Ondas e Linhas

2017/II

Profa. Cristina

Módulo I – Ondas Planas

Propriedades dos meios

Densidade de Fluxo Elétrico

Densidade de Fluxo Magnético

Densidade de Corrente Elétrica

Espaço Livre

Normalização pelo Espaço Livre

Equações de Maxwell

Análise das Equações de Maxwell

A interação entre E e H

Ondas Planas a partir das Equações de Maxwell

Equações de Helmholtz

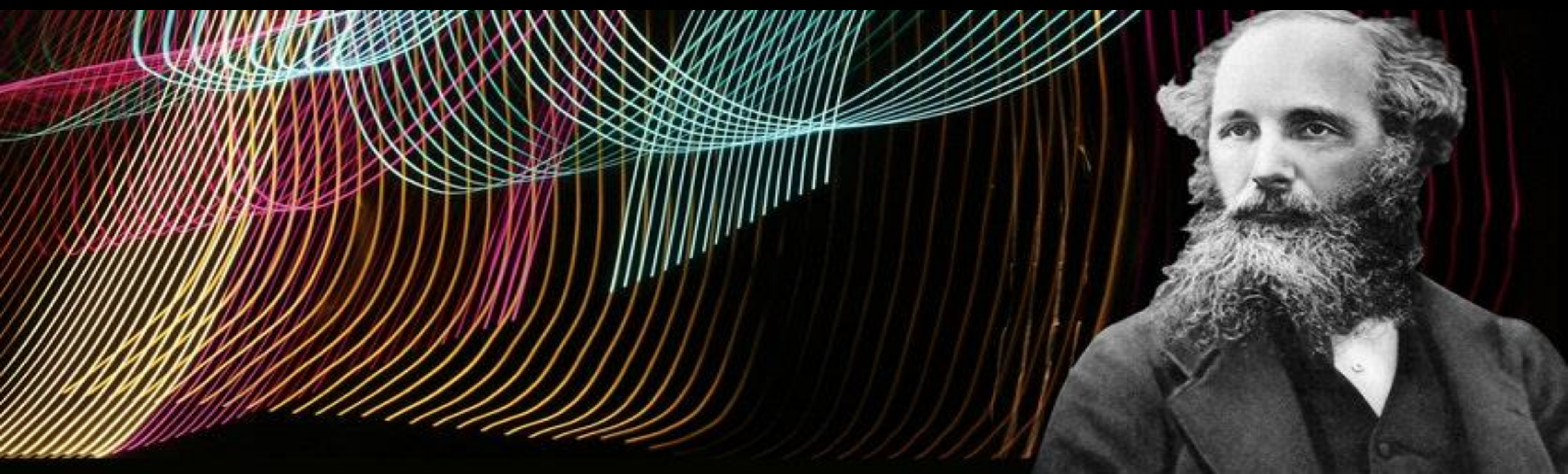
Equação de Helmholtz para campos harmônicos

Velocidade de propagação da onda

Comprimento da onda

Campo Magnético em função do Campo Elétrico

Impedância do meio



James Clerk Maxwell

By the 1860s, he had gathered together all the laws of **electricity and magnetism**, and added one of his own. The complete set is still known as **Maxwell's Equations**.

You can apply them anywhere – just add in the electromagnetic properties of materials and solve the equations.

You can use the equations for *radio waves*, *microwaves*, *light*, *X-rays* and all the others of the **electromagnetic spectrum** – something Maxwell predicted.

Sadly he did not live to see even the beginning of the verification of the prediction.

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Maxwell's Equations ensure that the transmitter and receiver in your mobile phone are designed to work efficiently – and safely: the waves carrying the messages are guided, with very little leakage.

Between mobiles, the waves travel through the air in much the same way as the many electromagnetic waves in space science: from communication through remote sensing to the latest exploration in the solar system and beyond.

And, for good measure, the imaging technology for the mobile phone screen can be traced back over 150 years to Maxwell's specification. It was announced to the **Royal Society of Edinburgh** in 1855 and fully written up on their journal, the *Transactions*, in 1857.

Maxwell's specification stemmed from one of his first research interests: how we see coloured light. He developed it to explain how to produce full-colour images on screens using only red, green and blue light, and demonstrated this to an astounded audience at London 's Royal Institution in 1861. Maxwell's strategy, adapted to suit modern technology, is all around you – from mobile phone and digital camera screens through colour television to the large display screens in sports arenas and travel terminals.

Maxwell realizou estudos em visão e óptica tendo, por exemplo, demonstrado que se pode produzir uma fotografia a cores utilizando filtros vermelho, verde e azul e sobrepondo as três imagens assim obtidas.

Esta é a imagem da primeira fotografia a cores na história, obtida por Maxwell, utilizando este método.

James Clerk Maxwell é um dos cientistas mais influentes de todos os tempos. Na foto, com a esposa Katherine Maxwell e o doguinho Toby, em 1869.

Albert Einstein reconheceu que as origens da teoria da relatividade especial estavam nas teorias de Clerk Maxwell, dizendo: "O trabalho de James Clerk Maxwell mudou o mundo para sempre".

A pesquisa de Maxwell sobre a radiação eletromagnética levou ao desenvolvimento da televisão, telefones celulares, rádio e telescópios infravermelhos.

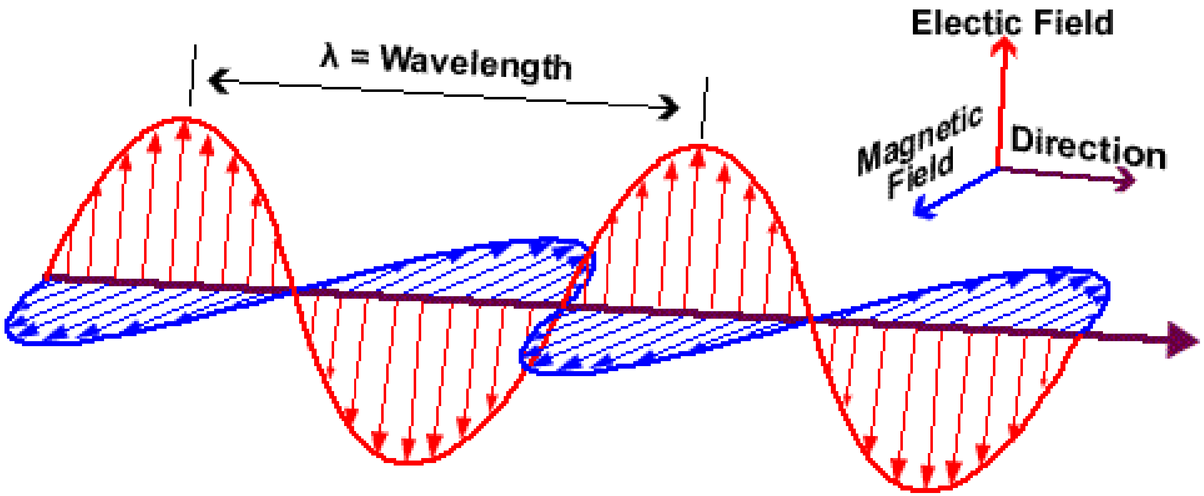
Em 1873 Maxwell publicou o Tratado sobre Eletricidade e Magnetismo, livro que contém todas as suas ideias sobre este tema, e que condensa todo o trabalho desenvolvido ao longo dos anos.

O maior telescópio astronômico do mundo, no Observatório Mauna Kea no Havaí, é nomeado em homenagem a Maxwell.

Um campo elétrico variável induz um campo magnético, e um campo magnético variável induz um campo elétrico.

Campos variáveis propagam-se pelo espaço como uma onda eletromagnética.

Ondas Planas



Ondas são um meio de transportar energia ou informação.

- Propagação de ondas eletromagnéticas (EM) é regida pelas Equações de Maxwell.
- A existência das ondas EM previstas e analiticamente tratadas por Maxwell foi investigada por Hertz, que conseguiu gerar e detectar experimentalmente ondas de rádio.
- Exemplos de ondas EM incluem ondas de rádio, sinais de TV, feixes de radar e raios luminosos, dentre outros.
- As ondas EM compartilham 3 características principais:

(1) Viajam em alta velocidade,
(2) Apresentam características ondulatórias ao se propagarem,
(3) São irradiadas a partir de uma fonte, e se propagam em um meio físico.

Equações de Maxwell: Teoria Eletromagnética Unificada.

- Toda a teoria da interação eletromagnética “ondas com meio” é baseada nas Equações de Maxwell.
- As Equações de Maxwell foram escritas em 1860, e são equações empíricas, sem prova de convergência, mas que até hoje descrevem a propagação e a interação das ondas eletromagnéticas com o meio com uma precisão incomparável.
- A onda EM é dual, como o próprio nome diz: elétrica/magnética.
- Uma componente dela é o campo elétrico E (V/m), e a outra o campo magnético H (A/m).
- O campo elétrico dá origem ao campo magnético e o campo magnético dá origem ao campo elétrico, e assim eles vão gerando um ao outro, ao longo do espaço.

As Equações de Maxwell resumem todas as leis do eletromagnetismo.
Campos Eletromagnéticos devem satisfazer as quatro Equações de Maxwell, apresentadas a seguir em sua forma diferencial:

Lei de Faraday → $\nabla \times \mathrm{E} = -\frac{\delta \mathrm{B}}{\delta t}$ [V/m²]

Lei Circuital de Ampère → $\nabla \times \mathrm{H} = \mathrm{J} + \frac{\delta \mathrm{D}}{\delta t}$ [A/m²]

Lei de Gauss → $\nabla \cdot \mathrm{D} = \rho_v$ [C/m³]

Lei de Gauss para Campos Magnéticos → $\nabla \cdot \mathrm{B} = 0$ [T/m]

Onde:

$\nabla \times$ = operador rotacional

$\nabla \cdot$ = operador divergente

E = intensidade do campo elétrico (V/m)

B = densidade de fluxo magnético ($T=HA/m^2$)

H = intensidade do campo magnético (A/m)

J = a densidade de corrente elétrica (A/m^2)

D = densidade de fluxo elétrico (C/m^2)

ρ_v = densidade volumétrica de carga elétrica (C/m^3)

	Condutividade elétrica σ (mho/metro)	Permissividade elétrica ε (F/m)	Permeabilidade magnética μ (H/m)
Espaço Livre	$\sigma = 0$	$\varepsilon = \varepsilon_0$	$\mu = \mu_0$
Dielétricos sem perdas	$\sigma = 0$	$\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0$	$\mu = \mu_r\mu_0$
Dielétricos com perdas	$\sigma \neq 0$	$\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0$	$\mu = \mu_r\mu_0$
Bons condutores	$\sigma \cong \infty$	$\varepsilon = \varepsilon_0$	$\mu = \mu_r\mu_0$

- σ é um coeficiente que mede a capacidade do campo elétrico em colocar as cargas livres do meio em movimento

- ε é um coeficiente que mede o quanto o meio concentra as linhas do campo elétrico

- μ é um coeficiente que mede o quanto o meio concentra as linhas do campo magnético

(E e H são campos vetoriais nos quais os vetores do campo são tangentes às linhas do campo)

$$\nabla \times \mathrm{E} = -\frac{\delta \mathrm{B}}{\delta t} \quad \left[\mathrm{V/m^2}\right]$$

$$\nabla \times \mathrm{H} = \mathrm{J} + \frac{\delta \mathrm{D}}{\delta t} \quad \left[\mathrm{A/m^2}\right]$$

$$\nabla \cdot \mathrm{D} = \rho_v \quad \left[\mathrm{C/m^3}\right]$$

$$\nabla \cdot \mathrm{B} = 0 \quad \left[\mathrm{T/m}\right]$$

$$\mathrm{D} = \varepsilon \mathrm{E} \quad \left[\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}\right]$$

- *Uma outra forma de expressar o Campo Elétrico*
- *ε é um coeficiente que mede o quanto o meio concentra as linhas do campo elétrico*

D = densidade de fluxo elétrico (C/m^2)

E = intensidade do campo elétrico (V/m)

ε = permissividade elétrica do meio (F/m)

Densidade de Fluxo Magnético

$$\nabla \times \mathrm{E} = -\frac{\delta \mathrm{B}}{\delta t} \quad \left(\mathrm{V/m^2}\right)$$

$$\nabla \times \mathrm{H} = \mathrm{J} + \frac{\delta \mathrm{D}}{\delta t} \quad \left(\mathrm{A/m^2}\right)$$

$$\nabla \cdot \mathrm{D} = \rho_v \quad \left(\mathrm{C/m^3}\right)$$

$$\nabla \cdot \mathrm{B} = 0 \quad \left(\mathrm{T/m}\right)$$

$$\mathrm{B} = \mu \mathrm{H} \left(\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{HA}}{\mathrm{m^2}} = \mathrm{T}\right)$$

- *Uma outra forma de expressar o Campo Magnético*
- *μ é um coeficiente que mede o quanto o meio concentra as linhas do campo magnético*
- *Também denominada indução magnética*

B = densidade de fluxo magnético (T=HA/m^2)

H = intensidade do campo magnético (A/m)

μ = permeabilidade magnética do meio (H/m)

$$\nabla \times \mathrm{E} = -\frac{\delta \mathrm{B}}{\delta t} \quad \left(\mathrm{V/m^2} \right)$$

$$\nabla \times \mathrm{H} = \mathrm{J} + \frac{\delta \mathrm{D}}{\delta t} \quad \left(\mathrm{A/m^2} \right)$$

$$\nabla \cdot \mathrm{D} = \rho_v \quad \left(\mathrm{C/m^3} \right)$$

$$\nabla \cdot \mathrm{B} = 0 \quad \left(\mathrm{T/m} \right)$$

$$\mathrm{J} = \sigma \mathrm{E} \quad \left(\frac{\mathrm{mho}}{\mathrm{m}} \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m^2}} \right)$$

- *Ao aplicar o Campo Elétrico no meio, o quanto ele fará as cargas livres no meio se moverem e se transformarem em corrente (quanto mais cargas livres, maior a condutividade).*
- *σ é um coeficiente que mede a capacidade do campo elétrico em colocar as cargas livres do meio em movimento*

J = densidade de corrente elétrica ($\mathrm{A/m^2}$)

E = intensidade do campo elétrico (V/m)

σ = condutividade (mho/m)

$$\nabla \times E = -\frac{\delta B}{\delta t} \quad [\mathrm{V/m^2}]$$

$$\nabla \times H = J + \frac{\delta D}{\delta t} \quad [\mathrm{A/m^2}]$$

$$\nabla \cdot D = \rho_v \quad [\mathrm{C/m^3}]$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad [\mathrm{T/m}]$$

- *No espaço livre, a relação entre a densidade de fluxo elétrico e o campo elétrico é dada pela permissividade do espaço livre* (ε_0) .

$$D = \varepsilon_0 E\,,\ \varepsilon_0 = 8.854\text{x}10^{-12}\ \mathrm{F/m}$$

- *No espaço livre, a relação entre a densidade de fluxo magnético e o campo magnético é dada pela permeabilidade magnética do espaço livre* (μ_0) .

$$B = \mu_0 H\,,\ \mu_0 = 4\pi\text{x}10^{-7}\ \mathrm{H/m}$$

$$\nabla \times \mathrm{E} = -\frac{\delta \mathrm{B}}{\delta t} \quad \mathrm{V/m^2}$$

$$\nabla \times \mathrm{H} = \mathrm{J} + \frac{\delta \mathrm{D}}{\delta t} \quad \mathrm{A/m^2}$$

$$\nabla \cdot \mathrm{D} = \rho_v \quad \mathrm{C/m^3}$$

$$\nabla \cdot \mathrm{B} = 0 \quad \mathrm{T/m}$$

- *Muitas vezes se utiliza a caracterização do meio normalizada em relação a* μ_0 *e* ε_0 *.*

- *Permissividade relativa* (ε_r): *Por exemplo, um meio que tiver um* $\varepsilon_r = 2$, *significa que a permissividade elétrica do meio é duas vezes a permissividade do espaço livre* (ε_0) *.*

  $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r \quad \varepsilon_0 = 8.854\text{x}10^{-12}$ F/m

- *Permeabilidade relativa* (μ_r): *Por exemplo, um meio que tiver um* $\mu_r = 2$, *significa que a permeabilidade magnética do meio é duas vezes a permeabilidade do espaço livre* (μ_0).

  $\mu = \mu_0 \mu_r \quad \mu_0 = 4\pi\text{x}10^{-7}$ H/m

Quadro resumo

$$\nabla \times \mathrm{E} = -\frac{\delta \mathrm{B}}{\delta t} \quad \left(\mathrm{V/m^2} \right)$$

$$\nabla \times \mathrm{H} = \mathrm{J} + \frac{\delta \mathrm{D}}{\delta t} \quad \left(\mathrm{A/m^2} \right)$$

$$\nabla \cdot \mathrm{D} = \rho_v \quad \left(\mathrm{C/m^3} \right)$$

$$\nabla \cdot \mathrm{B} = 0 \quad \left(\mathrm{T/m} \right)$$

$$\mathrm{D} = \varepsilon \mathrm{E} \quad \left(\mathrm{C/m^2} \right)$$

$$\mathrm{B} = \mu \mathrm{H} \quad \left(\mathrm{T} \right)$$

$$\mathrm{J} = \sigma \mathrm{E} \quad \left(\mathrm{A/m^2} \right)$$

E = intensidade do campo elétrico (V/m)

B = densidade de fluxo magnético ($T=HA/m^2$)

H = intensidade do campo magnético (A/m)

D = densidade de fluxo elétrico (C/m^2)

J = densidade de corrente elétrica (A/m^2)

ρ_v = densidade volumétrica de carga elétrica (C/m^3)

ε = permissividade elétrica do meio (F/m)

μ = permeabilidade magnética do meio (H/m)

σ = condutividade (mho/m)

Lei de Faraday ➡ $\nabla \times \mathrm{E} = -\dfrac{\delta \mathrm{B}}{\delta t}$

Lei Circuital de Ampère ➡ $\nabla \times \mathrm{H} = \mathrm{J} + \dfrac{\delta \mathrm{D}}{\delta t}$

Lei de Gauss ➡ $\nabla \cdot \mathrm{D} = \rho_v$

Lei de Gauss para Campos Magnéticos ➡ $\nabla \cdot \mathrm{B} = 0$

Lembrar que:

$\nabla \times$ = rotacional (produto vetorial do operador ∇)

$\nabla \cdot$ = divergente (produto escalar operador ∇)

$\nabla = \dfrac{\partial}{\partial x}\,\underline{\hat{i}} + \dfrac{\partial}{\partial y}\,\underline{\hat{j}} + \dfrac{\partial}{\partial z}\,\underline{\hat{k}}$; onde $\underline{\hat{i}}$, $\underline{\hat{j}}$ e $\underline{\hat{k}}$ são vetores unitários do sistema cartesiano

Dimensão de (∇) = (m^{-1})

$$\mathrm{B} = \mu\mathrm{H} \quad \left(\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{HA}}{\mathrm{m}^2} = \mathrm{T}\right)$$

$$\mathrm{D} = \varepsilon\mathrm{E} \quad \left(\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}\right)$$

$$\mathrm{J} = \sigma\mathrm{E} \quad \left(\frac{\mathrm{mho}}{\mathrm{m}}\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}\right)$$

1ª. EM: Rotacional do Campo Elétrico

$$\boxed{B = \mu H}$$

Lei de Faraday

$$\nabla \times E = -\frac{\delta B}{\delta t} \qquad [V/m^2]$$

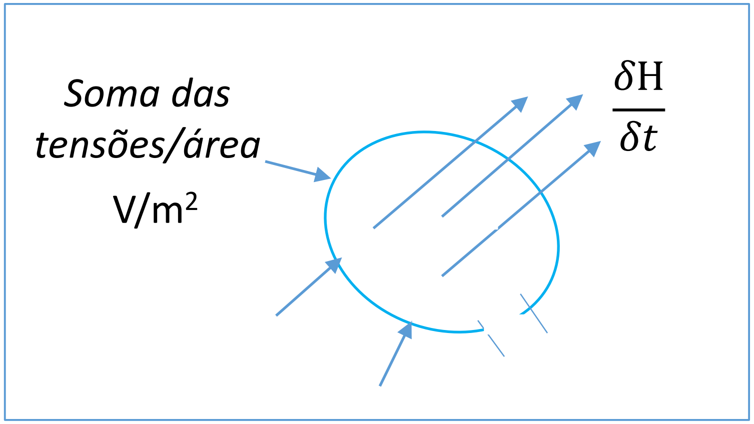
B = densidade de fluxo magnético

$\nabla\,\times$ = rotacional (produto vetorial do operador ∇)

$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\,\underline{\hat{i}} + \frac{\partial}{\partial y}\,\underline{\hat{j}} + \frac{\partial}{\partial z}\,\underline{\hat{k}}$; onde $\underline{\hat{i}}$, $\underline{\hat{j}}$ e $\underline{\hat{k}}$ são vetores unitários do sistema cartesiano.

Dimensão de (∇) = (m^{-1})

Dimensão de (E) = (V/m)



- Se temos no espaço linhas de campo magnético H variando no tempo, em um contorno que engloba essas linhas existe um potencial impresso.
- Se este contorno for aberto, entre os terminais pode-se medir uma tensão V que existe enquanto o campo magnético que atravessa esse contorno hipotético varia, e que é equivale à soma de todas as tensões no caminho fechado.
- Se dividirmos V pela área da superfície subentendida por esse contorno fechado, teremos o que resulta da equação, em V/m^2.
- Esta equação avalia a capacidade de o campo magnético, variando no tempo, gerar uma tensão em torno do contorno circular que o compreende.
- Esta avaliação é feita a partir da característica magnética do meio. Quanto maior for a permeabilidade magnética do meio, maior será a tensão obtida, porque o rotacional do campo elétrico é o contorno do caminho fechado $(V/m)(m^{-1}) = V/m^2$.

- A onda eletromagnética é resultante da relação de causa e consequência do que acontece entre E e H.
- Uma variação no tempo do Campo Magnético H estabelece como consequência uma variação espacial no Campo Elétrico E.
- Quem controla o quanto a variação no tempo do Campo Magnético H implica na variação espacial no Campo Elétrico E é a permeabilidade magnética do meio (μ).

Ao examinar a próxima equação veremos que acontecerá um fenômeno dual, uma variação no tempo do E gera uma variação espacial no H. Desta forma, as duas equações se intertravam, o que leva à propagação (var. de H -> var. de E -> var. de H...).

(μH)

$$\nabla \times \mathrm{E} = -\frac{\delta \mathrm{B}}{\delta t}$$

Derivada (variação) espacial do Campo Elétrico

Derivada (variação) no tempo do Campo Magnético

∇ = derivada espacial =

$$= \frac{\partial}{\partial x}\,\underline{\hat{i}} + \frac{\partial}{\partial y}\,\underline{\hat{j}} + \frac{\partial}{\partial z}\,\underline{\hat{k}};$$

onde $\underline{\hat{i}}$, $\underline{\hat{j}}$ e $\underline{\hat{k}}$ são vetores unitários do sistema cartesiano.

- Esta equação avalia a capacidade de o campo elétrico, variando no tempo, gerar uma variação espacial no campo magnético.

$\boxed{J = \sigma E}$ $\boxed{D = \varepsilon E}$

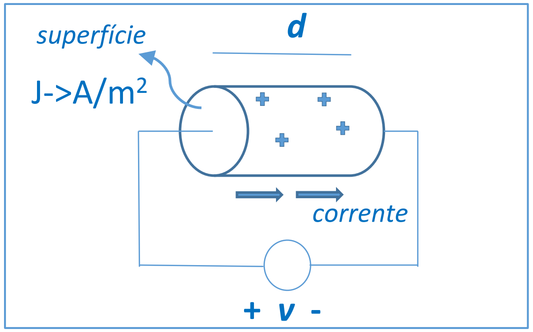
Lei Circuital de Ampère

$$\nabla \times H = J + \frac{\delta D}{\delta t}$$

Variação espacial do Campo Magnético

Variação no tempo do Campo Elétrico

- A variação espacial no campo magnético é originada pela densidade de corrente de condução (J, em A/m²) que ocorre quando o meio é condutor, com condutividade σ.



D = densidade de fluxo elétrico

J = densidade de corrente de condução

$\nabla \times$ = rotacional (produto vetorial do operador ∇)

$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\,\underline{\hat{i}} + \frac{\partial}{\partial y}\,\underline{\hat{j}} + \frac{\partial}{\partial z}\,\underline{\hat{k}}$; onde $\underline{\hat{i}}, \underline{\hat{j}}$ e $\underline{\hat{k}}$ são vetores unitários do sistema cartesiano.

Dimensão de (∇) = (m^{-1})

- Quanto maior for a condutividade σ, mais rápido as cargas irão se mover (corrente). O campo Elétrico no interior do fio será E=V/d e E faz com que as cargas se movam, e elas se moverão tanto mais rápido quanto maior for a condutividade do meio.
- $\sigma E =$ densidade de corrente de condução (A/m²), sendo o m² a seção transversal do fio.
- J gera as linhas de H, pois basta que exista uma corrente para aparecerem as linhas circulares (em razão do rotacional) de H em torno da corrente.

$$\boxed{\mathrm{B} = \mu\mathrm{H}}$$

$$\nabla \times \mathrm{E} = -\frac{\delta \mathrm{B}}{\delta t}$$

$$\boxed{\mathrm{D} = \varepsilon\mathrm{E}}$$

$$\nabla \times \mathrm{H} = \mathrm{J} + \frac{\delta \mathrm{D}}{\delta t}$$

J = densidade de corrente de condução

D = densidade de corrente de deslocamento

- Se a tensão V usada para gerar a corrente de condução for senoidal, teremos uma variação senoidal no tempo da densidade de corrente de condução J. (1)

$\boxed{B = \mu H}$

$$\nabla \times E = -\frac{\delta B}{\delta t}$$

$\boxed{D = \varepsilon E}$

$$\nabla \times H = J + \frac{\delta D}{\delta t}$$

1

J = densidade de corrente de condução

D = densidade de corrente de deslocamento

- Se a tensão V usada para gerar a corrente de condução for senoidal, teremos uma variação senoidal no tempo da densidade de corrente de condução J. (1)
- A variação espacial de H ($\nabla \times \mathrm{H}$) não é mais parada no tempo mas, sim, varia com a excitação senoidal dada no gerador de tensão, que ocasiona a variação senoidal na densidade de corrente J. (2)
- Nas vizinhanças do ponto em que estamos considerando J, teremos uma variação espacial de H, variando no tempo. (2)

$$\boxed{\mathrm{B} = \mu \mathrm{H}}$$

$$\nabla \times \mathrm{E} = -\frac{\delta \mathrm{B}}{\delta t}$$

$$\boxed{\mathrm{D} = \varepsilon \mathrm{E}}$$

$$\nabla \times \mathrm{H} = \underset{2}{\mathrm{J}} + \underset{1}{\frac{\delta \mathrm{D}}{\delta t}}$$

$$\boxed{\text{J = densidade de corrente de condução}} \quad \boxed{\text{D = densidade de corrente de deslocamento}}$$

Ondas Planas

$$\boxed{B = \mu H}$$

$$\nabla \times E = -\frac{\delta B}{\delta t}$$

$$\boxed{D = \varepsilon E}$$

$$\nabla \times H = J + \frac{\delta D}{\delta t}$$

2 1 3

$\boxed{J = \text{densidade de corrente de condução}}$ $\boxed{D = \text{densidade de corrente de deslocamento}}$

- Se a tensão V usada para gerar a corrente de condução for senoidal, teremos uma variação senoidal no tempo da densidade de corrente de condução J. (1)
- A variação espacial de H ($\nabla \times H$) não é mais parada no tempo mas, sim, varia com a excitação senoidal dada no gerador de tensão, que ocasiona a variação senoidal na densidade de corrente J. (2)
- Nas vizinhanças do ponto em que estamos considerando J, teremos uma variação espacial de H, variando no tempo. (2)
- Se a variação espacial de H está variando no tempo, olhando para a primeira equação (3),

Ondas Planas

A interação entre E e H

$\boxed{B = \mu H}$

$$\nabla \times E = -\frac{\delta B}{\delta t}$$

$\boxed{D = \varepsilon E}$

$$\nabla \times H = J + \frac{\delta D}{\delta t}$$

J = densidade de corrente de condução	D = densidade de corrente de deslocamento

- Se a tensão V usada para gerar a corrente de condução for senoidal, teremos uma variação senoidal no tempo da densidade de corrente de condução J. (1)
- A variação espacial de H ($\nabla \times H$) não é mais parada no tempo mas, sim, varia com a excitação senoidal dada no gerador de tensão, que ocasiona a variação senoidal na densidade de corrente J. (2)
- Nas vizinhanças do ponto em que estamos considerando J, teremos uma variação espacial de H, variando no tempo. (2)
- Se a variação espacial de H está variando no tempo, olhando para a primeira equação (3), se conclui que ela vai gerar uma variação espacial do campo elétrico também variando no tempo ($\nabla \times E$) (4), e quem controla o quanto esta variação no tempo do campo magnético se transforma em variação espacial do campo elétrico nas vizinhanças próximas é a permeabilidade magnética do meio.

$$\boxed{B = \mu H}$$

$$\nabla \times E = -\frac{\delta B}{\delta t}$$

$$\boxed{D = \varepsilon E}$$

$$\nabla \times H = J + \frac{\delta D}{\delta t}$$

J = densidade de corrente de condução	D = densidade de corrente de deslocamento

- Se a tensão V usada para gerar a corrente de condução for senoidal, teremos uma variação senoidal no tempo da densidade de corrente de condução J. (1)
- A variação espacial de H ($\nabla \times H$) não é mais parada no tempo mas, sim, varia com a excitação senoidal dada no gerador de tensão, que ocasiona a variação senoidal na densidade de corrente J. (2)
- Nas vizinhanças do ponto em que estamos considerando J, teremos uma variação espacial de H, variando no tempo. (2)
- Se a variação espacial de H está variando no tempo, olhando para a primeira equação (3), se conclui que ela vai gerar uma variação espacial do campo elétrico também variando no tempo ($\nabla \times E$) (4), e quem controla o quanto esta variação no tempo do campo magnético se transforma em variação espacial do campo elétrico nas vizinhanças próximas é a permeabilidade magnética do meio.
- Se temos uma variação espacial do campo elétrico E variando no tempo, na segunda equação teremos ($\varepsilon\partial E/\partial t$). (5)
- Este termo ($\varepsilon\partial E/\partial t$) variação no tempo do campo elétrico também leva a uma variação espacial do campo magnético ($\nabla \times H$), e quem controla o quanto esta variação no tempo do campo elétrico se transforma em variação espacial do campo magnético nas vizinhanças próximas é a permissividade elétrica do meio.

$$\boxed{B = \mu H}$$

$$\nabla \times E = -\frac{\delta B}{\delta t}$$

$$\boxed{D = \varepsilon E}$$

$$\nabla \times H = J + \frac{\delta D}{\delta t}$$

J = densidade de corrente de condução	D = densidade de corrente de deslocamento

- Se a tensão V usada para gerar a corrente de condução for senoidal, teremos uma variação senoidal no tempo da densidade de corrente de condução J. (1)
- A variação espacial de H ($\nabla \times H$) não é mais parada no tempo mas, sim, varia com a excitação senoidal dada no gerador de tensão, que ocasiona a variação senoidal na densidade de corrente J. (2)
- Nas vizinhanças do ponto em que estamos considerando J, teremos uma variação espacial de H, variando no tempo. (2)
- Se a variação espacial de H está variando no tempo, olhando para a primeira equação (3), se conclui que ela vai gerar uma variação espacial do campo elétrico também variando no tempo ($\nabla \times E$) (4), e quem controla o quanto esta variação no tempo do campo magnético se transforma em variação espacial do campo elétrico nas vizinhanças próximas é a permeabilidade magnética do meio.
- Se temos uma variação espacial do campo elétrico E variando no tempo, na segunda equação teremos ($\varepsilon\partial E/\partial t$). (5)
- Este termo ($\varepsilon\partial E/\partial t$) variação no tempo do campo elétrico também leva a uma variação espacial do campo magnético ($\nabla \times H$), e quem controla o quanto esta variação no tempo do campo elétrico se transforma em variação espacial do campo magnético nas vizinhanças próximas é a permissividade elétrica do meio.

$$J \longrightarrow H \longrightarrow E \longrightarrow H \longrightarrow E \longrightarrow H \longrightarrow \cdots$$

$$\nabla \times \mathrm{E} = -\frac{\delta \mathrm{B}}{\delta t} \qquad \nabla \times \mathrm{H} = \mathrm{J} + \frac{\delta D}{\delta t}$$

Portanto, as equações ($\nabla \times \mathrm{E}$) e ($\nabla \times \mathrm{H}$) se intertravam e, no momento em que se tem uma excitação externa por uma corrente de condução J variando no tempo, a interação entre E e H se estabelece, resultando em uma alternância entre E e H no meio, ambos variando no tempo. Ou seja, se estabelece uma **onda**.

Lei de Gauss ➡ $\nabla \cdot \mathrm{D} = \rho_v$

$$\mathrm{D} = \varepsilon \mathrm{E}$$

D = densidade de fluxo elétrico (V/m^2)

ρ_v = densidade volumétrica de carga elétrica (C/m^3)

$\nabla \cdot$ = divergente (produto escalar operador ∇)

Permissividade elétrica ε é um coeficiente que mede o quanto o meio concentra as linhas do campo elétrico.

- Fazer o produto escalar do operador ∇ por um campo vetorial (no caso, campos D ou B), significa fazer a divergência do campo.
- Fisicamente a divergência de um campo indica a intensidade da fonte das linhas do campo na posição (coordenadas x, y, z) em que é calculado.
- A fonte das linhas do campo elétrico são as cargas elétricas que se tem na posição do campo elétrico em que se estiver calculando o divergente.
- Estas cargas elétricas são medidas pela densidade volumétrica de carga elétrica ρ_v, em C/m^3.
- Se existe uma concentração volumétrica de cargas (sejam positivas, sejam negativas), as fontes das linhas do campo elétrico estarão ali.

Lei de Gauss para Campos Magnéticos

$$\nabla \cdot \mathrm{B} = 0$$

- A divergência de B é sempre zero porque não existe uma carga magnética.
- O campo magnético é sempre gerado por uma variação do campo elétrico, ou uma corrente, mas jamais por uma "carga magnética".

$$\mathrm{B} = \mu \mathrm{H}$$

B = densidade de fluxo magnético (A/m^2)

$\nabla \cdot$ = divergente (produto escalar operador ∇)

Permeabilidade magnética μ é um coeficiente que mede o quanto o meio concentra as linhas do campo magnético.

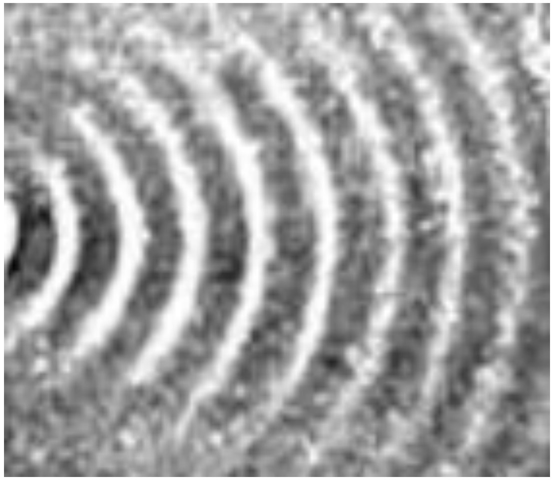
Já vimos que há um mecanismo de interação entre E e H que é responsável pela propagação da onda eletromagnética.

A equação de propagação da onda será obtida a partir das duas equações de Maxwell em rotacional (em rotacional de H e em rotacional de E).

Ondas Planas no espaço livre são o caso mais simples de propagação de uma onda eletromagnética.

Consideremos uma onda que chega na antena receptora, irradiada por uma antena transmissora.

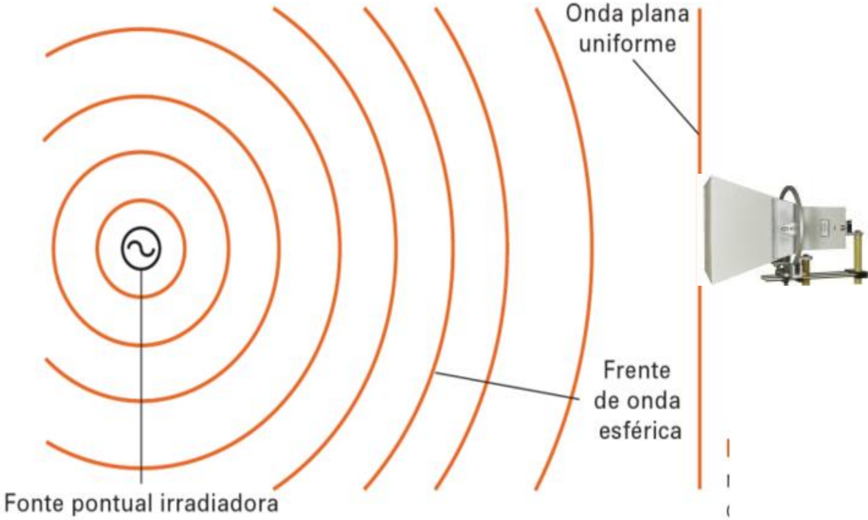
No enlace entre duas antenas, as ondas próximas à antena saem na forma esférica mas, à medida que elas vão se afastando, tornam-se planas.



Isso ocorre porque, na quase absoluta maioria dos casos, as antenas estão uma no campo distante da outra (as antenas nunca estão próximas, de tal forma que as frentes de onda possam ser esféricas).

Portanto, no campo distante, os raios são tão grandes, que a onda já é plana.

- O campo elétrico E é sempre perpendicular ao campo magnético H por causa do rotacional.
- No caso do espaço livre, a direção de propagação da onda é perpendicular (ou transversal) a ambos (E e H).
- Este modo de propagação é chamado TEM – Onda Transversa Eletromagnética.
- Todos os pontos de uma frente da onda possuem mesma magnitude e fase.



Para deduzir a equação da onda plana, partiremos das equações de Maxwell, considerando, agora, qualquer meio homogêneo isento de concentração volumétrica de cargas elétricas (ρ_v=0):

Lei de Faraday ➡ $$\nabla \times \mathrm{E} = -\frac{\delta \mathrm{B}}{\delta t}$$

Lei Circuital de Ampère ➡ $$\nabla \times \mathrm{H} = \mathrm{J} + \frac{\delta \mathrm{D}}{\delta t}$$

Lei de Gauss ➡ $$\nabla \cdot \mathrm{D} = \rho_v$$

Lei de Gauss para Campos Magnéticos ➡ $$\nabla \cdot \mathrm{B} = 0$$

$$\mathrm{D} = \varepsilon \mathrm{E}$$

$$\mathrm{B} = \mu \mathrm{H}$$

$$\mathrm{J} = \sigma \mathrm{E}$$

$$\rho_v = 0$$

Note que:

A partir das condições de espaço livre (ou das condições de qualquer meio não condutor em que ρ_v=0) as Equações de Maxwell podem ser reescritas como:

$\mathrm{D} = \varepsilon_0 \mathrm{E}$, $\varepsilon_0 = 8.854\mathrm{x}10^{-12}$ F/m

$\mathrm{B} = \mu_0 \mathrm{H}$, $\mu_0 = 4\pi \mathrm{x}10^{-7}$ H/m

$\mathrm{J} = \sigma \mathrm{E}$, $\sigma = 0$

$\rho_v = 0$, no espaço livre de cargas

$$\nabla \times \mathrm{E} = -\frac{\delta \mathrm{B}}{\delta t} \Rightarrow \nabla \times \mathrm{E} = -\mu_0 \frac{\delta \mathrm{H}}{\delta t}$$

$$\nabla \times \mathrm{H} = \mathrm{J} + \frac{\delta \mathrm{D}}{\delta t} \Rightarrow \nabla \times \mathrm{H} = \varepsilon_0 \frac{\delta \mathrm{E}}{\delta t}$$

$$\nabla \cdot \mathrm{D} = \rho_v \Rightarrow \nabla \cdot \mathrm{D} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathrm{B} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathrm{B} = 0$$

Meio Linear: ε *independe de E.*

Homogêneo: ε *independe das coordenadas.*

Isotrópico: ε *independe da direção do campo aplicado.*

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \times \left(-\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{H}) \Leftarrow \nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t}\left(\sigma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) = -\mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

Para deduzir a equação da onda plana, partiremos da Equação em Rotacional do Campo Elétrico, aplicando o operador rotacional aos dois lados da equação.

Usando a propriedade vetorial do operador ∇:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

"Rotacional do rotacional de um campo é o gradiente do divergente do campo, menos o operador nabla de segunda ordem aplicado ao campo."

$$(\nabla \cdot \mathrm{D} = 0)$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \Leftarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla^2 A = \frac{\partial^2}{\partial x^2} Ax\,\underline{\hat{i}} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} Ay\,\underline{\hat{j}} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} Az\,\underline{\hat{k}}$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

Equação de Helmholtz
Equação da Onda

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

Variações no tempo de primeira ordem e segunda ordem do campo elétrico geram variações espaciais de segunda ordem também do campo elétrico.

Interpretação da Equação de Helmholtz

- Quem controla esta inter-relação entre variações temporais de primeira ordem e segunda ordem são as propriedades eletromagnéticas do meio:

  Condutividade σ (mho/metro), Permissividade ε (F/m), Permeabilidade μ (H/m)

- Ou seja, a equação de Helmholtz nos diz como a variação no tempo do campo elétrico se transforma em variação espacial do mesmo.
- Esta variação espacial de E simultânea com a variação temporal do mesmo indica que há propagação do campo E no espaço com velocidade de propagação dada pela relação entre a variação espacial e a variação temporal de E.

Campos harmônicos são aqueles cuja variação no tempo é senoidal ou co-senoidal.

(Ondas Harmônicas no Tempo = Ondas Senoidais ou Co-senoidais)

Para estes casos, $\mathrm{E} = e^{j\omega t}$ e $\dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial t} = j\omega \mathrm{E}$,

e a equação de Helmholtz pode ser reescrita como:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \xrightarrow{\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial t} = j\omega \mathrm{E}} \nabla^2 \mathbf{E}_s = j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)\mathbf{E}_s \longleftarrow$$

O subscrito s em E_s faz referência a sinal harmônico (senoidal)

$$\nabla^2 \mathbf{E}_s - \gamma^2 \mathbf{E}_s = 0 \longrightarrow \gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)} = \alpha + j\beta$$

Equação de Helmholtz para Campos Harmônicos

Constante de Propagação da Onda

Buscamos agora, a solução para a equação diferencial $\nabla^2 \mathbf{E}_s - \gamma^2 \mathbf{E}_s = 0$

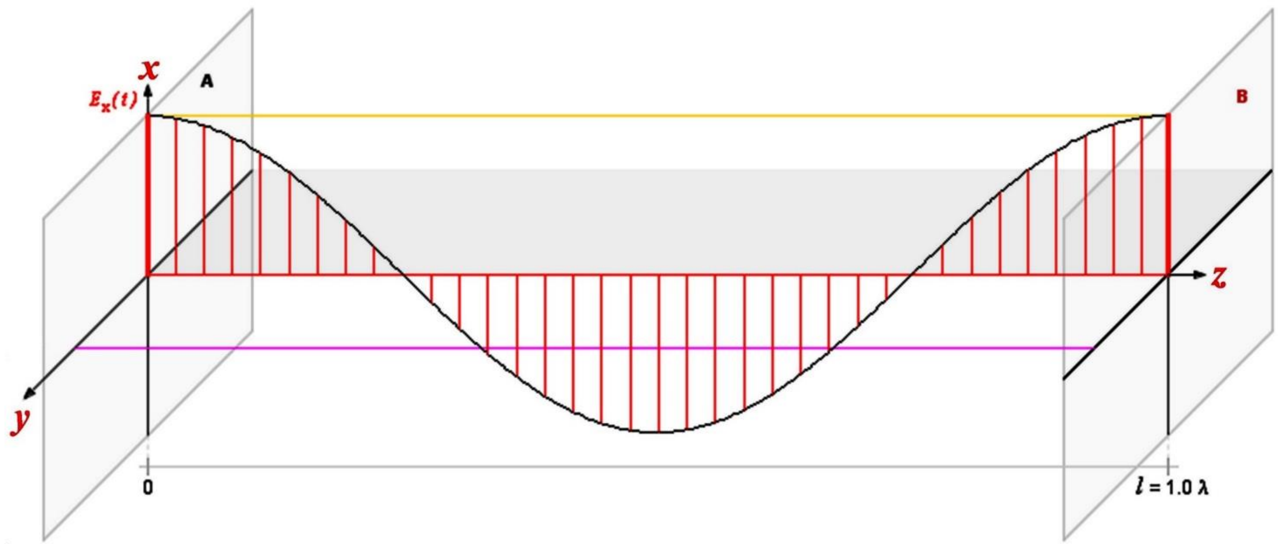
- A função $\mathbf{E}_s$ que buscamos como solução para a equação diferencial acima têm que ser tal que a função $\mathbf{E}_s$ e sua derivada de ordem dois sejam iguais (mantenham a mesma forma funcional entre si), de modo que, ao efetuarmos a subtração entre os termos, resulte zero.
- A função que é solução da equação diferencial será, portanto, uma exponencial.

Da mesma forma que determinamos → $\nabla^2 \mathbf{E}_s - \gamma^2 \mathbf{E}_s = 0$

podemos determinar → $\nabla^2 \mathbf{H}_s - \gamma^2 \mathbf{H}_s = 0$

Para determinar a solução da Equação de Helmholtz para campos harmônicos no tempo, consideremos uma onda plana com campo elétrico somente com a componente na direção x, se propagando na direção z, conforme figura abaixo.

Para este caso, E será dado por $\mathrm{E_s(z) = E_{xs}(z)}\underline{\hat{i}}$



Como E não depende de x e y na onda plana da figura acima, o termo $\nabla^2\mathbf{E}$ na equação $\nabla^2\mathbf{E}_s - \gamma^2\mathbf{E}_s = 0$ se reduz a uma única derivada em relação à z (as derivadas em relação à x e à y são zero), $\dfrac{d^2E_{xs}}{dz^2} - \gamma^2 E_{xs} = 0$

Aplicando o Teorema da Superposição às duas soluções independentes para a equação diferencial abaixo

$$\frac{d^2E_{xs}}{dz^2} - \gamma^2 E_{xs} = 0$$ temos:

$$E_x(z) = E^+e^{-\gamma z} + E^-e^{+\gamma z}$$

Onda se propagando no sentido do eixo z

Onda se propagando no sentido contrário do eixo z

onde E^+ e E^- são amplitudes arbitrárias constantes.

Lembrando que, na solução encontrada, $E_x(z) = E^+e^{-\gamma z} + E^-e^{+\gamma z}$,

γ é a constante de propagação da onda, conforme:

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)} = \alpha + j\beta$$

[1/m]

α é a atenuação da amplitude da onda à medida que ela se propaga no eixo z [neper/m]

β é a constante de fase (o quanto ela altera a fase enquanto se propaga no eixo z) [rad/m]

$$E_x(z) = E^+e^{-\gamma z} + E^-e^{+\gamma z}$$

Onda se propagando no sentido do eixo z (incidente)

Onda se propagando no sentido contrário de z (refletida)

Atenuação da onda de acordo com a distância que ela propaga

Característica oscilatória da propagação de acordo com $\cos(\beta z)$

Se considerarmos, ainda, que $\gamma = \alpha + j\beta$, temos:

$$e^{-\gamma z} = e^{-\alpha z}e^{-j\beta z}$$
$$e^{+\gamma z} = e^{+\alpha z}e^{+j\beta z}$$

Restaurando o domínio tempo nas equações fasoriais:

$$e^{-\gamma z} = e^{-\alpha z}e^{-j\beta z} \rightarrow e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z)$$
$$e^{+\gamma z} = e^{+\alpha z}e^{+j\beta z} \rightarrow e^{+\alpha z}\cos(\omega t + \beta z)$$

Ondas Planas

Portanto, a expressão no tempo (t) e no espaço (z) da componente na direção x do campo elétrico (E_x) que se propaga num meio, quando ele é excitado por um campo elétrico de frequência angular ω, e com características de propagação α e β dadas pela pelas propriedades do meio (γ é função de μ, ε e σ), é dada por:

$$E_x(z,t) = E^+ e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z) + E^- e^{\alpha z}\cos(\omega t + \beta z)$$

Onde:

→ E^+ e E^- são as amplitudes das ondas (constantes reais) que se propagam no sentido positivo e negativo, na coordenada z = 0.

→ $e^{-\alpha z}$ e $e^{\alpha z}$ expressam o quanto a onda se atenua, à medida que se propaga.

→ O parâmetro β em $\cos(\omega t - \beta z)$ expressa quantos radianos a fase da onda varia por unidade de distância percorrida pela onda.

→ O parâmetro ω em $\cos(\omega t - \beta z)$ expressa quantos radianos a fase da onda varia por unidade de tempo transcorrido.

A velocidade de propagação (ou velocidade de fase da onda), define a velocidade na qual um ponto fixo de fase da onda se propaga, em função dos parâmetros do meio.

Para determinar a velocidade de propagação, precisamos observar um ponto fixo na onda (marcar um ponto).

A onda está se movendo ao longo do eixo z, à medida que o tempo t passa, então vamos considerar $(\omega t + \beta z)$ constante em

$$E_x(z,t) = E^+ e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z) + E^- e^{\alpha z}\cos(\omega t + \beta z)$$

$E^+ e^{-\gamma z}$:

Para manter um ponto fixo na onda devemos nos mover na direção $+z$ à medida que o tempo aumenta.

$$\omega t - \beta z = constante \Rightarrow t = \frac{constante + \beta z}{\omega}$$

$$\omega t + \beta z = constante \Rightarrow t = \frac{constante - \beta z}{\omega}$$

A velocidade de propagação é dada por $u_p = \dfrac{\Delta z}{\Delta t}$

$$\omega t - \beta z = constante \longrightarrow z = (constante\ - \omega t)/(-\beta)$$

$$u_p = \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{(constante - \omega t)}{-\beta} = \frac{\omega}{\beta}$$

$\boxed{u_p = \dfrac{\omega}{\beta},}$ onde $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

O comprimento de onda é definido pela distância entre dois máximos (ou mínimos) consecutivos.

Sendo $u_p = \frac{\omega}{\beta}$, onde $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

$\lambda = \frac{u_p}{f}$, com $u_p = \frac{2\pi f}{\beta}$

$$\lambda = \frac{2\pi f}{\beta}\frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\beta}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{\beta}}$$

A especificação completa dos campos eletromagnéticos de uma onda plana uniforme é dada pelos campos elétrico e magnético, conforme determinamos a partir das Equações de Maxwell:

$$E_x(z) = E^+e^{-\gamma z} + E^-e^{+\gamma z}$$

$$H_y(z) = H^+e^{-\gamma z} + H^-e^{+\gamma z}$$

O campo magnético pode ser determinado pela aplicação da Lei de Faraday:

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -j\omega\mu\boldsymbol{H}$$

Como consideramos que E tem somente a componente na direção x e varia no espaço somente em função de z, e como E e H são sempre ortogonais entre si, H tem somente a componente na direção y, e varia no espaço somente em função de z.

Como E não varia com x e y, no caso em análise, o termo $\nabla \times \boldsymbol{E}$ na equação

$\nabla \times \boldsymbol{E} = -j\omega\mu\boldsymbol{H}$ se reduz a uma única derivada em relação à z (as derivadas em relação à x e à y são zero).

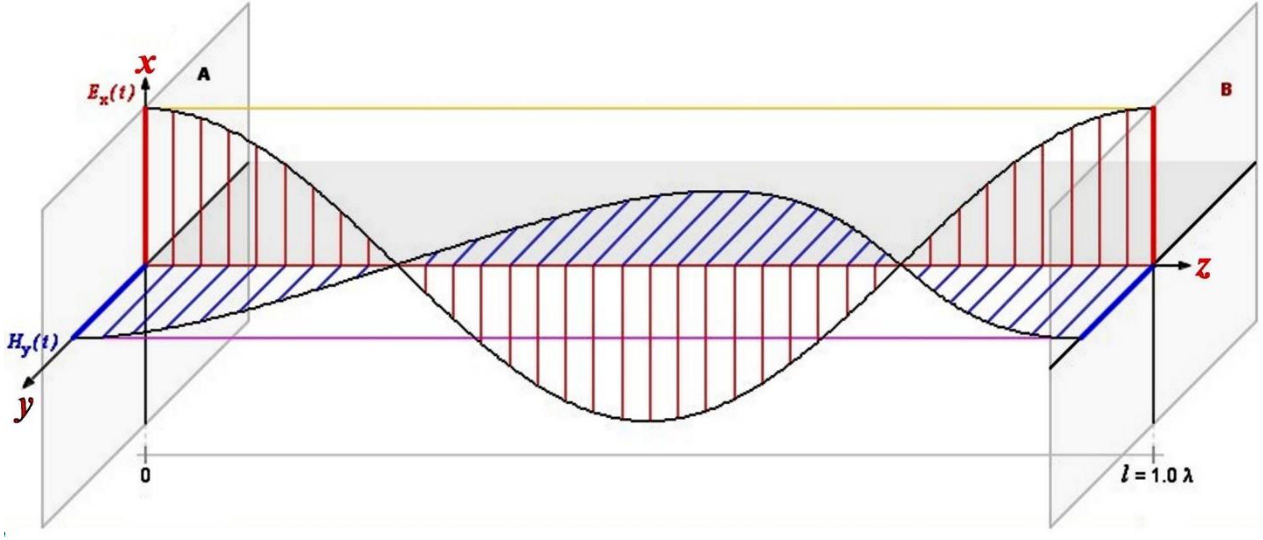
Isto é, $\nabla \times \mathbf{E}$ se transforma em uma simples derivada $\frac{\partial E_x}{\partial z}$.

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -j\omega\mu H_y$$

Substituindo $E_x(z) = E^+ e^{-\gamma z} + E^- e^{+\gamma z}$ em $\dfrac{\partial E_x}{\partial z} = -j\omega\mu H_y$ temos

$\dfrac{\partial (E^+ e^{-\gamma z} + E^- e^{+\gamma z})}{\partial z} = -j\omega\mu H_y$ que resulta na expressão de $H_y(z)$:

$$\boxed{H_y(z) = \frac{\gamma}{j\omega\mu}(E^+ e^{-\gamma z} - E^- e^{+\gamma z})}$$



A relação entre **E** e **H** é conhecida como impedância da onda.

Para ondas planas, a impedância da onda é igual à impedância intrínseca η do meio, dada por $\eta = \frac{E^+}{H^+}$.

E = intensidade do campo elétrico (V/m)

H = intensidade do campo magnético (A/m)

$\frac{E}{H} = \frac{V}{m}\frac{m}{A} = \Omega$ → *impedância*

De $H_y(z) = \frac{\gamma}{j\omega\mu}(E^+e^{-\gamma z} - E^-e^{+\gamma z})$, temos que $H^+ = E^+\frac{\gamma}{j\omega\mu}$

$$\eta = \frac{E^+}{H^+} = \frac{E^+}{E^+}\frac{j\omega\mu}{\gamma} = \frac{j\omega\mu}{\gamma}$$

Substituindo γ, temos $\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}}$

Impedância do meio em que se propaga a onda

Considerando que $\frac{E}{H}$ é a impedância, podemos redefinir **H** como

$$H_y(z) = \frac{1}{\eta}(E^+e^{-\gamma z} - E^-e^{+\gamma z})$$