

# Módulo I – Ondas Planas

Relação entre campos propagantes

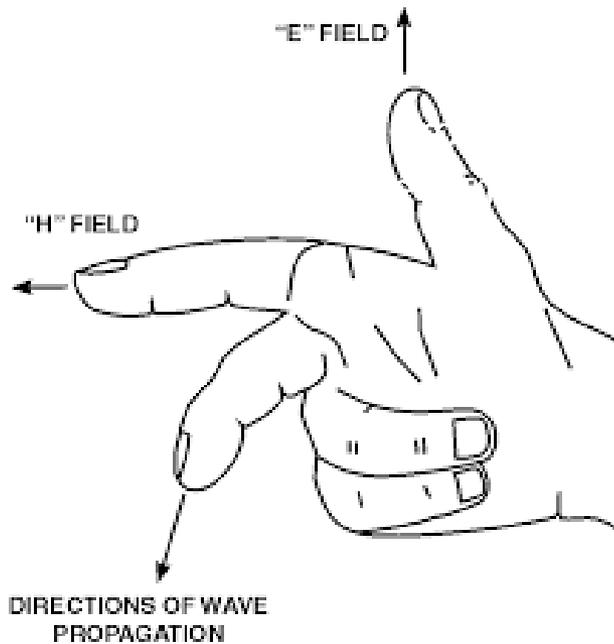
Propagação da onda em um meio sem perdas e sem cargas

Propagação em Dielétricos

Propagação em Condutores

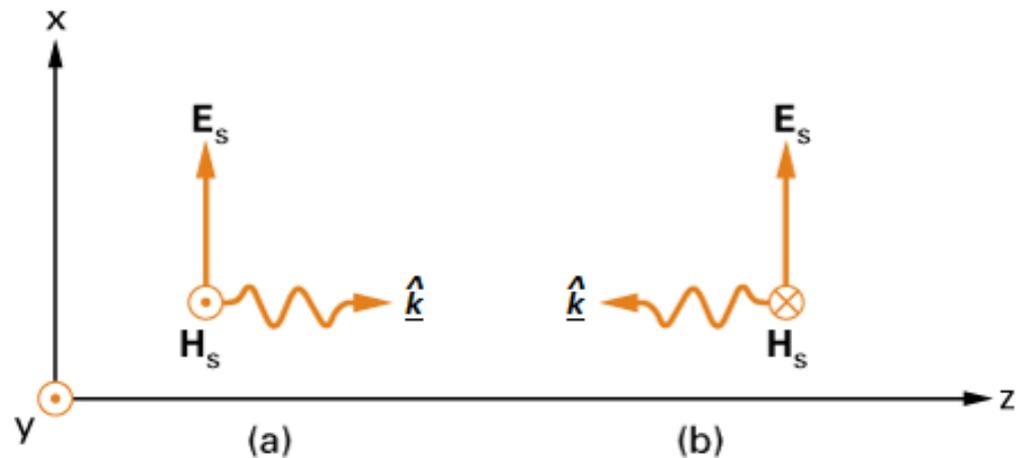


Sabendo que a direção de propagação da onda eletromagnética, dada pelo vetor unitário  $\hat{k}$ , é igual à direção definida pelo produto vetorial entre  $E_s$  e  $H_s$ , e conhecendo-se a relação entre as amplitudes de  $E_s$  e  $H_s$ , obtém-se um par de fórmulas simples relacionando  $E_s$ ,  $H_s$ .



$$H_s = \frac{1}{\eta} \hat{k} \times E_s$$

$$E_s = -\eta \hat{k} \times H_s$$



Consideremos o caso de uma onda se propagando em um dielétrico sem perdas e sem cargas acumuladas, como por exemplo uma onda se propagando no vácuo, ou em qualquer dielétrico sem perdas e sem cargas.

Esta situação também é chamada de espaço livre, pois se trata de um espaço livre de qualquer carga ou material.

Considerando que a constante de propagação é dada por:

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)}$$

*Dielétrico sem perdas e sem cargas acumuladas:  
 $\rho_v = 0; \sigma = 0$*

$$\gamma = \sqrt{j^2\omega^2\mu\varepsilon}$$

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \alpha + j\beta$$

*Como  $\mu$ ,  $\varepsilon$  e  $\omega$  são valores reais e positivos,  $\alpha = 0$ .*

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

Para meio sem perdas e sem cargas

A velocidade de propagação  $u_p$ , ou velocidade de fase, é dada pela observação da onda em um ponto fixo (para acompanhar o ponto fixo que se desloca na direção  $z$ , em um dado  $\Delta t$ ).

$$u_p = \frac{\omega}{\beta} \xrightarrow{\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}} u_p = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \quad \text{Velocidade de propagação em meio sem perdas e sem cargas}$$

No espaço livre (ou em um dielétrico não magnético sem perdas), a velocidade de propagação será dada por

$$u_p = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \xrightarrow{\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r} u_p = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r}} \xrightarrow{c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}} u_p = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}$$

onde  $c$  é a velocidade da luz  $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 2,998 \times 10^8 \text{ m/s}$ .

O comprimento de onda  $\lambda$ , será dado por

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \xrightarrow{\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}} \lambda = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{f\sqrt{\mu\epsilon}}$$

Considerando que a Impedância Intrínseca é dada por  $\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}}$ ,

para o material sem perdas, temos

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}} \xrightarrow{\sigma = 0} \eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{j\omega\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad \left( \eta \text{ é real, então } \mathbf{E} \text{ e } \mathbf{H} \text{ estarão sempre em fase} \right)$$

Considerando que  $\mu = \mu_0\mu_r$  e  $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$  temos que

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0\mu_r}{\varepsilon_0\varepsilon_r}} = \eta_0 \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}$$

onde  $\eta_0$  é a impedância intrínseca do espaço livre, dada por

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}}{(10^{-9}/36\pi) \text{ F/m}}} \rightarrow \eta_0 = 120\pi \Omega$$

$$\eta_0 = \left. \frac{E}{H} \right|_{\text{espaço livre}} = 120\pi \Omega$$

Tratar um dielétrico como sem perdas consiste muitas vezes em uma boa aproximação, porém todos os dielétricos têm, em certo grau, perdas.

A natureza das perdas pode ser atribuída à **condutividade finita**, a **perdas por polarização**, ou a uma combinação de ambas.

#### Condutividade finita:

Ocorre quando o campo elétrico gera uma densidade de corrente de condução  $J = \sigma E$ .

A presença de  $E$  e  $J$  resulta em dissipação de potência (calor), que pode ser descrita pela Lei de Joule ( $P = \int E \cdot J dv$ ).

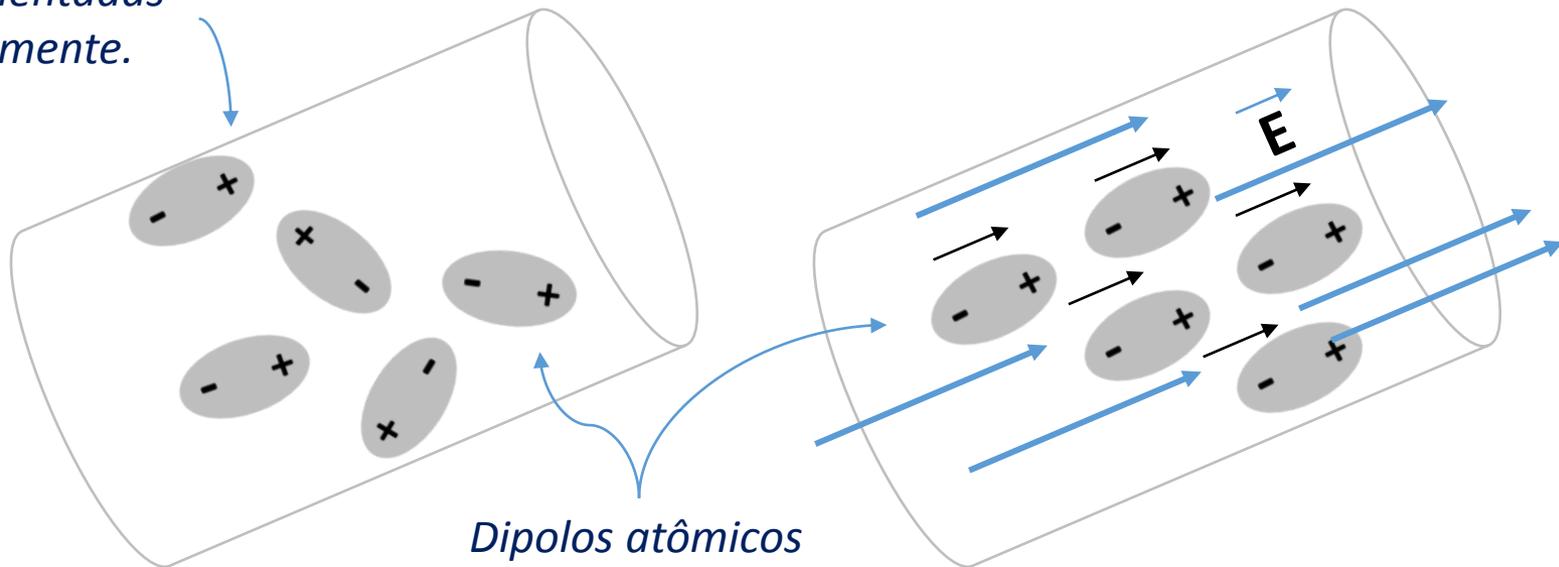
Esta dissipação tem o efeito de atenuar a onda. Esta perda é resultante da excitação DC.

#### Perdas por polarização:

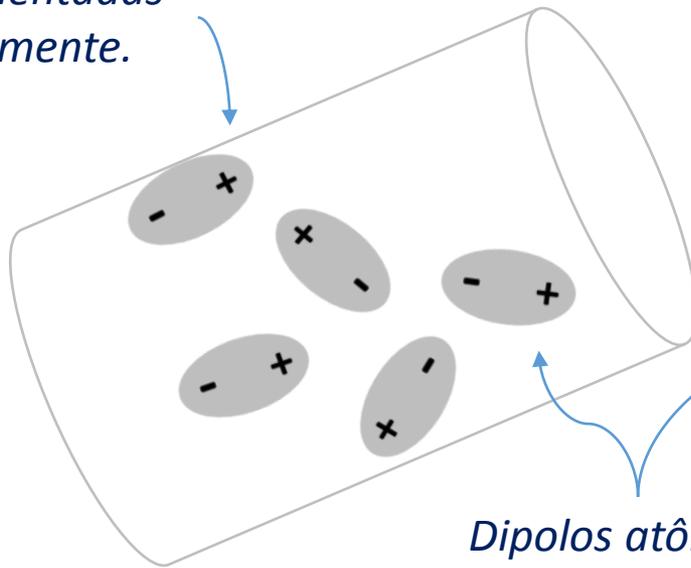
Ocorre como consequência do dispêndio de energia exigido para polarizar o material. A perda por polarização é proporcional à frequência da excitação AC.

- Todo dielétrico tem um retículo de moléculas que nunca é eletricamente neutro, no qual as moléculas são orientadas randomicamente.
- Quando se aplica um campo elétrico externo, as moléculas tendem a se orientar de acordo com este campo.
- O campo elétrico externo alinha os dipolos atômicos do retículo. Os campos elétricos infinitesimais do material se alinham com o campo externo aplicado.
- O material está se polarizando, ou seja, orientando seus dipolos atômicos de acordo com o campo elétrico externo, o que aumenta as linhas do campo elétrico do material, como se o mesmo sofresse um aumento de permissividade elétrica ( $\epsilon$ ).

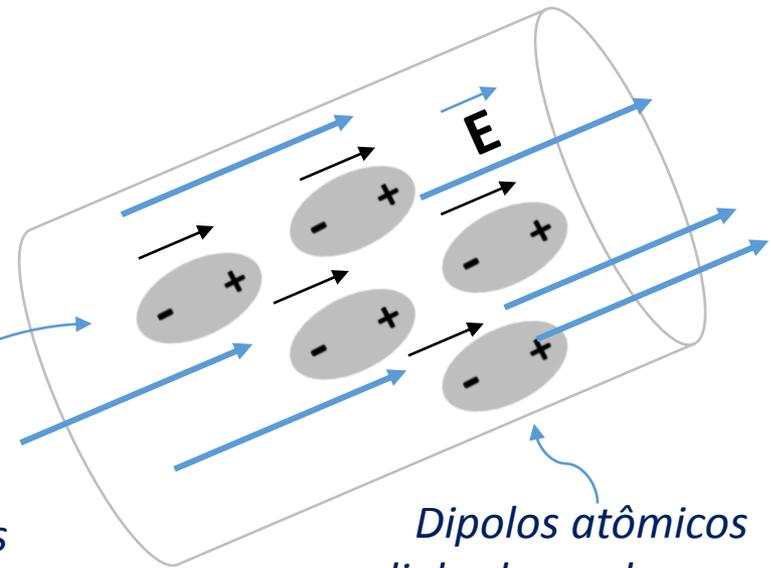
*Moléculas orientadas  
randomicamente.*



*Moléculas orientadas  
randomicamente.*



*Dipolos atômicos*



*Dipolos atômicos  
alinhados pelo campo  
elétrico externo.*

- Se o campo elétrico é DC, os dipolos se orientam de acordo com o campo externo e ficam parados.
- Quando o campo elétrico é AC, os dipolos ficam girando (circularmente), de acordo com o campo elétrico. Ou seja, as cargas elétricas estão em movimento.
- O movimento das cargas elétricas gera atrito no retículo atômico, ocasionando a perda Joule.
- Por esta razão, as perdas aumentam com a frequência da excitação.

Para dielétricos, a Densidade de Fluxo Elétrico  $D$  passa a ser expressa por

$$D = \epsilon_0 E + P_e, \text{ onde:}$$

*vetor polarização  $P_e$  é denominado “polarizabilidade elétrica”*

$\epsilon_0 E$  corresponde à capacidade do meio em concentrar as linhas do campo elétrico em linhas de fluxo elétrico.

$P_e$  corresponde à capacidade de intensificação das linhas de campo do material, em função do fenômeno de polarização.

Em meios lineares,  $P_e$  é relacionado ao campo elétrico por  $P_e = \epsilon_0 \chi_e E$ .

- O aumento da densidade de fluxo elétrico por polarização elétrica é proporcional ao campo elétrico externo, pois quanto maior for este campo, mais as moléculas do material (dipolos assimétricos) se orientarão na direção do mesmo.
- $\chi_e$  expressa o quanto o campo elétrico externo é capaz de girar as moléculas para que se orientem, e é denominado Susceptibilidade Elétrica.

Considerando que  $P_e = \epsilon_0 \chi_e E$ , a densidade de fluxo elétrico  $D$  pode ser expressa por:

$$D = \epsilon_0 E + P_e = \epsilon_0 E + \epsilon_0 \chi_e E = \epsilon_0 (1 + \chi_e) E = \epsilon E$$

(1) A concentração das linhas do campo elétrico ocorre instantaneamente, em função das propriedades do material em si ( $\epsilon_0$ ). {Re}

(2) A concentração das linhas do campo elétrico não ocorre instantaneamente. Ocorre pelo movimento dos dipolos atômicos, em razão da existência do campo elétrico externo.  $\chi_e$  não é instantâneo, pois as moléculas demoram para se orientar pelo campo elétrico. {Im}

Para expressar (1) e (2), a permissividade elétrica é substituída por um número complexo. Ao invés de trabalhar com a susceptibilidade, se considera como se a permissividade fosse complexa, ou seja:

$$D = \epsilon E, \quad \text{com } \epsilon = \epsilon' - j\epsilon'' = \epsilon_0(\epsilon_r' - j\epsilon_r'') = \epsilon_0(1 + \chi_e)$$

*Devido à concentração das linhas do campo elétrico.*

*Devido ao movimento dos dipolos atômicos que se arrastam e demoram a se orientar (polarização). Ocorre unicamente quando o dielétrico é submetido a altas frequências.*

A perda no material dielétrico (por atrito no retículo atômico) pode ser considerada como o equivalente da perda em material condutor.

Em um material condutor com condutividade  $\sigma$ , a densidade de corrente de condução  $J$  será dada por  $J = \sigma E$  (Lei de Ohm do ponto de vista eletromagnético).

Pela Lei Circuitual de Ampere, temos que:

$$\nabla \times H = J + \frac{\delta D}{\delta t} \quad \xrightarrow{D = e^{j\omega t} \text{ e } \frac{\partial D}{\partial t} = j\omega D} \quad \nabla \times H = j\omega D + J$$

$$\nabla \times H = j\omega D + J \quad \xrightarrow{D = \epsilon E, \quad J = \sigma E} \quad \nabla \times H = j\omega \epsilon E + \sigma E$$

$$\nabla \times H = j\omega \epsilon E + \sigma E \quad \xrightarrow{\epsilon = \epsilon' - j\epsilon''} \quad \nabla \times H = j\omega(\epsilon' - j\epsilon'')E + \sigma E$$

Concentração das linhas do campo elétrico, gerando maior densidade de fluxo elétrico

$$\nabla \times H = j\omega \epsilon' E + (\omega \epsilon'' + \sigma) E$$

Perda dielétrica (movimento circular dos dipolos atômicos)

Perda ôhmica de condução (movimento linear de cargas livres no meio)

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon' \mathbf{E} + (\omega\epsilon'' + \sigma) \mathbf{E}$$

Lei Circuital de  
Ampere para  
Dielétricos

Observe, na expressão da que acabamos de deduzir, que a perda dielétrica ( $\omega\epsilon''$ ) é indistinguível da perda de condução ( $\sigma$ ).

O efeito é o mesmo, apesar de as causas serem diferentes.

Desta forma, podemos definir

$$\sigma_{ef} = \omega\epsilon'' + \sigma$$

que pode ser considerado como a **condutividade efetiva total**.

Observe também que, se um problema foi resolvido considerando-se material dielétrico sem perdas, as perdas podem ser facilmente introduzidas pela substituição de  $\epsilon$  real pelo complexo  $\epsilon = \epsilon' - j\epsilon''$ .

A razão entre a parte real e a parte imaginária de  $\epsilon$  (razão entre a corrente de condução (J) e a corrente de deslocamento (D)) é chamada de tangente de perdas.

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon' \mathbf{E} + (\omega\epsilon'' + \sigma) \mathbf{E}$$

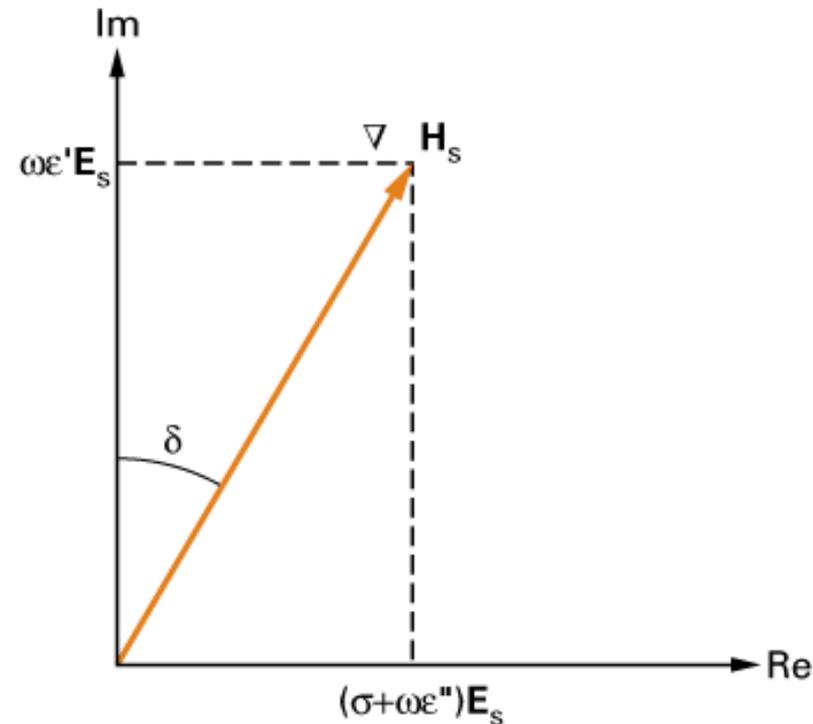
$$\tan \delta = \frac{\omega\epsilon'' + \sigma}{\omega\epsilon'}$$

Tangente de perdas

- $\delta$  é o ângulo pelo qual a densidade de corrente de deslocamento está adiantada em relação à densidade de corrente total.
- $\tan \delta$  diz o quanto um material que deveria ser absolutamente dielétrico se transforma em condutor devido à fricção das moléculas, gerando calor e corrente de condução.

$\sigma$ : Caracterização das perdas nos condutores

$\tan \delta$ : Caracterização das perdas nos dielétricos



Um material é classificado como:

**bom dielétrico se  $\tan \delta \ll 1$**

**bom condutor se  $\tan \delta \gg 1$ .**

$$\tan \delta = \frac{\omega \epsilon'' + \sigma}{\omega \epsilon'}$$

- Em um bom dielétrico

$\sigma$  é insignificante, e  $\tan \delta = \frac{\epsilon''}{\epsilon'}$

- Em um bom condutor,

exceto para frequências muito elevadas,

$$\tan \delta = \frac{\sigma}{\omega \epsilon'}$$

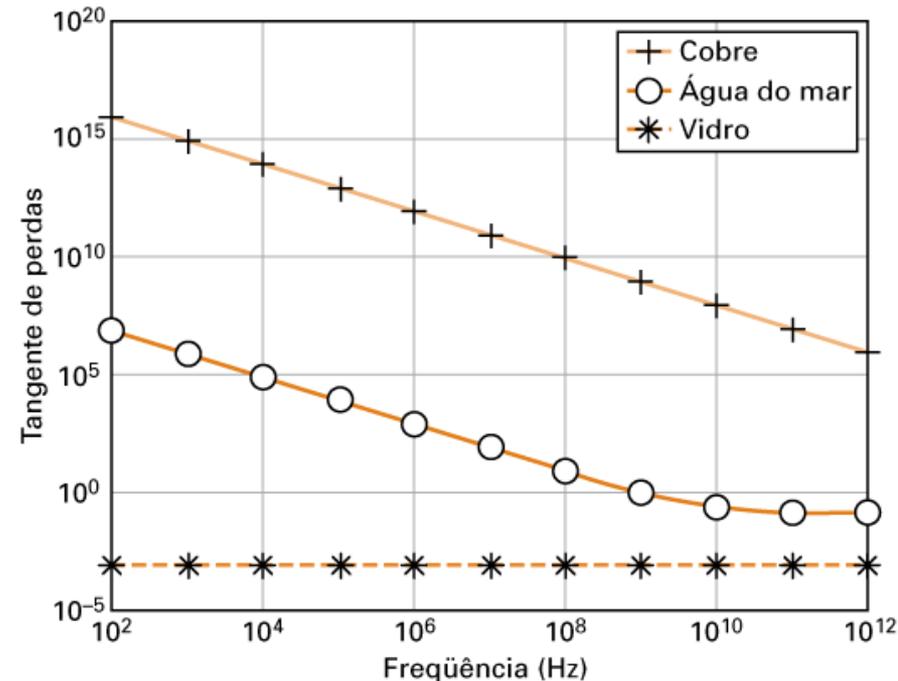
	$\sigma(\text{S/m})$	$\epsilon'_r$	$\epsilon''_r$
Cobre	$5,8 \times 10^7$	1	0
Água do mar	5	72	12
Vidro	$10^{-12}$	10	0,010

*Cobre: condutor quase perfeito*

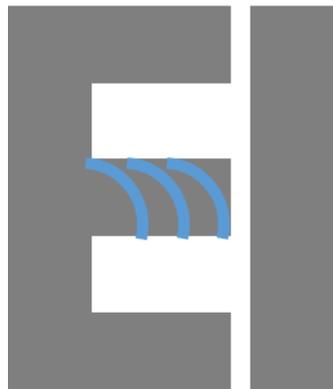
*Vidro: dielétrico quase perfeito*

*Água do mar: perda razoável em relação à onda se propagando no vidro, e maior concentração de linhas do campo elétrico*

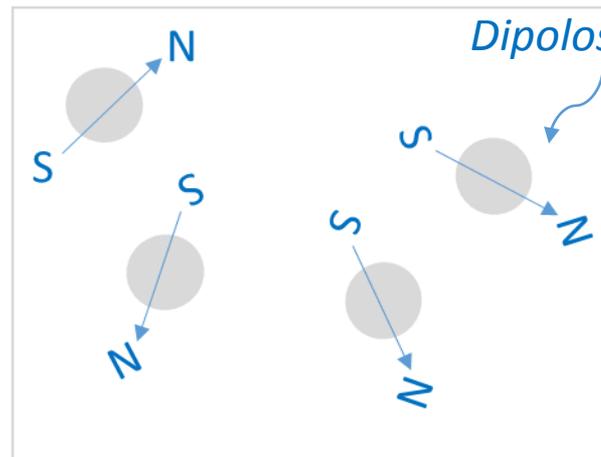
*( $\tan \delta$  nem sempre decresce com  $f$ )*



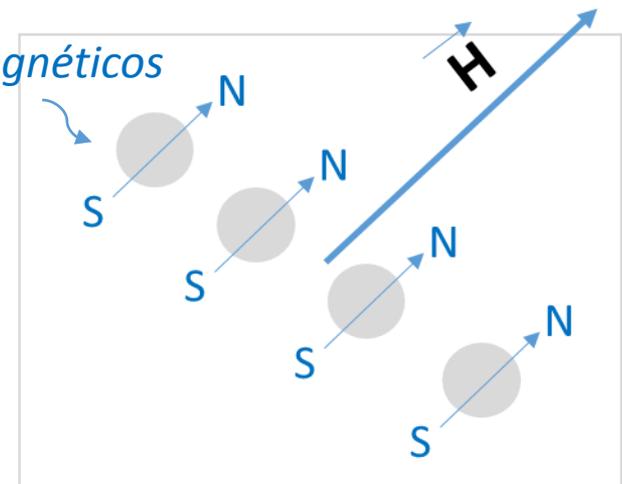
- Situação análoga ocorre para materiais magnéticos.
- Ao invés de dipolos elétricos se alinhando em função do campo elétrico externo, teremos domínios magnéticos (dipolos magnéticos).
- Um campo magnético externo aplicado alinha os dipolos magnéticos, produzindo polarização magnética (ou magnetização)  $P_m$ , ocasionando o aumento das linhas de fluxo magnético  $B$ .



*Lâminas de material ferro-magnético de um transformador*



*Ímãs orientados randomicamente*



*Ímãs orientados de acordo com campo magnético externo*

Para dielétricos, a Densidade de Fluxo Magnético  $B$  passa a ser expressa por

$$B = \mu_0 H + P_m, \text{ onde:}$$

*vetor polarização  $P_m$   
é denominado  
"polarizabilidade magnética"*

$\mu_0 H$  corresponde à capacidade do meio em concentrar as linhas do campo magnético em linhas de fluxo magnético.

$P_m$  corresponde à capacidade de intensificação das linhas de campo do material, em função do fenômeno de polarização.

Em meios magnéticos lineares,  $P_m$  é relacionado ao campo magnético por  $P_m = \epsilon_0 \chi_m H$

- O aumento da densidade de fluxo magnético por polarização magnética é proporcional ao campo magnético externo, pois quanto maior for este campo, mais os dipolos magnéticos se orientarão na direção do mesmo.
- $\chi_m$  expressa o quanto o campo magnético externo é capaz de orientar os dipolos magnéticos, e é denominado Susceptibilidade Magnética.

Considerando que  $P_m = \epsilon_0 \chi_m H$ , a densidade de fluxo magnético  $B$  pode ser expressa por:  $B = \mu_0 H + P_m = \mu_0 H + \mu_0 \chi_m H = \mu_0 (1 + \chi_m) H = \mu H$

(1) A concentração das linhas do campo magnético ocorre instantaneamente, em função das propriedades do material em si ( $\mu_0$ ). {Re}

(2) A concentração das linhas do campo magnético não ocorre instantaneamente. Ocorre pelo movimento dos dipolos magnéticos, em razão da existência do campo magnético externo.  $\chi_m$  não é instantâneo, pois as moléculas demoram para se orientar pelo campo magnético. Representam as perdas por fricção dos domínios magnéticos, ao ficarem girando até se orientar pelo campo. {Im}

Para expressar (1) e (2), a permissividade magnética é substituída por um número complexo. Ao invés de trabalhar com a susceptibilidade, se considera como se a permeabilidade fosse complexa, ou seja:

$$B = \mu H, \text{ com } \mu = \mu' - j\mu'' = \mu_0 (1 + \chi_m)$$

*Não existe condutividade magnética pois não existe corrente magnética real.*

*Devido à concentração das linhas do campo magnético.*

*Devido ao movimento dos dipolos magnéticos que giram e demoram a se orientar (polarização).*

Para um meio qualquer, caracterizado por uma permissividade  $\epsilon'$  e por uma condutividade eficaz  $\sigma_{ef}$  (em que está implícito  $\epsilon''$ ,  $\sigma_{ef} = \omega\epsilon'' + \sigma$ ), a constante de atenuação ( $\alpha$ ) e a constante de fase ( $\beta$ ) serão dadas por:

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon'}{2} \left( \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_{ef}}{\omega\epsilon'}\right)^2} - 1 \right)}$$
$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon'}{2} \left( \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_{ef}}{\omega\epsilon'}\right)^2} + 1 \right)}$$

As equações acima podem ser aplicadas qualquer tipo de material, dados os parâmetros construtivos.

- Um material bom condutor apresenta condutividade  $\sigma$  muito grande.
- Em consequência, a tangente de perdas será muito maior do que 1, ( $\tan \delta = \sigma / \omega \epsilon' \gg 1$ ) ou, de forma equivalente,  $\epsilon'' \gg \epsilon'$  em  $\epsilon = \epsilon' - j\epsilon''$ .

Para este caso, dado que  $\frac{\sigma}{\omega \epsilon'} \gg 1$ , as expressões para  $\alpha$  e  $\beta$  se tornam idênticas:

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu \epsilon'}{2} \left( \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_{ef}}{\omega \epsilon'}\right)^2} - 1 \right)} \quad \beta = \omega \sqrt{\frac{\mu \epsilon'}{2} \left( \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_{ef}}{\omega \epsilon'}\right)^2} + 1 \right)}$$

$$\left( \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon'}\right)^2} \mp 1 \right) = \frac{\sigma}{\omega \epsilon'}$$

$$\alpha = \beta = \omega \sqrt{\frac{\mu \epsilon'}{2} \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon'}\right)} = \sqrt{\omega^2 \frac{\mu \epsilon'}{2} \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon'}\right)} = \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}} = \sqrt{\pi f \mu \sigma}$$

A constante de propagação em materiais condutores será dada por

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} + j\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = (1 + j)\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

A impedância intrínseca em materiais condutores é aproximada por

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} \xrightarrow{\sigma \gg j\omega\epsilon} \eta \cong \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}}$$

Rearranjando a equação para  $\eta$ , temos

$$\eta = \sqrt{j} \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} = \sqrt{1e^{j90^\circ}} \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} = 1e^{j45^\circ} \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} = \frac{(1+j1)}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} = (1 + j1) \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$$

Considerando que  $\alpha = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$ ,

$\eta = 1e^{j45^\circ} \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}}$  pode ser reescrito como

$$\eta = \sqrt{2} \frac{\alpha}{\sigma} e^{j45^\circ}$$

- A partir da equação acima podemos concluir que, para qualquer bom condutor, o campo magnético se encontra atrasado em relação ao campo elétrico em  $45^\circ$ .
- Para materiais sem perdas, o ângulo da impedância intrínseca é  $0^\circ$ , enquanto que para materiais arbitrários com perdas, a defasagem está entre  $0^\circ$  e  $45^\circ$ .

No caso de propagação em condutores, uma consequência do grande valor de  $\sigma$  é a drástica redução na velocidade de propagação e no comprimento de onda.

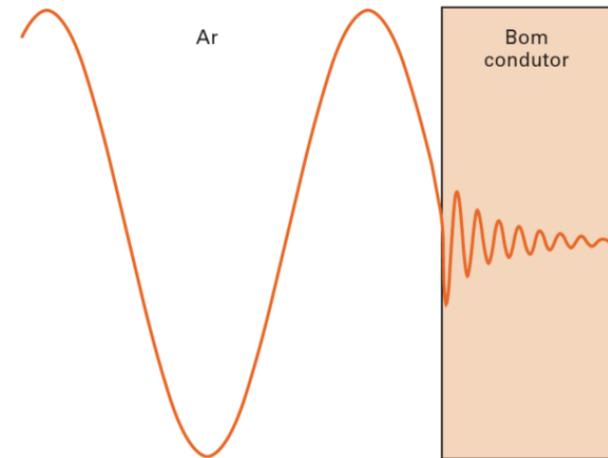
A velocidade de propagação em materiais condutores será dada por

$$u_p = \frac{\omega}{\beta} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}}$$

Como  $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$ , e  $\beta = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$ , o comprimento de onda será dado por

$$\lambda = 2 \sqrt{\frac{\pi}{f\mu\sigma}}$$

- A figura abaixo representa uma onda no espaço livre (ar) penetrando em um bom condutor. Observa-se que a onda atenua rapidamente no condutor, com um comprimento de onda visivelmente muito menor do que seu valor no ar.
- Uma grande atenuação significa que os campos não podem penetrar uma grande distância no condutor.
- A distância no material na qual a amplitude do campo cai a  $e^{-1}$  ( $\cong 0.368$ ) do seu valor na superfície é chamado profundidade de penetração.



Em um bom condutor, a grande atenuação significa que a profundidade de penetração pode ser bastante pequena.

Como a atenuação é rápida dentro de um bom condutor, os campos ficarão confinados à superfície (skin effect, ou efeito pelicular).

A baixas frequências, a corrente passa uniformemente em toda a seção transversal do condutor. A altas frequências, a corrente se concentra na superfície.

Para bons condutores, é comum fazer referência à profundidade de penetração como profundidade pelicular.

Pela Equação de Helmholtz para a onda plana, temos que  $e^{-\gamma z} = e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$ , considerando  $z = 1/\alpha$ , temos que

$$e^{-\alpha z} \xrightarrow{z = 1/\alpha} e^{-\alpha z} = e^{-1}$$

O que significa que, quando a onda andou uma distância  $1/\alpha$ , a amplitude da onda foi multiplicada por  $e^{-1}$ , ou 0.368.

Ou seja, a cada  $1/\alpha$  que a onda anda, a amplitude é atenuada para 36.8% do valor original.

Assim,  $e^{-1} = e^{-\alpha\delta}$ , onde  $\delta$  é a profundidade pelicular, definida como

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} \quad \left[ \alpha = \sqrt{\pi f \mu \sigma} \text{ para um bom condutor} \right]$$

Por exemplo, se  $\delta = 1\text{mm}$ , a cada milímetro que a onda se propaga no condutor, ela tem sua amplitude dividida por  $e^{-1}$ :

Para 1mm  $\longrightarrow 1/e^{-1}$ ;

Para 2mm  $\longrightarrow \frac{1}{e^{-1}} \frac{1}{e^{-1}} = \frac{1}{e^{-2}} \quad \dots$

A profundidade de penetração extremamente curta em micro-ondas denota que apenas a superfície do condutor guia é importante.

Um pedaço de vidro com uma deposição superficial de prata de  $3\mu\text{m}$  de espessura é um excelente condutor de micro-ondas, pois apenas uma fina camada de material bom condutor é necessária para obter componentes de micro-ondas com baixas perdas.

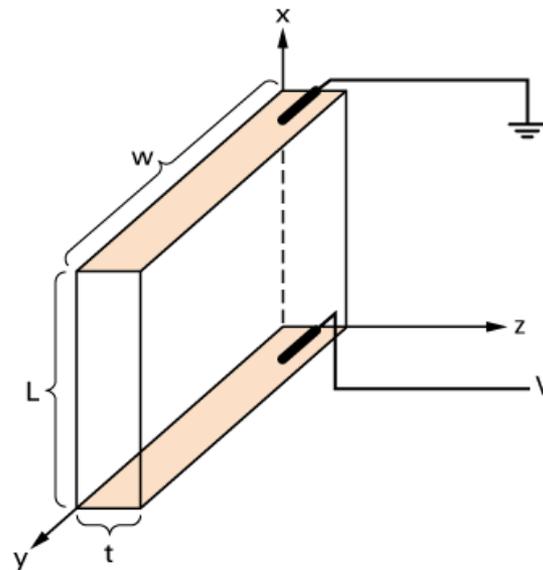
## Sumário das Equações de Propagação da Onda Plana em Vários Meios

Quantity	Type of Medium		
	Lossless ( $\epsilon'' = \sigma = 0$ )	General Lossy	Good Conductor ( $\epsilon'' \gg \epsilon'$ or $\sigma \gg \omega\epsilon'$ )
Complex propagation constant	$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}$	$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}$ $= j\omega\sqrt{\mu\epsilon'}\sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon'}}$	$\gamma = (1 + j)\sqrt{\omega\mu\sigma/2}$
Phase constant (wave number)	$\beta = k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$	$\beta = \text{Im}\{\gamma\}$	$\beta = \text{Im}\{\gamma\} = \sqrt{\omega\mu\sigma/2}$
Attenuation constant	$\alpha = 0$	$\alpha = \text{Re}\{\gamma\}$	$\alpha = \text{Re}\{\gamma\} = \sqrt{\omega\mu\sigma/2}$
Impedance	$\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$	$\eta = j\omega\mu/\gamma$	$\eta = (1 + j)\sqrt{\omega\mu/2\sigma}$
Skin depth	$\delta_s = \infty$	$\delta_s = 1/\alpha$	$\delta_s = \sqrt{2/\omega\mu\sigma}$
Wavelength	$\lambda = 2\pi/\beta$	$\lambda = 2\pi/\beta$	$\lambda = 2\pi/\beta$
Phase velocity	$v_p = \omega/\beta$	$v_p = \omega/\beta$	$v_p = \omega/\beta$

Em altas frequências a corrente fica confinada à superfície externa ou película do condutor.

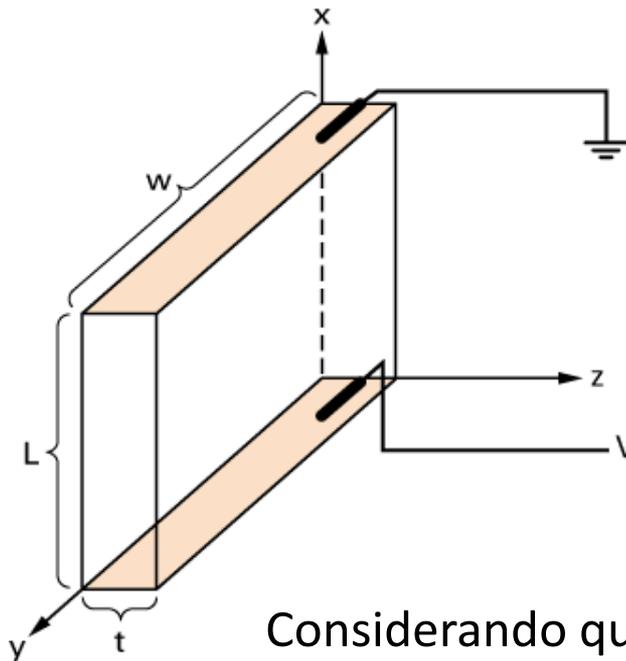
Para definir a relação da resistência encontrada pela corrente no condutor é útil compreender o conceito de resistência superficial.

Considere a placa de material condutor apresentada na figura abaixo. Uma corrente se propaga na direção  $+x$  desta placa devido à aplicação de uma diferença de potencial.



A resistência da placa é

$$R = \frac{1}{\sigma} \frac{L}{wt}$$



$$R = \frac{1}{\sigma} \frac{L}{wt}$$

$1/\sigma \rightarrow \Omega m$   
 $L$  é lado do quadrado em m  
 $w$  é o outro lado do quadrado em m  
 $t$  é a espessura do quadrado em m  
 Unidade de R é  $\Omega$

Considerando que a corrente (que se propaga na direção +x) se propague em uma lâmina de espessura infinitesimal ( $t$  é infinitesimal) e dimensões ( $L \times w$ ), temos que

Resistência total da região, em  $\Omega$   $\rightarrow$

$$R = \left(\frac{1}{\sigma t}\right) \left(\frac{L}{w}\right)$$

Resistência superficial, em  $\Omega/\text{quadrado}$

$$R = \left(\frac{1}{\sigma t}\right) \left(\frac{L}{w}\right) \quad R_{\text{superficial}} = 1/\sigma t$$

A Resistência Superficial é útil, por exemplo, em dispositivos de circuito integrado, onde uma espessura conhecida de um material resistivo (ou condutivo) é depositada sobre um substrato de silício, de modo a obter a resistência desejada pela escolha apropriada da razão entre o comprimento do caminho e a espessura.

A Resistência Superficial pode também ser adaptada para altas frequências, de modo a representar uma resistência do efeito pelicular.

Considere o campo elétrico incidindo em uma placa semi-infinita de material com condutividade  $\sigma$  que ocupa  $z > 0$ .

Na superfície do condutor, a amplitude do campo é dada por  $E_{x0}$ .

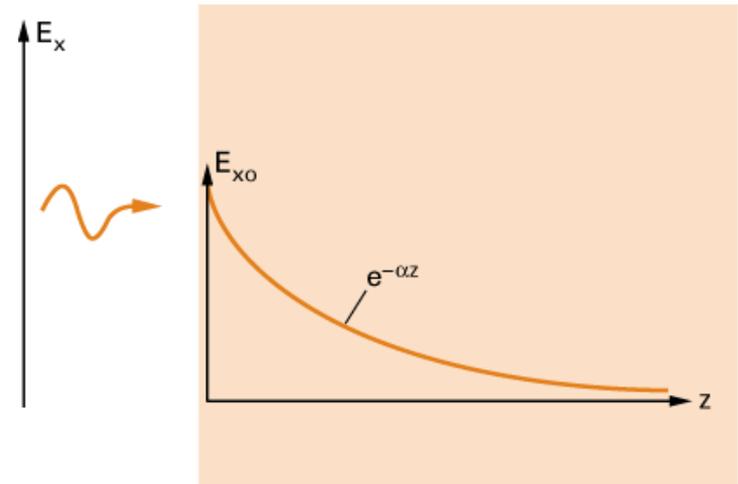
Com a propagação do campo no interior da placa, a amplitude decresce conforme

$$E_x = E_{x0} e^{-\alpha z}$$

Pela Equação de Maxwell, sabemos que a densidade de corrente é dada por

$$J_x = \sigma E_{x0} e^{-\alpha z}$$

$$\left(\frac{\text{mho}}{\text{m}}\right) \left(\frac{\text{V}}{\text{m}}\right) = \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$$

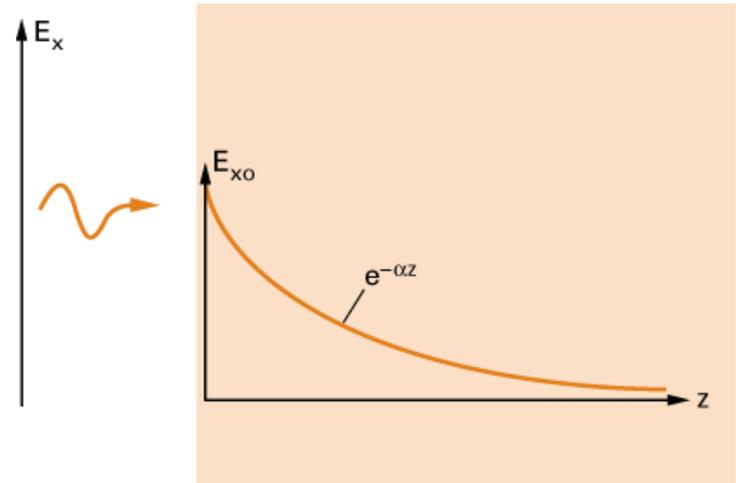


Para calcular a corrente que atravessa a superfície se estendendo de 0 a infinito na direção de  $z$ , e com largura  $w$  na direção  $y$  (saindo da página), devemos integrar a densidade de corrente na superfície  $yz$ , ou seja

$$I = \int J_x ds = \int (\sigma E_{x0} e^{-\alpha z}) ds$$

$$I = \int_{z=0}^{\infty} \int_{y=0}^w (\sigma E_{x0} e^{-\alpha z}) dy dz = \left[ \frac{-w\sigma E_{x0}}{\alpha} e^{-\alpha z} \right]_0^{\infty} = \frac{w\sigma E_{x0}}{\alpha} = w\sigma E_{x0} \delta$$

$\delta = 1/\alpha$



Para uma distância  $L$  na direção  $x$ , o campo está relacionado à queda de tensão por  $V = E_{x0}L$

De modo que podemos calcular a resistência  $R = \frac{V}{I} = \frac{E_{x0}L}{w\sigma E_{x0}\delta} = \frac{1}{\sigma\delta} \frac{L}{w}$ ,

onde o termo  $1/\sigma\delta$  é denominado Resistência de Efeito Pelicular calculada pelo campo incidente em uma lâmina semi-infinita.

$$R_{\text{pelicular}} = \frac{1}{\sigma\delta} \longrightarrow R = R_{\text{pelicular}} \left( \frac{L}{w} \right)$$

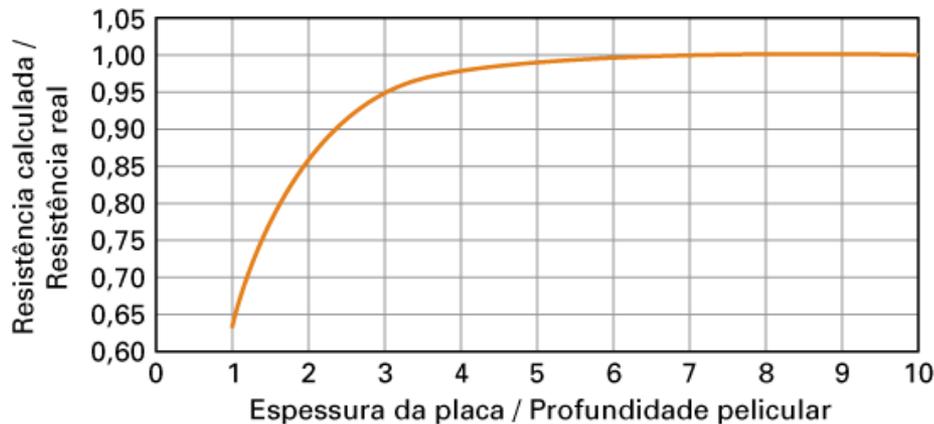
A profundidade pelicular possui papel importante no projeto de componentes em alta frequência.

Por exemplo, guias de onda retangulares utilizadas para transmissão de potência de micro-ondas são feitas de latão com uma fina camada de prata galvanizada. O latão é barato, porém não é bom condutor. A prata é excelente condutor, mas é cara. Entretanto, como a profundidade pelicular da prata é pequena, o uso de uma camada galvanizada é suficiente.

Para uma placa de dimensões finitas, ao invés de integrarmos de  $z = 0 \rightarrow z = \infty$ , integraremos de  $z = 0 \rightarrow z = t$ .

Assim, a Resistência de Efeito Pelicular calculada pelo campo incidente em uma lâmina de dimensões finitas será dada por

$$R_{\text{Pelicular}} = \frac{1}{\sigma\delta(1 - e^{-t/\delta})}$$



A figura mostra a precisão do cálculo da resistência de efeito pelicular como uma função da espessura da placa.

Note que, para espessura da placa ( $t$ ) igual ou maior do que 6 profundidades peliculares ( $\delta$ ), a resistência de efeito pelicular calculada pela expressão acima ( $R_{\text{pelicular}}$ ) é igual à resistência verdadeira.

**DIELECTRIC CONSTANTS AND LOSS TANGENTS FOR  
SOME MATERIALS**

Material	Frequency	$\epsilon_r$	$\tan \delta$ (25°C)
Alumina (99.5%)	10 GHz	9.5–10.	0.0003
Barium tetratitanate	6 GHz	37 ± 5%	0.0005
Beeswax	10 GHz	2.35	0.005
Beryllia	10 GHz	6.4	0.0003
Ceramic (A-35)	3 GHz	5.60	0.0041
Fused quartz	10 GHz	3.78	0.0001
Gallium arsenide	10 GHz	13.0	0.006
Glass (pyrex)	3 GHz	4.82	0.0054
Glazed ceramic	10 GHz	7.2	0.008
Lucite	10 GHz	2.56	0.005
Nylon (610)	3 GHz	2.84	0.012
Parafin	10 GHz	2.24	0.0002
Plexiglass	3 GHz	2.60	0.0057
Polyethylene	10 GHz	2.25	0.0004
Polystyrene	10 GHz	2.54	0.00033
Porcelain (dry process)	100 MHz	5.04	0.0078
Rexolite (1422)	3 GHz	2.54	0.00048
Silicon	10 GHz	11.9	0.004
Styrofoam (103.7)	3 GHz	1.03	0.0001
Teflon	10 GHz	2.08	0.0004
Titania (D-100)	6 GHz	96 ± 5%	0.001
Vaseline	10 GHz	2.16	0.001
Water (distilled)	3 GHz	76.7	0.157

Propriedades para dielétricos selecionados<sup>a</sup>

	$\epsilon_r$	$E_{br}$ (V/m)	tg $\delta$ em 1 MHz	$\sigma$ (S/m)
Ar	1,0005	$3 \times 10^6$	$\sim 0$	$\sim 0$
Alumina	9,9		0,0001	
Titanato de bário	1200	$7,5 \times 10^6$	—	
Vidro	10	$30 \times 10^6$	0,004	$\sim 10^{-12}$
Gelo	4,2		0,12	
Mica	5,4	$200 \times 10^6$	0,0003	$10^{-15}$
Polietileno	2,26	$47 \times 10^6$	—	$10^{-16}$
Poliestireno	2,56	$20 \times 10^6$	—	$10^{-17}$
Quartz (fundido)	3,8	$30 \times 10^6$	0,0002	$10^{-17}$
Silício (puro)	11,8		—	$4,4 \times 10^{-4}$
Solo (seco)	3 – 4		0,017	$2 \times 10^{-3}$
Teflon	2,1	$60 \times 10^6$	$< 0,0002$	$10^{-15}$
Água (destilada)	81		0,04	$10^{-4}$
Água do mar	72		0,9	5

<sup>a</sup> A permissividade dielétrica é resultado da polarização de moléculas fixas e seus elétrons de ligação. Condutores, com seus elétrons livres, não têm moléculas polarizadas e, portanto, possuem permissividades do espaço livre ( $\epsilon_{r(\text{metais})} = 1$ ).

**CONDUCTIVITIES FOR SOME MATERIALS**

Material	Conductivity S/m (20°C)	Material	Conductivity S/m (20°C)
Aluminum	$3.816 \times 10^7$	Nichrome	$1.0 \times 10^6$
Brass	$2.564 \times 10^7$	Nickel	$1.449 \times 10^7$
Bronze	$1.00 \times 10^7$	Platinum	$9.52 \times 10^6$
Chromium	$3.846 \times 10^7$	Sea water	3–5
Copper	$5.813 \times 10^7$	Silicon	$4.4 \times 10^{-4}$
Distilled water	$2 \times 10^{-4}$	Silver	$6.173 \times 10^7$
Germanium	$2.2 \times 10^6$	Steel (silicon)	$2 \times 10^6$
Gold	$4.098 \times 10^7$	Steel (stainless)	$1.1 \times 10^6$
Graphite	$7.0 \times 10^4$	Solder	$7.0 \times 10^6$
Iron	$1.03 \times 10^7$	Tungsten	$1.825 \times 10^7$
Mercury	$1.04 \times 10^6$	Zinc	$1.67 \times 10^7$
Lead	$4.56 \times 10^6$		

Condutores à temperatura ambiente<sup>a</sup>

Material	Símbolo	$\sigma$ (S/m)
Alumínio	Al	$3,8 \times 10^7$
Carbono	C	$3 \times 10^4$
Cobre	Cu	$5,8 \times 10^7$
Ouro	Au	$4,1 \times 10^7$
Grafite		$7 \times 10^4$
Ferro	Fe	$1 \times 10^7$
Chumbo	Pb	$5 \times 10^6$
Nicrômio		$1 \times 10^6$
Niquel	Ni	$1,5 \times 10^7$
Prata	Ag	$6,2 \times 10^7$
Solda		$7 \times 10^6$
Aço inoxidável		$1,1 \times 10^6$
Estanho	Sn	$8,8 \times 10^6$
Tungstênio	W	$1,8 \times 10^7$

<sup>a</sup> A condutividade é aproximada, pois ela depende das impurezas, da umidade e da temperatura.

## Materiais magnéticos

Substância	$\mu_r$
<i>Diamagnético</i>	
Bismuto	0,99983
Ouro	0,99986
Mercúrio	0,99997
Prata	0,99998
Chumbo	0,999983
Cobre	0,999991
Água	0,999991
<i>Não-magnético</i>	
Vácuo	1,000000
<i>Paramagnético</i>	
Ar	1,0000004
Alumínio	1,00002
Paládio	1,0008
Tungstênio	1,00008
Titânio	1,0002
Platina	1,0003
<i>Ferromagnético</i>	
Cobalto	250
Níquel	600
Ferro silício	3500
Ferro puro 99,8%	5000
Mumetal	
(75% Ni, 5% Cu, 2% Cr)	100,000
Ferro puro 99,6%	280,000
"Supermalloy"	
(79% Ni, 5% Mo)	1,000,000