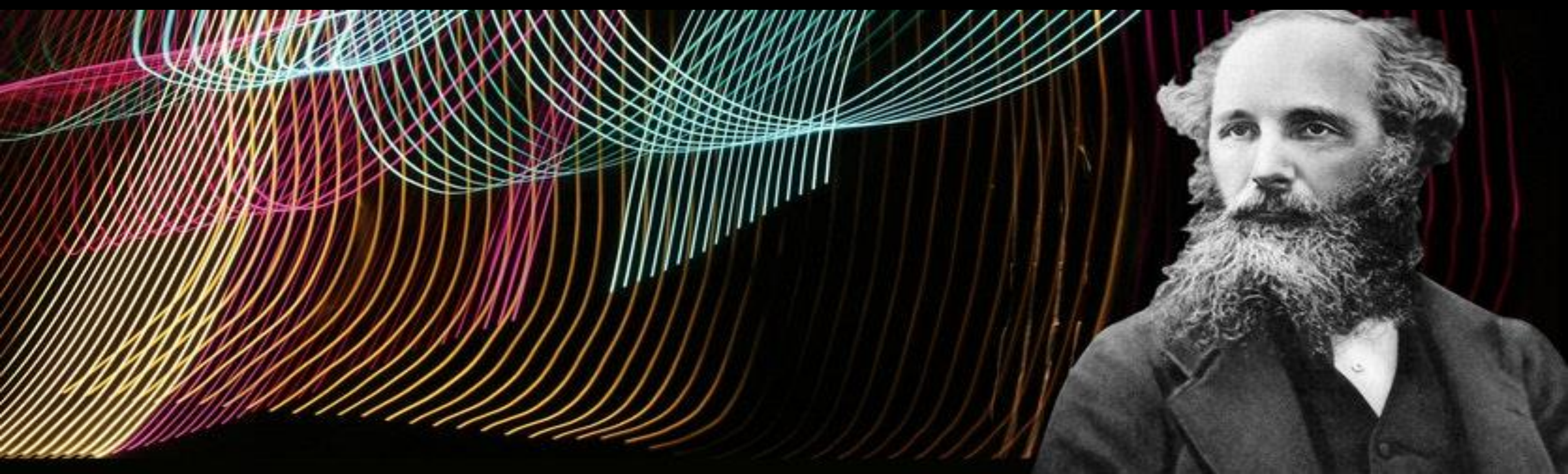
Módulo I – Ondas Planas

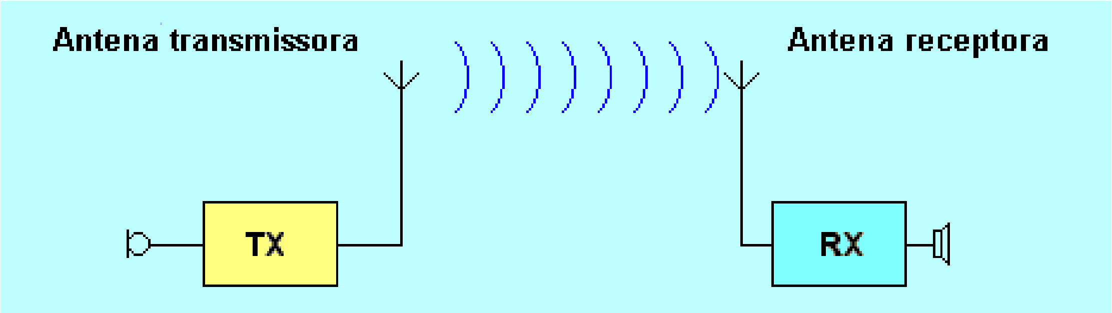
Vetor de Poynting

Transmissão de potência

Polarização



- Em toda aplicação prática, a onda EM é gerada em algum ponto de transmissão no espaço, e se propaga através do mesmo.
- A propagação da onda no espaço é consequência da potência entregue no ponto de transmissão, e que promove a propagação da onda em todas as direções.
- Em algum ponto, distante do ponto de transmissão teremos o ponto de recepção.
- O ponto de recepção irá extrair energia das frentes de onda, entregando potência útil à parte real da impedância de carga, como ocorre no caso de uma antena receptora.



- Todo dispositivo de recepção extrai energia das frentes de onda através de uma área equivalente que esse dispositivo tem, que é a área de recepção do dispositivo.
- Toda antena tem uma área de recepção, então o Vetor de Poynting num ponto do espaço de particular interesse nas vizinhanças do dispositivo receptor traduz uma densidade de energia.

$$\mathbf{P}(\mathrm{t}) = \mathbf{E}(\mathrm{t}) \times \mathbf{H}(\mathrm{t})$$

⬆

Vetor de Poynting
Instantâneo

$$\mathbf{P}(\mathrm{t}) = \mathbf{E}(\mathrm{t}) \times \mathbf{H}(\mathrm{t})$$ ⬅ Vetor de Poynting Instantâneo

- Note que o Campo Elétrico é dado em V/m, e o Campo Magnético é dado em A/m, de tal forma que, se fizermos o produto vetorial dos dois vetores, a resultante dará VA/m^2, ou seja, potência por unidade de área.

- Na prática, o Vetor de Poynting dá uma indicação do quanto um dispositivo de recepção tem condição de extrair energia da frente de onda, simplesmente pela multiplicação da área equivalente desse dispositivo pela densidade de potência (Vetor de Poynting nas vizinhanças do dispositivo).

$$\mathbf{P}(\mathrm{t}) = \mathbf{E}(\mathrm{t}) \times \mathbf{H}(\mathrm{t})$$ ⬅ Vetor de Poynting Instantâneo

$$\left\{ \frac{V}{m}\frac{A}{m} = \frac{VA}{m^2} \right\}$$

- Como o Vetor de Poynting é obtido por um produto vetorial, ele estará ortogonal ao Campo Elétrico e ao Campo Magnético e, via de regra, irá apontar na direção de propagação da onda.
- Representa a potência que a onda transporta por unidade de área da frente de onda.
- Se normalizarmos por 1 m^2, o Vetor de Poynting é a potência contida naquela área de 1 m^2.

Para ondas eletromagnéticas harmônicas no tempo $\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*$, onde:

- **E** (fasor) é o Campo Elétrico,
- **H** (fasor) é o Campo Magnético,
- **P** representa a densidade e a direção do fluxo de potência, em VA/m^2,
- Re{**P**} representa a potência útil em W/m^2,
- Im{**P**} representa a potência reativa VAr/m^2.

A densidade de potência média no tempo transmitida pela onda é dada por

$$\mathbf{P}_{\text{ave}} = \frac{1}{2} Re\underbrace{[\mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^*]}_{\text{Vetor de Poynting Fasorial}}$$

Potência Complexa

$$S_C = \dot{V}\dot{I}^* = |\dot{V}||\dot{I}|cos\varphi + j|\dot{V}||\dot{I}|sen\varphi$$

Potência útil

$\varphi = \measuredangle\, impedância = \frac{\dot{V}}{\dot{I}}$

Potência reativa

$$Re[E_S \times H_S^*] = |\dot{V}||\dot{I}|cos\varphi = \frac{1}{T}\int_0^T E_S(t)\, H_S(t)\, dt$$

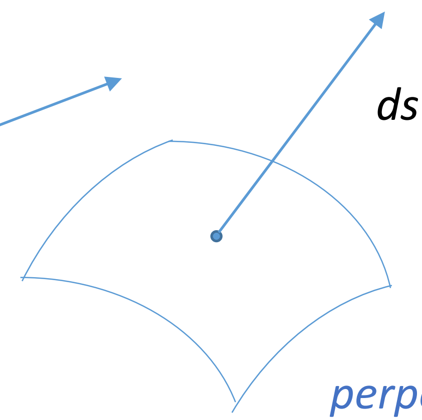
A média no tempo da potência instantânea é igual à potência útil

½: valor de pico/√2

A quantidade de potência P, que passa por uma superfície é dada por

$$P = \int \mathbf{P}_{\text{ave}} \cdot d\mathbf{S}$$

Produto escalar do Vetor de Poyinting (que é perpendicular ao E e ao H) com uma superfície orientada



Vetor ds é perpendicular à superfície, e aponta no sentido da convexidade da superfície

Onde a densidade de potência média (Vetor de Poyinting) é dada por

$$\mathbf{P}_{\text{ave}} = \frac{1}{2} Re[\mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^*]$$

Considerando o caso geral de um meio sem perdas, em que E (fasorial) e H (fasorial) são dados por

$$\boldsymbol{E_S} = E_{x0} e^{-j\beta z} \underline{\hat{\boldsymbol{i}}} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{H_S} = \frac{E_{x0}}{\eta} e^{-j\beta z} \underline{\hat{\boldsymbol{j}}} \;,$$

A onda se propaga no z e não há atenuação (α = 0), e o giro de fase é dado por β.

$$\boldsymbol{H_S^*} = \frac{E_{x0}}{\eta} e^{j\beta z} \underline{\hat{\boldsymbol{j}}}$$

A densidade de potência média da onda será, então

$$\mathrm{P_{ave}} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\mathrm{E_S} \times \mathrm{H_S^*}] \qquad \mathrm{P_{ave}} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[E_{x0} e^{-j\beta z} \underline{\hat{\boldsymbol{i}}} \times \frac{E_{x0}}{\eta} e^{j\beta z} \underline{\hat{\boldsymbol{j}}}\right]$$

$$\mathrm{P_{ave}} = \frac{1}{2}\frac{{E_{x0}}^2}{\eta}\underline{\hat{k}}$$

Densidade de potência média (potência útil) para meios sem perdas

Considerando agora os campos instantâneos em um <u>meio geral com perdas</u>,

podemos determinar a densidade de potência média $\mathrm{P_{ave}} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\mathrm{E_S} \times \mathrm{H_S^*}]$

Lembre que, para um meio com perdas,

$$\boldsymbol{H_S} = \frac{E_{x0}}{\eta}\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{\alpha z}}e^{-j\beta z}\underline{\hat{\boldsymbol{j}}}$$

$$\left(\boldsymbol{H_S^*} = \frac{\boldsymbol{E_{x0}^*}}{\boldsymbol{\eta^*}}\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{\alpha z}}e^{j\beta z}\underline{\hat{\boldsymbol{j}}}\right)$$

$$\boldsymbol{E_S} = E_{x0}\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{\alpha z}}e^{-j\beta z}\underline{\hat{\boldsymbol{i}}}$$

$$\eta = |\eta|e^{j\theta_\eta} = \frac{\dot{\mathrm{E}}}{\dot{\mathrm{H}}},$$

$$\left(\eta^* = |\eta|e^{-j\theta_\eta}\right)$$

impedância intrínseca complexa

Substituindo as expressões para E_S, H_s e η em $P_{ave} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[E_S \times H_S^*]$ temos:

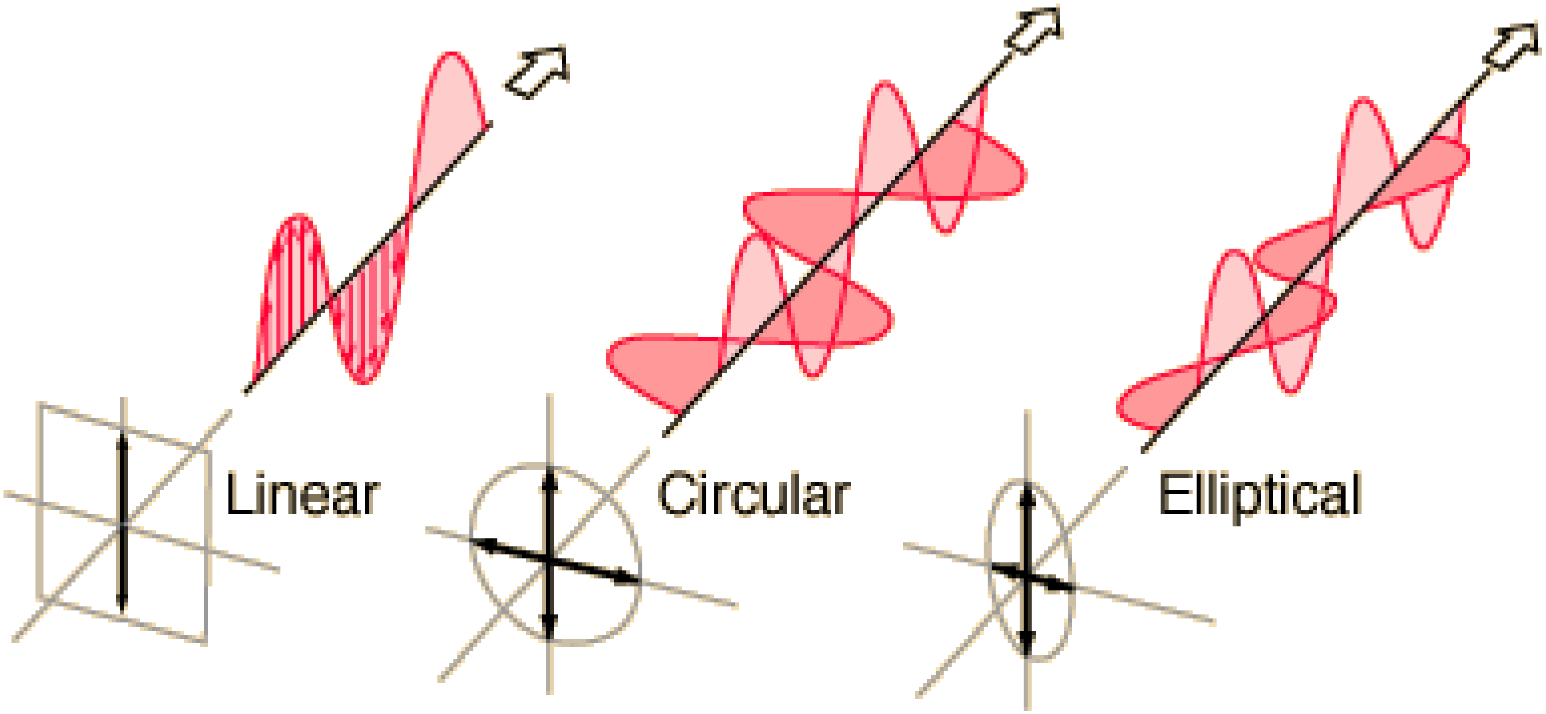
$$\frac{1}{2}\mathrm{Re}[E_S \times H_S^*] = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[E_{x0}\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{\alpha z}}e^{-j\beta z}\underline{\hat{\boldsymbol{\imath}}} \times \frac{\boldsymbol{E_{x0}^*}}{\boldsymbol{\eta}^*}\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{\alpha z}}e^{j\beta z}\underline{\hat{\boldsymbol{\jmath}}}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}Re\left[\frac{|\boldsymbol{E_{x0}^2}|}{\boldsymbol{\eta}^*}\boldsymbol{e}^{-2\alpha z}\right]\underline{\widehat{\boldsymbol{k}}} = \frac{1}{2}Re\left[\frac{|\boldsymbol{E_{x0}^2}|}{|\eta|e^{-j\theta_\eta}}\boldsymbol{e}^{-2\alpha z}\right]\underline{\widehat{\boldsymbol{k}}} = \frac{1}{2}Re\left[\frac{|\boldsymbol{E_{x0}^2}|}{|\eta|}e^{j\theta_\eta}\boldsymbol{e}^{-2\alpha z}\right]\underline{\widehat{\boldsymbol{k}}} =$$

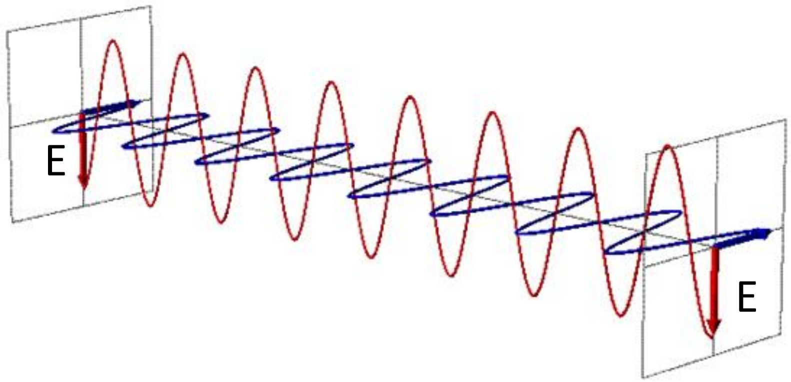
$$= \frac{1}{2}Re\left[\frac{|\boldsymbol{E_{x0}^2}|}{|\eta|}(cos\theta_\eta + jsen\theta_\eta)\boldsymbol{e}^{-2\alpha z}\right]\underline{\widehat{\boldsymbol{k}}} = \frac{1}{2}\left[\frac{|\boldsymbol{E_{x0}^2}|}{|\eta|}\boldsymbol{e}^{-2\alpha z}cos\theta_\eta\right]\underline{\widehat{\boldsymbol{k}}}$$

Densidade de potência média para meios com perdas →

$$P_{ave} = \frac{1}{2}\frac{(\boldsymbol{E_{x0}^2})}{|\eta|}\boldsymbol{e}^{-2\alpha z}cos\theta_\eta\,\underline{\widehat{\boldsymbol{k}}}$$


Linear
Circular
Elliptical

- Uma onda plana uniforme é caracterizada por sua direção de propagação z ($\underline{\hat{k}}$) e frequência (f).
- Os parâmetros constitutivos do meio determinam a atenuação da onda (α) e a constante de fase (β).
- Para completar a descrição de uma onda plana uniforme, precisamos conhecer a orientação descrita por sua polarização (vetores unitários de H ($\underline{\hat{j}}$) e de E ($\underline{\hat{\imath}}$).
- Formalmente, a polarização descreve o caminho adotado pela ponta do vetor intensidade de campo elétrico em um plano espacial fixo, ortogonal à direção de propagação.

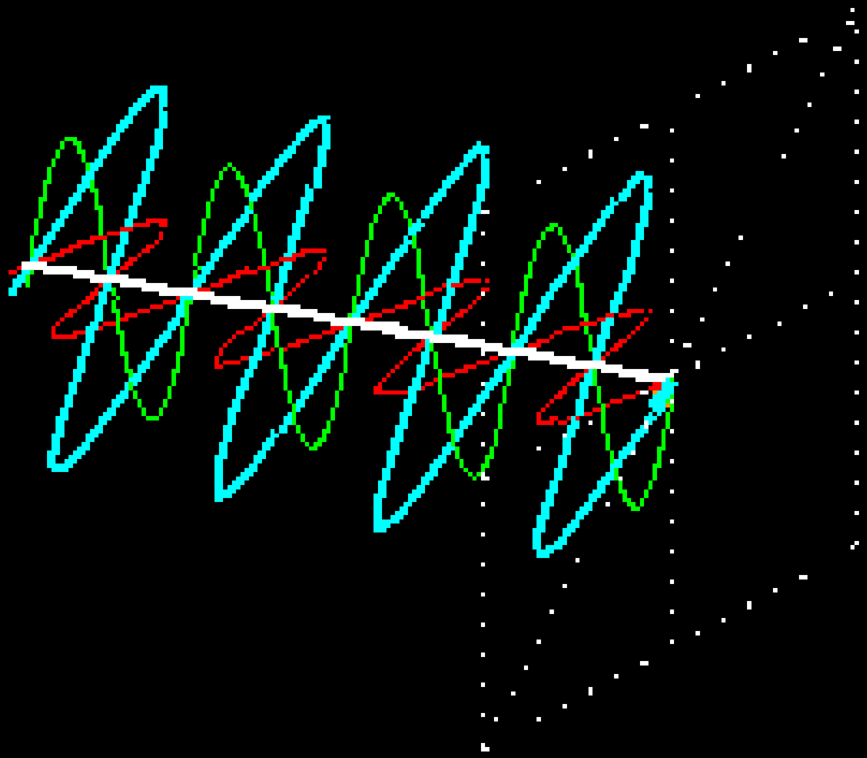


Para melhor compreender esta definição, considere uma onda plana uniforme caracterizada pela equação

$$\mathbf{E}(\mathrm{z},\mathrm{t}) = \mathrm{E}_x \underline{\hat{\boldsymbol{i}}} + \mathrm{E}_y \underline{\hat{\boldsymbol{j}}} = \mathrm{E}_{0x}\cos(\omega\mathrm{t} - \beta\mathrm{z})\underline{\hat{\boldsymbol{i}}} + \mathrm{E}_{0y}\cos(\omega\mathrm{t} - \beta\mathrm{z})\underline{\hat{\boldsymbol{j}}}$$

Como a onda se propaga na direção z, um plano espacial ortogonal a esta direção é o plano $z = 0$.

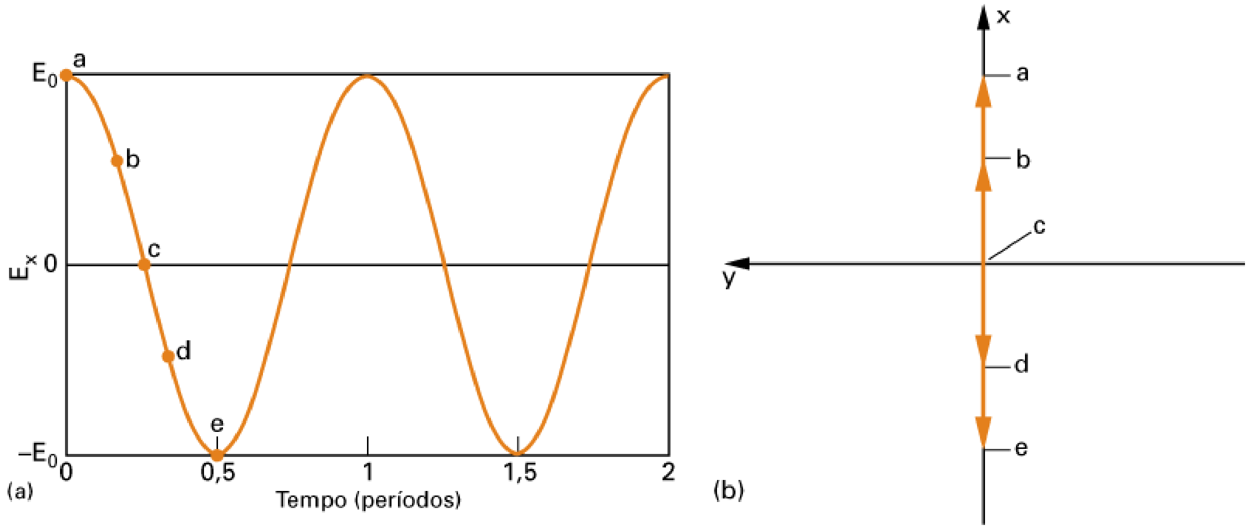
A ponta do vetor intensidade de campo elétrico traça um segmento de linha, representando uma onda polarizada linearmente (em azul).



Considere agora que:

- Na figura (a) abaixo, E_x (em $z = 0$) é traçado em função do tempo.
- A figura (b) mostra o vetor intensidade de campo elétrico para os pontos correspondentes no tempo (de “a” até “e”).

$$\mathbf{E}(z,t) = E_x\hat{\underline{\boldsymbol{i}}} = E_0\cos(\omega t - \beta z)\hat{\underline{\boldsymbol{i}}}$$



Em geral, qualquer onda plana uniforme pode ser constituída por um par de ondas polarizadas linearmente.

Suponha que a superposição de duas dessas ondas, uma onda polarizada em x e uma onda polarizada em y, seja

$$\mathbf{E}(z,t) = E_{x0}\cos(\omega t - \beta z + \phi_x)\underline{\hat{\boldsymbol{\imath}}} + E_{y0}\cos(\omega t - \beta z + \phi_y)\,\underline{\hat{\boldsymbol{\jmath}}}$$

Por questão de simplicidade, começaremos ignorando os componentes de fase.

Assim, com $\phi_x = \phi_y = 0°$, temos

$$\mathbf{E}(z,t) = E_{x0}\cos(\omega t - \beta z)\underline{\hat{\boldsymbol{\imath}}} + E_{y0}\cos(\omega t - \beta z)\,\underline{\hat{\boldsymbol{\jmath}}}$$

$$\mathbf{E}(z,t) = E_{x0}\cos(\omega t - \beta z)\hat{\underline{\boldsymbol{\imath}}} + E_{y0}\cos(\omega t - \beta z)\,\hat{\underline{\boldsymbol{\jmath}}}$$

Em $z = 0$, onde desejamos traçar o caminho do vetor intensidade de campo elétrico total, temos

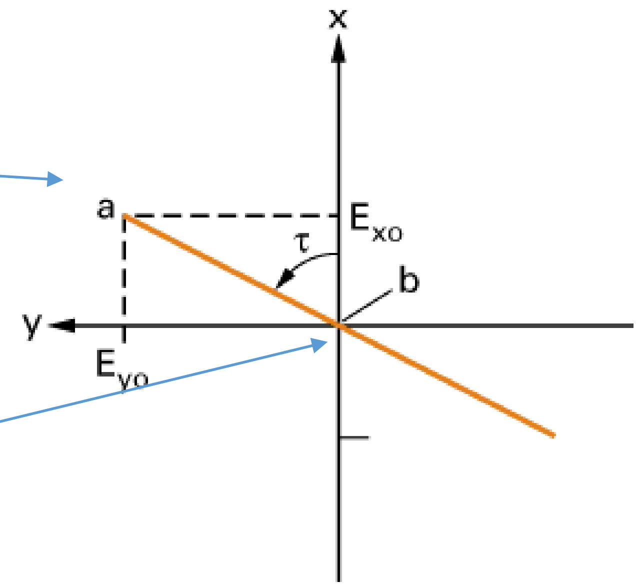
$$\mathbf{E}(0,t) = E_{x0}\cos(\omega t)\hat{\underline{\boldsymbol{\imath}}} + E_{y0}\cos(\omega t)\,\hat{\underline{\boldsymbol{\jmath}}}$$

Em $t = 0$, ambas as ondas polarizadas linearmente possuem seus valores máximos, ou seja

$$\mathbf{E}(0,0) = E_{x0}\hat{\underline{\boldsymbol{\imath}}} + E_{y0}\hat{\underline{\boldsymbol{\jmath}}}$$

Em $t = \mathrm{T}/4$ (um quarto de um período, onde $\omega t = \pi/2$), ambas as ondas estão no mínimo e

$$\mathbf{E}(0,\mathrm{T}/4) = 0$$



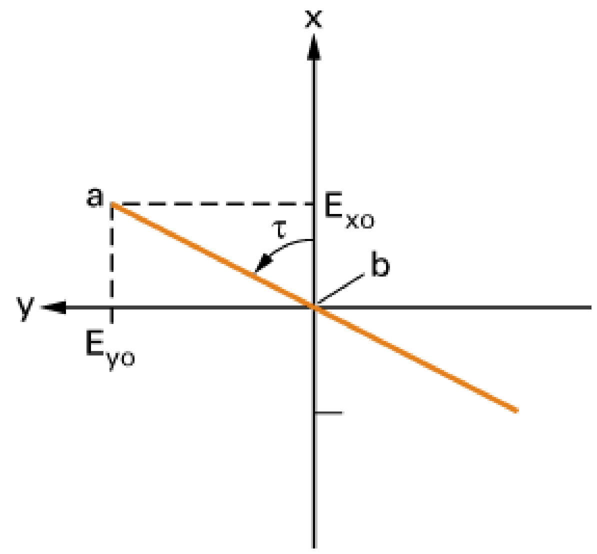
$\tau = \mathrm{tg}^{-1}(E_{y0}/E_{x0})$

- Se traçarmos a ponta do vetor sobre um ciclo completo, obtemos o segmento de linha indicado (a ponta traça uma linha, de modo que a onda é polarizada linearmente).
- O ângulo de inclinação τ é o ângulo que essa linha faz com eixo x, dado por $\tau = \mathrm{tg}^{-1}(E_{y0}/E_{x0})$.

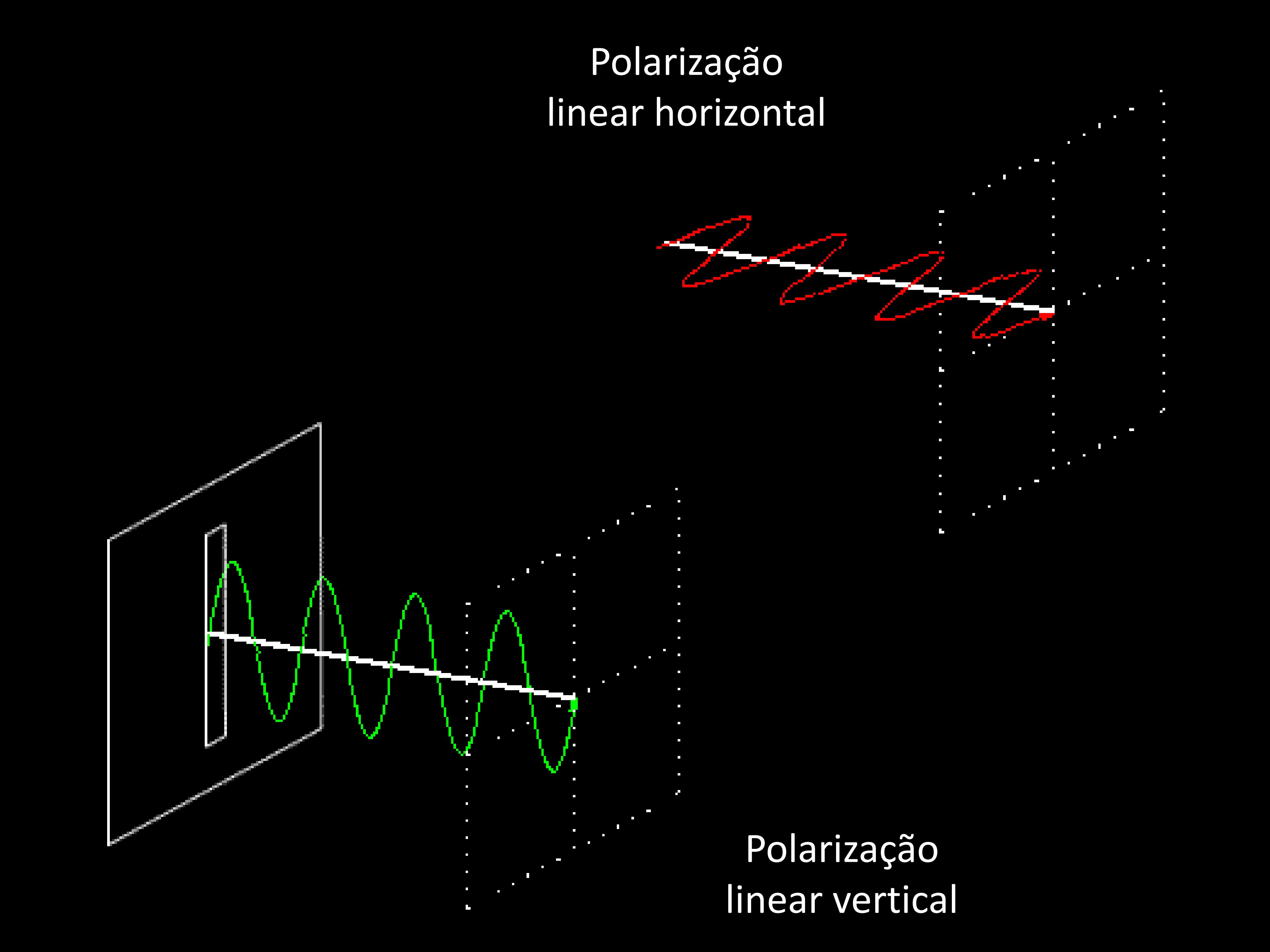
A polarização linear ocorre quando as duas ondas polarizadas linearmente estão em fase:

$$\phi_y - \phi_x = 0°,$$

ou quando elas estão 180° defasadas: $\phi_y - \phi_x = \mp 180°$.



$$\mathbf{E}(0,t) = E_{x0}\cos(\omega t)\underline{\hat{\boldsymbol{\imath}}} + E_{y0}\cos(\omega t)\,\underline{\hat{\boldsymbol{\jmath}}}$$


Polarização
linear horizontal
Polarização
linear vertical

- Em geral, a polarização depende da diferença de fase relativa $(\phi_y - \phi_x)$ entre as duas ondas.
- Se escolhermos a onda polarizada em x como nossa referência (ϕ_x =0°), então a diferença de fase completa é considerada por meio de ϕ_y.
- Se $\phi_x = 0°$ e $\phi_y = 45°$ $(\pi/4$ rad), temos

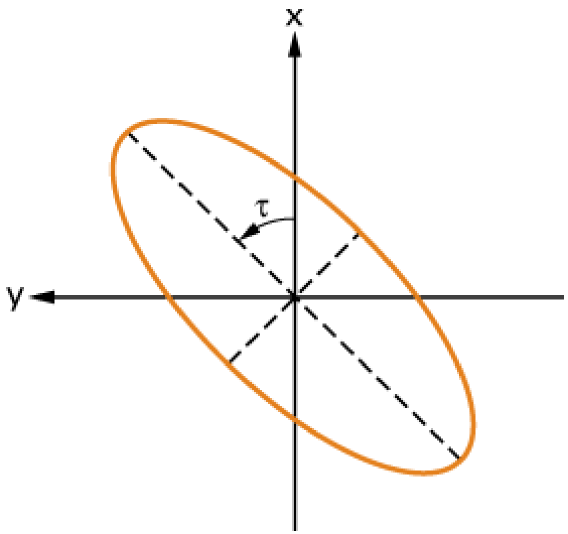
$$\mathbf{E}(0,t) = E_{x0}\cos(\omega t)\underline{\hat{\boldsymbol{\imath}}} + E_{y0}\cos(\omega t + \frac{\pi}{4})\,\underline{\hat{\boldsymbol{\jmath}}} \qquad \phi_{\mathrm{y}} - \phi_x = 45°$$

- Neste caso, a ponta traça uma elipse no gráfico de polarização, e dizemos que a onda é polarizada elipticamente.
- O ângulo de inclinação neste caso é o ângulo que o eixo maior da elipse faz com o eixo x.
- Outro termo comumente utilizado é razão axial: a razão do eixo maior da elipse pelo eixo menor.

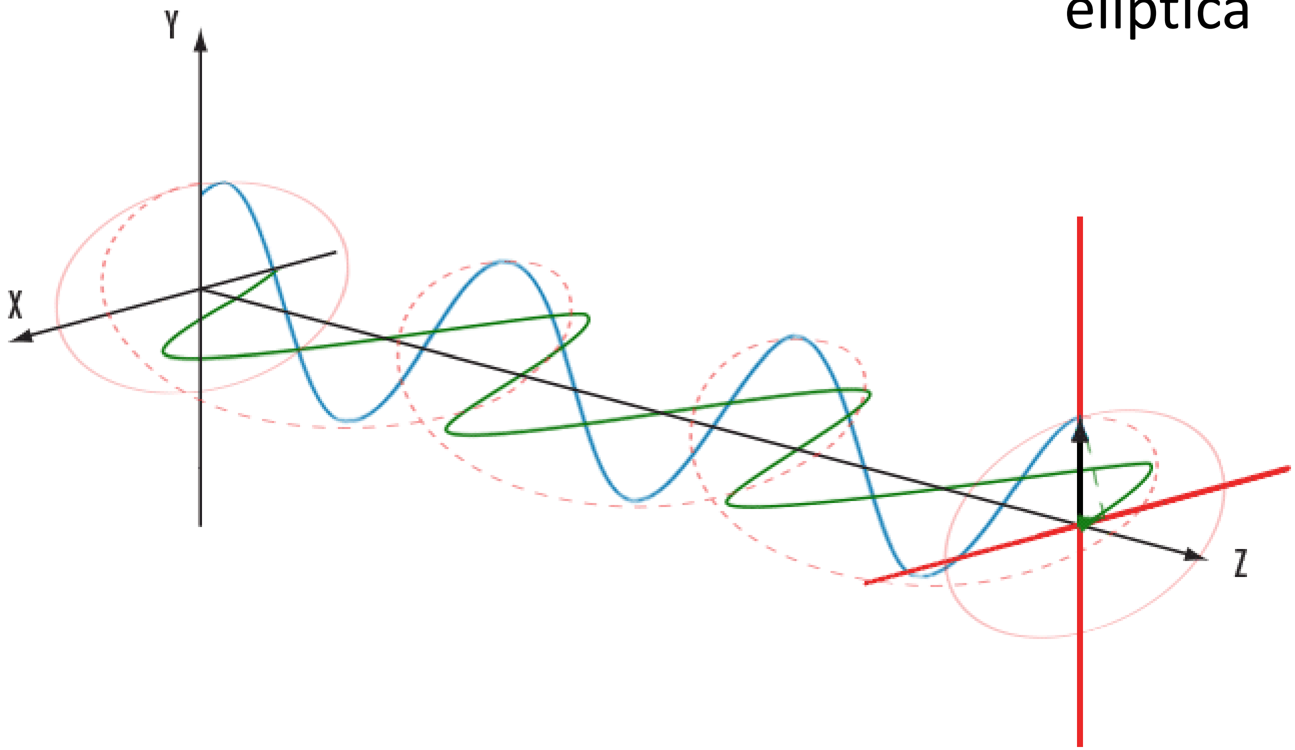
$$\mathbf{E}(0,t) = E_{x0}\cos(\omega t)\underline{\hat{\boldsymbol{\imath}}} + E_{y0}\cos(\omega t + \frac{\pi}{4})\,\underline{\hat{\boldsymbol{\jmath}}}$$

$$\phi_{\mathrm{y}} - \phi_x \neq 0°$$
$$\phi_{\mathrm{y}} - \phi_x \neq 180°$$

- O tipo de polarização mais geral é a elíptica.
- A polarização linear é um caso especial de polarização elíptica com razão axial infinita.



Polarização elíptica

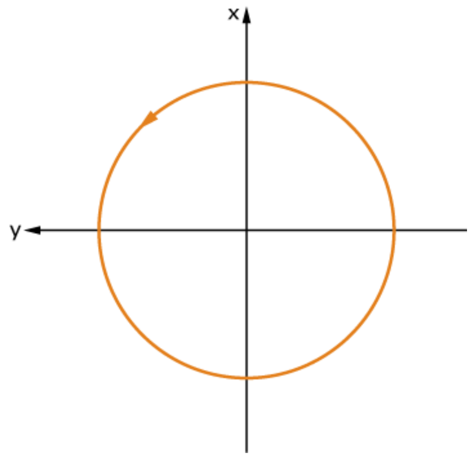


- Outro caso especial de interesse é quando as amplitudes E_{x0} e E_{y0} são iguais, e as ondas estão defasadas por $\pi/2$ radianos ($\phi_y - \phi_x = \mp 90°$).

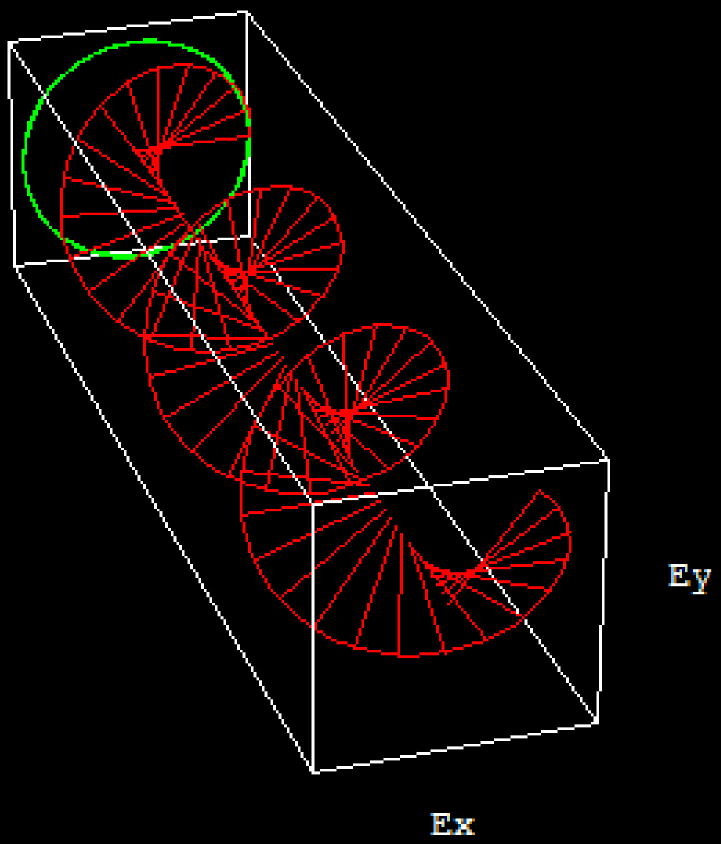
- Esse caso é conhecido como polarização circular, a qual possui uma razão axial unitária.

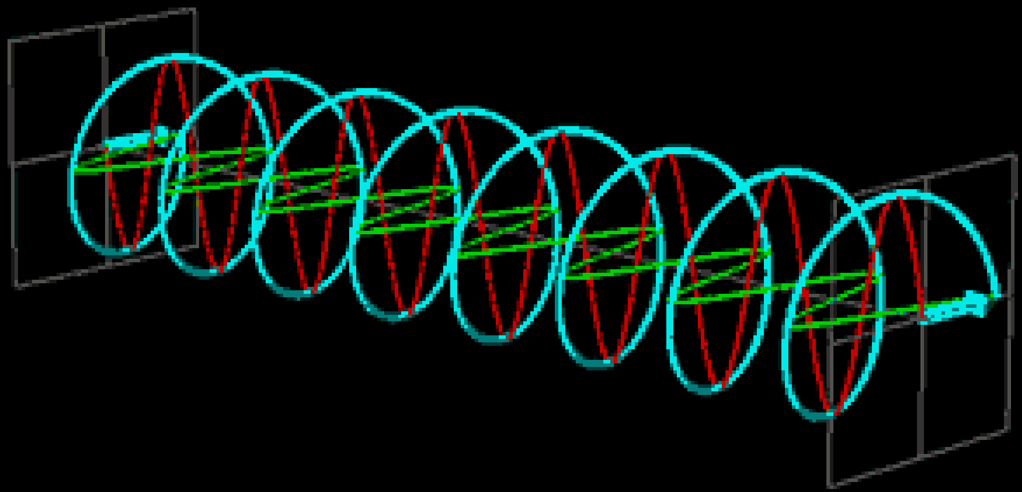
$$\phi_y - \phi_x = \mp 90°$$

$$E_{x0} = E_{y0}$$



Ondas Planas



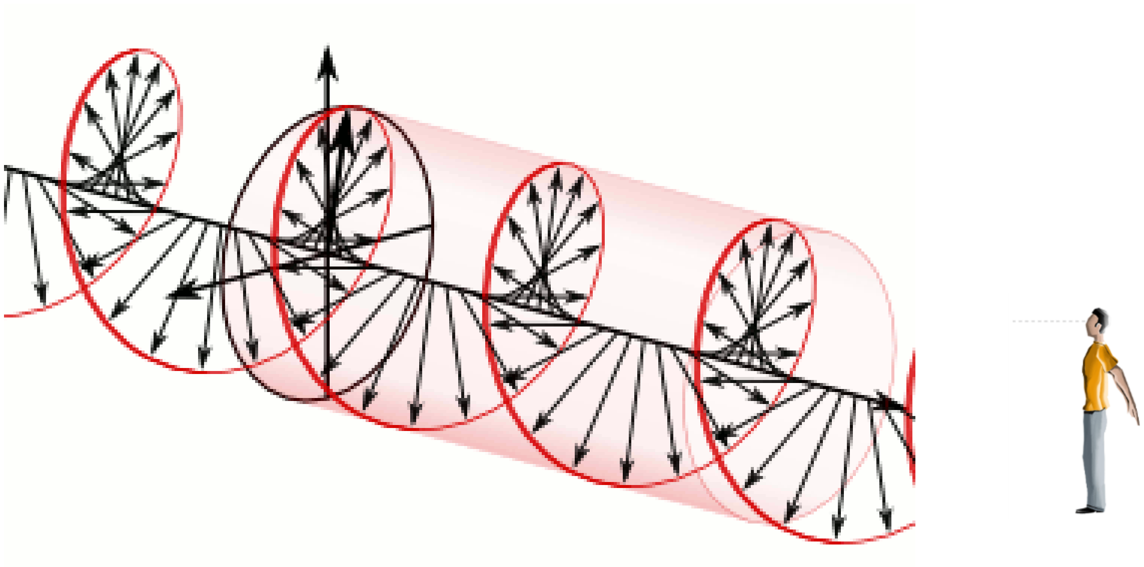


- Uma última identificação para uma onda polarizada consiste no seu sentido de rotação.

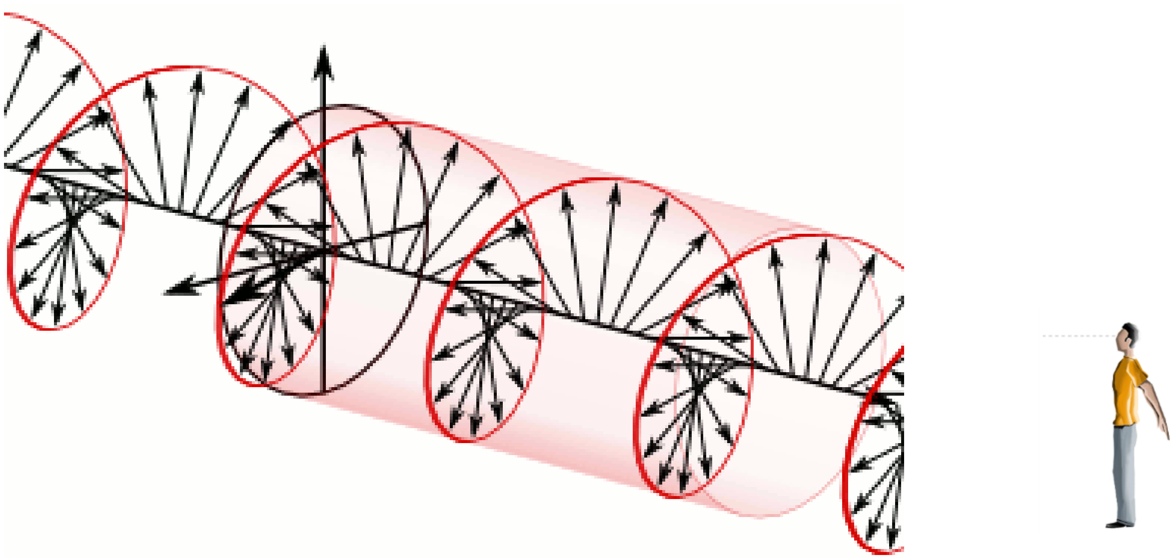
- Para uma onda polarizada circular à direita (RHCP – *Right-Hand Circular Polarization*) $\phi_y - \phi_x = -90°$.

- Para uma onda polarizada circular à esquerda (LHCP – *Left-Hand Circular Polarization*) $\phi_y - \phi_x = +90°$.

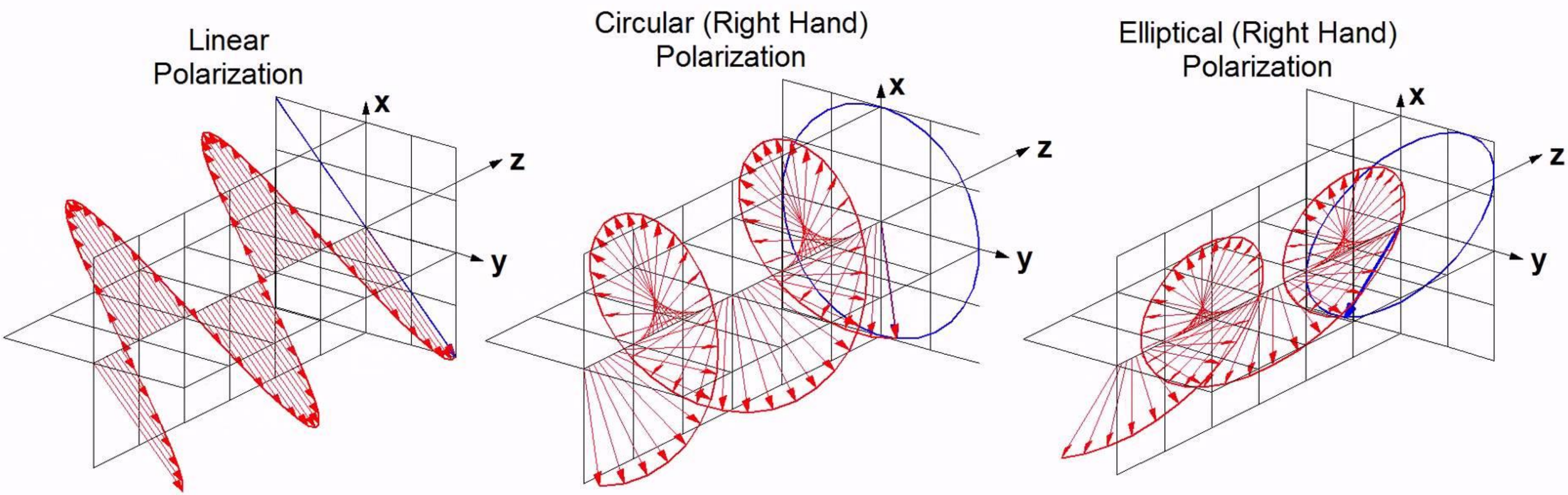
- O sentido de rotação também se aplica à polarização elíptica. Pode-se ter polarização elíptica à esquerda (LHEP – *Left-Hand Elliptical Polarization*) e polarização elíptica à direita (RHEP – *Right-Hand Elliptical Polarization*).



Polarização circular direita – vetor gira no sentido horário



Polarização circular esquerda – vetor gira no sentido anti-horário


Linear
Polarization
Circular (Right Hand)
Polarization
Elliptical (Right Hand)
Polarization
x
z
y
x
z
y
x
z
y

Para definir o sentido de rotação da onda, vale a regra:

$\phi_y - \phi_x > 0$ então, LEFT-HAND (polarizada à esquerda)
$\phi_y - \phi_x < 0$ então, RIGHT-HAND (polarizada à direita)

Mas é necessário verificar se ambas componentes estão sendo somadas:

$$\mathbf{E}(z,t) = +E_{x0}\cos(\omega t - \beta z + \phi_x)\boldsymbol{a_x} + E_{y0}\cos(\omega t - \beta z + \phi_y)\,\boldsymbol{a_y}$$

Caso, por exemplo, a componente em y tenha sinal negativo

$$\mathbf{E}(z,t) = +E_{x0}\cos(\omega t - \beta z + \phi_x)\boldsymbol{a_x} - E_{y0}\cos(\omega t - \beta z + \phi_y)\,\boldsymbol{a_y}$$

Devemos considerar

$$\mathbf{E}(z,t) = +E_{x0}\cos(\omega t - \beta z + \phi_x)\boldsymbol{a_x} + E_{y0}\cos(\omega t - \beta z + \phi_y + 180°)\,\boldsymbol{a_y}$$

Pode ser útil utilizar fasores na representação das ondas polarizadas.

A equação $\mathbf{E}(z,t) = E_{x0}\cos(\omega t - \beta z + \phi_x)\underline{\hat{\imath}} + E_{y0}\cos(\omega t - \beta z + \phi_y)\underline{\hat{\jmath}}$

pode ser escrita na forma fasorial como

$$\mathbf{E}_s(z=0) = E_{x0}e^{j\phi_x}\underline{\hat{\imath}} + E_{y0}\, e^{j\phi_y}\underline{\hat{\jmath}}$$

Para uma onda LHCP, $\phi_x = 0°$, $\phi_y = +90°$ e $E_{x0} = E_{y0}$. Daí, temos

$$\mathbf{E}_s(z=0) = E_{x0}\underline{\hat{\imath}} + E_{x0}\, e^{j\pi/2}\underline{\hat{\jmath}}$$

Aplicando a identidade de Euler, a equação acima se torna

$$\mathbf{E}_s(z=0) = E_{x0}\left(\underline{\hat{\imath}} + j\underline{\hat{\jmath}}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

De maneira similar, uma onda RHCP será

$$\mathbf{E}_s(z=0) = E_{x0}\left(\underline{\hat{\imath}} - e^{-j\pi/2}\underline{\hat{\jmath}}\right) = E_{x0}\left(\underline{\hat{\imath}} - j\underline{\hat{\jmath}}\right)$$

- A polarização de onda possui importância prática para a transmissão de ondas EM.
- Ondas de rádio com modulação em amplitude (AM) são transmitidas com polarização vertical pela superfície da terra. Para tal, antenas do tipo monopolo são orientadas verticalmente.
- As ondas com modulação em frequência (FM) são geralmente polarizadas circularmente e, por esta razão, a recepção é muito mais independente da orientação espacial da antena do que a polarização linear.
- Lembrar que qualquer onda polarizada elipticamente pode ser representada como a superposição de duas ondas polarizadas linearmente. Em problemas envolvendo ondas elípticas, é comum decompor a onda em suas partes lineares, pois essas são mais fáceis de serem manipuladas.

Ondas Planas