$  [ $\Omega$ ] são impedâncias de onda definidas pela razão entre as componentes dos campos  $\underline{E}$  [V/m] e  $\underline{H}$  [A/m] na seção transversal da GO circular para os respectivos modos TE e TM.

$$Z_{TE} = Z_{TM} = \frac{E_\rho}{H_\phi} = \frac{-E_\phi}{H_\rho} \quad (7)$$

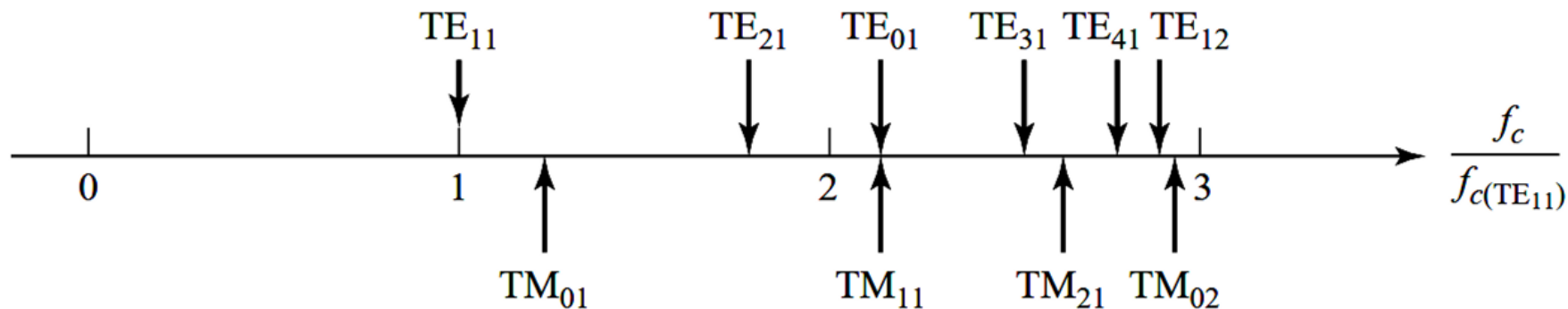
Para uma determinada frequência  $f$  [Hz] do sinal de excitação da GO, a impedância  $Z_{TE}$  é real quando a condição  $f > f_{c_{nm}}$  é atendida de modo que a constante de propagação  $\beta$  é real e a onda EM se propaga no modo  $TE_{nm}$ , sendo  $f_{c_{nm}}$  [Hz] a frequência de corte do modo (TE ou TM) de índices  $n$  e  $m$ . Se a condição  $f > f_{c_{nm}}$  não é atendida, a constante de propagação  $\beta$  é imaginária,  $Z_{TE}$  é imaginária e a onda EM se propaga em um modo  $TE_{nm}$  evanescente (i.e., se atenua exponencialmente ao longo do eixo  $z$ ).

De mesma forma, a impedância  $Z_{TM}$  é real quando a condição  $f > f_{c_{nm}}$  é atendida de modo que a constante de propagação  $\beta$  é real e a onda EM se propaga no modo  $TM_{nm}$ . Se a condição  $f > f_{c_{nm}}$  não é atendida, a constante de propagação  $\beta$  é imaginária,  $Z_{TM}$  é imaginária e a onda EM se propaga em um modo  $TM_n$  evanescente (i.e., se atenua exponencialmente ao longo do eixo  $z$ ).

## Guia de onda circular – faixa de frequência operacional

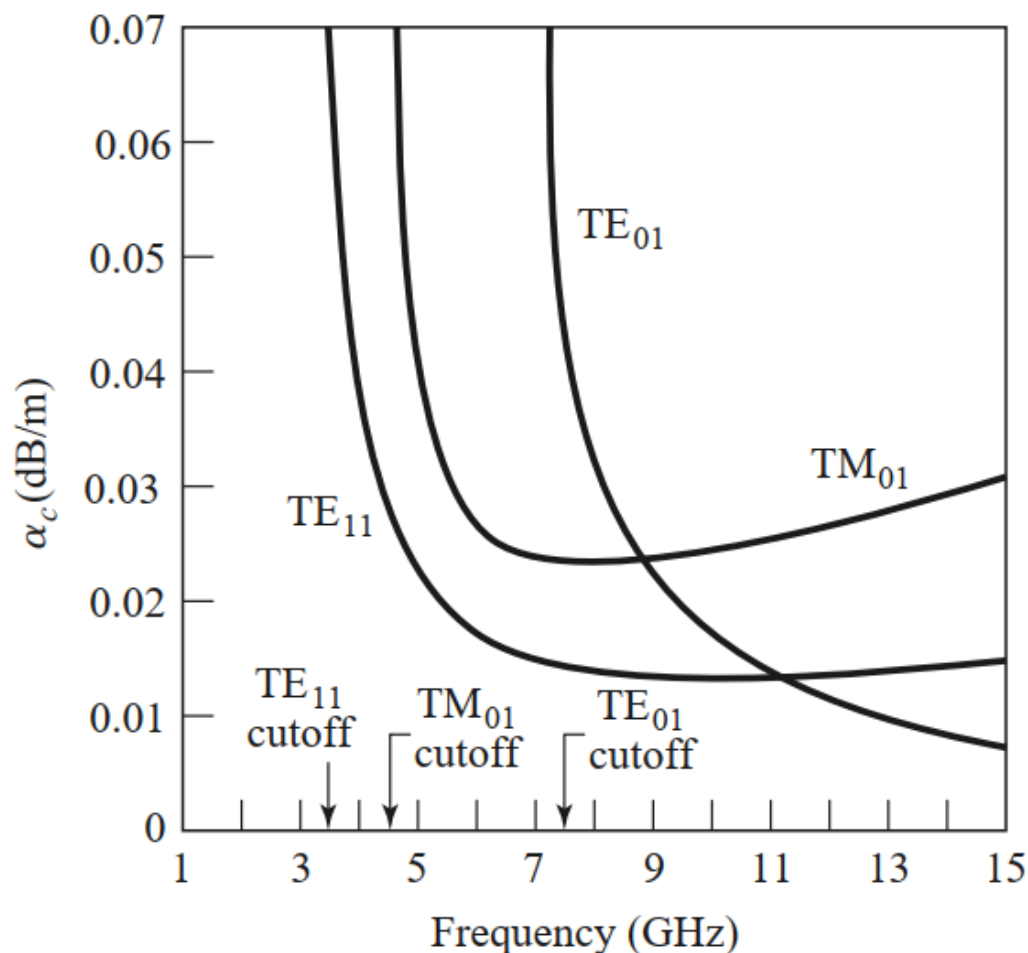
O gráfico abaixo mostra as frequências de corte  $f_c$  [Hz] dos modos  $TE_{nm}$  e  $TM_{nm}$  normalizadas em relação à frequência de corte  $f_{c(TE_{11})}$  [Hz] do modo dominante  $TE_{11}$  para uma GO circular de raio  $a$  [m].

Note que a frequência de corte do modo  $TM_{01}$  é próxima da do modo dominante  $TE_{11}$  o que reduz a faixa de frequência operacional em que a GO circular de raio  $a$  propaga somente o modo dominante  $TE_{11}$  e que evita o problema de dispersão referido no slide 17.



## Guia de onda circular – faixa de frequência operacional

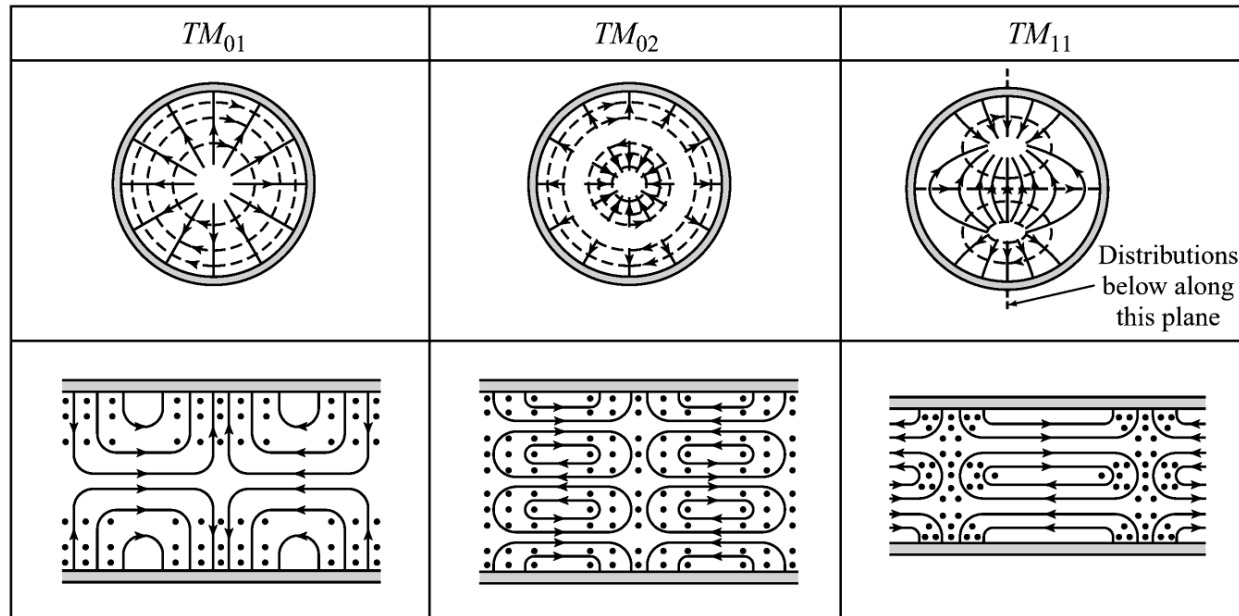
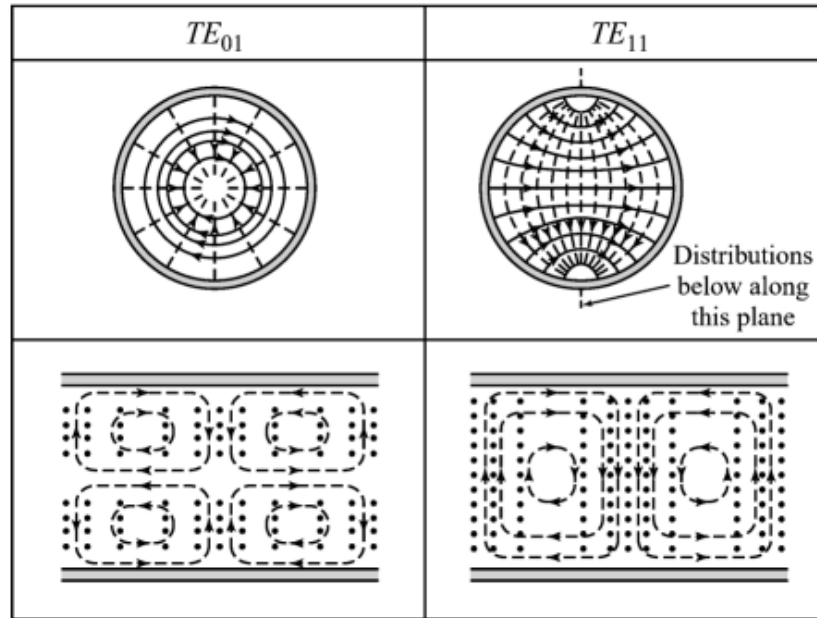
O gráfico abaixo mostra a atenuação  $\alpha_c$  [dB/m] por perdas Joule devido à condução de correntes nas paredes de uma GO circular de raio  $a$  [m]. Note a baixa atenuação do modo  $TE_{01}$ , o que faz este modo interessante para transmissão de potência à grandes distâncias. No entanto, como este modo não é o modo dominante, outros modos de ordem mais baixa poderão se propagar simultaneamente causando o problema de dispersão referido no slide 17.





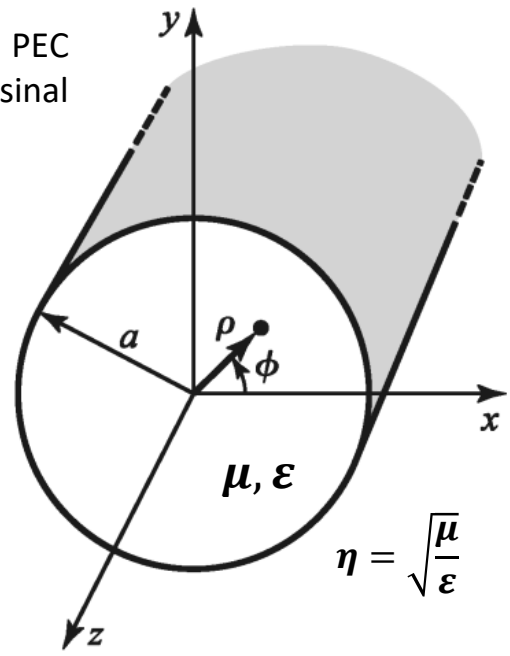
# Distribuição espacial das linhas dos campos $\underline{E}$ e $\underline{H}$ no interior da GO circular

———  $\underline{E}$   
 - - - -  $\underline{H}$



**Exemplo 1:** A GO circular mostrada na figura ao lado é um cilindro constituído de PEC preenchido por vácuo. O raio da seção transversal circular do cilindro é  $a = 6.0$  [cm]. O sinal que excita a GO é uma senoide de frequência  $f = 3.5$  [GHz]. **Pede-se:**

- (a) Determine na forma de uma matriz de índices  $n$  e  $m$  o conjunto das frequências de corte  $f_{c_{nm}}$  [GHz] dos modos  $TE_{nm}$  e  $TM_{nm}$ , sendo  $n = 0, 1, 2$  e  $m = 1, 2, 3$ .
- (b) Normalize as frequências de corte obtidas em (a) pela frequência de corte  $f_{c_{(TE_{11})}}$  [GHz] do modo dominante  $TE_{11}$  e verifique a consistência destes resultados numéricos com o gráfico do slide 47.
- (c) Determine na forma de matriz de índices  $n$  e  $m$  o conjunto de constantes de propagação  $k_c$  [rad/cm] da onda EM nas frequências de corte  $f_{c_{nm}}$  [GHz] dos modos  $TE_{nm}$  e  $TM_{nm}$ , sendo  $n = 0, 1, 2$  e  $m = 1, 2, 3$ .
- (d) Determine na forma de matriz de índices  $n$  e  $m$  o conjunto de constantes de propagação  $\beta$  [rad/cm] da onda EM guiada que se propaga no interior da GO nos modos  $TE_{nm}$  e  $TM_{nm}$ , sendo  $n = 0, 1, 2$  e  $m = 1, 2, 3$ . Identifique os modos evanescentes.
- (e) Determine na forma de matriz de índices  $n$  e  $m$  o conjunto de comprimentos de onda  $\lambda_c$  [cm] da onda EM nas frequências de corte  $f_{c_{nm}}$  [GHz] dos modos  $TE_{nm}$  e  $TM_{nm}$ , sendo  $n = 0, 1, 2$  e  $m = 1, 2, 3$ .
- (f) Determine na forma de matriz de índices  $n$  e  $m$  o conjunto de comprimentos de onda  $\lambda_g$  [cm] da onda EM guiada que se propaga no interior da GO nos modos  $TE_{nm}$  e  $TM_{nm}$ , sendo  $n = 0, 1, 2$  e  $m = 1, 2, 3$ .
- (g) Determine na forma de matriz de índices  $n$  e  $m$  o conjunto das impedâncias de onda  $Z_{TE}$  [ $\Omega$ ] da onda EM guiada que se propaga no interior da GO nos modos  $TE_{nm}$ , sendo  $n = 0, 1, 2$  e  $m = 1, 2, 3$ .
- (h) Determine na forma de matriz de índices  $n$  e  $m$  o conjunto das impedâncias de onda  $Z_{TM}$  [ $\Omega$ ] da onda EM guiada que se propaga no interior da GO nos modos  $TM_{nm}$ , sendo  $n = 0, 1, 2$  e  $m = 1, 2, 3$ .
- (i) Refaça (a)-(h) para a situação em que sinal que excita a GO é uma senoide de frequência  $f = 4.5$  [GHz]. Compare o número de modos  $TE_{nm}$  e  $TM_{nm}$  que se propagam (i.e., modos não evanescentes) nesta nova situação em relação à situação anterior.



## Solução:

Para a solução deste exemplo vamos usar os *scripts* Mathcad “Exemplo 1 (3.5GHz).xmcd” e “Exemplo 1 (4.5GHz).xmcd” disponíveis em [https://www.fccdecastro.com.br/ZIP/OLT\\_C7\\_E1S50.zip](https://www.fccdecastro.com.br/ZIP/OLT_C7_E1S50.zip) .

$$\epsilon_0 := 8.854187817 \times 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}} \rightarrow \text{permissividade elétrica do espaço livre}$$

$$\mu_0 := 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}} \rightarrow \text{permeabilidade magnética do espaço livre}$$

$$\epsilon_r := 1 \rightarrow \text{permissividade elétrica relativa do meio de propagação da onda no interior da GO (no caso, o meio é o vácuo)}$$

$$a := 6\text{cm} \rightarrow \text{raio da seção transversal da GO circular}$$

$$f := 3.5\text{GHz} \rightarrow \text{frequência do sinal que excita a GO}$$

$$N := 2 \rightarrow \text{máximo valor dos índices } n \text{ e } m \text{ do número de ordem do modo}$$

---

$$k := 2\pi f \cdot \sqrt{\mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r} = 73.355 \cdot \frac{\text{rad}}{\text{m}} \rightarrow \text{constante de propagação da onda EM caso a GO não tivesse paredes, conforme slide 38 do Cap VII}$$

$$\eta := \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r}} = 376.73 \Omega \rightarrow \text{impedância característica do meio de permeabilidade } \mu \text{ e permissividade } \epsilon \text{ no qual a onda EM se propaga no interior da GO, conforme slide 34 do Cap VII}$$

Construindo as tabelas das raízes pnm e pnm' mostradas respectivamente nos slides 42 e 41 do Cap VII:

$$i := 0..1 \quad n := 0..2$$

$$\text{rootJn}(n, x) := \text{root}(\text{Jn}(n, x), x)$$

$$\text{rootJn\_linha}(n, x) := \text{root}\left(\frac{d}{dx}\text{Jn}(n, x), x\right)$$

$$\text{pnm}_{n,0} := \text{rootJn}(n, 2 + n)$$

$$\text{pnm\_linha}_{n,0} := \text{rootJn\_linha}(n, 3)$$

$$\text{pnm}_{n,i+1} := \text{rootJn}(n, \text{pnm}_{n,i} + \pi)$$

$$\text{pnm\_linha}_{n,i+1} := \text{rootJn\_linha}(n, \text{pnm\_linha}_{n,i} + \pi)$$

$$\text{pnm} =$$

	0	1	2
0	2.405	5.52	8.654
1	3.832	7.016	10.173
2	5.136	8.417	11.62

$$\text{pnm\_linha} =$$

	0	1	2
0	3.832	7.016	10.173
1	1.841	5.331	8.536
2	3.054	6.706	9.969

$$\text{pnm} := \text{augment}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{pnm}\right]$$

$$\text{pnm} =$$

	0	1	2	3
0	0	2.405	5.52	8.654
1	0	3.832	7.016	10.173
2	0	5.136	8.417	11.62

$$\text{pnm\_linha} := \text{augment}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{pnm\_linha}\right]$$

$$\text{pnm\_linha} =$$

	0	1	2	3
0	0	3.832	7.016	10.173
1	0	1.841	5.331	8.536
2	0	3.054	6.706	9.969

(a) Da equação (5) do slide 41 e da equação (6) do slide 42 do Cap VII as frequências de corte dos modos TE<sub>nm</sub> e TM<sub>nm</sub>, para  $n := 0, 1.. N$  e  $m := 1, 2.. N + 1$ , são dadas por:

$$f_{c\_TE_{n,m}} := \frac{pnm\_linha_{n,m}}{2 \cdot \pi a \cdot \sqrt{\mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r}}$$

$$f_{c\_TM_{n,m}} := \frac{pnm_{n,m}}{2 \cdot \pi a \cdot \sqrt{\mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r}}$$

$f_{c\_TE} =$

	0	1	2	3
0	0	3.047	5.579	8.09
1	0	1.464	4.24	6.788
2	0	2.429	5.333	7.928

$\cdot \text{GHz}$   $f_{c\_TM} =$

	0	1	2	3
0	0	1.912	4.39	6.882
1	0	3.047	5.579	8.09
2	0	4.084	6.694	9.24

$\cdot \text{GHz}$

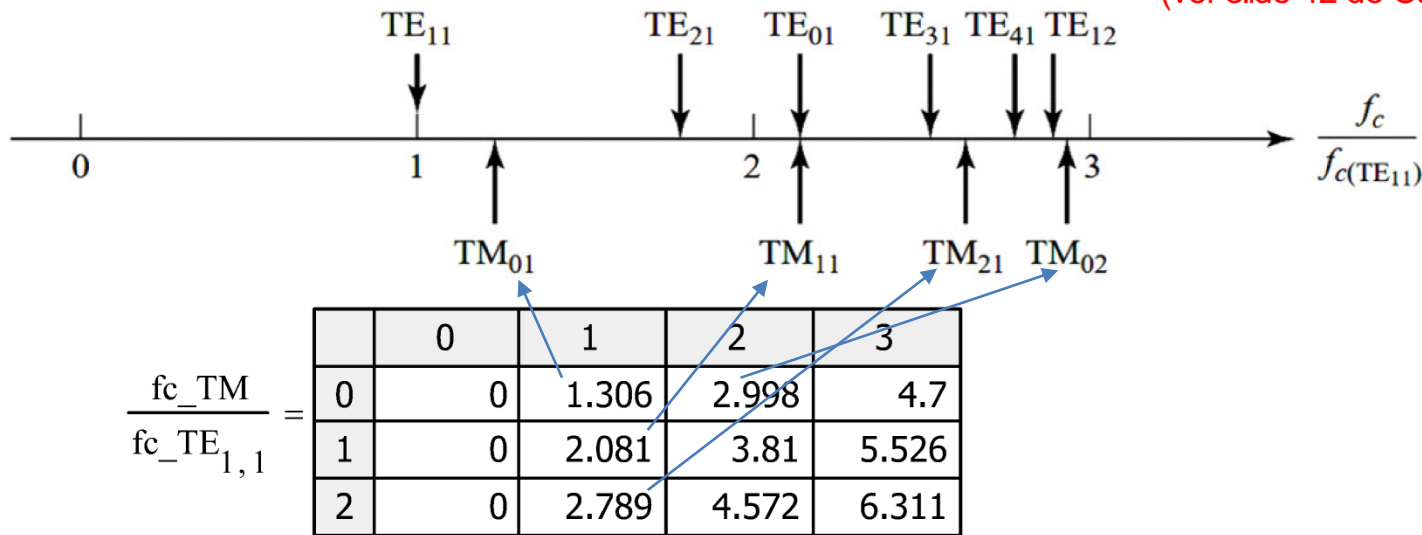
(b) Frequência de corte normalizada dos modos TE<sub>nm</sub> e TM<sub>nm</sub>, para  $n := 0, 1, \dots, N$  e  $m := 1, 2, \dots, N + 1$ :

$$\frac{f_{c\_TE}}{f_{c\_TE_{1,1}}} =$$

	0	1	2	3
0	0	2.081	3.81	5.526
1	0	1	2.896	4.636
2	0	1.659	3.642	5.415

**Nota 1:** Não há propagação da onda EM em qualquer modo TE<sub>nm</sub> em que  $m=0$  (ver slide 41 do Cap VII).

**Nota 2:** Não há propagação da onda EM em qualquer modo TM<sub>nm</sub> em que  $m=0$  (ver slide 42 do Cap VII).



Os valores das frequências de corte normalizadas obtidas numericamente são consistentes com o gráfico do slide 47.

(c) Do slide 39 do Cap VII, as constantes de propagação  $k_c$  [rad/cm] da onda EM nas frequências de corte dos modos  $TE_{nm}$  e  $TM_{nm}$ , para  $n := 0, 1..N$  e  $m := 1, 2..N + 1$ , são dadas por:

$$k_{c\_TE_{n,m}} := \frac{p_{nm\_linha_{n,m}}}{a} \quad k_{c\_TM_{n,m}} := \frac{p_{nm_{n,m}}}{a}$$

$$k_{c\_TE} =$$

	0	1	2	3
0	0	0.639	1.169	1.696
1	0	0.307	0.889	1.423
2	0	0.509	1.118	1.662

$$\cdot \frac{\text{rad}}{\text{cm}}$$

$$k_{c\_TM} =$$

	0	1	2	3
0	0	0.401	0.92	1.442
1	0	0.639	1.169	1.696
2	0	0.856	1.403	1.937

$$\cdot \frac{\text{rad}}{\text{cm}}$$

(d) Do slide 40 do Cap VII, as constantes de propagação  $\beta$  [rad/cm] da onda EM guiada que se propaga no interior da GO nos modos  $TE_{nm}$  e  $TM_{nm}$ , para  $n := 0, 1..N$  e  $m := 1, 2..N + 1$ , são dadas por:

$$\beta_{\_TE_{n,m}} := \sqrt{k^2 - (k_{c\_TE_{n,m}})^2}$$

$$\beta_{\_TM_{n,m}} := \sqrt{k^2 - (k_{c\_TM_{n,m}})^2}$$

$$\beta_{\_TE} =$$

	0	1	2	3
0	0	0.361	0.911i	1.529i
1	0	0.666	0.501i	1.219i
2	0	0.528	0.843i	1.491i

$$\cdot \frac{\text{rad}}{\text{cm}}$$

$$\beta_{\_TM} =$$

	0	1	2	3
0	0	0.614	0.555i	1.242i
1	0	0.361	0.911i	1.529i
2	0	0.441i	1.196i	1.792i

$$\cdot \frac{\text{rad}}{\text{cm}}$$

Do slide 21 do Cap VII, as constantes de propagação  $\beta$  [rad/cm] da onda EM guiada que resultam em **valor imaginário** nas matrizes  $\beta_{\_TE}$  e  $\beta_{\_TM}$  acima são aquelas que correspondem a modos  $TE_{nm}$  e  $TM_{nm}$  que não se propagam na GO para uma frequência  $f = 3.5 \cdot \text{GHz}$  do sinal que excita a GO e, por esta razão, são denominados de **modos evanescentes**.

(e) Do slide 40 do Cap VII, o comprimento de onda  $\lambda_c$  [cm] da onda EM nas frequências de corte dos modos TE<sub>nm</sub> e TM<sub>nm</sub>, para  $n := 0, 1..N$  e  $m := 1, 2..N + 1$ , são dadas por:

$$\lambda_{c\_TE_{n,m}} := \text{if} \left( k_{c\_TE_{n,m}} \neq 0, \frac{2\pi}{k_{c\_TE_{n,m}}}, \infty \cdot \text{cm} \right)$$

$$\lambda_{c\_TM_{n,m}} := \text{if} \left( k_{c\_TM_{n,m}} \neq 0, \frac{2\pi}{k_{c\_TM_{n,m}}}, \infty \cdot \text{cm} \right)$$

$$\lambda_{c\_TE} =$$

	0	1	2	3
0	0	9.839	5.374	3.706
1	0	20.475	7.071	4.416
2	0	12.343	5.622	3.781

·cm

$$\lambda_{c\_TM} =$$

	0	1	2	3
0	0	15.676	6.829	4.356
1	0	9.839	5.374	3.706
2	0	7.341	4.479	3.244

·cm

(f) Do slide 40 do Cap VII, o comprimento de onda  $\lambda_g$  [cm] da onda EM guiada que se propaga no interior da GO nos modos TE<sub>nm</sub> e TM<sub>nm</sub>, para  $n := 0, 1..N$  e  $m := 1, 2..N + 1$ , são dadas por:

$$\lambda_{g\_TE_{n,m}} := \frac{2 \cdot \pi}{\beta_{TE_{n,m}}}$$

$$\lambda_{g\_TM_{n,m}} := \frac{2 \cdot \pi}{\beta_{TM_{n,m}}}$$

$$\lambda_{g\_TE} =$$

	0	1	2	3
0	0	17.409	-6.9i	-4.11i
1	0	9.43	-12.529i	-5.154i
2	0	11.896	-7.451i	-4.214i

·cm

$$\lambda_{g\_TM} =$$

	0	1	2	3
0	0	10.227	-11.315i	-5.06i
1	0	17.409	-6.9i	-4.11i
2	0	-14.245i	-5.254i	-3.506i

·cm

Os comprimentos de onda  $\lambda_g$  [cm] da onda EM guiada que resultam em **valor imaginário** nas matrizes  $\lambda_{g\_TE}$  e  $\lambda_{g\_TM}$  acima são aquelas que correspondem a modos TE<sub>nm</sub> e TM<sub>nm</sub> evanescentes, i.e., modos que não se propagam na frequência  $f = 3.5 \cdot \text{GHz}$  do sinal que excita a GO.



(g) Do slide 46 do Cap VII, as impedâncias de onda da onda EM guiada que se propaga no interior da GO nos modos  $TE_{nm}$ , para  $n := 0, 1..N$  e  $m := 1, 2..N + 1$ , são dadas por:

$$Z_{TE_{n,m}} := \frac{\eta \cdot k}{\beta_{TE_{n,m}}} \quad Z_{TE} = \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 765.698 & -303.499i & -180.775i \\ 1 & 0 & 414.766 & -551.076i & -226.695i \\ 2 & 0 & 523.215 & -327.703i & -185.358i \end{array} \Omega$$

As impedâncias de onda que resultam em **valor imaginário** na matriz  $Z_{TE}$  acima são aquelas que correspondem a modos  $TE_{nm}$  evanescentes, i.e., modos que não se propagam na frequência  $f = 3.5 \cdot \text{GHz}$  do sinal que excita a GO.

(h) Do slide 46 do Cap VII, as impedâncias de onda da onda EM guiada que se propaga no interior da GO nos modos  $TM_{nm}$ , para  $n := 0, 1..N$  e  $m := 1, 2..N + 1$ , são dadas por:

$$Z_{TM_{n,m}} := \frac{\eta \cdot \beta_{TM_{n,m}}}{k} \quad Z_{TM} = \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 315.523 & 285.177i & 637.765i \\ 1 & 0 & 185.355 & 467.632i & 785.096i \\ 2 & 0 & 226.52i & 614.138i & 920.5i \end{array} \Omega$$

As impedâncias de onda que resultam em **valor imaginário** na matriz  $Z_{TM}$  acima são aquelas que correspondem a modos  $TM_{nm}$  evanescentes, i.e., modos que não se propagam na frequência  $f = 3.5 \cdot \text{GHz}$  do sinal que excita a GO.

(i) Refazendo (a)-(h) p/ um sinal de excitação da GO de frequência  $f = 4.5$  [GHz]:

$$k := 2\pi f \cdot \sqrt{\mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r} = 94.313 \cdot \frac{\text{rad}}{\text{m}} \rightarrow \text{constante de propagação da onda EM caso a GO não tivesse paredes, conforme slide 38 do Cap VII}$$

(a) Da equação (5) do slide 41 e da equação (6) do slide 42 do Cap VII as frequências de corte dos modos  $\text{TE}_{nm}$  e  $\text{TM}_{nm}$ , para  $n := 0, 1..N$  e  $m := 1, 2..N + 1$ , são dadas por:

$$f_{c\_TE_{n,m}} := \frac{p_{nm\_linha_{n,m}}}{2 \cdot \pi a \cdot \sqrt{\mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r}}$$

$$f_{c\_TM_{n,m}} := \frac{p_{nm_{n,m}}}{2 \cdot \pi a \cdot \sqrt{\mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r}}$$

$f_{c\_TE} =$

	0	1	2	3
0	0	3.047	5.579	8.09
1	0	1.464	4.24	6.788
2	0	2.429	5.333	7.928

·GHz

$f_{c\_TM} =$

	0	1	2	3
0	0	1.912	4.39	6.882
1	0	3.047	5.579	8.09
2	0	4.084	6.694	9.24

·GHz

Note que as frequências de corte dos modos  $\text{TE}_{nm}$  e  $\text{TM}_{nm}$  não dependem da frequência do sinal de excitação da GO (compare com o slide 53).

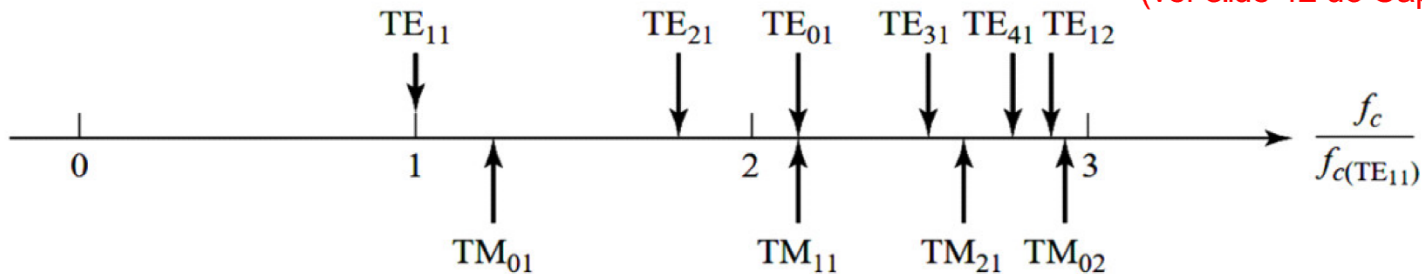
(b) Frequência de corte normalizada dos modos  $TE_{nm}$  e  $TM_{nm}$ , para  $n := 0, 1..N$  e  $m := 1, 2..N + 1$ :

$$\frac{f_{c\_TE}}{f_{c\_TE_{1,1}}} =$$

	0	1	2	3
0	0	2.081	3.81	5.526
1	0	1	2.896	4.636
2	0	1.659	3.642	5.415

**Nota 1:** Não há propagação da onda EM em qualquer modo  $TE_{nm}$  em que  $m=0$  (ver slide 41 do Cap VII).

**Nota 2:** Não há propagação da onda EM em qualquer modo  $TM_{nm}$  em que  $m=0$  (ver slide 42 do Cap VII).



$$\frac{f_{c\_TM}}{f_{c\_TE_{1,1}}} =$$

	0	1	2	3
0	0	1.306	2.998	4.7
1	0	2.081	3.81	5.526
2	0	2.789	4.572	6.311

Os valores das frequências de corte normalizadas obtidas numericamente são consistentes com o gráfico do slide 47.

Note que as frequências de corte normalizadas dos modos  $TE_{nm}$  e  $TM_{nm}$  não dependem da frequência do sinal de excitação da GO (compare com o slide 54).

(c) Do slide 39 do Cap VII, as constantes de propagação  $k_c$  [rad/cm] da onda EM nas frequências de corte dos modos  $TE_{nm}$  e  $TM_{nm}$ , para  $n := 0, 1..N$  e  $m := 1, 2..N + 1$ , são dadas por:

$$k_{c\_TE_{n,m}} := \frac{p_{nm\_linha_{n,m}}}{a} \quad k_{c\_TM_{n,m}} := \frac{p_{nm_{n,m}}}{a}$$

$$k_{c\_TE} =$$

	0	1	2	3
0	0	0.639	1.169	1.696
1	0	0.307	0.889	1.423
2	0	0.509	1.118	1.662

.  $\frac{\text{rad}}{\text{cm}}$

$$k_{c\_TM} =$$

	0	1	2	3
0	0	0.401	0.92	1.442
1	0	0.639	1.169	1.696
2	0	0.856	1.403	1.937

.  $\frac{\text{rad}}{\text{cm}}$

(d) Do slide 40 do Cap VII, as constantes de propagação  $\beta$  [rad/cm] da onda EM guiada que se propaga no interior da GO nos modos  $TE_{nm}$  e  $TM_{nm}$ , para  $n := 0, 1..N$  e  $m := 1, 2..N + 1$ , são dadas por:

$$\beta_{\_TE_{n,m}} := \sqrt{k^2 - (k_{c\_TE_{n,m}})^2}$$

$$\beta_{\_TM_{n,m}} := \sqrt{k^2 - (k_{c\_TM_{n,m}})^2}$$

$$\beta_{\_TE} =$$

	0	1	2	3
0	0	0.694	0.691i	1.409i
1	0	0.892	0.316	1.065i
2	0	0.794	0.6i	1.368i

.  $\frac{\text{rad}}{\text{cm}}$

$$\beta_{\_TM} =$$

	0	1	2	3
0	0	0.854	0.208	1.091i
1	0	0.694	0.691i	1.409i
2	0	0.396	1.039i	1.691i

.  $\frac{\text{rad}}{\text{cm}}$

Do slide 21 do Cap VII, as constantes de propagação  $\beta$  [rad/cm] da onda EM guiada que resultam em **valor imaginário** nas matrizes  $\beta_{\_TE}$  e  $\beta_{\_TM}$  acima são aquelas que correspondem a modos  $TE_{nm}$  e  $TM_{nm}$  que não se propagam na GO para uma frequência  $f = 4.5 \cdot \text{GHz}$  do sinal que excita a GO e, por esta razão, são denominados de **modos evanescentes**.

(e) Do slide 40 do Cap VII, o comprimento de onda  $\lambda_c$  [cm] da onda EM nas frequências de corte dos modos  $TE_{nm}$  e  $TM_{nm}$ , para  $n := 0, 1.. N$  e  $m := 1, 2.. N + 1$ , são dadas por:

$$\lambda_{c\_TE_{n,m}} := \text{if} \left( kc_{TE_{n,m}} \neq 0, \frac{2\pi}{kc_{TE_{n,m}}}, \infty \cdot \text{cm} \right)$$

$$\lambda_{c\_TM_{n,m}} := \text{if} \left( kc_{TM_{n,m}} \neq 0, \frac{2\pi}{kc_{TM_{n,m}}}, \infty \cdot \text{cm} \right)$$

$$\lambda_{c\_TE} =$$

	0	1	2	3
0	0	9.839	5.374	3.706
1	0	20.475	7.071	4.416
2	0	12.343	5.622	3.781

$$\lambda_{c\_TM} =$$

	0	1	2	3
0	0	15.676	6.829	4.356
1	0	9.839	5.374	3.706
2	0	7.341	4.479	3.244

(f) Do slide 40 do Cap VII, o comprimento de onda  $\lambda_g$  [cm] da onda EM guiada que se propaga no interior da GO nos modos  $TE_{nm}$  e  $TM_{nm}$ , para  $n := 0, 1.. N$  e  $m := 1, 2.. N + 1$ , são dadas por:

$$\lambda_{g\_TE_{n,m}} := \frac{2 \cdot \pi}{\beta_{TE_{n,m}}}$$

$$\lambda_{g\_TM_{n,m}} := \frac{2 \cdot \pi}{\beta_{TM_{n,m}}}$$

$$\lambda_{g\_TE} =$$

	0	1	2	3
0	0	9.053	-9.091i	-4.459i
1	0	7.045	19.876	-5.899i
2	0	7.914	-10.476i	-4.593i

$$\lambda_{g\_TM} =$$

	0	1	2	3
0	0	7.36	30.275	-5.758i
1	0	9.053	-9.091i	-4.459i
2	0	15.864	-6.05i	-3.715i

Os comprimentos de onda  $\lambda_g$  [cm] da onda EM guiada que resultam em **valor imaginário** nas matrizes  $\lambda_{g\_TE}$  e  $\lambda_{g\_TM}$  acima são aquelas que correspondem a modos  $TE_{nm}$  e  $TM_{nm}$  evanescentes, i.e., modos que não se propagam na frequência  $f = 4.5 \cdot \text{GHz}$  do sinal que excita a GO.

(g) Do slide 46 do Cap VII, as impedâncias de onda da onda EM guiada que se propaga no interior da GO nos modos  $TE_{nm}$ , para  $n := 0, 1..N$  e  $m := 1, 2..N + 1$ , são dadas por:

$$ZTE_{n,m} := \frac{\eta \cdot k}{\beta_{TE_{n,m}}}$$

$$ZTE =$$

	0	1	2	3
0	0	511.954	-514.081i	-252.155i
1	0	398.409	$1.124 \cdot 10^3$	-333.56i
2	0	447.511	-592.395i	-259.732i

 $\Omega$ 

As impedâncias de onda que resultam em **valor imaginário** na matriz  $ZTE$  acima são aquelas que correspondem a modos  $TE_{nm}$  evanescentes, i.e., modos que não se propagam na frequência  $f = 4.5 \cdot \text{GHz}$  do sinal que excita a GO.

(h) Do slide 46 do Cap VII, as impedâncias de onda da onda EM guiada que se propaga no interior da GO nos modos  $TM_{nm}$ , para  $n := 0, 1..N$  e  $m := 1, 2..N + 1$ , são dadas por:

$$ZTM_{n,m} := \frac{\eta \cdot \beta_{TM_{n,m}}}{k}$$

$$ZTM =$$

	0	1	2	3
0	0	341.019	82.899	435.873i
1	0	277.224	276.077i	562.85i
2	0	158.206	414.841i	675.653i

 $\Omega$ 

As impedâncias de onda que resultam em **valor imaginário** na matriz  $ZTM$  acima são aquelas que correspondem a modos  $TM_{nm}$  evanescentes, i.e., modos que não se propagam na frequência  $f = 4.5 \cdot \text{GHz}$  do sinal que excita a GO.

Abaixo encontram-se identificados em verde os  $\beta$ 's não-imaginários referentes aos modos  $TE_{nm}$  e  $TM_{nm}$  que se propagam na GO quando a frequência do sinal de excitação da GO é  $f = 3.5$  [GHz]. Os modos que se propagam nesta frequência são  $TE_{01}$ ,  $TE_{11}$ ,  $TE_{21}$ ,  $TM_{01}$  e  $TM_{11}$ .

$$\beta_{TE} = \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0.361 & 0.911i & 1.529i \\ 1 & 0 & 0.666 & 0.501i & 1.219i \\ 2 & 0 & 0.528 & 0.843i & 1.491i \end{array} \cdot \frac{\text{rad}}{\text{cm}}$$

$$\beta_{TM} = \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0.614 & 0.555i & 1.242i \\ 1 & 0 & 0.361 & 0.911i & 1.529i \\ 2 & 0 & 0.441i & 1.196i & 1.792i \end{array} \cdot \frac{\text{rad}}{\text{cm}}$$

Abaixo encontram-se identificados em verde os  $\beta$ 's não-imaginários referentes aos modos  $TE_{nm}$  e  $TM_{nm}$  que se propagam na GO quando a frequência do sinal de excitação da GO é  $f = 4.5$  [GHz]. Os modos que se propagam nesta frequência são  $TE_{01}$ ,  $TE_{11}$ ,  $TE_{21}$ ,  $TE_{12}$ ,  $TM_{01}$ ,  $TM_{11}$ ,  $TM_{21}$  e  $TM_{02}$ .

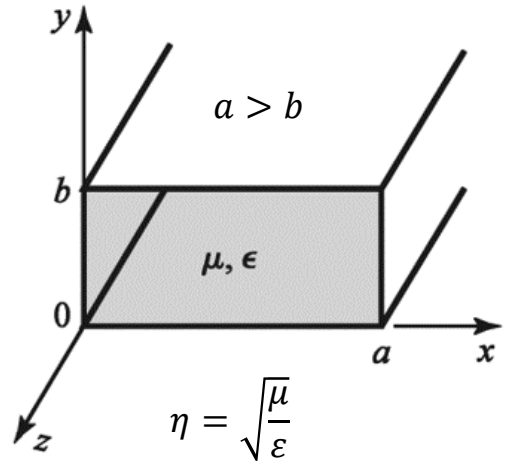
$$\beta_{TE} = \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0.694 & 0.691i & 1.409i \\ 1 & 0 & 0.892 & 0.316 & 1.065i \\ 2 & 0 & 0.794 & 0.6i & 1.368i \end{array} \cdot \frac{\text{rad}}{\text{cm}}$$

$$\beta_{TM} = \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0.854 & 0.208 & 1.091i \\ 1 & 0 & 0.694 & 0.691i & 1.409i \\ 2 & 0 & 0.396 & 1.039i & 1.691i \end{array} \cdot \frac{\text{rad}}{\text{cm}}$$

Note que cada um destes valores de  $\beta$  resulta em uma velocidade de fase  $v_p = \omega/\beta$  [m/s] respectiva ao modo de propagação da onda EM, o que gera tempos de propagação respectivos ao modo caracterizando o problema de dispersão já discutido no slide 17.

**Exemplo 2:** Uma GO WR-340 é mostrada na figura ao lado. A WR-340 é um tubo retangular constituído de PEC preenchido por vácuo. As dimensões da seção transversal do tubo retangular são  $a = 86.36$  [mm] e  $b = 43.18$  [mm] (<https://www.everythingrf.com/tech-resources/waveguides-sizes/wr340>). O sinal que excita a GO é uma senoide de frequência  $f = 2.5$  [GHz]. **Pede-se:**

- (a) Determine na forma de uma matriz de índices  $m$  e  $n$  o conjunto das frequências de corte  $f_{c_{mn}}$  [GHz] dos modos  $TE_{mn}$  e  $TM_{mn}$ , sendo  $m = 0,1 \dots 4$  e  $n = 0,1 \dots 4$ .
- (b) Normalize as frequências de corte obtidas em (a) pela frequência de corte  $f_{c_{(TE_{10})}}$  [GHz] do modo dominante  $TE_{10}$  e verifique a consistência destes resultados numéricos com o gráfico do slide 17.
- (c) Determine na forma de matriz de índices  $m$  e  $n$  o conjunto de constantes de propagação  $k_c$  [rad/cm] da onda EM nas frequências de corte  $f_{c_{mn}}$  [GHz] dos modos  $TE_{mn}$  e  $TM_{mn}$ , sendo  $m = 0,1 \dots 4$  e  $n = 0,1 \dots 4$ .
- (d) Determine na forma de matriz de índices  $m$  e  $n$  o conjunto de constantes de propagação  $\beta$  [rad/cm] da onda EM guiada que se propaga no interior da GO nos modos  $TE_{mn}$  e  $TM_{mn}$ , sendo  $m = 0,1 \dots 4$  e  $n = 0,1 \dots 4$ . Identifique os modos evanescentes.
- (e) Determine na forma de matriz de índices  $m$  e  $n$  o conjunto de comprimentos de onda  $\lambda_c$  [cm] da onda EM nas frequências de corte  $f_{c_{mn}}$  [GHz] dos modos  $TE_{mn}$  e  $TM_{mn}$ , sendo  $m = 0,1 \dots 4$  e  $n = 0,1 \dots 4$ .
- (f) Determine na forma de matriz de índices  $m$  e  $n$  o conjunto de comprimentos de onda  $\lambda_g$  [cm] da onda EM guiada que se propaga no interior da GO nos modos  $TE_{mn}$  e  $TM_{mn}$ , sendo  $m = 0,1 \dots 4$  e  $n = 0,1 \dots 4$ .
- (g) Determine na forma de matriz de índices  $m$  e  $n$  o conjunto das impedâncias de onda  $Z_{TE}$  [ $\Omega$ ] da onda EM guiada que se propaga no interior da GO nos modos  $TE_{mn}$ , sendo  $m = 0,1 \dots 4$  e  $n = 0,1 \dots 4$ .
- (h) Determine na forma de matriz de índices  $m$  e  $n$  o conjunto das impedâncias de onda  $Z_{TM}$  [ $\Omega$ ] da onda EM guiada que se propaga no interior da GO nos modos  $TM_{mn}$ , sendo  $m = 0,1 \dots 4$  e  $n = 0,1 \dots 4$ .
- (i) Refaça (a)-(h) para a situação em que sinal que excita a GO é uma senoide de frequência  $f = 7.0$  [GHz]. Compare o número de modos  $TE_{mn}$  e  $TM_{mn}$  que se propagam (i.e., modos não evanescentes) nesta nova situação em relação à situação anterior.
- (j) Determine o fator de velocidade  $p = v_p/c$  do modo mais rápido e do modo mais lento que se propaga na GO com velocidade de fase  $v_p$  [m/s] na frequência do sinal de excitação dada em (i), sendo  $c = 2.99792458 \times 10^8$  [m/s] a velocidade de propagação da luz no espaço livre.





**Solução:**

Para a solução deste exemplo vamos usar os *scripts* Mathcad “Exemplo 2 (2.5GHz).xmcd” e “Exemplo 2 (7.0GHz).xmcd” disponíveis em [https://www.fccdecastro.com.br/ZIP/OLT\\_C7\\_E2S64.zip](https://www.fccdecastro.com.br/ZIP/OLT_C7_E2S64.zip) .

$\epsilon_0 := 8.854187817 \times 10^{-12} \frac{F}{m}$  → permissividade elétrica do espaço livre

$\mu_0 := 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m}$  → permeabilidade magnética do espaço livre

$\epsilon_r := 1$  → permissividade elétrica relativa do meio de propagação da onda no interior da GO (no caso, o meio é o vácuo)

$a := 86.36 \cdot mm$  → largura da seção transversal da GO retangular

$b := 43.18 \cdot mm$  → altura da seção transversal da GO retangular

$f := 2.5GHz$  → frequência do sinal que excita a GO

$N := 4$  → máximo valor dos índices m e n do número de ordem do modo

$m := 0, 1 .. N$      $n := 0, 1 .. N$  → range dos indices m e n do número de ordem do modo

$k := 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \sqrt{\mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r} = 0.524 \cdot \frac{rad}{cm}$  → constante de propagação da onda EM caso a GO não tivesse paredes, conforme slide 19 do Cap VII.

$\eta := \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r}} = 376.73 \Omega$  → impedância característica do meio de permeabilidade  $\mu$  e permissividade  $\epsilon$  no qual a onda EM se propaga no interior da GO, conforme slide 18 do Cap VII.

(a) Da equação (1) no slide 20 do Cap VII, as frequências de corte dos modos  $TE_{mn}$  e  $TM_{mn}$  para  $m=0,1,\dots,N=4$  e  $n=0,1,\dots,N=4$  são dadas por:

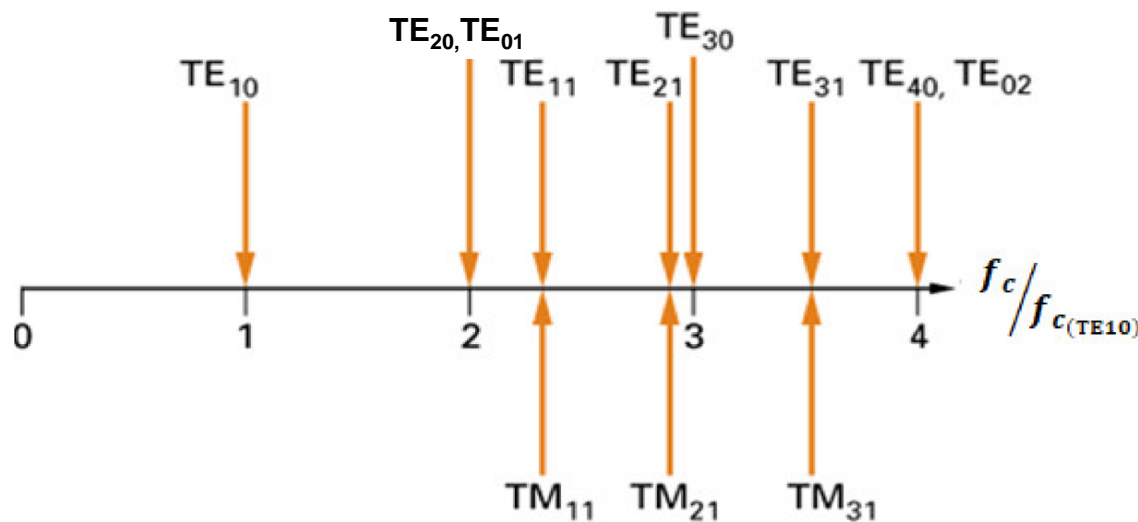
$$f_{c,m,n} := \frac{c}{2 \cdot \pi \sqrt{\epsilon_r}} \cdot \sqrt{\left(\frac{m \cdot \pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n \cdot \pi}{b}\right)^2}$$

	0	1	2	3	4
0	0	3.471	6.943	10.414	13.886
1	1.736	3.881	7.157	10.558	13.994
2	3.471	4.909	7.762	10.978	14.313
3	5.207	6.258	8.679	11.644	14.83
4	6.943	7.762	9.819	12.516	15.525

·GHz

(b) Frequência de corte normalizada dos modos  $TE_{mn}$  e  $TM_{mn}$  para  $m=0,1,\dots,N=4$  e  $n=0,1,\dots,N=4$  :

	0	1	2	3	4
$\frac{f_c}{f_{c_{1,0}}} =$	0	2	4	6	8
1	1	2.236	4.123	6.083	8.062
2	2	2.828	4.472	6.325	8.246
3	3	3.606	5	6.708	8.544
4	4	4.472	5.657	7.211	8.944



**Nota 1:** Não há propagação da onda EM no modo  $TE_{00}$  (ver slide 28 do Cap VII),

**Nota 2:** Não há propagação da onda EM nos modos  $TM_{mn}$  em que um dos índices  $m$  ou  $n$  seja zero (ver slide 26 do Cap VII).

**Nota 3:** Portanto, não existe sentido físico  $p/ f_{c_{m,n}}$  p/ os valores de  $m$  e  $n$  referentes aos modos citados nas notas 1 e 2 anteriores.

A inexistência de sentido físico também se aplica p/  $k_{c_{m,n}}, \beta_{m,n}, \lambda_{c_{m,n}}, \lambda_{g_{m,n}}, Z_{TE_{m,n}}$  e  $Z_{TM_{m,n}}$  (a serem obtidos na solução dos próximos itens) p/ os valores de  $m$  e  $n$  referentes aos modos citados nas notas 1 e 2 anteriores.

Os valores das frequências de corte normalizadas obtidas numericamente são consistentes com o gráfico do slide 17.

(c) Do slide 20 do Cap VII, as constantes de propagação  $k_c$  [rad/cm] da onda EM nas frequências de corte dos modos  $TE_{mn}$  e  $TM_{mn}$  para  $m=0,1,\dots,N=4$  e  $n=0,1,\dots,N=4$  são dadas por:

$$k_{c,m,n} := \sqrt{\left(\frac{m \cdot \pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n \cdot \pi}{b}\right)^2}$$

	0	1	2	3	4
0	0	0.728	1.455	2.183	2.91
1	0.364	0.813	1.5	2.213	2.933
2	0.728	1.029	1.627	2.301	3
3	1.091	1.312	1.819	2.44	3.108
4	1.455	1.627	2.058	2.623	3.254

.  $\frac{\text{rad}}{\text{cm}}$

(d) Do slide 21 do Cap VII, as constantes de propagação  $\beta$  [rad/cm] da onda EM guiada que se propaga no interior da GO nos modos  $TE_{mn}$  e  $TM_{mn}$  para  $m=0,1,\dots,N=4$  e  $n=0,1,\dots,N=4$  são dadas por:

$$\beta_{m,n} := \sqrt{k^2 - (k_{c,m,n})^2}$$

	0	1	2	3	4
0	0.524	0.505i	1.358i	2.119i	2.863i
1	0.377	0.622i	1.405i	2.15i	2.886i
2	0.505i	0.886i	1.54i	2.24i	2.954i
3	0.957i	1.202i	1.742i	2.383i	3.064i
4	1.358i	1.54i	1.99i	2.57i	3.211i

.  $\frac{\text{rad}}{\text{cm}}$

**Nota 4:**  $\beta$  imaginário  $\Rightarrow$  modo evanescente p/ a frequência  $f = 2.5 \cdot \text{GHz}$  do sinal que excita a GO.

(e) Do slide 22 do Cap VII, os comprimentos de onda  $\lambda_c$  [cm] da onda EM nas frequências de corte dos modos  $TE_{mn}$  e  $TM_{mn}$  para  $m=0,1,\dots,N=4$  e  $n=0,1,\dots,N=4$  são dados por:

$$\lambda_{c_{m,n}} := \text{if} \left( kc_{m,n} \neq 0, \frac{2 \cdot \pi}{kc_{m,n}}, \infty \text{ cm} \right)$$

$\lambda_c =$

	0	1	2	3	4
0	$1 \cdot 10^{307}$	8.636	4.318	2.879	2.159
1	17.272	7.724	4.189	2.839	2.142
2	8.636	6.107	3.862	2.731	2.095
3	5.757	4.79	3.454	2.575	2.022
4	4.318	3.862	3.053	2.395	1.931

· cm

(f) Do slide 23 do Cap VII, os comprimentos de onda  $\lambda_g$  [cm] da onda EM guiada que se propaga no interior da GO nos modos  $TE_{mn}$  e  $TM_{mn}$  para  $m=0,1,\dots,N=4$  e  $n=0,1,\dots,N=4$  são dados por:

$$\lambda_{g_{m,n}} := \frac{2\pi}{\beta_{m,n}}$$

$\lambda_g =$

	0	1	2	3	4
0	11.992	-12.447i	-4.628i	-2.965i	-2.195i
1	16.662	-10.098i	-4.471i	-2.923i	-2.177i
2	-12.447i	-7.095i	-4.08i	-2.805i	-2.127i
3	-6.563i	-5.225i	-3.607i	-2.636i	-2.051i
4	-4.628i	-4.08i	-3.157i	-2.444i	-1.957i

· cm

**Nota 5:**  $\lambda_g$  imaginário  $\Rightarrow$  modo evanescente p/ a frequência  $f = 2.5 \cdot \text{GHz}$  do sinal que excita a GO.

(g) Do slide 30 do Cap VII, as impedâncias de onda da onda EM guiada que se propaga no interior da GO nos modos TEMn para  $m=0,1,\dots,N=4$  e  $n=0,1,\dots,N=4$  são dadas por:

$$ZTE_{m,n} := \frac{\eta \cdot k}{\beta_{m,n}}$$

ZTE =

	0	1	2	3	4
0	376.73	-391.045i	-145.408i	-93.16i	-68.954i
1	523.455	-317.246i	-140.452i	-91.817i	-68.404i
2	-391.045i	-222.911i	-128.161i	-88.11i	-66.829i
3	-206.19i	-164.162i	-113.327i	-82.82i	-64.43i
4	-145.408i	-128.161i	-99.191i	-76.795i	-61.469i

$\Omega$

**Nota 6:** ZTE imaginário  $\Rightarrow$  modo evanescente p/ a frequência  $f = 2.5 \cdot \text{GHz}$  do sinal que excita a GO.

(h) Do slide 30 do Cap VII, as impedâncias de onda da onda EM guiada que se propaga no interior da GO nos modos TMmn para  $m=0,1,\dots,N=4$  e  $n=0,1,\dots,N=4$  são dadas por:

$$ZTM_{m,n} := \frac{\eta \cdot \beta_{m,n}}{k}$$

ZTM =

	0	1	2	3	4
0	376.73	362.94i	976.053i	$1.523i \cdot 10^3$	$2.058i \cdot 10^3$
1	271.133	447.368i	$1.01i \cdot 10^3$	$1.546i \cdot 10^3$	$2.075i \cdot 10^3$
2	362.94i	636.692i	$1.107i \cdot 10^3$	$1.611i \cdot 10^3$	$2.124i \cdot 10^3$
3	688.324i	864.546i	$1.252i \cdot 10^3$	$1.714i \cdot 10^3$	$2.203i \cdot 10^3$
4	976.053i	$1.107i \cdot 10^3$	$1.431i \cdot 10^3$	$1.848i \cdot 10^3$	$2.309i \cdot 10^3$

$\Omega$

**Nota 7:** ZTM imaginário  $\Rightarrow$  modo evanescente p/ a frequência  $f = 2.5 \cdot \text{GHz}$  do sinal que excita a GO.

(i) Refazendo (a)-(h) p/ um sinal de excitação da GO de frequência  $f = 7.0$  [GHz]:

$$k := 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \sqrt{\mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r} = 1.467 \cdot \frac{\text{rad}}{\text{cm}} \rightarrow \text{constante de propagação da onda EM caso a GO não tivesse paredes, conforme slide 19 do Cap VII.}$$

(a) Da equação (1) no slide 20 do Cap VII, as frequências de corte dos modos  $TE_{mn}$  e  $TM_{mn}$  para  $m=0,1,\dots,N=4$  e  $n=0,1,\dots,N=4$  são dadas por:

$$f_{c_{m,n}} := \frac{c}{2 \cdot \pi \sqrt{\epsilon_r}} \cdot \sqrt{\left(\frac{m \cdot \pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n \cdot \pi}{b}\right)^2}$$

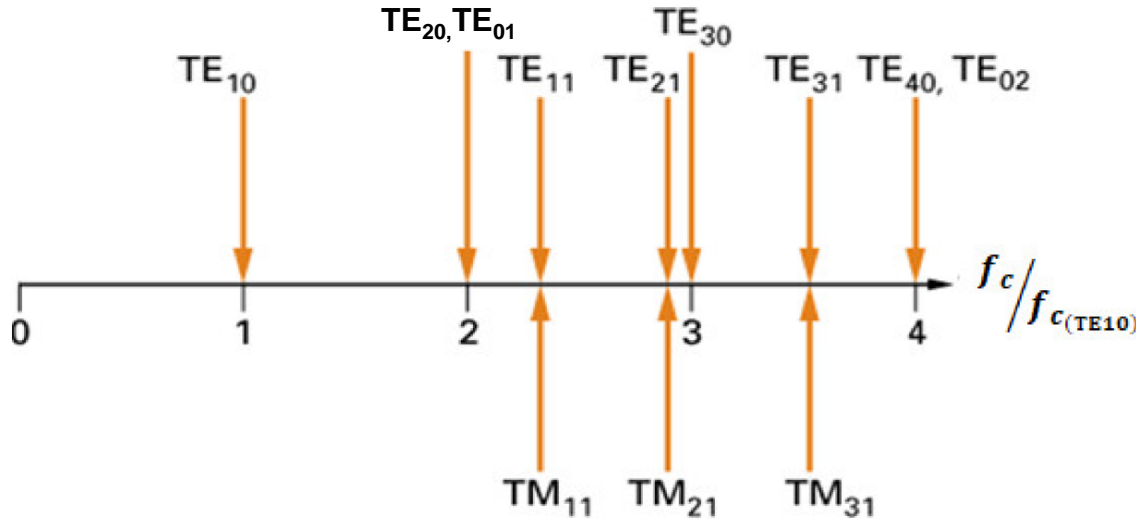
	0	1	2	3	4
0	0	3.471	6.943	10.414	13.886
1	1.736	3.881	7.157	10.558	13.994
2	3.471	4.909	7.762	10.978	14.313
3	5.207	6.258	8.679	11.644	14.83
4	6.943	7.762	9.819	12.516	15.525

·GHz

Note que as frequências de corte dos modos  $TE_{mn}$  e  $TM_{mn}$  não dependem da frequência do sinal de excitação da GO (compare com o slide 66).

(b) Frequência de corte normalizada dos modos  $TE_{mn}$  e  $TM_{mn}$  para  $m=0,1,\dots,N=4$  e  $n=0,1,\dots,N=4$  :

	0	1	2	3	4
$\frac{f_c}{f_{c_{1,0}}}$	0	2	4	6	8
1	1	2.236	4.123	6.083	8.062
2	2	2.828	4.472	6.325	8.246
3	3	3.606	5	6.708	8.544
4	4	4.472	5.657	7.211	8.944



**Nota 1:** Não há propagação da onda EM no modo  $TE_{00}$  (ver slide 28 do Cap VII),

**Nota 2:** Não há propagação da onda EM nos modos  $TM_{mn}$  em que um dos índices  $m$  ou  $n$  seja zero (ver slide 26 do Cap VII).

**Nota 3:** Portanto, não existe sentido físico  $p/ f_{c_{m,n}}$  / os valores de  $m$  e  $n$  referentes aos modos citados nas notas 1 e 2 anteriores.

A inexistência de sentido físico também se aplica  $p/ k_{c_{m,n}}, \beta_{m,n}, \lambda_{c_{m,n}}, \lambda_{g_{m,n}}, Z_{TE_{m,n}}$  e  $Z_{TM_{m,n}}$  (a serem obtidos na solução dos próximos itens)  $p/$  os valores de  $m$  e  $n$  referentes aos modos citados nas notas 1 e 2 anteriores.

Os valores das frequências de corte normalizadas obtidas numericamente são consistentes com o gráfico do slide 17.

Note que as frequências de corte normalizadas dos modos  $TE_{mn}$  e  $TM_{mn}$  não dependem da frequência do sinal de excitação da GO (compare com o slide 67).



(c) Do slide 20 do Cap VII, as constantes de propagação  $k_c$  [rad/cm] da onda EM nas frequências de corte dos modos  $TE_{mn}$  e  $TM_{mn}$  para  $m=0,1,\dots,N=4$  e  $n=0,1,\dots,N=4$  são dadas por:

$$k_{c,m,n} := \sqrt{\left(\frac{m \cdot \pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n \cdot \pi}{b}\right)^2}$$

$k_c =$

	0	1	2	3	4
0	0	0.728	1.455	2.183	2.91
1	0.364	0.813	1.5	2.213	2.933
2	0.728	1.029	1.627	2.301	3
3	1.091	1.312	1.819	2.44	3.108
4	1.455	1.627	2.058	2.623	3.254

.  $\frac{\text{rad}}{\text{cm}}$

(d) Do slide 21 do Cap VII, as constantes de propagação  $\beta$  [rad/cm] da onda EM guiada que se propaga no interior da GO nos modos  $TE_{mn}$  e  $TM_{mn}$  para  $m=0,1,\dots,N=4$  e  $n=0,1,\dots,N=4$  são dadas por:

$$\beta_{m,n} := \sqrt{k^2 - (k_{c,m,n})^2}$$

$\beta =$

	0	1	2	3	4
0	1.467	1.274	0.187	1.616i	2.513i
1	1.421	1.221	0.312i	1.657i	2.54i
2	1.274	1.046	0.703i	1.772i	2.617i
3	0.98	0.657	1.075i	1.95i	2.74i
4	0.187	0.703i	1.443i	2.175i	2.904i

.  $\frac{\text{rad}}{\text{cm}}$

**Nota 4:**  $\beta$  imaginário  $\Rightarrow$  modo evanescente p/ a frequência  $f = 7 \cdot \text{GHz}$  do sinal que excita a GO.

(e) Do slide 22 do Cap VII, os comprimentos de onda  $\lambda_c$  [cm] da onda EM nas frequências de corte dos modos  $TE_{mn}$  e  $TM_{mn}$  para  $m=0,1,\dots,N=4$  e  $n=0,1,\dots,N=4$  são dados por:

$$\lambda_{c_{m,n}} := \text{if} \left( kc_{m,n} \neq 0, \frac{2 \cdot \pi}{kc_{m,n}}, \infty \text{ cm} \right)$$

	0	1	2	3	4
0	1·10 <sup>307</sup>	8.636	4.318	2.879	2.159
1	17.272	7.724	4.189	2.839	2.142
2	8.636	6.107	3.862	2.731	2.095
3	5.757	4.79	3.454	2.575	2.022
4	4.318	3.862	3.053	2.395	1.931

·cm

(f) Do slide 23 do Cap VII, os comprimentos de onda  $\lambda_g$  [cm] da onda EM guiada que se propaga no interior da GO nos modos  $TE_{mn}$  e  $TM_{mn}$  para  $m=0,1,\dots,N=4$  e  $n=0,1,\dots,N=4$  são dados por:

$$\lambda_{g_{m,n}} := \frac{2\pi}{\beta_{m,n}}$$

	0	1	2	3	4
0	4.283	4.932	33.586	-3.888i	-2.5i
1	4.421	5.146	-20.139i	-3.793i	-2.474i
2	4.932	6.008	-8.936i	-3.545i	-2.401i
3	6.408	9.56	-5.844i	-3.222i	-2.293i
4	33.586	-8.936i	-4.354i	-2.889i	-2.163i

·cm

**Nota 5:**  $\lambda_g$  imaginário  $\Rightarrow$  modo evanescente p/a frequência  $f = 7 \cdot \text{GHz}$  do sinal que excita a GO.

(g) Do slide 30 do Cap VII, as impedâncias de onda da onda EM guiada que se propaga no interior da GO nos modos  $TE_{mn}$  para  $m=0,1,\dots,N=4$  e  $n=0,1,\dots,N=4$  são dadas por:

$$ZTE_{m,n} := \frac{\eta \cdot k}{\beta_{m,n}} \quad ZTE = \begin{array}{c|ccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 0 & 376.73 & 433.837 & 2.954 \cdot 10^3 & -342i & -219.902i \\ 1 & 388.875 & 452.684 & -1.772i \cdot 10^3 & -333.651i & -217.634i \\ 2 & 433.837 & 528.498 & -786.094i & -311.854i & -211.23i \\ 3 & 563.701 & 840.9 & -514.051i & -283.427i & -201.708i \\ 4 & 2.954 \cdot 10^3 & -786.094i & -383.01i & -254.156i & -190.309i \end{array} \Omega$$

Nota 6: ZTE imaginário  $\Rightarrow$  modo evanescente p/ a frequência  $f = 7 \cdot \text{GHz}$  do sinal que excita a GO.

(h) Do slide 30 do Cap VII, as impedâncias de onda da onda EM guiada que se propaga no interior da GO nos modos  $TM_{mn}$  para  $m=0,1,\dots,N=4$  e  $n=0,1,\dots,N=4$  são dadas por:

$$ZTM_{m,n} := \frac{\eta \cdot \beta_{m,n}}{k} \quad ZTM = \begin{array}{c|ccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 0 & 376.73 & 327.141 & 48.04 & 414.987i & 645.404i \\ 1 & 364.965 & 313.521 & 80.114i & 425.371i & 652.129i \\ 2 & 327.141 & 268.546 & 180.546i & 455.103i & 671.901i \\ 3 & 251.775 & 168.778 & 276.093i & 500.749i & 703.62i \\ 4 & 48.04 & 180.546i & 370.554i & 558.42i & 745.764i \end{array} \Omega$$

Nota 7: ZTM imaginário  $\Rightarrow$  modo evanescente p/ a frequência  $f = 7 \cdot \text{GHz}$  do sinal que excita a GO.

Abaixo encontram-se identificados em verde os  $\beta$ 's não-imaginários referentes aos modos  $TE_{mn}$  e  $TM_{mn}$  que se propagam na GO quando a frequência do sinal de excitação da GO é  $f = 2.5$  [GHz]. O único modo que se propaga nesta frequência é o modo dominante  $TE_{10}$ .

	0	1	2	3	4
0	0.524	0.505i	1.358i	2.119i	2.863i
1	0.377	0.622i	1.405i	2.15i	2.886i
2	0.505i	0.886i	1.54i	2.24i	2.954i
3	0.957i	1.202i	1.742i	2.383i	3.064i
4	1.358i	1.54i	1.99i	2.57i	3.211i

$\beta =$   $\frac{\text{rad}}{\text{cm}}$

Abaixo encontram-se identificados em verde os  $\beta$ 's não-imaginários referentes aos modos  $TE_{mn}$  e  $TM_{mn}$  que se propagam na GO quando a frequência do sinal de excitação da GO é  $f = 7.0$  [GHz]. Os modos que se propagam nesta frequência são  $TE_{10}, TE_{20}, TE_{30}, TE_{40}, TE_{01}, TE_{11}, TE_{21}, TE_{31}, TE_{02}, TM_{11}, TM_{21}$  e  $TM_{31}$  (os modos  $TM_{mn}$  não evanescentes têm os mesmos índices dos modos  $TE_{mn}$  não evanescentes excluindo os modos  $TM_{mn}$  com índice m ou n nulo).

	0	1	2	3	4
0	1.467	1.274	0.187	1.616i	2.513i
1	1.421	1.221	0.312i	1.657i	2.54i
2	1.274	1.046	0.703i	1.772i	2.617i
3	0.98	0.657	1.075i	1.95i	2.74i
4	0.187	0.703i	1.443i	2.175i	2.904i

$\beta =$   $\frac{\text{rad}}{\text{cm}}$

Note que cada um destes valores de  $\beta$  resulta em uma velocidade de fase  $v_p = \omega/\beta$  [m/s] respectiva ao modo de propagação da onda EM, o que gera tempos de propagação respectivos ao modo caracterizando o problema de dispersão já discutido no slide 17.

(j) Determinando o fator de velocidade  $p = v_p/c$  do modo mais rápido e do modo mais lento que se propaga na GO na frequência  $f = 7.0$  [GHz] do sinal de excitação :

$$\omega = 2\pi f = 4.398 \times 10^{10} \text{ [rad/s]}$$

Da matriz  $\beta$  [rad/cm] ao lado obtemos:

$\max\beta = 1.421$  [rad/cm] (valor de  $\beta$  do modo mais lento que se propaga na GO)

$\min\beta = 0.187$  [rad/cm] (valor de  $\beta$  do modo mais rápido que se propaga na GO)

	0	1	2	3	4		
$\beta =$	0	1.467	1.274	0.187	1.616i	2.513i	rad/cm
	1	1.421	1.221	0.312i	1.657i	2.54i	
	2	1.274	1.046	0.703i	1.772i	2.617i	
	3	0.98	0.657	1.075i	1.95i	2.74i	
	4	0.187	0.703i	1.443i	2.175i	2.904i	

$$v_{p(\text{modo lento})} = \frac{\omega}{\max\beta} = 3.1 \times 10^8 \text{ [m/s]} \rightarrow p_{(\text{modo lento})} = \frac{v_{p(\text{modo lento})}}{c} = 1.03$$

$$v_{p(\text{modo rapido})} = \frac{\omega}{\min\beta} = 2.4 \times 10^9 \text{ [m/s]} \rightarrow p_{(\text{modo rapido})} = \frac{v_{p(\text{modo rapido})}}{c} = 7.8$$

O fato da velocidade de propagação da onda guiada no interior da GO resultar maior que a velocidade  $c$  de luz não viola qualquer princípio da física. Vimos na discussão do slide 8 que uma onda estacionária é estabelecida por meio da interferência destrutiva e construtiva entre a onda EM incidente e a onda EM refletida que ocorre a partir das paredes laterais da GO. A onda incidente e refletida se propagam na velocidade  $c$  da luz, como é o esperado p/ uma onda EM no espaço livre. **O que se move a uma velocidade maior que a velocidade  $c$  da luz é a variação ao longo do eixo  $+z$  deste padrão de interferência entre onda incidente e refletida.**

Esta situação é análoga à mostrada na figura ao lado para as ondas do mar que incidem obliquamente na linha que define a beira da praia: o ponto de interseção da linha que define a beira da praia com uma crista da frente de onda que nela incide obliquamente move-se mais rápido do que a própria crista da onda, i.e.,  $v_{\text{intersecção}} > v_{\text{onda}}$ . No caso, a linha que define a beira da praia representa a parede da GO.

