Módulo II – Linhas de Transmissão

Linhas sem Perdas

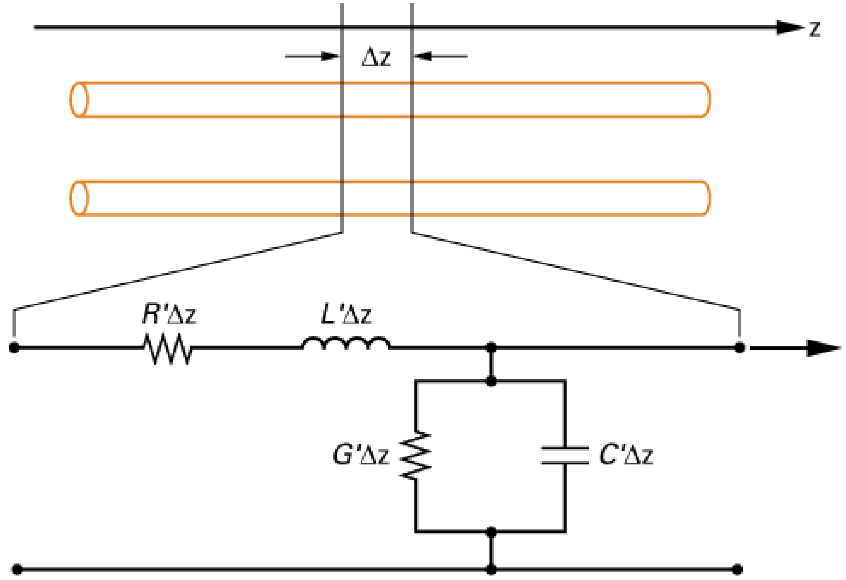
LTs Terminadas

Impedância de Entrada

Terminações especiais

LTs com tamanhos especiais

- As linhas de transmissão disponíveis comercialmente são feitas com bons condutores (como o cobre, por exemplo), de modo que as perdas ôhmicas tendem a ser muito pequenas (R’ tende a ser pequeno em relação a ωL’).
- Estas linhas também são feitas com bons dielétricos (como o teflon e o polietileno, por exemplo), de modo que as perdas no dielétrico tendem a ser muito pequenas (G’ tende a ser pequeno em relação a ωC’).
- Nos casos em que R´ e G’ são desprezíveis, as linhas de transmissão são consideradas linhas sem perdas.



- Para Linhas de Transmissão, a constante de propagação é dada por

$$\gamma = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} = \alpha + j\beta$$

para o caso descrito, se R'<<ωL' e G'<<ωC', podemos assumir R' desprezível com relação a $j\omega L'$ e G' desprezível com relação a $j\omega C'$, de tal forma que $\gamma = j\omega\sqrt{L'C'} = \alpha + j\beta$, com α = 0 e $\beta = \omega\sqrt{L'C'}$.

- A velocidade de fase é dada por $u_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L'C'}}$

- O comprimento de onda é dado por $\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{L'C'}}$

- O fator de velocidade é dado por $p = \frac{u_p}{c}$

O fator de velocidade dá a relação entre a velocidade com que a onda guiada se propaga na linha de transmissão e a velocidade da luz.

$$V_s(z) = V_0{}^{+}e^{-\gamma z} + V_0{}^{-}e^{+\gamma z}$$

$$I_s(z) = I_0{}^{+}e^{-\gamma z} + I_0{}^{-}e^{+\gamma z}$$

Expressão fasorial da tensão e da corrente em uma LT

$$V_s(z) = V_0{}^{+}e^{-\alpha z}e^{-j\beta z} + V_0{}^{-}e^{+\alpha z}e^{+j\beta z}$$

$$I_s(z) = I_0{}^{+}e^{-\alpha z}e^{-j\beta z} + I_0{}^{-}e^{+\alpha z}e^{+j\beta z}$$

(α = 0)

Expressão fasorial da tensão e da corrente em uma LT sem perdas

$$V_s(z) = V_0{}^{+}e^{-j\beta z} + V_0{}^{-}e^{+j\beta z}$$

$$I_s(z) = \frac{V_0{}^{+}}{Z_0}e^{-j\beta z} - \frac{V_0{}^{-}}{Z_0}e^{+j\beta z}$$

Restaurando o domínio tempo nas equações fasoriais, para uma onda se propagando em uma LT obtivemos:

$$v(z,t) = {V_0}^{+} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \phi^{+}) + {V_0}^{-} e^{+\alpha z} \cos(\omega t + \beta z + \phi^{-})$$

$$i(z,t) = {I_0}^{+} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \phi^{+}) + {I_0}^{-} e^{+\alpha z} \cos(\omega t + \beta z + \phi^{-})$$

onde ϕ^{+} e ϕ^{-} são os ângulos da tensão complexa ${V_0}^{+}$ e ${V_0}^{-}$.

A forma instantânea de uma onda se propagando em uma linha de transmissão sem perdas é, então, dada por:

$$\boxed{\begin{aligned} v(z,t) &= {V_0}^{+} \cos(\omega t - \beta z + \phi^{+}) + {V_0}^{-} \cos(\omega t + \beta z + \phi^{-}) \\ i(z,t) &= \frac{{V_0}^{+}}{Z_0} \cos(\omega t - \beta z + \phi^{+}) - \frac{{V_0}^{-}}{Z_0} \cos(\omega t + \beta z + \phi^{-}) \end{aligned}}$$

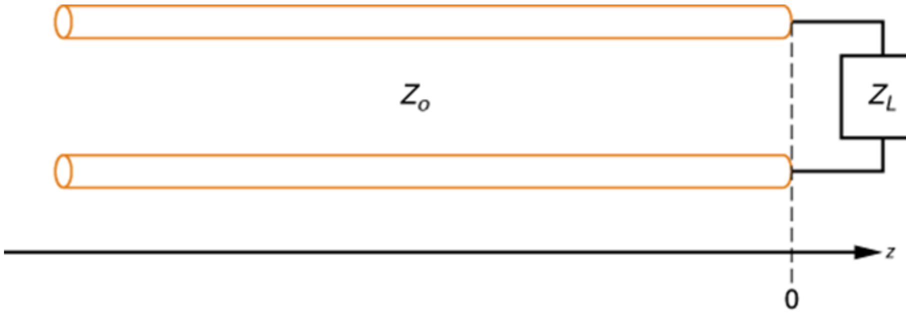
A expressão para a impedância característica em função dos parâmetros distribuídos em série e dos parâmetros distribuídos em paralelo de uma LT, anteriormente derivada, e dada por

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} \ ,$$

Considerando R’ desprezível com relação a $j\omega L'$, e G’ desprezível com relação a $j\omega C'$, obtemos a expressão para a impedância característica de uma linha sem perdas, conforme

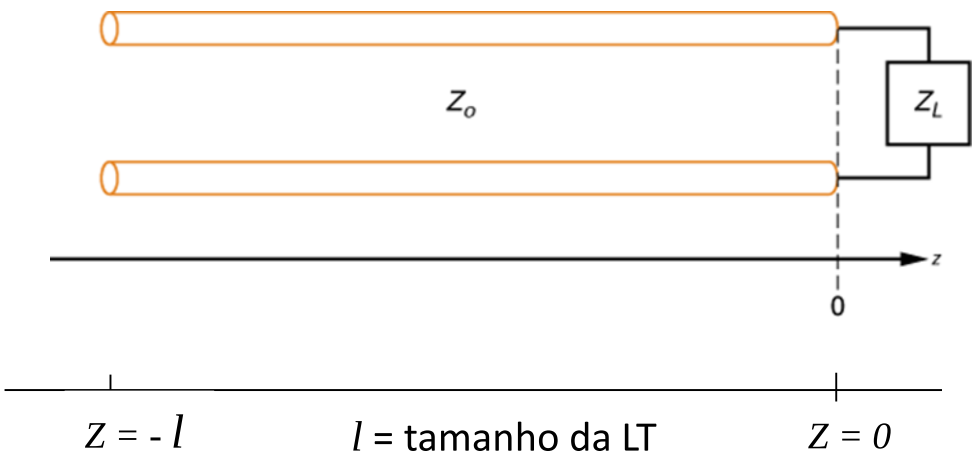
$$Z_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \ .$$

- A grande maioria dos problemas a serem considerados no estudo de linhas de transmissão está relacionada à impedância em que a linha é terminada.
- A carga (Z_L) é considerada um elemento concentrado, por ser pequena em comparação ao comprimento de onda.
- Os fios que conectam a linha à carga são considerados insignificantemente pequenos.



A carga Z_L pode ser expressa por

$$Z_L = \frac{V_S(z=0)}{I_S(z=0)}$$



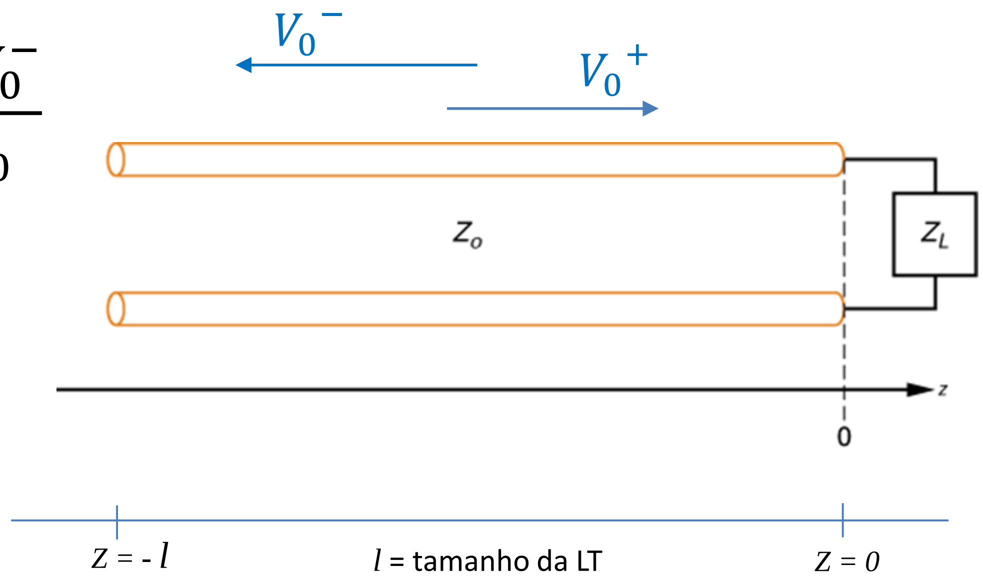
Substituindo V_S e I_S expressos por

$$V_s(z) = V_0^{\ +} e^{-j\beta z} + V_0^{\ -} e^{+j\beta z} \quad \text{e} \quad I_s(z) = I_0^{\ +} e^{-j\beta z} + I_0^{\ -} e^{+j\beta z}$$

na expressão para Z_L , obtemos

$$Z_L = \frac{V_0^{\ +} e^{-j\beta z} + V_0^{\ -} e^{+j\beta z}}{I_0^{\ +} e^{-j\beta z} + I_0^{\ -} e^{+j\beta z}} = \frac{V_0^{\ +} e^{-j\beta(0)} + V_0^{\ -} e^{+j\beta(0)}}{I_0^{\ +} e^{-j\beta(0)} + I_0^{\ -} e^{+j\beta(0)}} = \frac{V_0^{\ +} + V_0^{\ -}}{I_0^{\ +} + I_0^{\ -}}$$

Substituindo $I_0^+ = \dfrac{V_0^+}{Z_0}$ e $I_0^- = \dfrac{-V_0^-}{Z_0}$



em $Z_L = \dfrac{V_0^+ + V_0^-}{I_0^+ + I_0^-}$

obtemos $Z_L = \dfrac{V_0^+ + V_0^-}{\dfrac{V_0^+}{Z_0} - \dfrac{V_0^-}{Z_0}}$

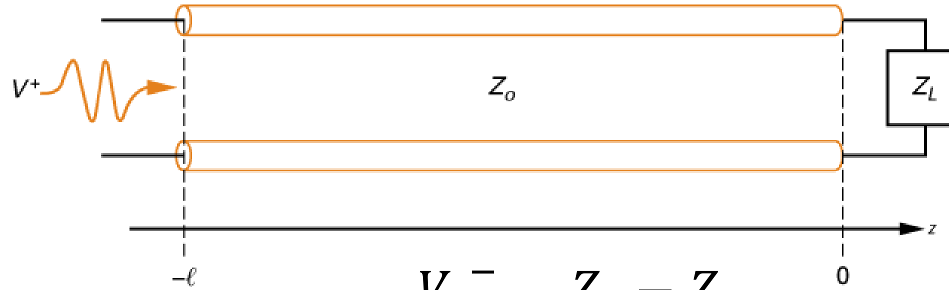
que pode ser rearranjada como $V_0^- = \dfrac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} V_0^+$

A razão V_0^-/V_0^+ expressa a relação entre a onda refletida e a onda incidente na carga, e é denominada coeficiente de reflexão na carga Γ_L.

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

Γ_L expressa a parcela da onda incidente que se reflete de volta, quando encontra descontinuidade na carga.

O coeficiente de reflexão na carga expressa a relação entre a onda refletida e a onda incidente na carga.



A partir da expressão para Γ_L , podemos notar que:

$$\Gamma_L = \frac{V_0^{\ -}}{V_0^{\ +}} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

- Se $Z_L \neq Z_o$ haverá onda refletida;
- Se $Z_L = Z_o, \Gamma_L = 0$ (toda onda incidente é entregue para a carga – carga casada);
- Se Z_L é pequena, $Z_L \rightarrow 0, \Gamma_L \rightarrow -1$ ($Z_L = 1\angle 180$);
- Se Z_L é grande, $Z_L \rightarrow \infty, \Gamma_L \rightarrow 1$ ($Z_L = 1\angle 0$)

- Em geral, o coeficiente de reflexão em qualquer ponto ao longo de uma LT é definido pela razão da onda refletida pela onda incidente:

onda refletida

$$\Gamma = \frac{V_0^{\ -} e^{+j\beta z}}{V_0^{\ +} e^{-j\beta z}} = \Gamma_L e^{+2j\beta z}$$

onda incidente

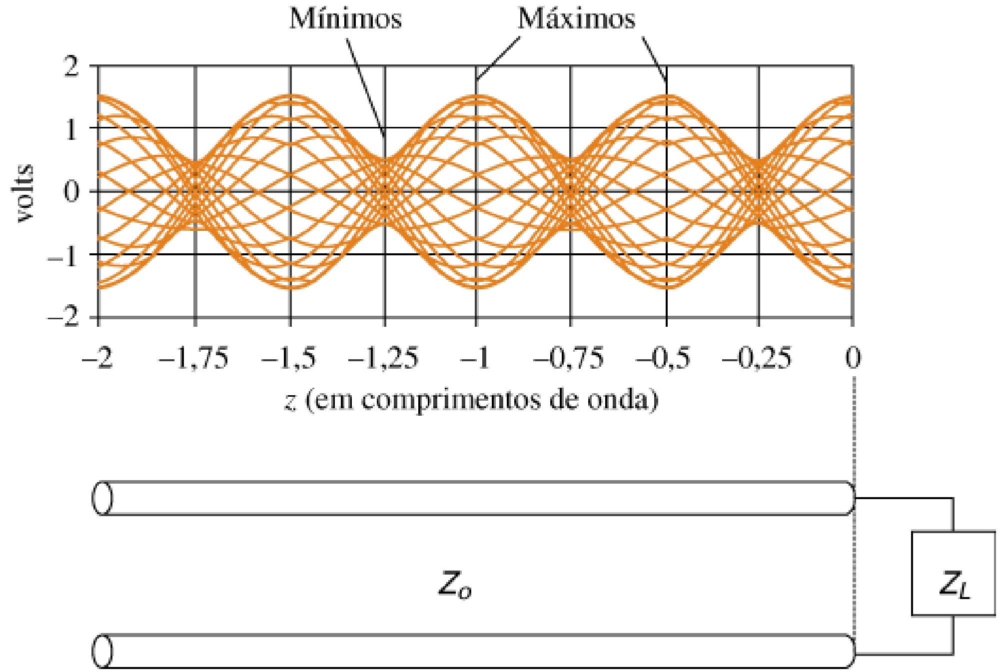
A tensão e a corrente em uma linha de transmissão são dadas por

$$V_s(z) = V_0^+(e^{-j\beta z} + \Gamma_L e^{j\beta z}) \qquad I_s(z) = \frac{V_0^+}{Z_0}(e^{-j\beta z} - \Gamma_L e^{+j\beta z})$$

Ou seja, tensões e correntes em uma LT consistem da superposição das ondas de tensão e corrente incidentes e refletidas.

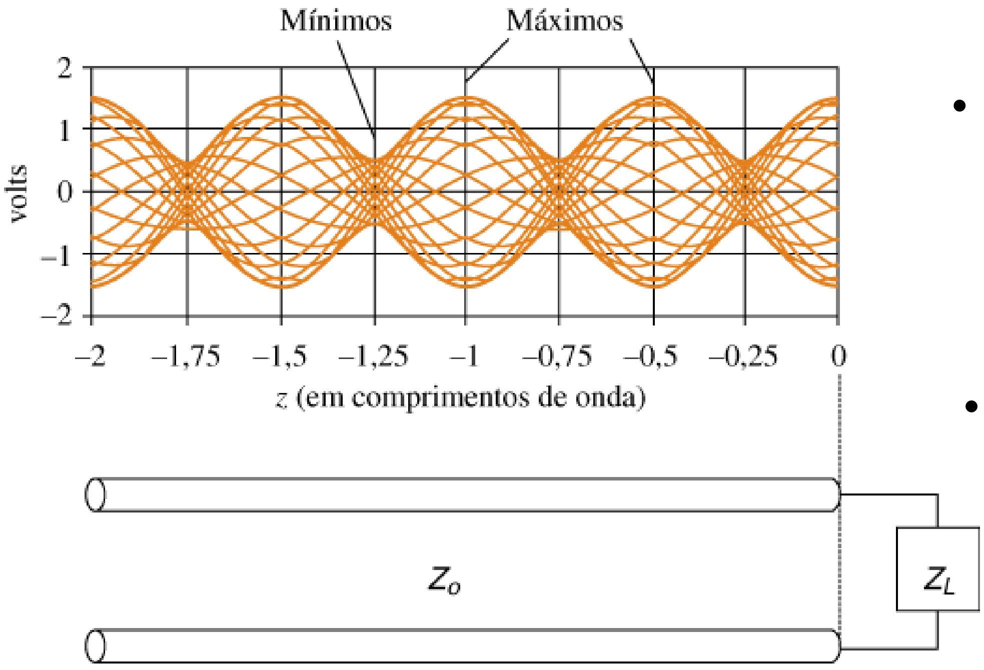
Estas ondas incidentes e refletidas se interferem, ora construtivamente, ora destrutivamente.

A superposição gera um padrão de onda estacionária, conforme figura ao lado.



A Relação de Onda Estacionária é dada por $ROE = \frac{V_{max}}{V_{mín}} = \frac{1+|\Gamma_L|}{1-|\Gamma_L|}$

- A ROE informa a qualidade da terminação.
- Uma carga perfeitamente casada leva a uma ROE de exatamente 1 ($\Gamma_L = 0$).
- Uma carga totalmente refletora leva a uma ROE infinita ($\Gamma_L = 1$) .



- O valor máximo da onda estacionária de tensão ao longo da LT é

$$V_{max} = |V_0^{\ +}|(1 + |\Gamma_L|)$$

- O valor mínimo da onda estacionária de tensão ao longo da LT

$$V_{min} = |V_0^{\ +}|(1 - |\Gamma_L|)$$

Para uma LT sem perdas terminada, a potência média ao longo de z é dada por

$$P_{ave}(z) = \frac{1}{2} Re[V_S\, I_S^*]$$

$V_S\, I_S^* = potência\ complexa$

Substituindo

$$V_s(z) = {V_0}^+(e^{-j\beta z} + \Gamma_L e^{j\beta z}) \quad \text{e} \quad I_s(z) = \frac{{V_0}^+}{Z_0}(e^{-j\beta z} - \Gamma_L e^{+j\beta z})$$

na equação para $P_{ave}(z)$, obtemos

$$P_{ave} = \frac{1}{2}\frac{\left|{V_0}^+\right|^2}{Z_0} Re\,(1 - {\Gamma_L}^* e^{-2j\beta z} + \Gamma_L e^{2j\beta z} - |\Gamma_L|^2)$$

que pode ser simplificada, resultando em

$$P_{ave} = \frac{1}{2}\frac{\left|{V_0}^+\right|^2}{Z_0}\,(1 - |\Gamma_L|^2)$$

Potência média para LT sem perdas

Podemos notar, a partir da análise da expressão para determinar a potência média para linhas de transmissão sem perdas, que:

$$P_{ave} = \frac{1}{2}\frac{\left|V_0{}^{+}\right|^2}{Z_0}\left(1 - |\Gamma_L|^2\right)$$

- A potência média é constante em qualquer ponto de uma linha sem perdas;
- A potência entregue à carga é igual à potência da onda incidente ($|V^+|^2/2Z_0$) menos a potência da onda refletida ($|V^+|^2|\Gamma_L|^2/2Z_0$);
- Se $|\Gamma_L| = 0$, acontece a máxima transferência de potência à carga;
- Se $|\Gamma_L| = 1$, nenhuma potência é entregue à carga.

- Quando a carga não é casada com a linha de transmissão, parte da potência do gerador não é entregue à carga.

- Esta perda é chamada de perda de retorno (*return loss*), e é definida (em dB) por

$$\mathrm{RL} = -20\log(|\Gamma_L|)\ \mathrm{dB}.$$

Devemos notar que a perda de retorno "é do contra". Ou seja, nosso objetivo é entregar potência à carga, então:

- Se $Z_L = Z_0,\ |\Gamma_L| = 0$ e $\mathrm{RL} = \infty\mathrm{dB}$

  Se não existe potência refletida, e tudo é entregue à carga, a RL não gosta, e considera sua perda "pessoal" infinita, já que nosso objetivo foi atingido.

- Se $|\Gamma_L| = 1,\ \mathrm{RL} = 0\mathrm{dB}$

  Se toda potência incidente é refletida, e nada é entregue à carga, a RL fica feliz, e considera sua perda "pessoal" nula, já que nosso objetivo não foi atingido.

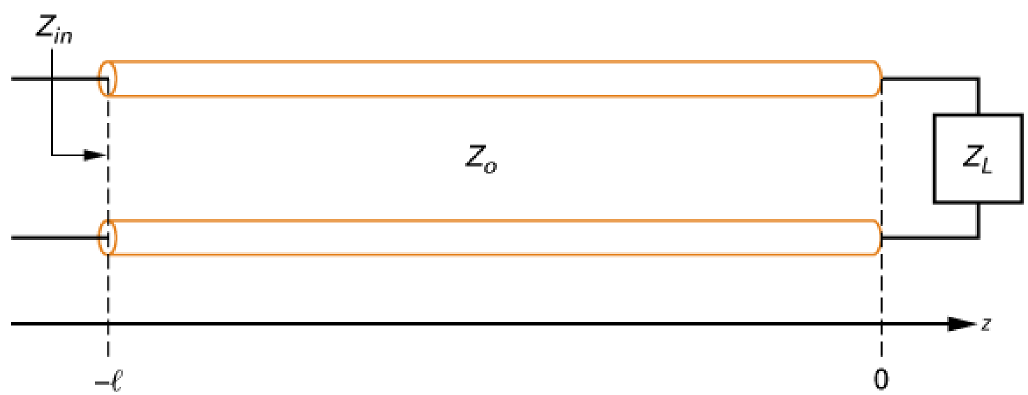
A impedância de entrada de uma LT (Z_{in}) é dada pela razão entre a tensão total e a corrente total.

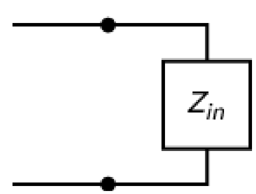
Para $z = -l$, Z_{in} é

$$Z_{in} = \frac{V_S(z=-l)}{I_S(z=-l)} = \frac{V_0^+ e^{+j\beta l} + V_0^- e^{-j\beta l}}{V_0^+ e^{+j\beta l} - V_0^- e^{-j\beta l}} Z_0$$

A expressão para Z_{in} também pode ser escrita como

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 tg(\beta l)}{Z_0 + jZ_L tg(\beta l)}$$





A LT terminada pode ser substituída por um elemento concentrado equivalente, Z_{in}.

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 tg(\beta l)}{Z_0 + jZ_L tg(\beta l)}$$

- Esta equação é conhecida como Equação da Impedância da LT.
- Z_{in} e Z_L se referem à onda estacionária (razão entre as tensões e correntes totais (onda incidente + onda refletida) na entrada e na saída da LT;
- Z_0 está relacionada à razão entre a tensão e a corrente das ondas que se movimentam na LT (onda incidente ou onda refletida);
- Z_{in} expressa a impedância de entrada da linha de transmissão, na presença de uma impedância de carga arbitrária.

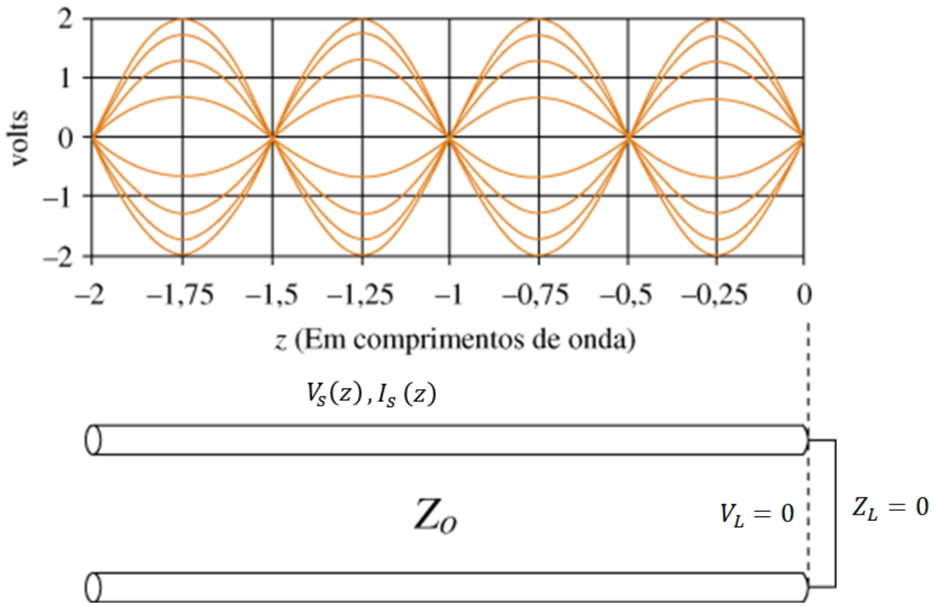
Como a tensão no curto deve ser zero, fazemos $V_s(z=0)=0$.

$$V_s(z) = {V_0}^{+} e^{-j\beta z} + {V_0}^{-} e^{+j\beta z},$$

$$V_s(0) = {V_0}^{+} e^{-j\beta (0)} + {V_0}^{-} e^{+j\beta (0)} = 0,$$

de onde ${V_0}^{+} = -{V_0}^{-}$ e, portanto,

$$Z_L = \frac{{V_0}^{+} + {V_0}^{-}}{{I_0}^{+} + {I_0}^{-}} = 0.$$



Assim, $\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = -1$ e $ROE = \frac{V_{max}}{V_{mín}} = \frac{1+|\Gamma_L|}{1-|\Gamma_L|} = \infty$

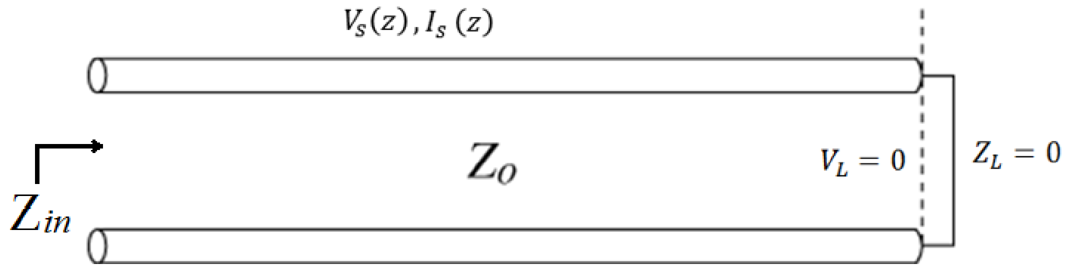
A impedância de entrada para um comprimento arbitrário l da linha terminada em curto é dada por

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 tg(\beta l)}{Z_0 + jZ_L tg(\beta l)} \longrightarrow Z_{in} = Z_0 \frac{0 + jZ_0 tg(\beta l)}{Z_0 + 0} \longrightarrow Z_{in} = jZ_0 tg(\beta l)$$

Logo, a impedância de entrada de uma LT sem perdas terminada em curto-circuito é sempre uma reatância pura (uma impedância puramente reativa, já que $Z = R + jX$, com $R = 0$, ou seja, na entrada da linha só aparece uma reatância).

Dependendo do comprimento da linha, esta reatância pode aparecer indutiva ($+j$) ou capacitiva ($-j$), o que é usado para gerar indutores e capacitores em micro-ondas.

.

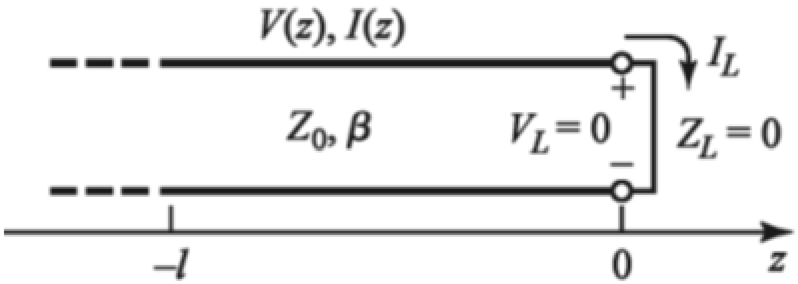


Para o caso de terminação em curto circuito ($\Gamma_L = -1$), considerando uma linha de transmissão sem perdas, a tensão e corrente na linha são

$$V(z) = {V_0}^+\left(e^{-j\beta z} - e^{+j\beta z}\right) = -2j{V_0}^+\sin(\beta z)$$

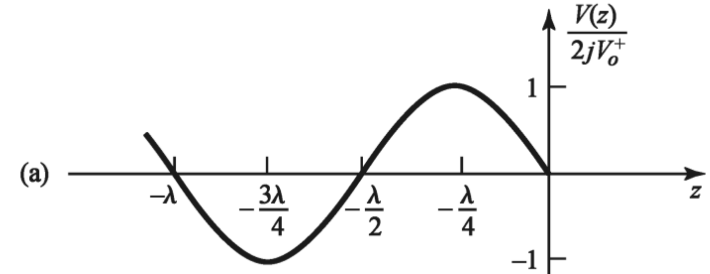
$$I(z) = \frac{{V_0}^+}{Z_0}\left(e^{-j\beta z} + e^{+j\beta z}\right) = \frac{2{V_0}^+}{Z_0}\cos(\beta z)$$

$$\left(\begin{array}{c} \dfrac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} = \sin\theta \\[2ex] \dfrac{e^{-j\theta} + e^{j\theta}}{2} = \cos\theta \end{array}\right)$$



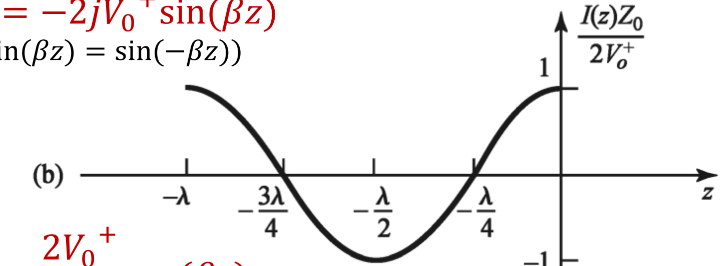
Variação da Tensão, Corrente e Impedância ao longo de uma LT terminada com curto circuito

- Em $z = 0$, $Z_{in} = 0$, mas para $z = \frac{\lambda}{4}$, $Z_{in} = \infty$.
- De $z = 0$ a $z = -\frac{\lambda}{4}$: reatância indutiva.
- De $z = -\frac{\lambda}{4}$ a $z = -\frac{\lambda}{2}$: reatância capacitiva.
- A impedância de entrada é periódica em z, repetindo em múltiplos de $\lambda/2$.

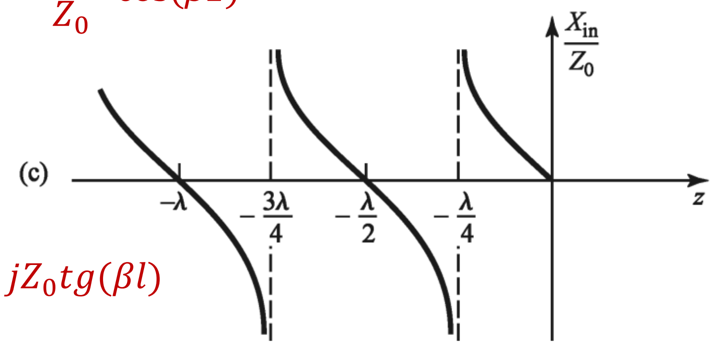


$V(z) = -2jV_0{}^{+}\sin(\beta z)$

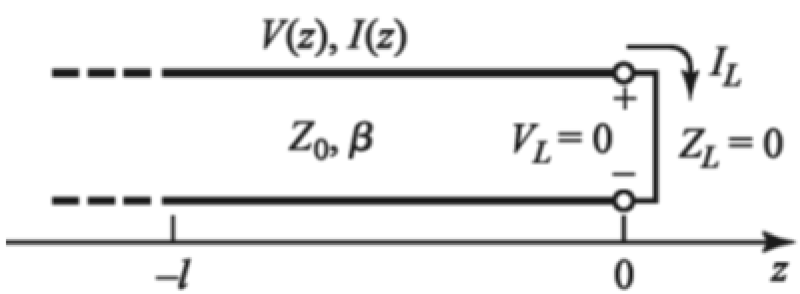
$(-\sin(\beta z) = \sin(-\beta z))$



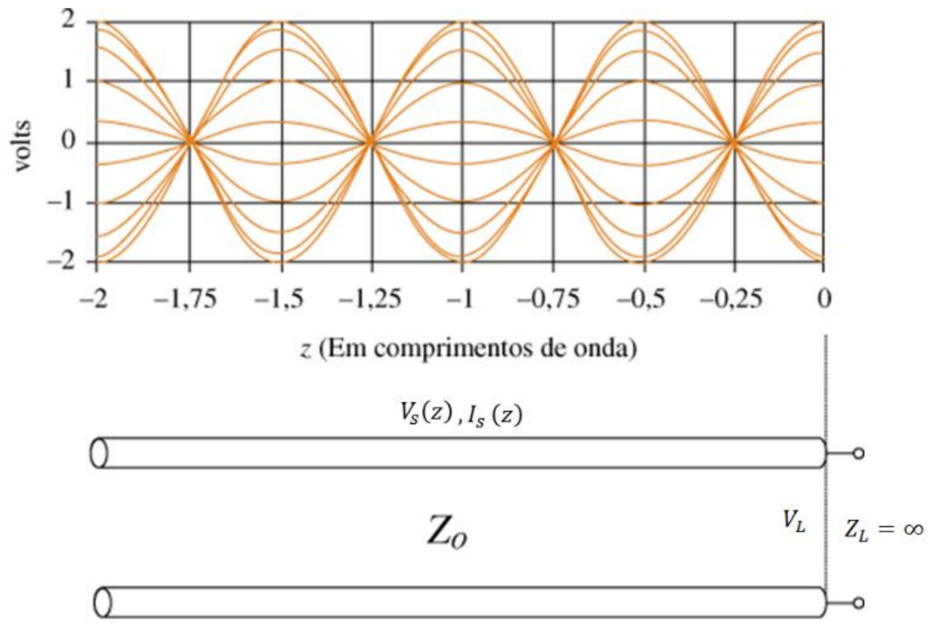
$I(z) = \frac{2V_0{}^{+}}{Z_0}\cos(\beta z)$



$Z_{in} = jZ_0 tg(\beta l)$



Como a corrente total em uma LT sem perdas, terminada em aberto deve ser zero, fazemos $I_s(z=0)=0$,



$$I_s(z)=\frac{V_0^{\ +}}{Z_0}e^{-j\beta z}-\frac{V_0^{\ -}}{Z_0}e^{+j\beta z}$$

$$I_s(0)=\frac{V_0^{\ +}}{Z_0}e^{-j\beta(0)}-\frac{V_0^{\ -}}{Z_0}e^{+j\beta(0)}=0$$

$$I_s(0)=\frac{V_0^{\ +}}{Z_0}-\frac{V_0^{\ -}}{Z_0}=0,$$

de onde se infere que $V_0^{\ +}=V_0^{\ -}$.

Mas, como $I_s(0)=I_0^{\ +}+I_0^{\ -}$, $I_0^{\ +}=\dfrac{V_0^{\ +}}{Z_0}$ e $I_0^{\ -}=-\dfrac{V_0^{\ -}}{Z_0}$

e, então $I_0^{\ +}=-I_0^{\ -}$ e, portanto,

$$Z_L=\frac{V_0^{\ +}+V_0^{\ -}}{I_0^{\ +}+I_0^{\ -}}=\frac{2V_0^{\ +}}{0}=\infty,\quad \Gamma_L=\frac{Z_L-Z_0}{Z_L+Z_0}=1 \ \text{ e } \ ROE=\frac{V_{max}}{V_{mín}}=\frac{1+|\Gamma_L|}{1-|\Gamma_L|}=\infty$$

A impedância de entrada para um comprimento arbitrário l da linha terminada em circuito aberto é dada por

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 tg(\beta l)}{Z_0 + jZ_L tg(\beta l)} \longrightarrow Z_{in} = Z_0 \frac{\cancel{\infty} + \cancel{jZ_0 tg(\beta l)}}{\cancel{Z_0} + j\cancel{\infty} tg(\beta l)}$$

$$Z_{in} = Z_0 \frac{1}{jtg(\beta l)} = -jZ_0 \cot(\beta l)$$

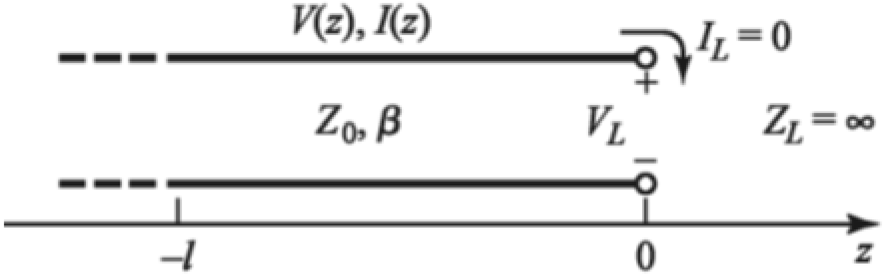
Logo, a impedância de entrada de uma LT sem perdas terminada em circuito aberto também é sempre uma reatância pura.

Dependendo do comprimento da linha, esta reatância pode aparecer indutiva (+ j) ou capacitiva (- j), o que é usado para gerar indutores e capacitores em micro-ondas.

Para o caso de terminação em circuito aberto ($\Gamma_L = 1$), considerando uma linha de transmissão sem perdas, a tensão e corrente na linha são

$$V(z) = {V_0}^+\left(e^{-j\beta z} + e^{+j\beta z}\right) = -2{V_0}^+\cos(\beta z)$$

$$I(z) = \frac{{V_0}^+}{Z_0}\left(e^{-j\beta z} - e^{+j\beta z}\right) = \frac{-2j{V_0}^+}{Z_0}\sin(\beta z)$$



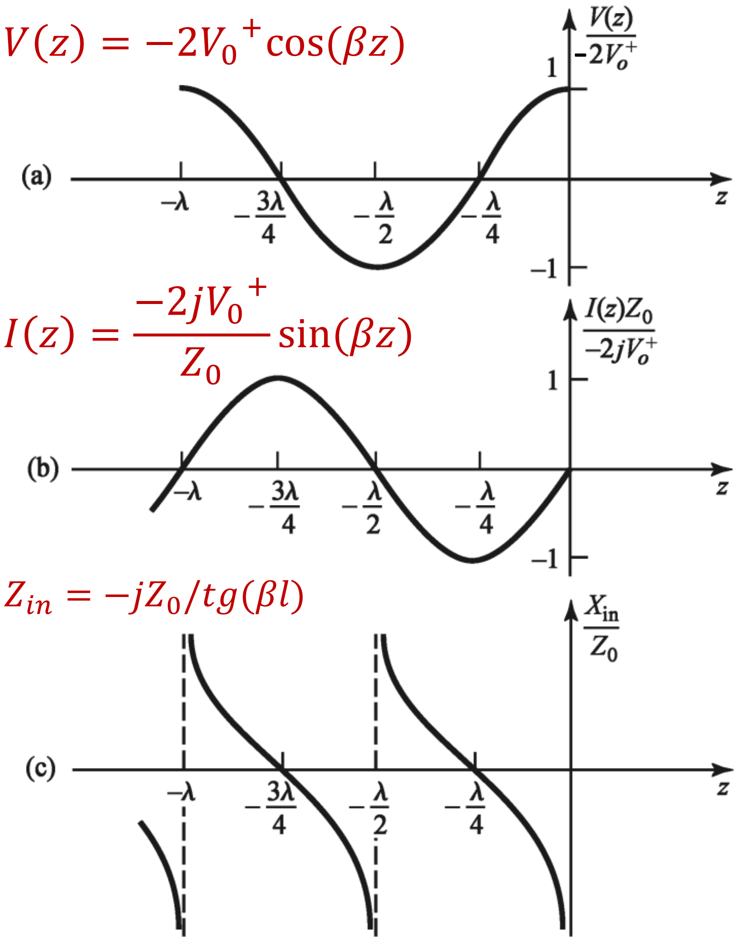
Variação da Tensão, Corrente e Impedância ao longo de uma LT terminada com circuito aberto

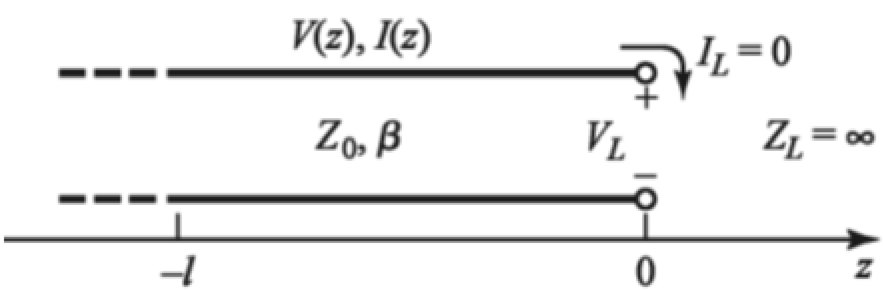
- Em $z = 0$, $Z_{in} = \infty$, mas para $z = \frac{\lambda}{4}$, $Z_{in} = 0$.
- De $z = 0$ a $z = -\frac{\lambda}{4}$: reatância capacitiva.
- De $z = -\frac{\lambda}{4}$ a $z = -\frac{\lambda}{2}$: reatância indutiva.
- A impedância de entrada é periódica em z, repetindo em múltiplos de $\lambda/2$.

$V(z) = -2V_0{}^{+}\cos(\beta z)$

$I(z) = \frac{-2jV_0{}^{+}}{Z_0}\sin(\beta z)$

$Z_{in} = -jZ_0/tg(\beta l)$





- Para um LT com tamanho $l = {}^{\lambda}/_{2}$, temos

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 tg(\beta l)}{Z_0 + jZ_L tg(\beta l)},$$

$$\beta l = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) l = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)\left(\frac{\lambda}{2}\right) = \pi,$$

$$tg(\beta l) = tg(\pi) = \frac{\sin \pi}{\cos \pi} = 0$$

Logo, repete na entrada da LT a impedância da carga: $Z_{in} = Z_L$

- Para um LT com tamanho $l = {}^{\lambda}/_{4}$, temos

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 tg(\beta l)}{Z_0 + jZ_L tg(\beta l)},$$

$$\beta l = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) l = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)\left(\frac{\lambda}{4}\right) = \frac{\pi}{2}, \qquad tg(\beta l) = tg\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{2}} = \infty$$

Logo, ocorre uma transformação da impedância de entrada em uma admitância, pois a impedância de entrada será proporcional ao inverso da impedância de carga:

$$Z_{in} = \frac{{Z_0}^2}{Z_L}$$

Se trabalharmos com uma impedância característica normalizada para 1, podemos notar que, se a LT tiver tamanho $l = \lambda / 4$, a impedância de entrada será o inverso da impedância da carga $Z_{in} = 1/Z_L$.

Considere uma linha de transmissão com impedância característica $Z_0 = 75\ \Omega$ e um fator de velocidade $p = 0.6$ em $f = 2.5G$ Hz, sendo terminada em uma impedância de carga $Z_L = 150\ \Omega$, nesta frequência. Sabe-se que a linha tem um comprimento $l = 15$ cm e que $V_0{}^+ = |V_0{}^+|e^{j0} = 50V$.

Determine:

a) O coeficiente de reflexão na carga.
b) A perda de retorno (*return loss*) em dB.
c) A potência média na LT.
d) O valor máximo e o valor mínimo da onda estacionária de tensão ao longo da linha.
e) A Relação de Onda Estacionária.
f) A impedância de entrada da LT.

Dados:

$f := 2.5\cdot 10^{9}\cdot Hz \quad l := 15\cdot cm$

$p := 0.6 \qquad up := p\cdot c$

$\omega := 2\cdot \pi \cdot f$

$\beta := \dfrac{\omega}{up}$

$Zo := 75\cdot \Omega$

$ZL := 150\cdot \Omega$

$Vo := 50V$

$|Vo| = 50\,V$

Obs.: Cabos coaxiais comerciais são basicamente caracterizados por sua impedância característica e pelo fator de velocidade.

O fator de velocidade dá a relação entre a velocidade com que a onda guiada se propaga na linha de transmissão e a velocidade da luz, ou seja, um fator de velocidade $p = 0.6$ implica em uma velocidade de fase da onda na linha de transmissão $u_p = 0.6c$.

a) Coeficiente de reflexão na carga:

$$\Gamma L := \frac{ZL - Zo}{ZL + Zo} \qquad \Gamma L = 0.333$$

b) Perda de retorno:

$$RL := -20 \cdot \log(|\Gamma L|) \qquad RL = 9.542 \text{ dB}$$

c) Potência média para uma LT sem perdas , com $|Vo^{+}| = Vo$:

$$\mathrm{Pave} := \frac{(|\mathrm{Vo}|)^2}{2\cdot \mathrm{Zo}}\cdot\left[1 - (|\Gamma L|)^2\right]$$

$$\mathrm{Pave} = 14.815\,\mathrm{W}$$

d) Valores máximo e mínimo da onda estacionária de tensão ao longo da LT:

($V_{max} = |V_o^+| (1 + |\Gamma_L|)$ e $V_{min} = |V_o^+| (1 - |\Gamma_L|)$)

$$Vmax := Vo \cdot (1 + |\Gamma L|) \qquad Vmax = 66.667\ V$$

$$Vmin := Vo \cdot (1 - |\Gamma L|) \qquad Vmin = 33.333\ V$$

e) Relação de onda estacionária:

$$ROE := \frac{1 + |\Gamma L|}{1 - |\Gamma L|} \qquad ROE = 2$$

Note que $\frac{Vmax}{Vmin} = 2$

f) Impedância de entrada:

$$Zin := Zo\cdot\frac{ZL + j\cdot Zo\cdot\tan(\beta\cdot l)}{Zo + j\cdot ZL\cdot\tan(\beta\cdot l)}$$

$$Zin = (84.571 - 55.496i)\,\Omega$$

$$\beta = 87.327\cdot\frac{rad}{m}$$