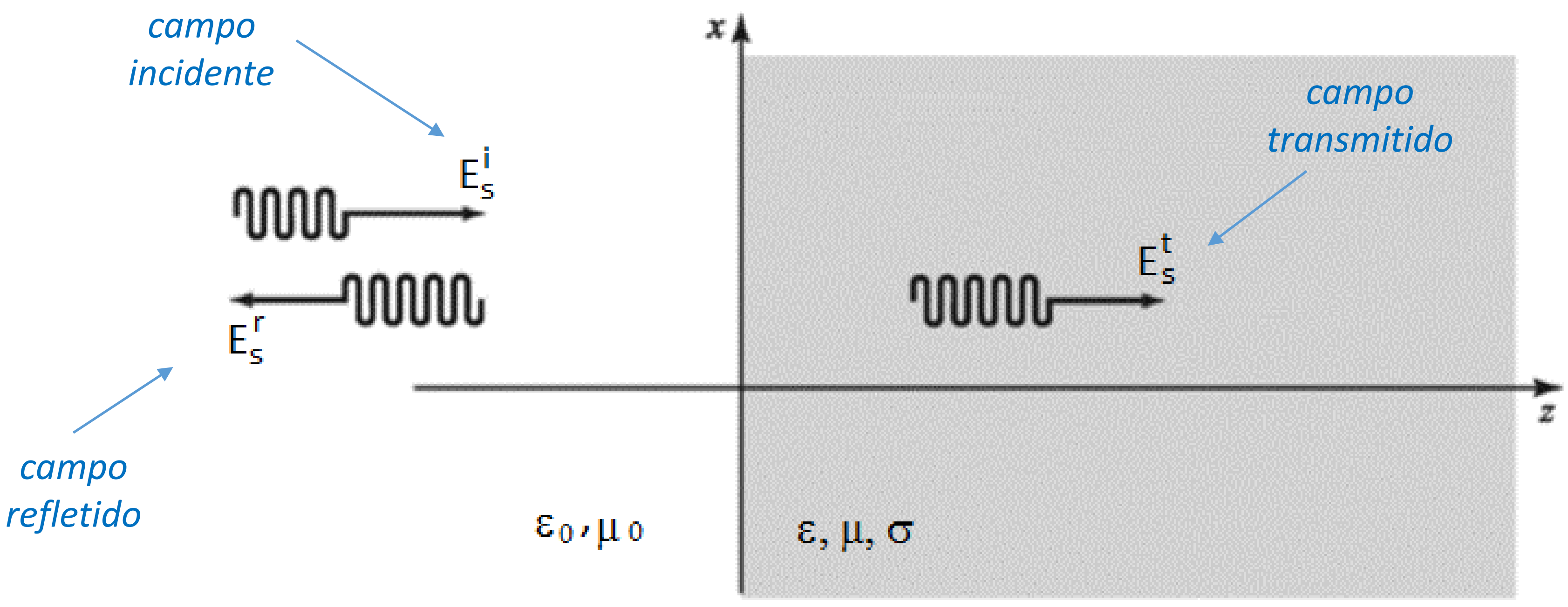
Módulo I – Ondas Planas

Reflexão e Transmissão com incidência normal

Reflexão e Transmissão com incidência oblíqua

- Temos considerado o comportamento de campos em vários meios, incluindo meios sem perdas, com perdas, bons condutores e condutores perfeitos.
- Cabe, agora, estudarmos o fenômeno da reflexão das ondas planas incidindo de forma normal e oblíqua, a partir do espaço livre, em um material arbitrário, para o qual $z > 0$, e os parâmetros constitutivos são ε, μ e σ, conforme figura abaixo.



- Esta análise é necessária porque, na prática, ondas planas encontram obstáculos em seus caminhos.

- Um exemplo é o que ocorre quando uma onda de luz incide sobre um espelho: uma grande parte da luz é refletida, sendo que uma parcela é transmitida, com a parte transmitida sendo rapidamente atenuada nas costas do espelho (as costas do espelho são metalizadas, e a profundidade de penetração no metal é pequena).

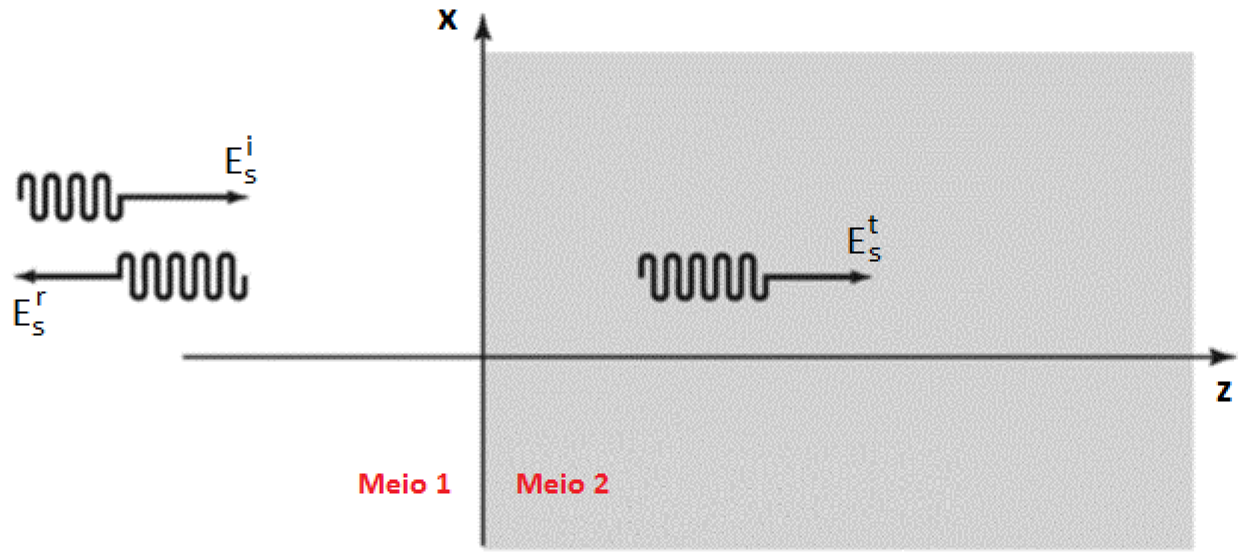
- A intensidade da onda transmitida ou refletida depende dos parâmetros constitutivos dos dois meios envolvidos (ε, μ e σ).

- Para o caso da incidência normal, a fronteira plana que separa os dois meios é perpendicular à direção de propagação da onda.

Consideremos que a onda plana incidente tem campo elétrico harmônico no tempo, orientado (polarizado) em x, e está se propagando na direção z.

O campo incidente é, então, dado por $E^i(z,t) = E_0^i e^{-\alpha_1 z} \cos(\omega t - \beta_1 z)\, \underline{\hat{\imath}}$

Onde E_0^i é a amplitude da intensidade de campo em $z = 0$ (posição da fronteira entre os meios 1 e 2).



Os fasores dos campos incidentes, refletidos e transmitidos são dados por:

Campos incidentes

$$E_s^i = E_0^i e^{-\alpha_1 z} e^{-j\beta_1 z} \underline{\hat{\imath}}$$

$$H_s^i = \frac{E_0^i}{\eta_1} e^{-\alpha_1 z} e^{-j\beta_1 z} \underline{\hat{\jmath}}$$

Campos refletidos

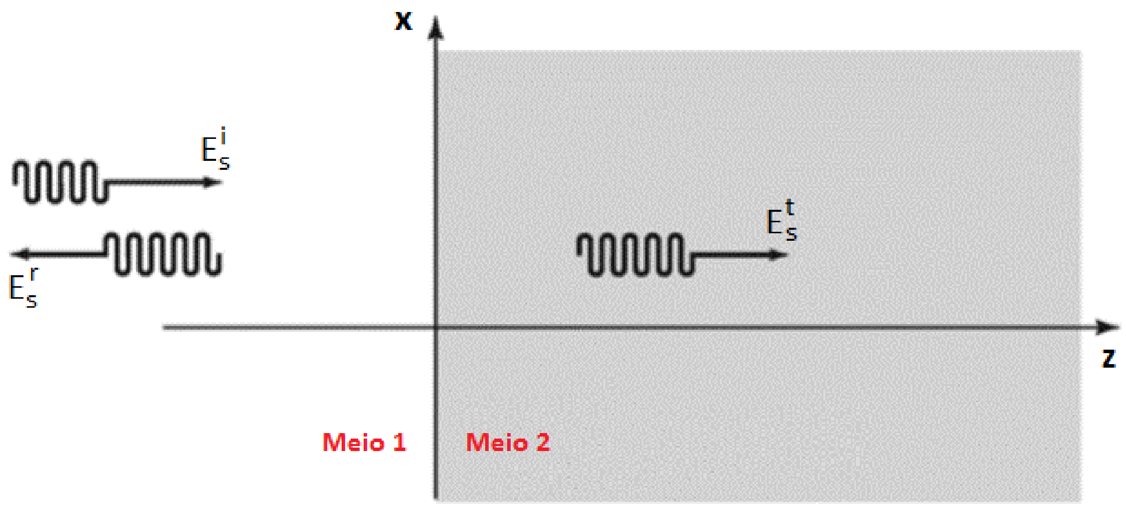
$$E_s^r = E_0^r e^{\alpha_1 z} e^{j\beta_1 z} \underline{\hat{\imath}}$$

$$H_s^r = -\frac{E_0^r}{\eta_1} e^{\alpha_1 z} e^{j\beta_1 z} \underline{\hat{\jmath}}$$

Campos transmitidos

$$E_s^t = E_0^t e^{-\alpha_2 z} e^{-j\beta_2 z} \underline{\hat{\imath}}$$

$$H_s^t = \frac{E_0^t}{\eta_2} e^{-\alpha_2 z} e^{-j\beta_2 z} \underline{\hat{\jmath}}$$



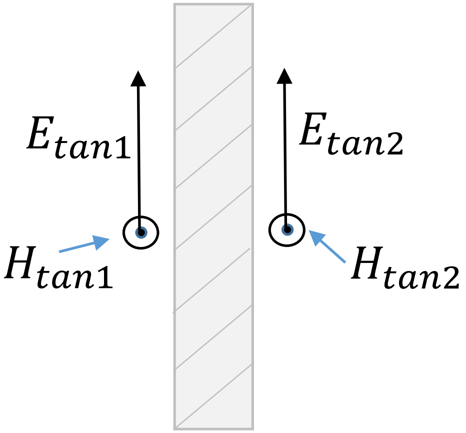
Considerando que deve haver continuidade dos campos em uma fronteira (z = 0)

$$E_{tan1} = E_{tan2}$$

(campo tangencial no meio 1 = campo tangencial no meio 2)

$$H_{tan1} = H_{tan2}$$

(na ausência de corrente superficial na interface)



O campo elétrico total no meio 1 deve ser igual ao campo elétrico total do meio 2 em $z = 0$, assim

$$E_0^i e^{-\alpha_1 z} e^{-j\beta_1 z} \underline{\hat{\imath}} + E_0^r e^{\alpha_1 z} e^{j\beta_1 z} \underline{\hat{\imath}} = E_0^t e^{-\alpha_2 z} e^{-j\beta_2 z} \underline{\hat{\imath}} ,$$

$$E_0^i e^{-\alpha_1 (0)} e^{-j\beta_1 (0)} \underline{\hat{\imath}} + E_0^r e^{\alpha_1 (0)} e^{j\beta_1 (0)} \underline{\hat{\imath}} = E_0^t e^{-\alpha_2 (0)} e^{-j\beta_2 (0)} \underline{\hat{\imath}} ,$$ ou

$$E_0^i + E_0^r = E_0^t \quad (1)$$

Da mesma forma para o campo magnético total, logo

$$\frac{E_0^i}{\eta_1} - \frac{E_0^r}{\eta_1} = \frac{E_0^t}{\eta_2} \quad (2)$$

a onda refletida do campo magnético sempre tem sinal trocado

Coeficiente de Reflexão e Coeficiente de Transmissão

De (2), temos que

$$\frac{E_o^{\mathrm{i}}}{\eta_1} - \frac{E_o^{\mathrm{r}}}{\eta_1} = \frac{E_o^{\mathrm{t}}}{\eta_2} \longrightarrow E_o^{\mathrm{i}} - E_o^{\mathrm{r}} = \frac{\eta_1}{\eta_2} E_o^{\mathrm{t}}$$

Substituindo $E_o^{\mathrm{i}} + E_o^{\mathrm{r}} = E_o^{\mathrm{t}}$ (equação (1)) na equação acima, e arranjando os termos, temos que

$$E_o^{\mathrm{r}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} E_o^{\mathrm{i}} = \Gamma E_o^{\mathrm{i}} \longrightarrow E_o^{\mathrm{r}} = \Gamma E_o^{\mathrm{i}}$$ sendo $$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$ Coeficiente de Reflexão

$$E_o^{\mathrm{t}} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} E_o^{\mathrm{i}} = \tau E_o^{\mathrm{i}} \longrightarrow E_o^{\mathrm{t}} = \tau E_o^{\mathrm{i}}$$ sendo $$\tau = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}$$ Coeficiente de Transmissão

$$\tau = 1 + \Gamma$$

Coeficiente de Reflexão e Coeficiente de Transmissão

Campos incidentes

$$E_s^i = E_0^i e^{-\alpha_1 z} e^{-j\beta_1 z} \underline{\hat{\imath}}$$

$$H_s^i = \frac{E_0^i}{\eta_1} e^{-\alpha_1 z} e^{-j\beta_1 z} \underline{\hat{\jmath}}$$

Campos refletidos

$$E_s^r = E_0^r e^{\alpha_1 z} e^{j\beta_1 z} \underline{\hat{\imath}}$$

$$H_s^r = -\frac{E_0^r}{\eta_1} e^{\alpha_1 z} e^{j\beta_1 z} \underline{\hat{\jmath}}$$

$$E_s^r = \Gamma E_0^i e^{\alpha_1 z} e^{j\beta_1 z} \underline{\hat{\imath}}$$

$$H_s^r = -\frac{\Gamma E_0^i}{\eta_1} e^{\alpha_1 z} e^{j\beta_1 z} \underline{\hat{\jmath}}$$

Campos transmitidos

$$E_s^t = E_0^t e^{-\alpha_2 z} e^{-j\beta_2 z} \underline{\hat{\imath}}$$

$$H_s^t = \frac{E_0^t}{\eta_2} e^{-\alpha_2 z} e^{-j\beta_2 z} \underline{\hat{\jmath}}$$

$$E_s^t = \tau E_0^i e^{-\alpha_2 z} e^{-j\beta_2 z} \underline{\hat{\imath}}$$

$$H_s^t = \frac{\tau E_0^i}{\eta_2} e^{-\alpha_2 z} e^{-j\beta_2 z} \underline{\hat{\jmath}}$$

$$E_0^t = \tau\, E_0^i$$

$$E_0^r = \Gamma E_0^i$$

Meio 1: Espaço livre – Meio 2: Dielétrico sem perdas ($\varepsilon''= 0$ e/ou $\sigma = 0$)

Constante de propagação:

$$\gamma = j\beta = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}$$

Comprimento de onda:

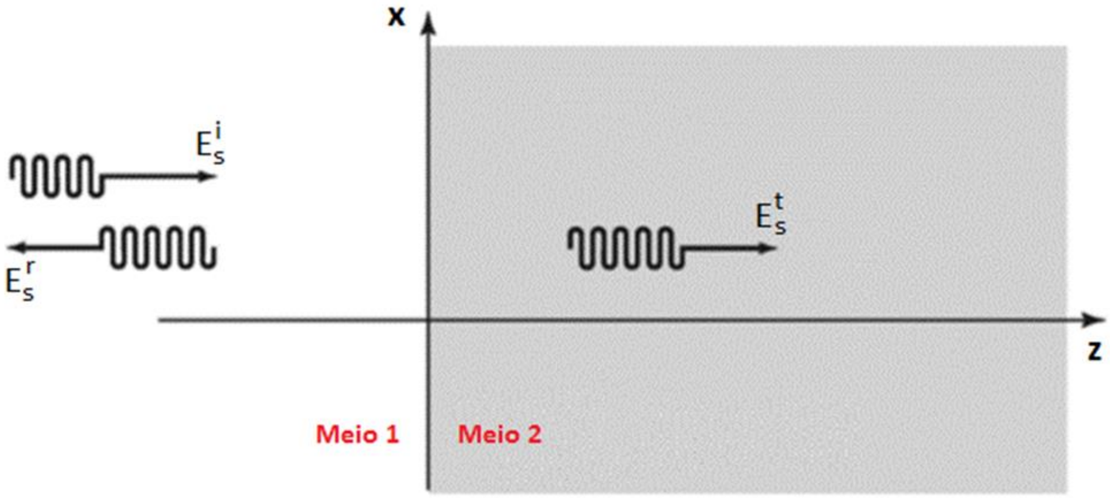
$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_r\epsilon_r}}$$

Velocidade de fase:

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\epsilon_r}}$$

Impedância intrínseca:

$$\eta = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \eta_0\sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}}$$

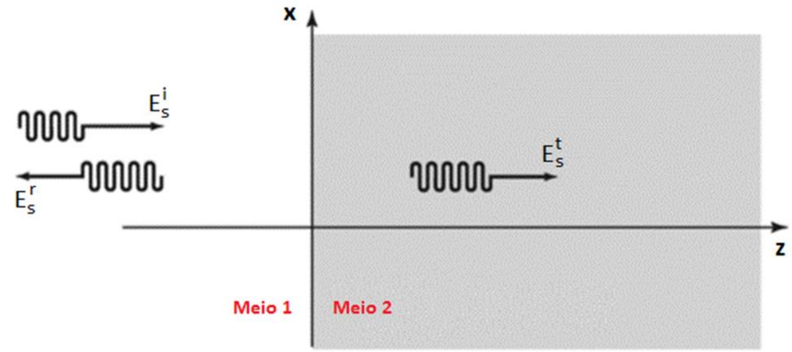


Para material sem perdas, η é real.
Γ e τ são reais.

Meio 1: Espaço livre – Meio 2: Dielétrico sem perdas ($\varepsilon''= 0$ e/ou $\sigma = 0$)

Impedância Intrínseca:

$$\eta = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \eta_0\sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}}$$



Para material sem perdas, η é real, logo Γ e τ são reais, e E e H estão em fase em ambas as regiões.

A conservação de energia pode ser demonstrada calculando o vetor de Poynting nas duas regiões.

$$P_{ave}\ z < 0 = P_{ave}\ z > 0$$

$$P_{ave} = \frac{1}{2}\left|E_0{}^i\right|^2 \frac{1}{\eta_1}(1 - |\Gamma|^2)\ \underline{\hat{k}}$$

(a potência útil é conservada)

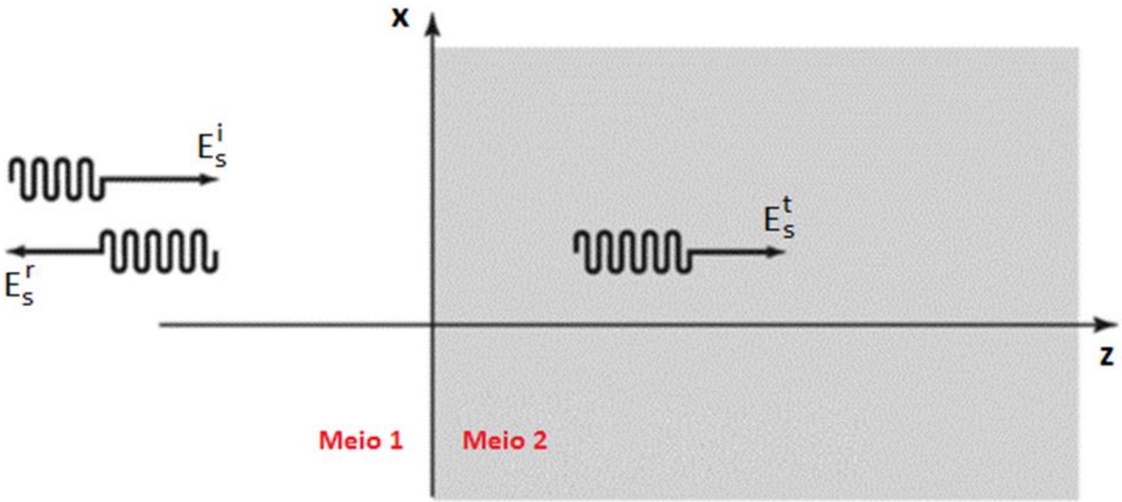
Meio 1: Espaço livre – Meio 2: Dielétrico com perdas (caso geral)

Constante de propagação:

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon} = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon'}\sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon'}} \qquad \alpha = Re\{\gamma\} \quad \beta = Im\{\gamma\} \quad \gamma = \alpha + j\beta$$

Comprimento de onda:

$$\lambda = 2\pi/\beta$$



Velocidade de fase:

$$u_p = \omega/\beta$$

Impedância intrínseca:

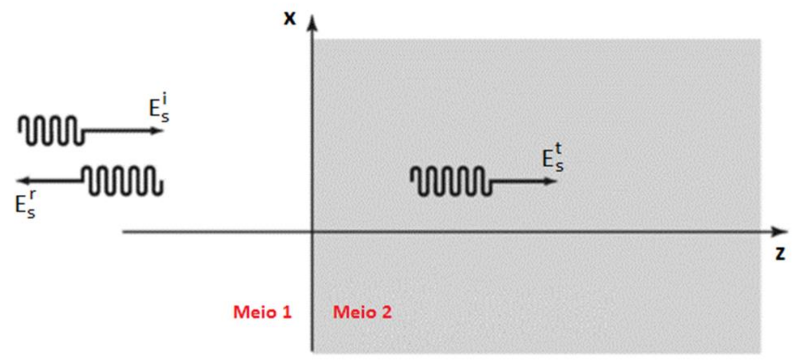
$$\eta = j\omega\mu/\gamma$$

η é complexa, logo E e H estão defasados do ângulo da impedância
Γ e τ são complexos.

Meio 1: Espaço livre – Meio 2: Dielétrico com perdas (caso geral)

Impedância Intrínseca:

$$\eta = j\omega\mu/\gamma$$



$P_{ave}\ z < 0$

$$P_{ave} = \frac{1}{2}\left|E_0{}^i\right|^2 \frac{1}{\eta_1}(1 - |\Gamma|^2)\ \underline{\hat{k}}$$

$P_{ave}\ z > 0$

$$P_{ave} = \frac{1}{2}\left|E_0{}^i\right|^2 \frac{1}{\eta_1}(1 - |\Gamma|^2)\ e^{-2\alpha z}\ \underline{\hat{k}}$$

- Na interface (z = 0), a potência média P_{ave} é preservada, cfe. acima.
- À direita da interface, a densidade de potência decai exponencialmente de acordo com o fator de atenuação $e^{-2\alpha z}$.
- Isso significa que a potência é dissipada em materiais com perdas, à medida que a onda se propaga no meio, na direção $+z$.

Meio 1: Espaço livre – Meio 2: Bom condutor (ε''>>ε' ou σ>>ωε')

Constante de propagação:

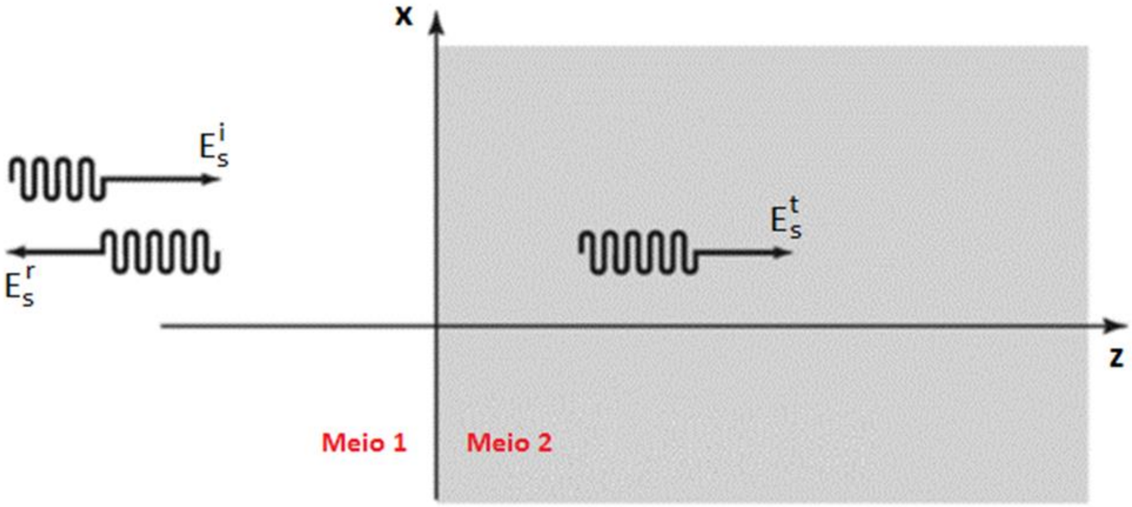
$$\gamma = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

Comprimento de onda:

$$u_p = \frac{\omega}{\beta} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}}$$

Velocidade de fase:

$$\lambda = 2\sqrt{\frac{\pi}{f\mu\sigma}}$$



Impedância intrínseca:

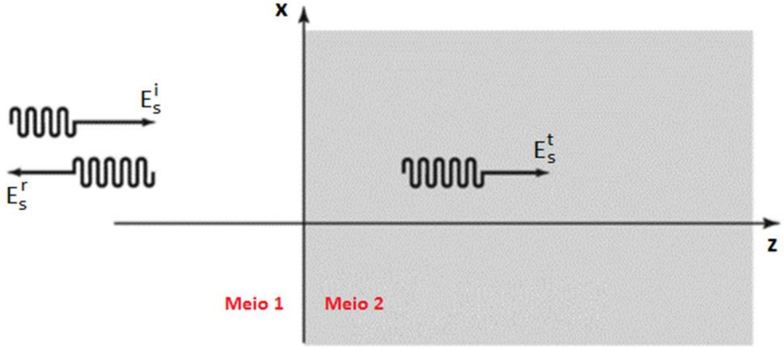
$$\eta = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}(1+j) = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}}e^{j45^\circ}$$

η é complexa, com fase 45°, logo E e H estão defasados de 45°.
Γ e τ são complexos.

Meio 1: Espaço livre – Meio 2: Bom condutor (ε''>>ε' ou σ>>ωε')

Impedância Intrínseca:

$$\eta = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}(1+j) = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}}e^{j45^\circ}$$



$P_{ave}\ z < 0$

$$P_{ave} = \frac{1}{2}\left|E_0{}^i\right|^2 \frac{1}{\eta_1}(1-|\Gamma|^2)\ \underline{\hat{k}}$$

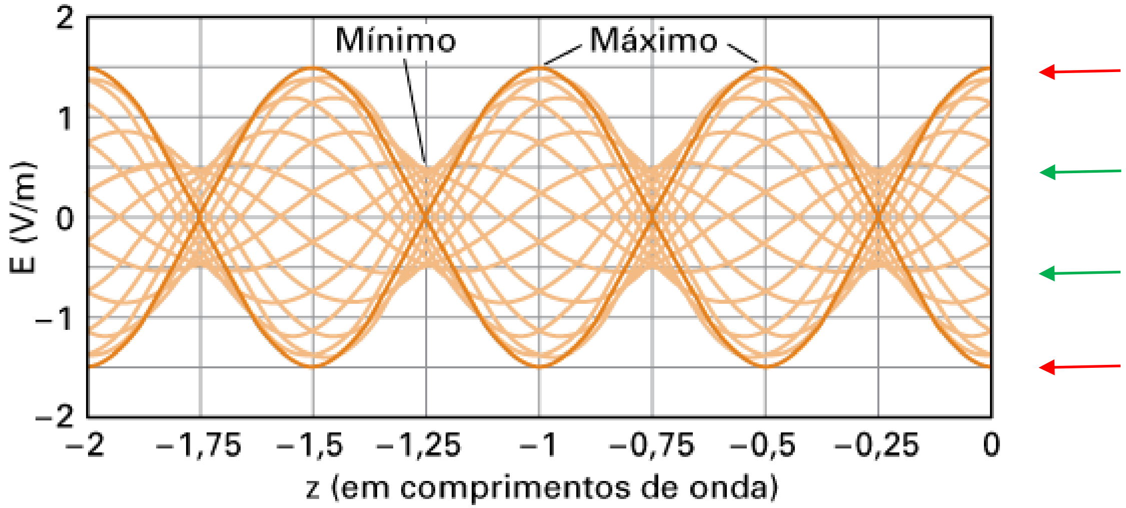
$P_{ave}\ z > 0$

$$P_{ave} = \frac{1}{2}\left|E_0{}^i\right|^2 \frac{1}{\eta_1}(1-|\Gamma|^2)\ e^{-2\alpha z}\ \underline{\hat{k}}$$

- Na interface (z = 0), a potência média P_{ave} é preservada, cfe. acima.
- À direita da interface, a densidade de potência decai exponencialmente de acordo com o fator de atenuação $e^{-2\alpha z}$.
- Isso significa que a potência é dissipada em materiais com perdas, à medida que a onda se propaga no meio, na direção $+z$.

- O meio que contém a onda incidente também contém a onda refletida, em função da reflexão que ocorre na fronteira.
- A superposição das duas ondas produz um padrão de onda estacionária, como exibido na figura abaixo.
- Neste exemplo temos uma onda $E^i = 1\cos(\omega t - \beta z)\underline{\hat{\imath}}$ V/m incidindo na fronteira $z = 0$, que apresenta um coeficiente de reflexão $\Gamma = {E_0^r}/{E_0^i} = 0{,}5$.
- Como $\Gamma = 0{,}5 = {E_0^r}/{E_0^i}$, a onda instantânea total no meio 1 é

$$\mathrm{E} = \cos(\omega t - \beta z) + 0{,}5\cos(\omega t + \beta z)$$



Para o caso mostrado na figura, $|E|$ varia de 0.5 a 1.5 a cada z = λ/4

Em uma onda estacionária, a diferença entre máximos e mínimos ocorre a intervalos de tamanho λ/4.

$$\mathrm{E} = \cos(\omega t - \beta z) + 0{,}5\cos(\omega t + \beta z)$$

$$\dot{\mathrm{E}} = 1e^{-j\beta z} + 0.5e^{j\beta z} = \frac{e^{j\beta z}}{e^{j\beta z}}(1e^{-j\beta z} + 0.5e^{j\beta z})$$

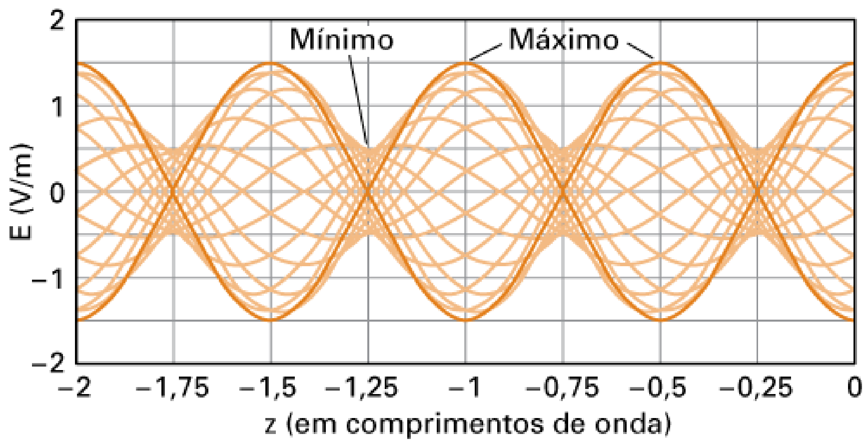
$$|E| = \frac{\left|1 + 0.5e^{2j\beta z}\right|}{\left|e^{j\beta z}\right|} = \left|1 + 0.5e^{2j\beta z}\right| = \left|1 + 0.5e^{2j\frac{2\pi}{\lambda}z}\right| = \left|1 + 0.5e^{j\frac{4\pi}{\lambda}z}\right|$$

|E|	z
|1+1(0.5)|=1.5	0
|1-1(0.5)|= 0.5	-λ/4
|1+1(0.5)|=1.5	-λ/2
|1-1(0.5)|= 0.5	-3λ/4
|1+1(0.5)|=1.5	-λ

Relação de Onda Estacionária

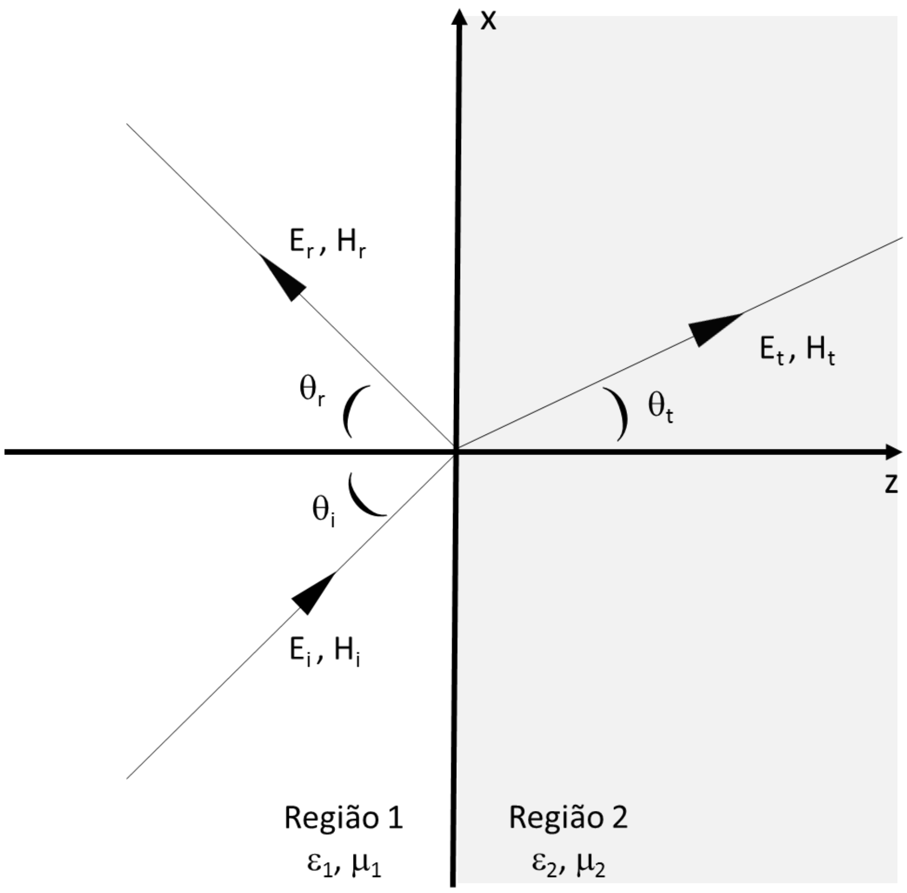
A razão entre a amplitude máxima e a amplitude mínima da onda estacionária é conhecida como relação de onda estacionária (ROE).

$$ROE = \frac{E_{max}}{E_{min}} \qquad ROE = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}$$



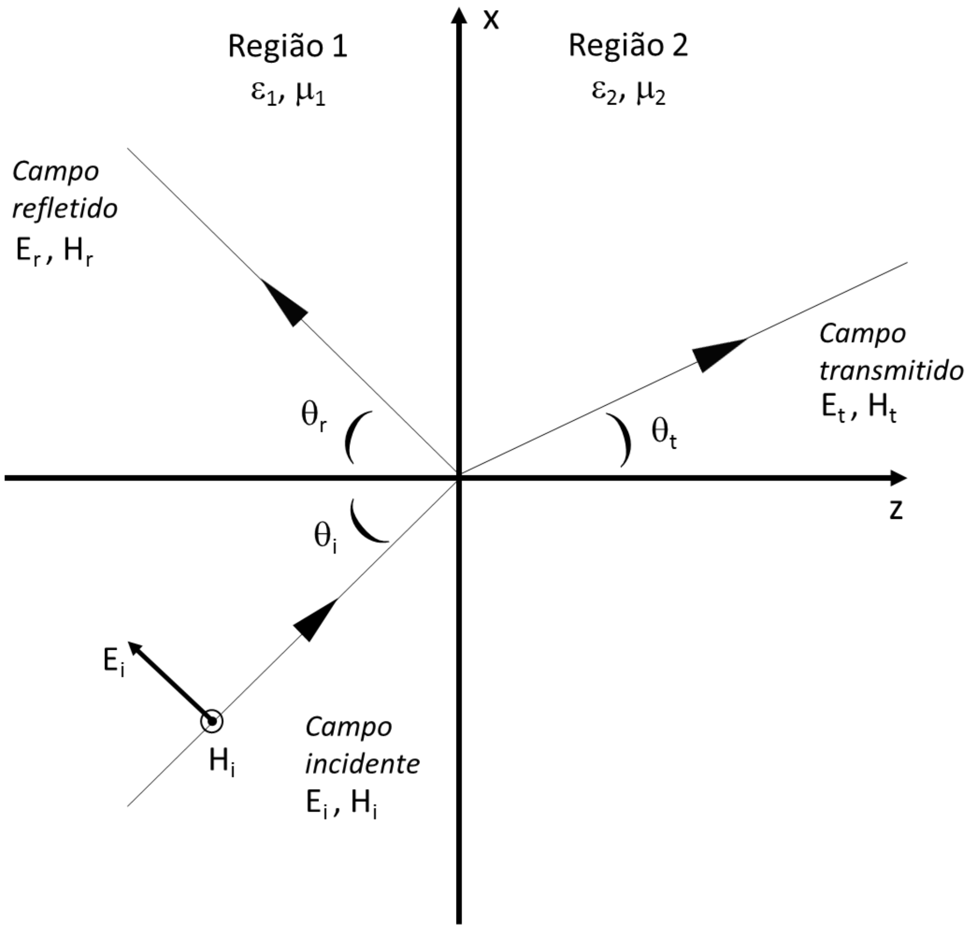
Incidência Oblíqua

- Consideremos o caso em que uma onda plana uniforme, ao se propagar, incida obliquamente na interface entre o meio 1 e o meio 2.
- Os meios 1 e 2 são meios dielétricos e sem perdas.
- Observe na figura ao lado, que o ângulo de incidência é θ_i, o ângulo de reflexão é θ_r, e o ângulo de transmissão é θ_t.
- Há dois caso a considerar:
  - Polarização paralela
  - Polarização perpendicular



Incidência Oblíqua – Polarização Paralela

- Para este caso, o campo elétrico está no plano xz, conforme a figura ao lado.
- Observe que o vetor campo elétrico está contido no plano xz, enquanto que o vetor campo magnético está ortogonal ao campo elétrico, saindo do plano xz.



Incidência Oblíqua – Polarização Paralela

Campos incidentes

$$E_s^i = E_0^i\left(\cos\theta_i\,\underline{\hat{\imath}} - \sin\theta_i\underline{\hat{k}}\right)e^{-j\beta_1(x\sin\theta_i + z\ \cos\theta_i)}$$

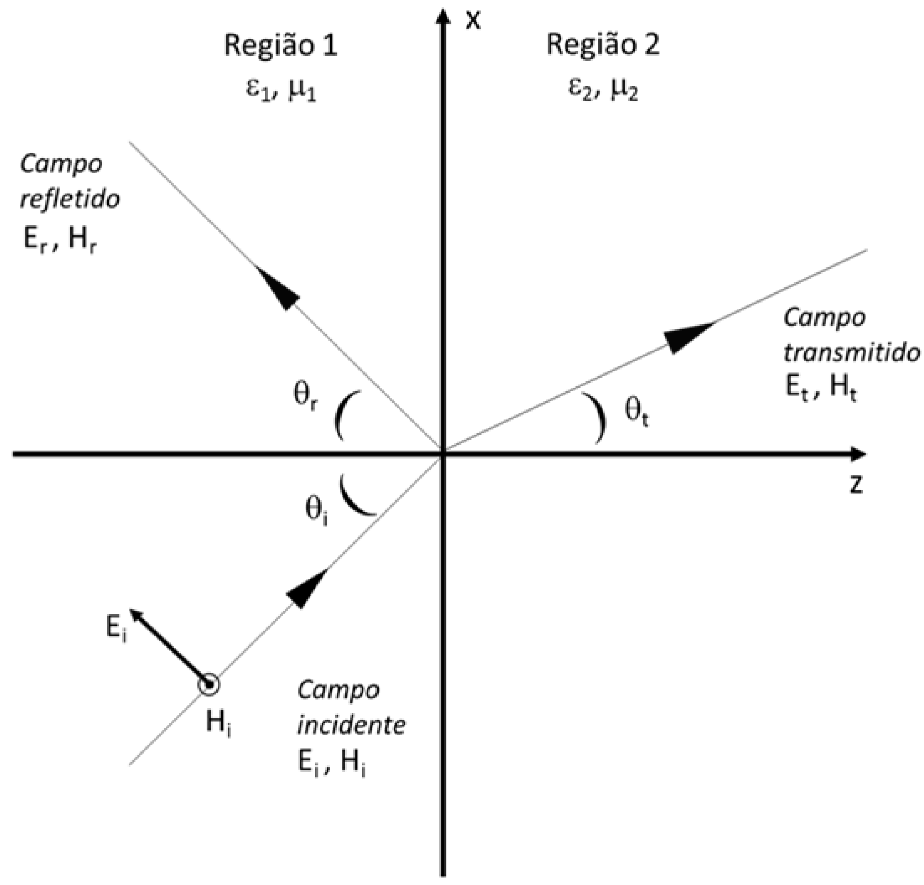
$$H_s^i = \frac{E_0^i}{\eta_1}e^{-j\beta_1(x\sin\theta_i + z\ \cos\theta_i)}\underline{\hat{\jmath}}$$

Onde:

$\beta_1 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_1}$ → Constante de propagação da região 1

$\eta_1 = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_1}}$ → Impedância da região 1

θ_i → Ângulo de incidência



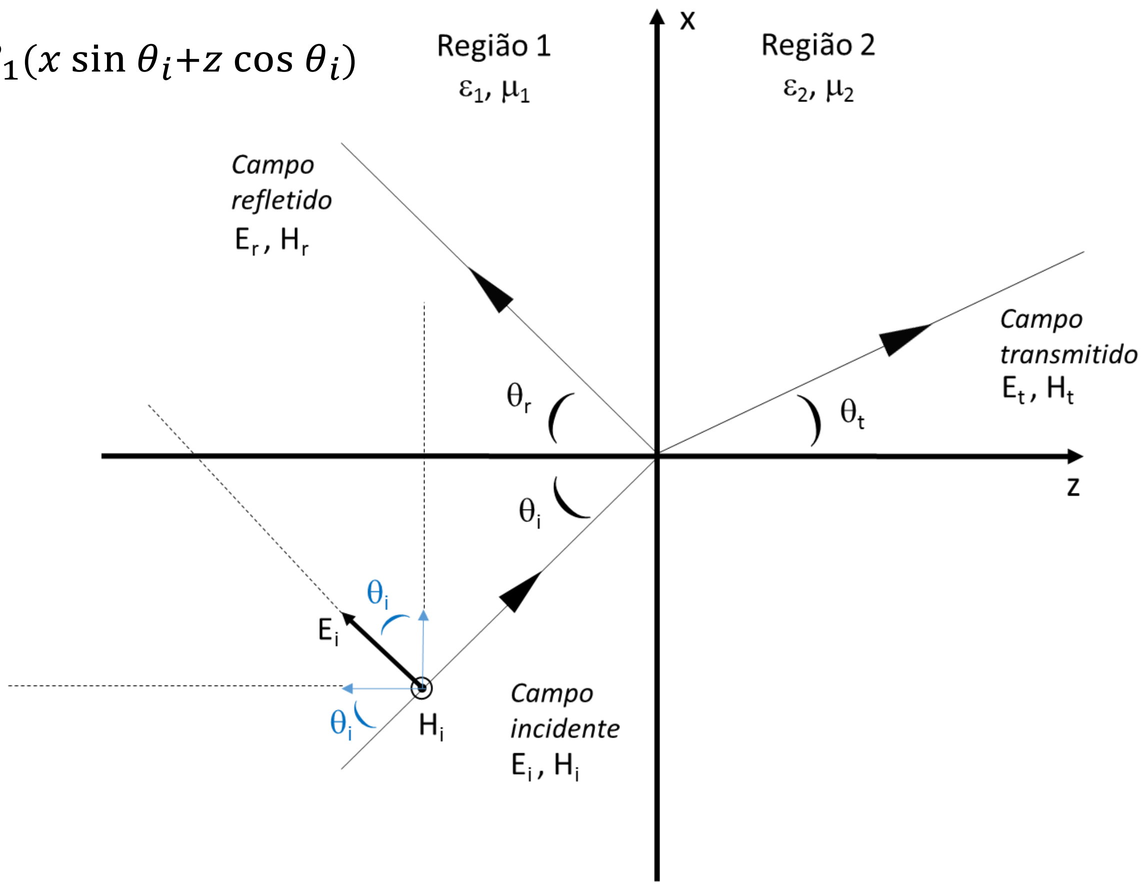
Incidência Oblíqua – Polarização Paralela

$E_0^i \cos\theta_i$ é a projeção de E_s^i (E_i na figura) sobre o eixo x

$$E_s^i = E_0^i\left(\cos\theta_i\,\underline{\hat{\imath}} - \sin\theta_i \underline{\hat{k}}\right)e^{-j\beta_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)}$$

$E_0^i \,\text{sen}\,\theta_i$ é a projeção de E_s^i (E_i na figura) sobre o eixo z

Campos incidentes



Incidência Oblíqua – Polarização Paralela

Campos incidentes

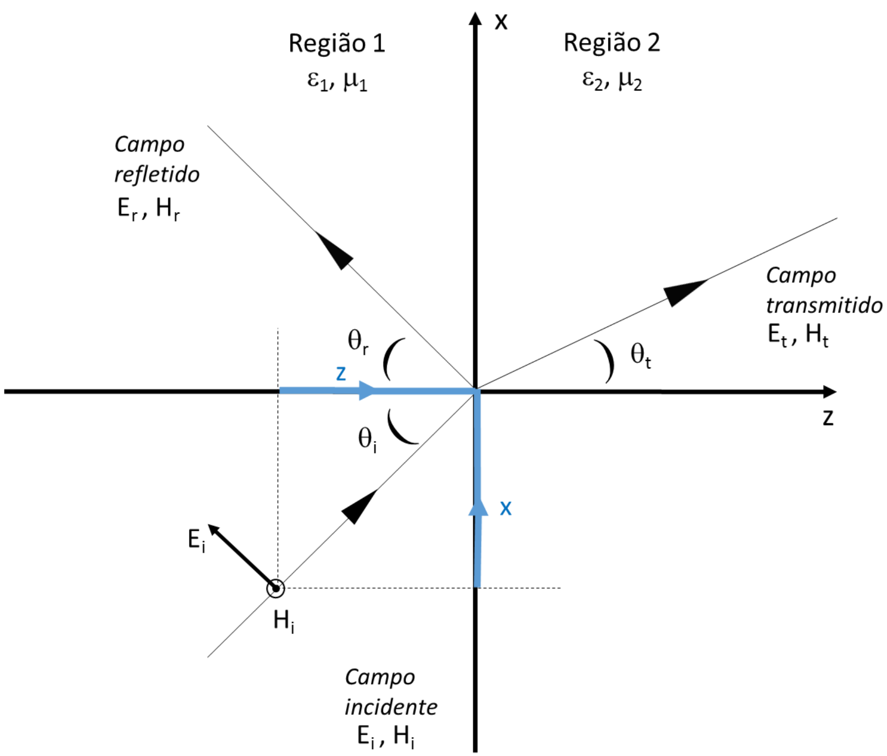
É a localização, ao longo do caminho de propagação da onda incidente onde E_i está sendo considerado pela expressão de E_i .

$$E_s^i = E_0^i\left(\cos\theta_i\,\underline{\hat{i}} - \sin\theta_i\,\underline{\hat{k}}\right)e^{-j\beta_1\left(\boxed{x\sin\theta_i}+\boxed{z\cos\theta_i}\right)}$$

É a projeção da coordenada x sobre a direção de propagação

É a projeção da coordenada z sobre a direção de propagação

A localização do campo E_i na direção de propagação é dada pela soma das duas projeções, isto é, $(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)$



Incidência Oblíqua – Polarização Paralela

Campos refletidos

$$E_s^r = E_0^i\,\Gamma\left(\cos\theta_r\,\underline{\hat{\imath}} + \sin\theta_r\underline{\hat{k}}\right)e^{-j\beta_1(x\sin\theta_r - z\ \cos\theta_r)}$$

$$H_s^r = \frac{-E_0^i\Gamma}{\eta_1}e^{-j\beta_1(x\sin\theta_r - z\ \cos\theta_r)}\underline{\hat{\jmath}}$$

Campos transmitidos

$$E_s^t = E_0^i\,\tau\left(\cos\theta_t\,\underline{\hat{\imath}} - \sin\theta_t\underline{\hat{k}}\right)e^{-j\beta_2(x\sin\theta_t + z\ \cos\theta_t)}$$

$$H_s^t = \frac{E_0^i\tau}{\eta_2}e^{-j\beta_2(x\sin\theta_t + z\ \cos\theta_t)}\underline{\hat{\jmath}}$$

$$\beta_1 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_1}$$

$$\beta_2 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_2}$$

Constantes de propagação das regiões 1 e 2

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}} \qquad \eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_2}}$$

Impedâncias das regiões 1 e 2

$\theta_r \longrightarrow$ Ângulo de reflexão

$\theta_t \longrightarrow$ Ângulo de transmissão

Incidência Oblíqua – Polarização Paralela

Para determinar os coeficientes de reflexão (Γ) e de transmissão (τ), lembremos que deve haver continuidade dos campos tangenciais E_x e H_y na fronteira.

Assim, tomemos os campos tangenciais $E_s^i + E_s^r = E_s^t$ e $H_s^i + H_s^r = H_s^t$, em z = 0 (definições dos campos conforme slides anteriores). Logo,

$$\cos\theta_i\, e^{-j\beta_{1x}\sin\theta_i} + \Gamma\cos\theta_r\, e^{-j\beta_1 x\sin\theta_r} = \tau\cos\theta_t\, e^{-j\beta_2 x\sin\theta_t} \qquad (3)$$

$$\frac{1}{\eta_1}e^{-j\beta_1 x\sin\theta_i} - \frac{\Gamma}{\eta_1}e^{-j\beta_1 x\sin\theta_r} = \frac{\tau}{\eta_2}e^{-j\beta_2 x\sin\theta_t} \qquad (4)$$

Cabe notar que ambos os lados das duas equações acima são função da coordenada x.

Incidência Oblíqua – Polarização Paralela

Se E_x e H_y devem ser contínuos na interface z = 0 para todo x, então esta variação de x deve ser a mesma em ambos os lados das equações, conduzindo a :

$$\beta_1 \sin\theta_i = \beta_1 \sin\theta_r = \beta_2 \sin\theta_t$$

O resultado acima é a Lei de Snell da refração e da reflexão, ou seja:

$$\theta_i = \theta_r\ , \quad \beta_1 \sin\theta_i = \beta_2 \sin\theta_t.$$

Substituindo as equações acima nas equações (3) e (4) do slide anterior, podemos encontrar as expressões para os coeficientes de reflexão (Γ) e de transmissão (τ), conforme

$$\Gamma = \frac{\eta_2 \cos\theta_t - \eta_1 \cos\theta_i}{\eta_2 \cos\theta_t + \eta_1 \cos\theta_i} \qquad \tau = \frac{2\,\eta_2 \cos\theta_i}{\eta_2 \cos\theta_t + \eta_1 \cos\theta_i}$$

Note que, para incidência normal, onde $\theta_i = \theta_r = \theta_t, \Gamma = \dfrac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$ e $\tau = \dfrac{2\,\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}$

Incidência Oblíqua – Polarização Paralela

Para a polarização paralela, quando Γ=0, existe um particular ângulo de incidência, θ_b, denominado Ângulo de Brewster.

Este ângulo ocorre quando o numerador da equação para Γ é zerado, ou seja,

$\eta_2 \cos\theta_t = \eta_1 \cos\theta_i$ em $\Gamma = \dfrac{\eta_2 \cos\theta_t - \eta_1 \cos\theta_i}{\eta_2 \cos\theta_t + \eta_1 \cos\theta_i}$ Para este caso, $\theta_i = \theta_b$, ou Ângulo de Brewster.

Nesta situação, considerando que

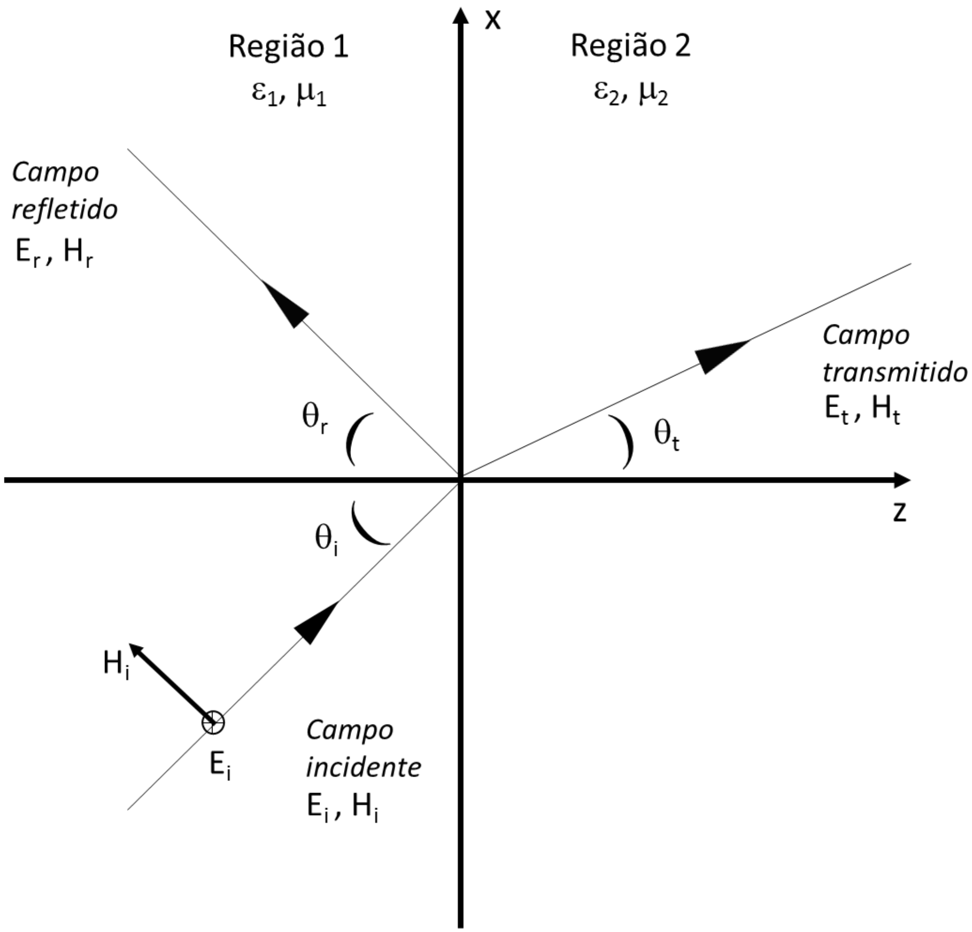
$$\beta_1 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_1},\ \beta_2 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_2},\ \eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}},\ \eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_2}} \text{ e}$$

$$\cos\theta_t = \sqrt{1 - (\sin\theta_t)^2} = \sqrt{1 - \frac{\beta_1^2}{\beta_2^2}(\sin\theta_t)^2}$$

$\eta_2 \cos\theta_t = \eta_1 \cos\theta_i$ pode ser reescrita como $\sin\theta_b = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}}$.

Incidência Oblíqua – Polarização Perpendicular

- Para este caso, o campo magnético está no plano xz, conforme a figura ao lado.
- Observe que o vetor campo magnético está contido no plano xz, enquanto que o vetor campo elétrico está ortogonal ao campo magnético, entrando no plano xz.

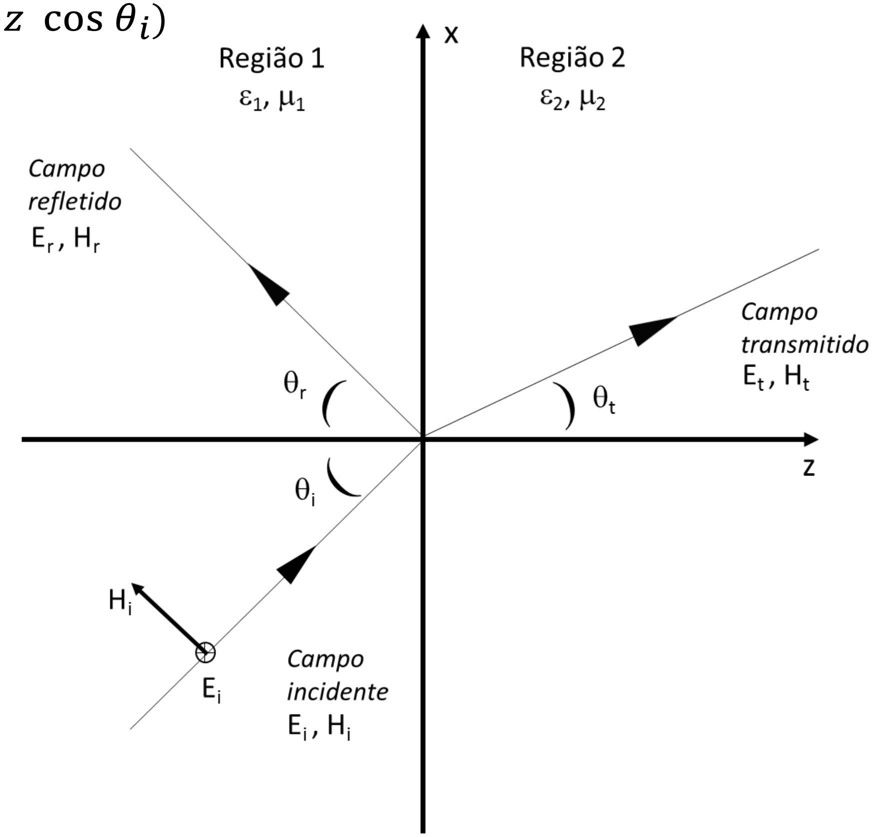


Incidência Oblíqua – Polarização Perpendicular

Campos incidentes

$$E_s^i = E_0^i e^{-j\beta_1(x \sin\theta_i + z \cos\theta_i)} \underline{\hat{j}}$$

$$H_s^i = \frac{E_0^i}{\eta_1}\left(-\cos\theta_i\, \underline{\hat{\imath}} + \sin\theta_i \underline{\hat{k}}\right) e^{-j\beta_1(x \sin\theta_i + z \cos\theta_i)}$$



Onde:

$\beta_1 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_1}$ → Constante de propagação da região 1

$\eta_1 = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_1}}$ → Impedância da região 1

θ_i → Ângulo de incidência

Incidência Oblíqua – Polarização Perpendicular

Campos refletidos

$$E_s^r = E_0^i \Gamma e^{-j\beta_1(x \sin\theta_r - z \cos\theta_r)} \underline{\hat{j}}$$

$$H_s^r = \frac{E_0^i \Gamma}{\eta_1}\left(\cos\theta_r \, \underline{\hat{\imath}} + \sin\theta_r \underline{\hat{k}}\right) e^{-j\beta_1(x \sin\theta_r - z \cos\theta_r)}$$

$$\beta_1 = \omega\sqrt{\mu_0 \varepsilon_1}$$

$$\beta_2 = \omega\sqrt{\mu_0 \varepsilon_2}$$

Constantes de propagação das regiões 1 e 2

Campos transmitidos

$$E_s^t = E_0^i \tau \, e^{-j\beta_2(x \sin\theta_t + z \cos\theta_t)} \underline{\hat{j}}$$

$$H_s^t = \frac{E_0^i \tau}{\eta_2}\left(-\cos\theta_t \, \underline{\hat{\imath}} + \sin\theta_t \underline{\hat{k}}\right) e^{-j\beta_2(x \sin\theta_t + z \cos\theta_t)}$$

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}} \qquad \eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_2}}$$

Impedâncias das regiões 1 e 2

$\theta_r \longrightarrow$ Ângulo de reflexão

$\theta_t \longrightarrow$ Ângulo de transmissão

Incidência Oblíqua – Polarização Perpendicular

Para determinar os coeficientes de reflexão (Γ) e de transmissão (τ), novamente devemos lembrar que deve haver continuidade dos campos tangenciais E_x e H_y na fronteira.

Assim, tomemos os campos tangenciais $E_s^i + E_s^r = E_s^t$ e $H_s^i + H_s^r = H_s^t$,

em z = 0. Logo,

$$e^{-j\beta_{1x} \sin\theta_i} + \Gamma e^{-j\beta_1 x \sin\theta_r} = \tau e^{-j\beta_2 x \sin\theta_t},$$

$$\frac{-1}{\eta_1}\cos\theta_i\, e^{-j\beta_1 x \sin\theta_i} + \frac{\Gamma}{\eta_1}\cos\theta_r\, e^{-j\beta_1 x \sin\theta_r} = \frac{-\tau}{\eta_2}\cos\theta_t\, e^{-j\beta_2 x \sin\theta_t}$$

Da mesma forma que no caso da polarização paralela, cabe notar que ambos os lados das duas equações acima são função da coordenada x.

Incidência Oblíqua – Polarização Perpendicular

Se E_x e H_y devem ser contínuos na interface z = 0 para todo x, então esta variação de x deve ser a mesma em ambos os lados das equações, conduzindo a :

$$\beta_1 \sin\theta_i = \beta_1 \sin\theta_r = \beta_2 \sin\theta_t$$

O resultado acima é a Lei de Snell da refração e da reflexão, ou seja:

$$\theta_i = \theta_r \,, \quad \beta_1 \sin\theta_i = \beta_2 \sin\theta_t .$$

De onde podemos encontrar as expressões para os coeficientes de reflexão (Γ) e de transmissão (τ), conforme

$$\Gamma = \frac{\eta_2 \cos\theta_i - \eta_1 \cos\theta_t}{\eta_2 \cos\theta_i + \eta_1 \cos\theta_t} \quad \text{e} \quad \tau = \frac{2\,\eta_2 \cos\theta_i}{\eta_2 \cos\theta_i + \eta_1 \cos\theta_t} .$$

Para incidência normal, onde $\theta_i = \theta_r = \theta_t$, $\Gamma = \dfrac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$ e $\tau = \dfrac{2\,\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}$

Para a polarização perpendicular não existe um Ângulo de Brewster.

Reflexão Total

A Lei de Snell pode ser reescrita como $\sin\theta_t = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\sin\theta_i$.

Considere o caso (para polarização paralela e perpendicular), onde $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$.

À medida que θ_i aumenta, o ângulo de refração θ_t irá aumentar, mas a uma taxa maior do que θ_i aumenta .

O ângulo de incidência θ_i para o qual θ_t = 90º é chamado Ângulo Crítico, θ_C , onde

$$\sin\theta_C = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} .$$

A ângulos iguais ou maiores que o Ângulo Crítico, a onda incidente será totalmente refletida, de tal forma que a onda transmitida não se propagará para a região 2.