

Módulo II – Linhas de Transmissão

Linhas de Transmissão – Introdução

Equações do Telegrafista

Modelos por Parâmetros Distribuídos

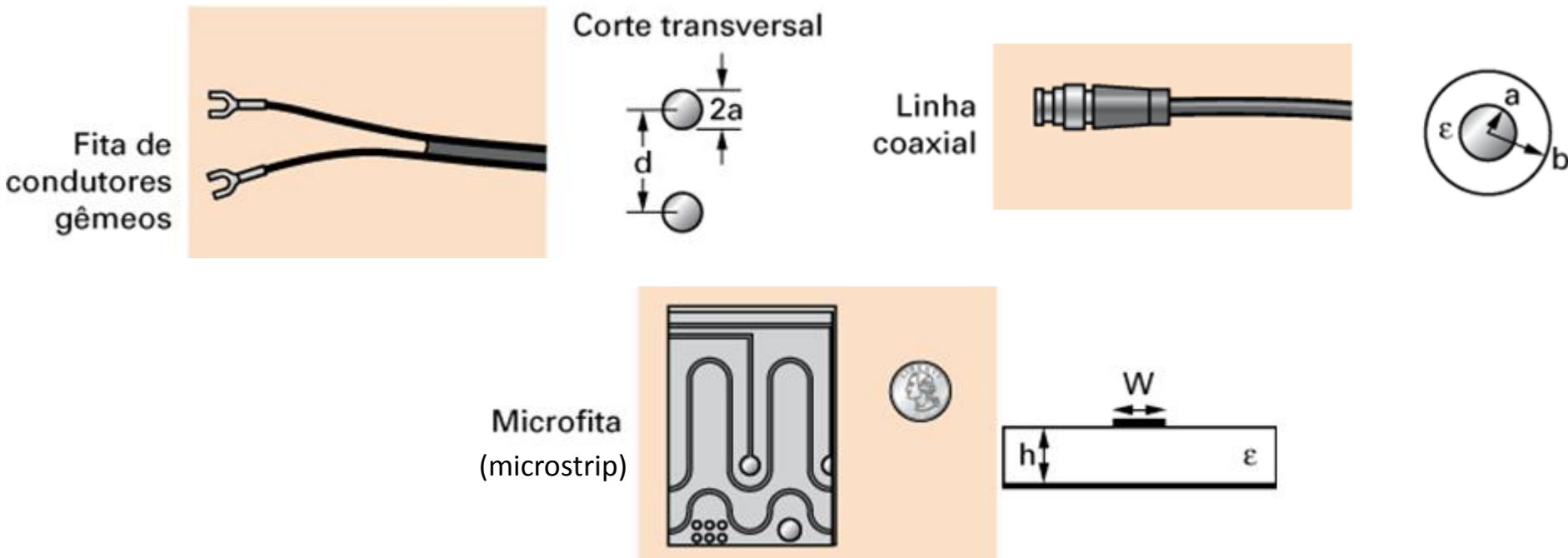
Ondas harmônicas no tempo em LTs

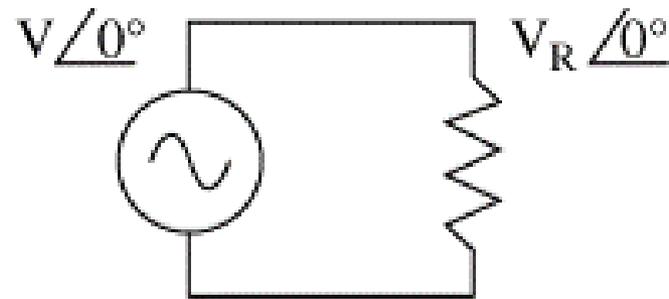
Impedância Característica



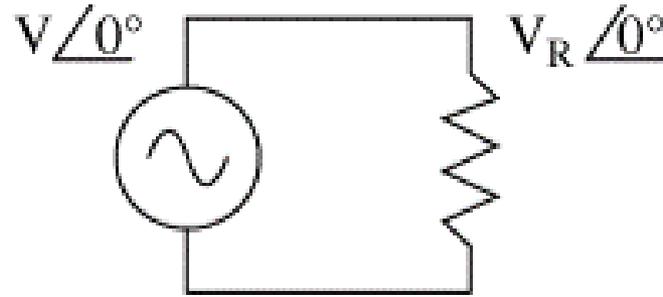
Linhas de Transmissão são caracterizadas pela capacidade de guiar a propagação da onda eletromagnética.

- Linhas de potência
- Linhas telefônicas
- Linhas de TV a cabo
- Trilhas de circuitos eletrônicos (microstrip)





- Em teoria de circuitos elétricos, não se leva em consideração o comprimento de onda do sinal em relação ao tamanho do circuito.
- Então, se pode assumir, por exemplo, que a distribuição espacial da tensão entre dois fios seja constante ao longo do trajeto, bem como se pode assumir que a distribuição espacial da corrente seja constante ao longo do fio.



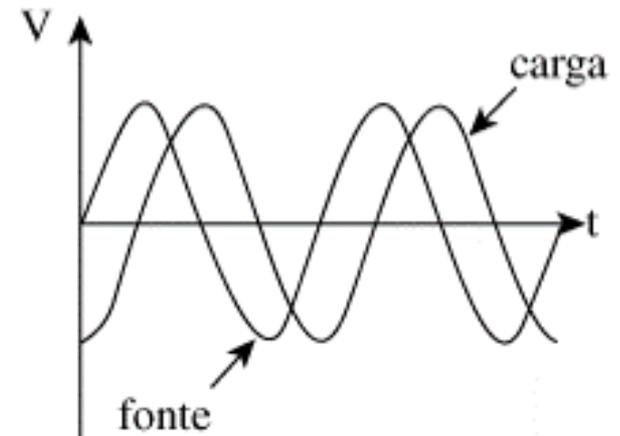
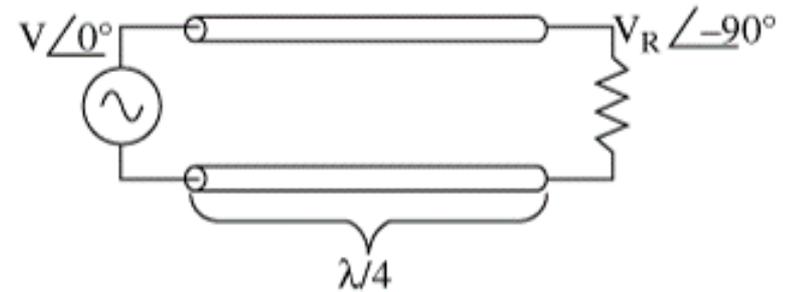
- Quando se aumenta a frequência de operação, o comprimento de onda do sinal acaba sendo da ordem de grandeza dos fios e condutores do circuito em si (das dimensões do circuito).
- Em função disto, começa a se manifestar um fenômeno ondulatório, em que a corrente e a tensão variam (módulo e fase) ao longo do circuito, razão pela qual deve ser dado um tratamento diferente daquele dado pela teoria de circuitos.
- Tal comportamento ocorre sempre que a frequência de operação é alta o suficiente para que o comprimento de onda seja suficientemente pequeno para ser da ordem de grandeza das dimensões do circuito. Ou quando as dimensões do circuito sejam grandes o suficiente para serem comparáveis ao comprimento de onda do sinal.

Por exemplo, no circuito ao lado, se a linha tiver a dimensão de $\lambda/4$, a tensão V_R aparecerá defasada (atrasada) de 90° na saída da linha, apesar de, sob a ótica de circuitos elétricos, a tensão entre os dois condutores ser a mesma ao longo dos mesmos.

A onda percorre 2π radianos em um λ , em $\lambda/4$, terá girado 90° (uma LT é um atrasador de fase).

O sinal sofre um atraso na propagação da fonte para a carga, ocasionando um deslocamento de fase.

A tensão do resistor está 90° defasada em relação à tensão da fonte.



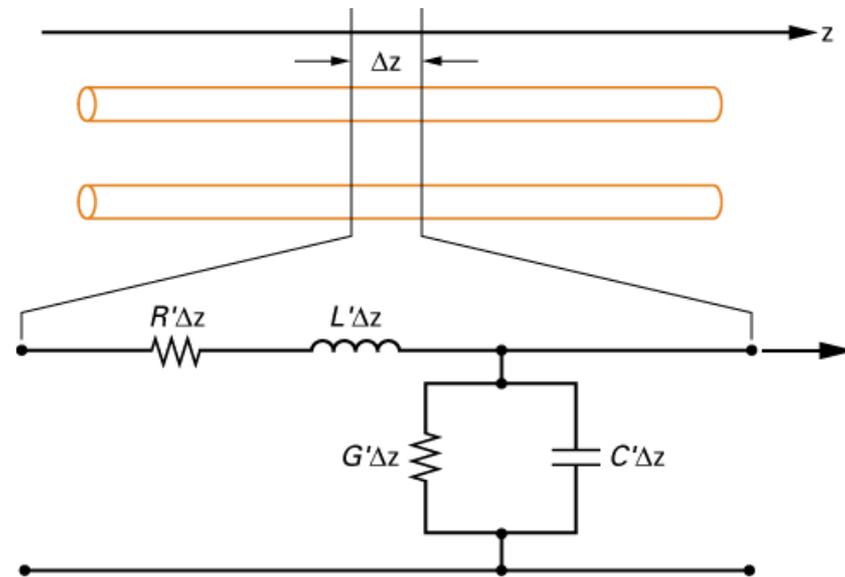
- A diferença entre a teoria de circuitos e a teoria de linhas de transmissão está no tamanho dos elementos.
- Em análise de circuitos não se leva em consideração o comprimento de onda do sinal em relação ao tamanho do circuito.
- No entanto, quando a frequência de operação é alta o suficiente para que o comprimento de onda seja suficientemente pequeno para ser da ordem de grandeza das dimensões do circuito, ou quando as dimensões do circuito são grandes o suficiente para serem comparáveis ao comprimento de onda do sinal, deve ser dado um tratamento diferente daquele dado pela teoria de circuitos.
- Assim, as LTs são tratadas como redes de parâmetros distribuídos, onde as tensões e correntes podem variar seu módulo e fase ao longo do comprimento da linha (e do fio).

Uma LT é representada por dois condutores, uma vez que LTs (para propagação transversal elétrica e magnética) possuem ao menos dois condutores.

Sempre que se tem dois condutores (sejam paralelos, sejam coaxiais), a propagação será modo TEM - Transverso eletromagnético. Ou seja, o campo elétrico é transversal à direção de propagação e, simultaneamente, o campo magnético também.

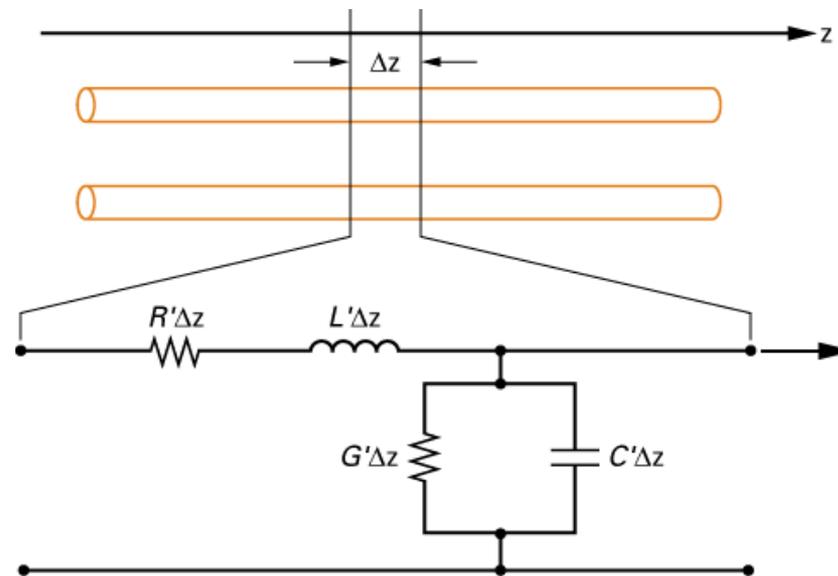
Um segmento diferencial de uma linha (Δz , em metros) é representado com elementos distribuídos:

- Em série:
 R' (Resistância/metro) e
 L' (indutância/metro)
- Em paralelo:
 G' (condutância/metro) e
 C' (capacitância/metro).



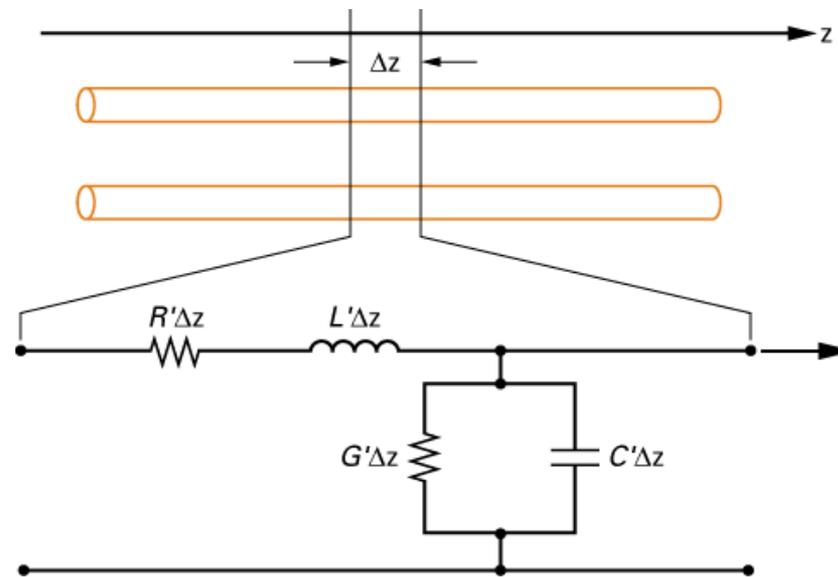
C' – É devida à proximidade dos dois condutores. A corrente atravessa o espaço entre os condutores, deixando carga positiva numa placa e negativa na outra (corrente de deslocamento, lá das Equações de Maxwell).

L' – Elemento em série que se opõe à variação instantânea da corrente, gerando o campo magnético.



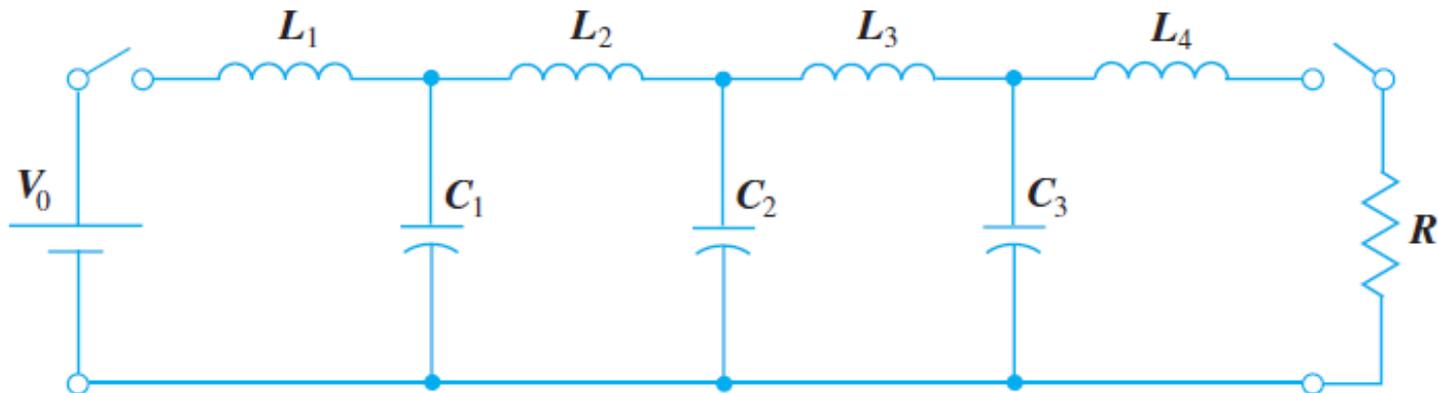
R' – Resistência em série é devida à condutividade finita dos condutores, o que causa perdas ôhmicas na linha.

G' – Perdas devido ao dielétrico que separa os condutores da linha não ser ideal. A condutância $\sigma = \omega\epsilon''$ é finita, gerando uma corrente de condução.

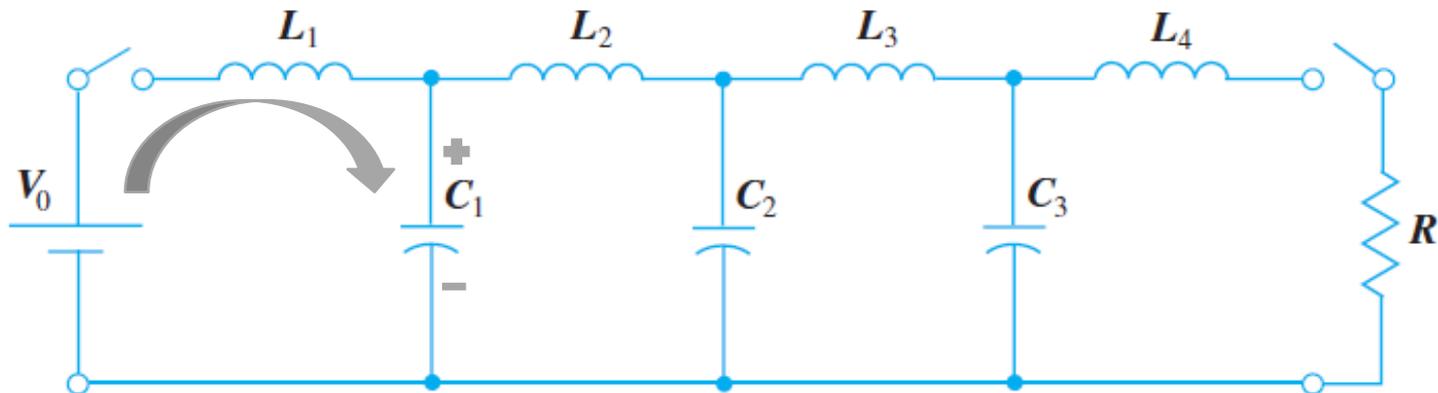


- Podemos considerar a **propagação ao longo da linha** como o carregamento e descarregamento de indutores e capacitores .
 - Indutor – armazena energia no campo magnético.
 - Capacitor – armazena energia no campo elétrico.
- A **velocidade de propagação** depende das características do material (ϵ e μ).
 - A permissividade elétrica (ϵ) dá a capacitância distribuída por metro.
 - A permeabilidade magnética (μ) dá a indutância distribuída por metro.
- A **atenuação** depende das perdas resistivas no material condutor e dielétrico.

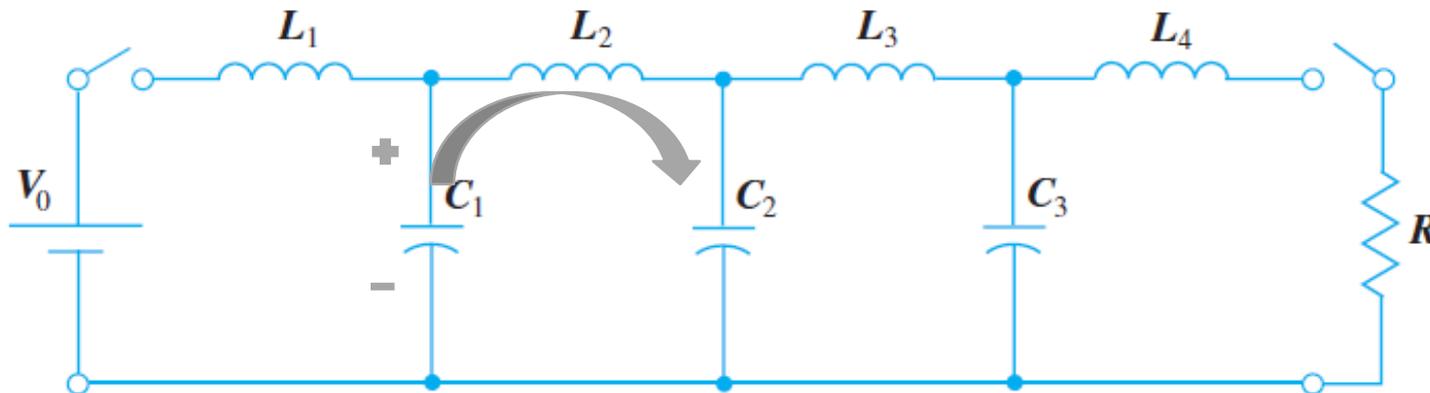
- Para a **LT sem perdas** representada na figura abaixo, $R' = 0$ e $G' = 0$.



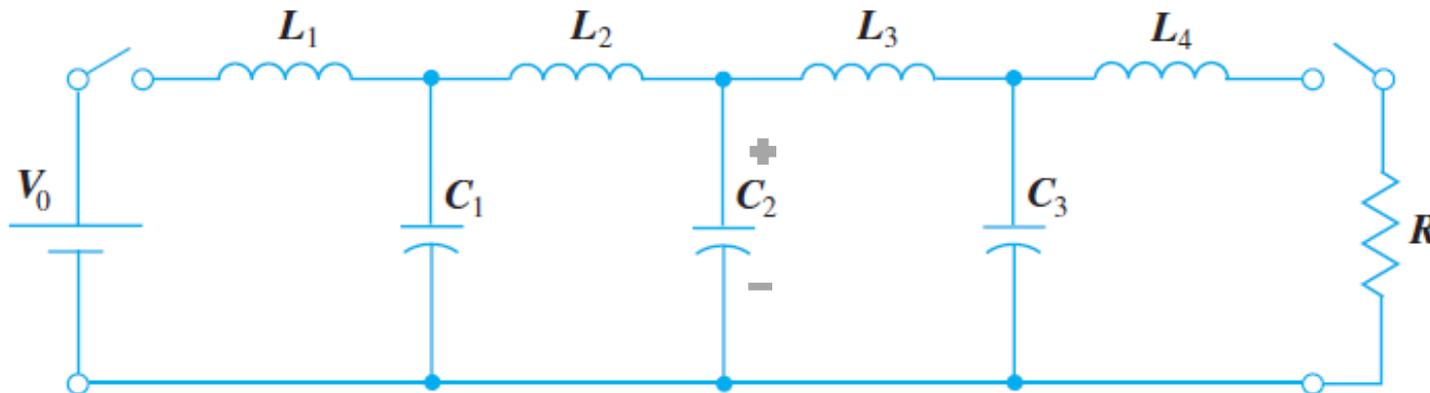
- Para a **LT sem perdas** representada na figura abaixo, $R' = 0$ e $G' = 0$.
- Com o fechamento da chave junto à fonte, a corrente começa a aumentar em L_1 , permitindo que C_1 se carregue.



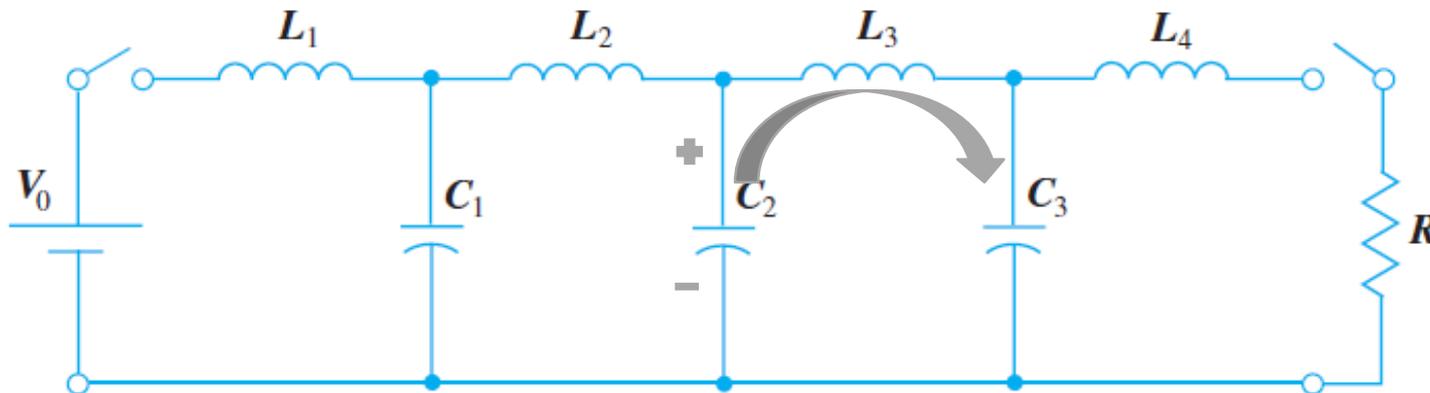
- Para a **LT sem perdas** representada na figura abaixo, $R' = 0$ e $G' = 0$.
- Com o fechamento da chave junto à fonte, a corrente começa a aumentar em L_1 , permitindo que C_1 se carregue.
- À medida que C_1 se aproxima da carga máxima, aumenta a tensão e começa a circular corrente em L_2 , porque C_2 está descarregado.



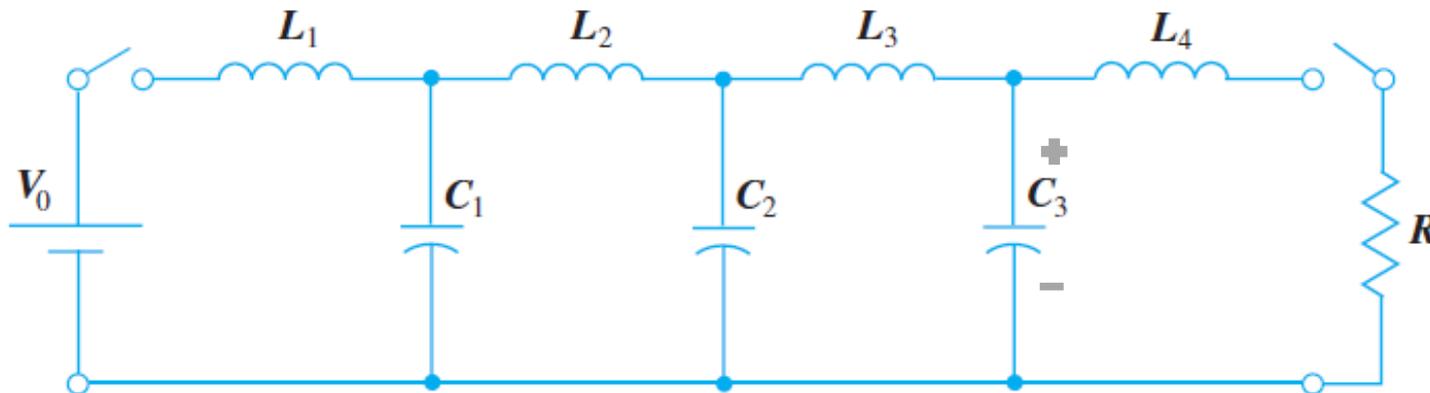
- Para a **LT sem perdas** representada na figura abaixo, $R' = 0$ e $G' = 0$.
- Com o fechamento da chave junto à fonte, a corrente começa a aumentar em L_1 , permitindo que C_1 se carregue.
- À medida que C_1 se aproxima da carga máxima, aumenta a tensão e começa a circular corrente em L_2 , porque C_2 está descarregado.
- Esta corrente carrega C_2 com uma tensão que, à medida que vai subindo faz circular uma corrente de C_2 para C_3 , passando em L_3 , porque C_3 está descarregado, carregando C_3 .



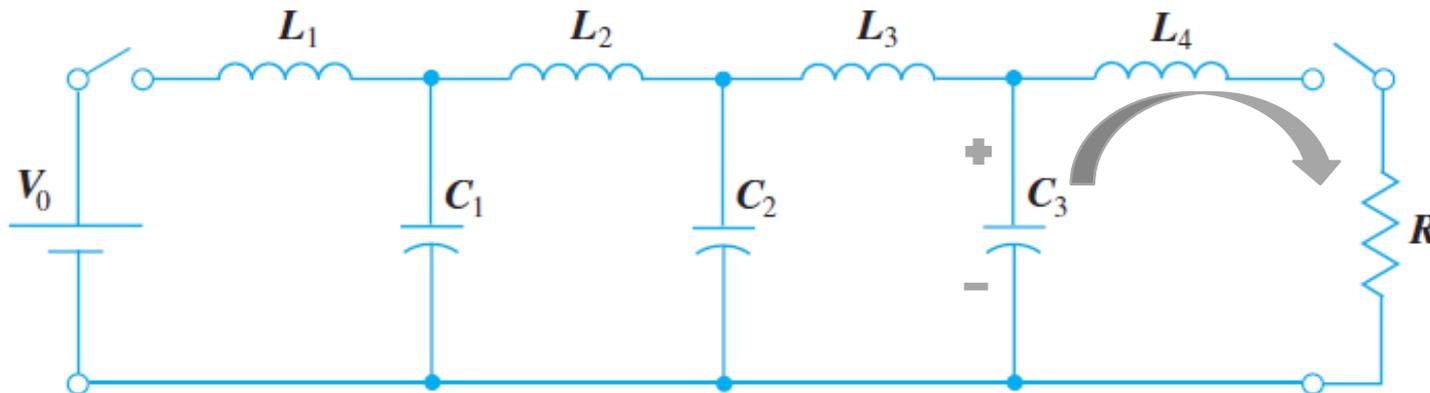
- Para a **LT sem perdas** representada na figura abaixo, $R' = 0$ e $G' = 0$.
- Com o fechamento da chave junto à fonte, a corrente começa a aumentar em L_1 , permitindo que C_1 se carregue.
- À medida que C_1 se aproxima da carga máxima, aumenta a tensão e começa a circular corrente em L_2 , porque C_2 está descarregado.
- Esta corrente carrega C_2 com uma tensão que, à medida que vai subindo faz circular uma corrente de C_2 para C_3 , passando em L_3 , porque C_3 está descarregado, carregando C_3 .



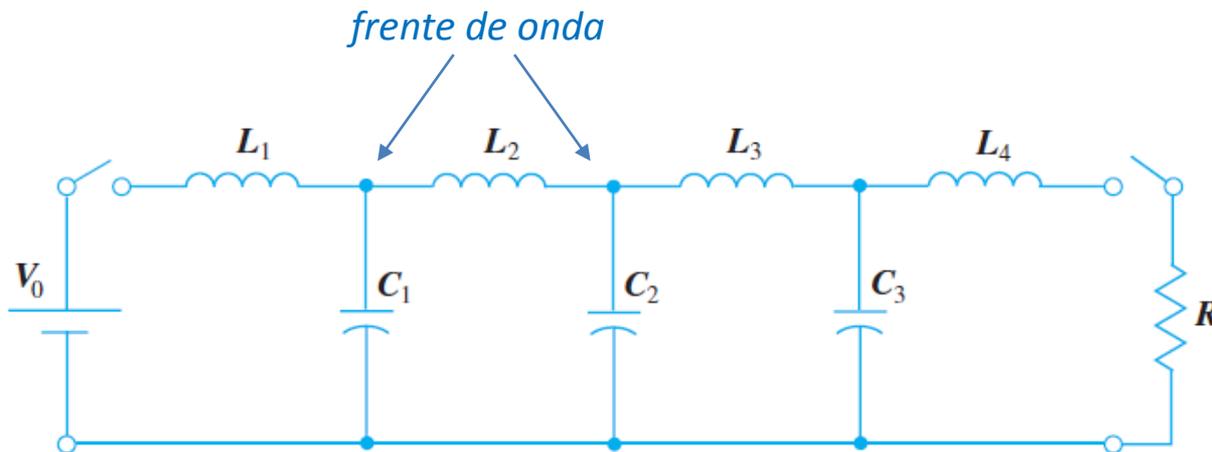
- Para a **LT sem perdas** representada na figura abaixo, $R' = 0$ e $G' = 0$.
- Com o fechamento da chave junto à fonte, a corrente começa a aumentar em L_1 , permitindo que C_1 se carregue.
- À medida que C_1 se aproxima da carga máxima, aumenta a tensão e começa a circular corrente em L_2 , porque C_2 está descarregado.
- Esta corrente carrega C_2 com uma tensão que, à medida que vai subindo faz circular uma corrente de C_2 para C_3 , passando em L_3 , porque C_3 está descarregado, carregando C_3 .
- C_3 começa a descarregar, aparecendo uma tensão que empurra corrente através de L_4 , entregando corrente para a resistência R .



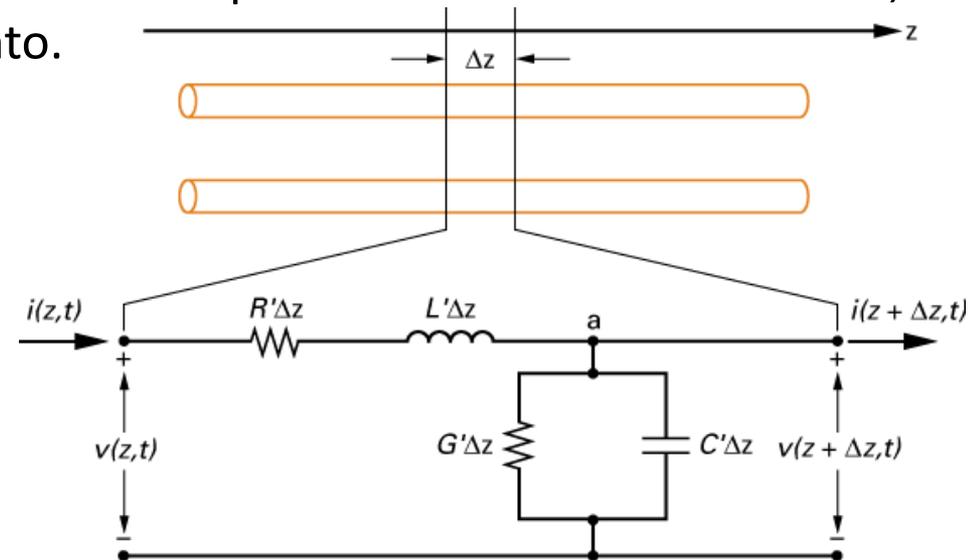
- Para a **LT sem perdas** representada na figura abaixo, $R' = 0$ e $G' = 0$.
- Com o fechamento da chave junto à fonte, a corrente começa a aumentar em L_1 , permitindo que C_1 se carregue.
- À medida que C_1 se aproxima da carga máxima, aumenta a tensão e começa a circular corrente em L_2 , porque C_2 está descarregado.
- Esta corrente carrega C_2 com uma tensão que, à medida que vai subindo faz circular uma corrente de C_2 para C_3 , passando em L_3 , porque C_3 está descarregado, carregando C_3 .
- C_3 começa a descarregar, aparecendo uma tensão que empurra corrente através de L_4 , entregando corrente para a resistência R .



- Na LT, a **localização da frente de onda** pode ser identificada como o ponto entre dois capacitores adjacentes que exibem a maior diferença entre seus níveis de carregamento.
- A **velocidade** depende de quão rápido cada indutor consegue alcançar seu estado de corrente máxima e, simultaneamente, de quão rápido cada capacitor é capaz de se carregar até o máximo de tensão.



- **Sinal de telégrafo:** transmissão de informação através de ondas que se propagam em um par de fios.
- **Equações do Telegrafista:** descrevem a onda (a equação da onda), para tensão e corrente, em linhas de transmissão, assim como a Equação de Helmholtz descreve a equação da onda plana não confinada, para campos elétricos e campos magnéticos.
- Dividindo a tensão encontrada entre os condutores pela distância entre os condutores (afastamento entre eles), teremos o campo elétrico no ponto.
- Dividindo a corrente ao longo dos condutores pelo diâmetro dos condutores, teremos o campo magnético no ponto.



Aplicando a Lei de Kirchhoff da tensão, e recordando que a tensão sobre um indutor está relacionada à taxa de variação da corrente por $v = Ldi/dt$, temos:

$$v(z, t) - v(z + \Delta z, t) = i(z, t)R'\Delta z + L'\Delta z \frac{\partial i(z, t)}{\partial t}$$

Dividindo ambos os membros por Δz e tomando o limite quando Δz tende a zero:

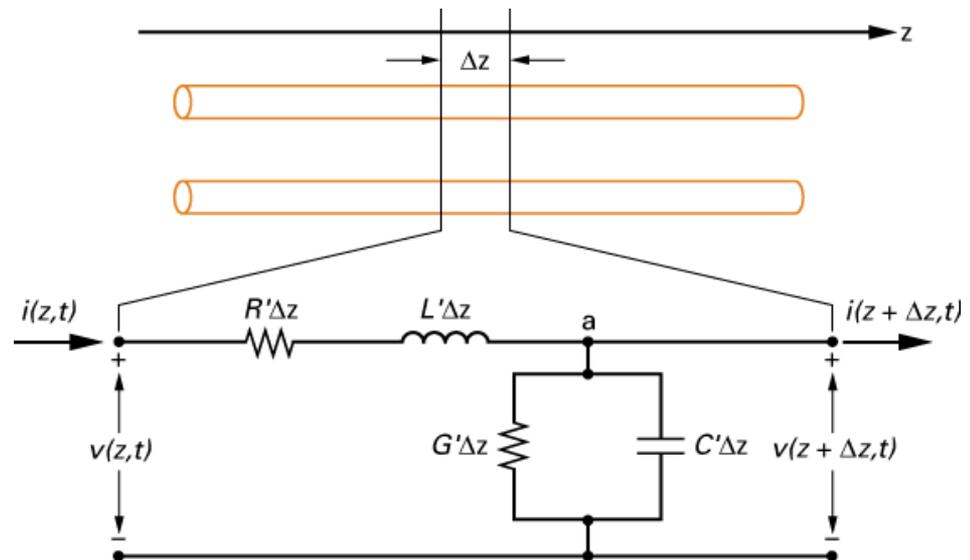
$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{v(z, t) - v(z + \Delta z, t)}{\Delta z} = i(z, t)R' + L' \frac{\partial i(z, t)}{\partial t}$$

Lembrando que, para uma função $f(x)$, a derivada é

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

O limite à esquerda é a própria definição da derivada, logo

$$-\frac{\partial v(z, t)}{\partial z} = i(z, t)R' + L' \frac{\partial i(z, t)}{\partial t}$$

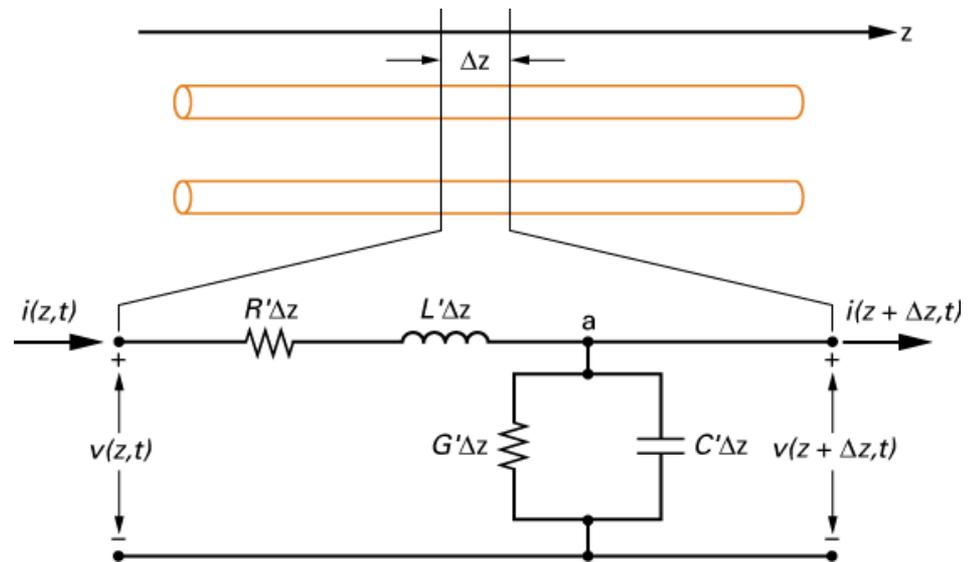


Aplicando a Lei de Kirchhoff da corrente no nó, e recordando que $i = Cdv/dt$ para um capacitor, temos

$$i(z, t) - i(z + \Delta z, t) = v(z + \Delta z, t)G'\Delta z + C'\Delta z \frac{\partial v(z + \Delta z, t)}{\partial t}$$

Dividindo ambos os membros por Δz e tomando o limite quando Δz tende a zero:

$$-\frac{\partial i(z, t)}{\partial z} = v(z, t)G' + C' \frac{\partial v(z, t)}{\partial t}$$



$$-\frac{\partial v(z, t)}{\partial z} = i(z, t)R' + L' \frac{\partial i(z, t)}{\partial t}$$

Uma variação no tempo da corrente i estabelece uma variação no espaço da tensão v , que também varia no tempo.



$$-\frac{\partial i(z, t)}{\partial z} = v(z, t)G' + C' \frac{\partial v(z, t)}{\partial t}$$

Uma variação no tempo da tensão v determina uma variação no espaço da corrente i , que também varia no tempo.

Quem dá origem é a corrente de condução
 $v(z, t)G'$

Equações do Telegrafista:
Equações de Maxwell aplicadas a circuitos.

Para **ondas harmônicas no tempo** (condição de regime permanente senoidal), temos que:

As derivadas temporais podem ser substituídas por $j\omega$.

$$-\frac{\partial v(z, t)}{\partial z} = i(z, t)R' + L' \frac{\partial i(z, t)}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial i(z, t)}{\partial z} = v(z, t)G' + C' \frac{\partial v(z, t)}{\partial t}$$

Portanto, podemos reescrever as equações do telegrafista como:

$$\frac{dV_s(z)}{dz} = -(R' + j\omega L')I_s(z)$$

$$\frac{dI_s(z)}{dz} = -(G' + j\omega C')V_s(z)$$

onde V_s e I_s são fasores.

- Observe que não temos mais derivadas parciais.
- As derivadas parciais envolvem duas variáveis, e a variável tempo foi eliminada do contexto, pois estamos trabalhando com fasores.
- Portanto, restam apenas derivadas espaciais.
- Agora resta resolver as equações em relação às duas incógnitas V_s e I_s .

Para resolver as equações em relação às duas incógnitas V_s e I_s , aplicamos a derivada em ambos os membros da equação (1) ao lado, conforme

$$\frac{dV_s(z)}{dz} = -(R' + j\omega L')I_s(z) \quad (1)$$

$$\frac{dI_s(z)}{dz} = -(G' + j\omega C')V_s(z) \quad (2)$$

$$\frac{d}{dz} \frac{dV_s(z)}{dz} = -\frac{d}{dz}(R' + j\omega L')I_s(z) = -(R' + j\omega L') \frac{dI_s(z)}{dz} \quad (3)$$

Substituindo (2) em (3), temos

$$\frac{d^2V_s(z)}{dz^2} = (R' + j\omega L')(G' + j\omega C')V_s(z)$$

A qual, rearranjando, resulta em

$$\frac{d^2V_s(z)}{dz^2} - \gamma^2 V_s(z) = 0, \text{ onde } \gamma \text{ é a constante de propagação, assim definida:}$$

$$\gamma = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} = \alpha + j\beta$$

(Atenuação) (Giro de Fase)

Da mesma forma que determinamos $\longrightarrow \frac{d^2 V_s(z)}{dz^2} - \gamma^2 V_s(z) = 0 \quad (4)$

podemos determinar $\longrightarrow \frac{d^2 I_s(z)}{dz^2} - \gamma^2 I_s(z) = 0 \quad (5)$

Buscamos agora, a solução para as equações diferenciais (4) e (5), acima:

- As funções V_s e I_s que buscamos como solução para as equações diferenciais têm que ser tais que a própria função e sua derivada de ordem dois sejam iguais (mantenham a mesma forma funcional entre si), de modo que, ao efetuarmos a subtração entre os termos, resulte zero.
- A função que é solução das equações diferenciais será, portanto, uma exponencial.

Aplicando o Teorema da Superposição às duas soluções independentes para as equações diferenciais, temos

$$V_s(z) = V_0^+ e^{-\gamma z} + V_0^- e^{+\gamma z}$$

$$I_s(z) = I_0^+ e^{-\gamma z} + I_0^- e^{+\gamma z}$$



Onda se
propagando no
sentido do eixo z



Onda se
propagando no
sentido contrário do eixo z

onde:

V_0^+ é o fasor da onda de tensão que se propaga na direção +z,

V_0^- é o fasor da onda de tensão que se propaga na direção -z,

I_0^+ é o fasor da onda de corrente que se propaga na direção +z,

I_0^- é o fasor da onda de corrente que se propaga na direção -z

Os valores dos fasores, na coordenada $z = 0$ são:

$$V_0^+ = |V_0^+| e^{j\phi^+}, I_0^+ = |I_0^+| e^{j\phi^+}, V_0^- = |V_0^-| e^{j\phi^-}, I_0^- = |I_0^-| e^{j\phi^-}$$

Equações de duas ondas se propagando nos sentidos positivo e negativo do eixo z

$$V_s(z) = V_0^+ e^{-\gamma z} + V_0^- e^{+\gamma z}$$

$$I_s(z) = I_0^+ e^{-\gamma z} + I_0^- e^{+\gamma z}$$

$$V_s(z) = V_0^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} + V_0^- e^{+\alpha z} e^{+j\beta z}$$

$$I_s(z) = I_0^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} + I_0^- e^{+\alpha z} e^{+j\beta z}$$

Restaurando o domínio tempo nas equações fasoriais, temos:

$$v(z, t) = V_0^+ e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \phi^+) + V_0^- e^{+\alpha z} \cos(\omega t + \beta z + \phi^-)$$

$$i(z, t) = I_0^+ e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \phi^+) + I_0^- e^{+\alpha z} \cos(\omega t + \beta z + \phi^-)$$

onde ϕ^+ e ϕ^- são os ângulos da tensão complexa V_0^+ e V_0^- .

A **impedância característica** Z_0 é definida como a razão entre a amplitude da onda de tensão positiva e a amplitude de onda de corrente positiva, em qualquer ponto da linha, ou seja,

$$Z_0 = \frac{V_0^+}{I_0^+} .$$

Se V_0^+ e I_0^+ estiverem fora de fase, Z_0 é complexa.

Se a linha é sem perdas, Z_0 é real.

Podemos relacionar Z_0 aos parâmetros distribuídos, inserindo as equações da onda em uma das Equações do Telegrafista, na forma fasorial.

Assim, substituindo $V_S(z) = V_0^+ e^{-\gamma z} + V_0^- e^{+\gamma z}$ e $I_S(z) = I_0^+ e^{-\gamma z} + I_0^- e^{+\gamma z}$

na equação (1), $\frac{dV_S(z)}{dz} = -(R' + j\omega L')I_S(z)$, temos

$$\frac{d}{dz} (V_0^+ e^{-\gamma z} + V_0^- e^{+\gamma z}) = -(R' + j\omega L')(I_0^+ e^{-\gamma z} + I_0^- e^{+\gamma z})$$

Determinando a derivada, temos

$$-\gamma V_0^+ e^{-\gamma z} + \gamma V_0^- e^{+\gamma z} = -(R' + j\omega L')(I_0^+ e^{-\gamma z} + I_0^- e^{+\gamma z})$$

$$-\gamma V_0^+ e^{-\gamma z} + \gamma V_0^- e^{+\gamma z} = -(R' + j\omega L')(I_0^+ e^{-\gamma z} + I_0^- e^{+\gamma z})$$

Distribuindo os produtos na equação acima, temos

$$\underbrace{-\gamma V_0^+ e^{-\gamma z}} + \gamma V_0^- e^{+\gamma z} = \underbrace{-R' I_0^+ e^{-\gamma z}} - \underbrace{j\omega L' I_0^+ e^{-\gamma z}} - R' I_0^- e^{+\gamma z} - j\omega L' I_0^- e^{+\gamma z}$$

Igualando os termos em $e^{-\gamma z}$ em cada um dos lados da equação acima, temos

$$-\gamma V_0^+ e^{-\gamma z} = -R' I_0^+ e^{-\gamma z} - j\omega L' I_0^+ e^{-\gamma z} = (-R' I_0^+ - j\omega L' I_0^+) e^{-\gamma z}$$

De tal forma que

$$\frac{V_0^+}{I_0^+} = \frac{-R' - j\omega L'}{-\gamma} \quad \text{e, portanto,}$$

$$Z_0 = \frac{V_0^+}{I_0^+} = \frac{R' + j\omega L'}{\gamma}$$

De forma alternativa, igualando os termos em $e^{+\gamma z}$ em cada um dos lados da equação abaixo

$$-\gamma V_0^+ e^{-\gamma z} + \underbrace{\gamma V_0^- e^{+\gamma z}} = -R' I_0^+ e^{-\gamma z} - j\omega L' I_0^+ e^{-\gamma z} - \underbrace{R' I_0^- e^{+\gamma z}} - \underbrace{j\omega L' I_0^- e^{+\gamma z}}$$

temos

$$\cancel{\gamma V_0^- e^{+\gamma z}} = -R' I_0^- e^{+\gamma z} - j\omega L' I_0^- e^{+\gamma z} = (-R' I_0^- - j\omega L' I_0^-) \cancel{e^{+\gamma z}}$$

de onde,

$$\frac{V_0^-}{I_0^-} = \frac{-R' - j\omega L'}{\gamma} \quad \text{e, portanto,}$$

$$Z_0 = \frac{-V_0^-}{I_0^-} = \frac{R' + j\omega L'}{\gamma}$$

Substituindo $\gamma = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')}$

$$\text{em } Z_0 = \frac{R' + j\omega L'}{\gamma}$$

obtemos a expressão para a **Impedância Característica** em função dos parâmetros distribuídos em série:

R' (Resistência/metro) e **L'** (indutância/metro)

e dos parâmetros distribuídos em paralelo:

G' (condutância/metro) e **C'** (capacitância/metro),

conforme

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}}$$

Considerando que $\frac{V(z)}{I(z)}$ é a impedância,

podemos redefinir $I(z)$ como

$$I(z) = \frac{1}{Z_0} (V_0^+ e^{-\gamma z} - V_0^- e^{+\gamma z})$$

ou, ainda,

$$I(z) = \frac{V_0^+}{Z_0} e^{-\gamma z} - \frac{V_0^-}{Z_0} e^{+\gamma z}$$

O **comprimento de onda** na LT (λ_g) é dado por

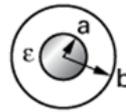
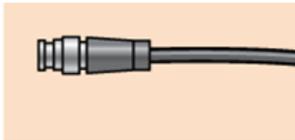
$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta}$$

E a **velocidade de fase** na LT é definida como

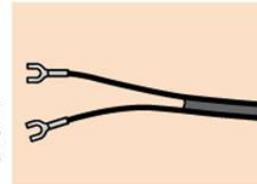
$$u_p = \frac{\omega}{\beta} = \lambda_g f$$

Linhas de Transmissão

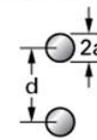
Linha coaxial



Fita de condutores gêmeos



Corte transversal



Parâmetros distribuídos a frequências elevadas

Unidades	Cabo coaxial	Cabo de condutores gêmeos
R'	$\frac{\Omega}{m}$	$\frac{1}{a} \sqrt{\frac{f\mu}{\sigma_c}} = \frac{R_s}{\pi a}$
L'	$\frac{H}{m}$	$\frac{\mu}{\pi} \cosh^{-1}\left(\frac{d}{2a}\right)$
G'	$\frac{S}{m}$	$\frac{\pi\sigma_d}{\cosh^{-1}(d/2a)} = \frac{\pi\omega\epsilon''}{\cosh^{-1}(D/2a)}$
C'	$\frac{F}{m}$	$\frac{\pi\epsilon}{\cosh^{-1}(d/2a)}$

σ_c - condutividade do condutor

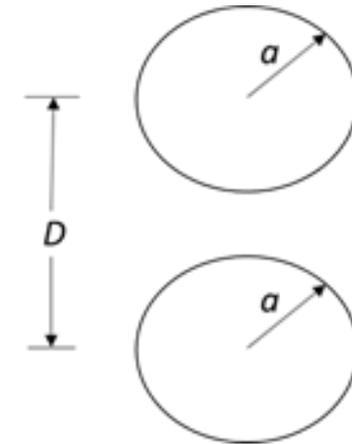
σ_d - condutividade do dielétrico

ϵ'' - $\epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot \tan\delta$

$R_s = \frac{1}{\sigma \cdot \delta}$ onde R_s é a resistência de superfície dos condutores
 δ é a profundidade pelicular

Uma onda eletromagnética de frequência 2.4 GHz propaga-se ao longo de uma linha de transmissão paralela (*twin wire*) que conecta um transmissor a uma antena.

O raio dos condutores cilíndricos que formam a linha é $a = 1.0\text{mm}$ e a distância entre os centros dos condutores paralelos é $D = 12.21\text{mm}$, conforme mostra a figura ao lado.



Sabendo que o material dos condutores é o cobre ($\sigma = 5.813 \times 10^7 \text{ S/m}$) e que o material dielétrico que preenche o espaço entre os dois condutores é o polietileno ($\epsilon_r = 2.25$, $\tan \delta = 0.0004$), determine:

- A **impedância característica** da linha de transmissão.
- A **constante de propagação da onda eletromagnética** que se propaga na linha.
- A **velocidade de fase da onda**.
- O **comprimento entre dois pontos de máximo da onda de tensão** que se propaga na direção $z+$.
- A **atenuação** em dB/m desta linha de transmissão.

Solução:

$f := 2.4\text{GHz}$ → frequência de operação da linha de transmissão (dado no enunciado)

$D := 12.21\text{mm}$ → distância entre os centros dos dois condutores cilíndricos que formam a linha paralela (linha *two wire* na Tabela do slide 34 das notas de aula - Ondas e Linhas V).

$a := 1.0\text{mm}$ → raio do condutor cilíndrico (dado no enunciado)

$\epsilon_0 := 8.8542 \times 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$ → permissividade elétrica do espaço livre

$\mu_0 := 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$ → permeabilidade magnética do espaço livre

$\epsilon_r := 2.25$

$\tan\delta := 0.0004$ → tangente de perdas

$\sigma := 5.81310^7 \frac{\text{S}}{\text{m}}$ → condutividade elétrica dos condutores

Da Tabela do slide 34 das notas de aula, para a linha *two wire*:

$$L := \frac{\mu_0}{\pi} \cdot \operatorname{acosh}\left(\frac{D}{2 \cdot a}\right) \quad L = 9.982 \times 10^{-7} \cdot \frac{\text{H}}{\text{m}}$$

$$\epsilon_l := \epsilon_r \cdot \epsilon_0$$

$$C := \frac{\pi \cdot \epsilon_l}{\operatorname{acosh}\left(\frac{D}{2 \cdot a}\right)} \quad C = 2.508 \times 10^{-11} \cdot \frac{\text{F}}{\text{m}}$$

$$\delta_s := \sqrt{\frac{1}{\pi f \cdot \mu_0 \cdot \sigma}}$$

$$\delta_s = 1.347 \times 10^{-6} \text{ m} \quad \rightarrow \text{Eq da profundidade pelicular}$$

$$R_s := \frac{1}{\sigma \cdot \delta_s}$$

$$R_s = 0.013 \Omega \quad \rightarrow \text{Resistência superficial do condutor}$$

$$R := \frac{R_s}{\pi \cdot a}$$

$$R = 4.064 \cdot \frac{\Omega}{\text{m}}$$

$\epsilon_{11} := \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot \tan \delta \rightarrow \epsilon''$ (parte imaginária da permissividade complexa do material)

$$G := \frac{2\pi^2 \cdot f \cdot \epsilon_{11}}{\operatorname{acosh}\left(\frac{D}{2 \cdot a}\right)} \quad G = 1.513 \times 10^{-4} \cdot \frac{\text{S}}{\text{m}}$$

a) $\omega := 2 \cdot \pi \cdot f$

$$Z_o := \sqrt{\frac{R + j \cdot \omega \cdot L}{G + j \cdot \omega \cdot C}} \quad Z_o = (199.5 + 0.013i) \Omega \rightarrow \text{Eq para impedância característica da linha.}$$

b)

$$\gamma := \sqrt{(R + j \cdot \omega \cdot L) \cdot (G + j \cdot \omega \cdot C)} \quad \gamma = (0.025 + 75.45i) \frac{1}{\text{m}}$$

→ Eq para constante de propagação da onda na linha.

c)

$$\beta := \text{Im}(\gamma) \quad \beta = 75.45 \cdot \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

$$v_p := \frac{\omega}{\beta} \quad v_p = 1.999 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \rightarrow \text{Eq para velocidade de fase da onda que se propaga na linha.}$$

d)

$$\lambda := \frac{2 \cdot \pi}{\beta} \quad \lambda = 0.083 \text{ m} \quad \rightarrow \text{Eq para comprimento de onda da onda guiada que se propaga na linha.}$$

e)

$$\alpha := \text{Re}(\gamma) \quad \alpha = 0.025 \frac{1}{\text{m}} \quad [\text{Np/m}]$$

O fator de conversão de Np/m para dB/m é 8.686 dB/Np .

Daí, obtemos α em dB/m multiplicando α em Np/m pelo fator de conversão 8.686 dB/Np:

$$\alpha_{\text{dB}} := \alpha \cdot 8.686 \quad \alpha_{\text{dB}} = 0.22 \frac{1}{\text{m}} \quad [\text{dB/m}]$$