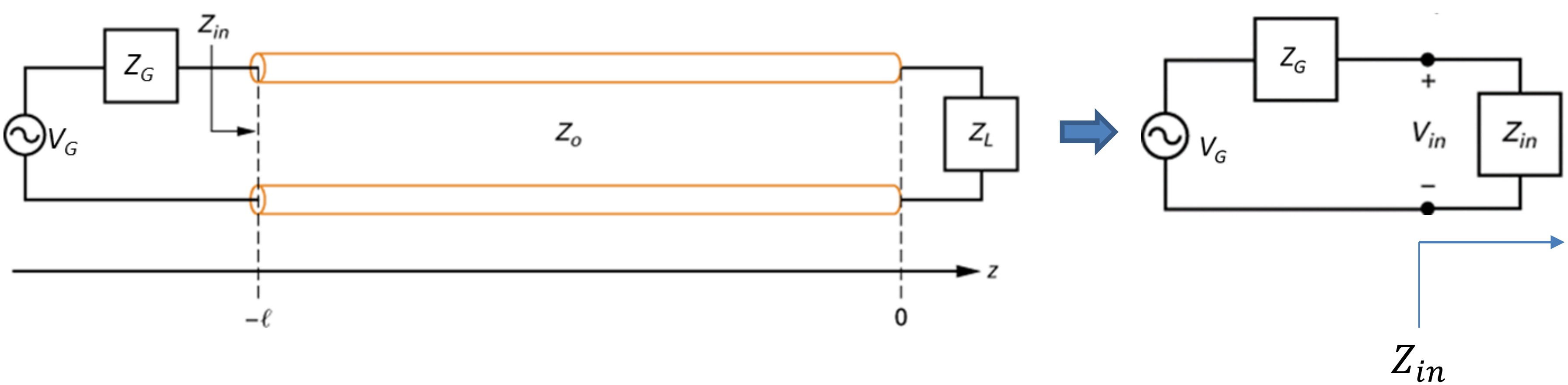
Módulo II – Linhas de Transmissão

Circuito com gerador e carga

- Anteriormente havíamos considerado a existência de uma descontinuidade na interface entre linha e impedância de carga. Consideraremos agora, haver uma descontinuidade adicional na interface entre linha e gerador.

- Quando ambos, gerador e carga não estão casados com a LT, ocorrem múltiplas reflexões na linha.

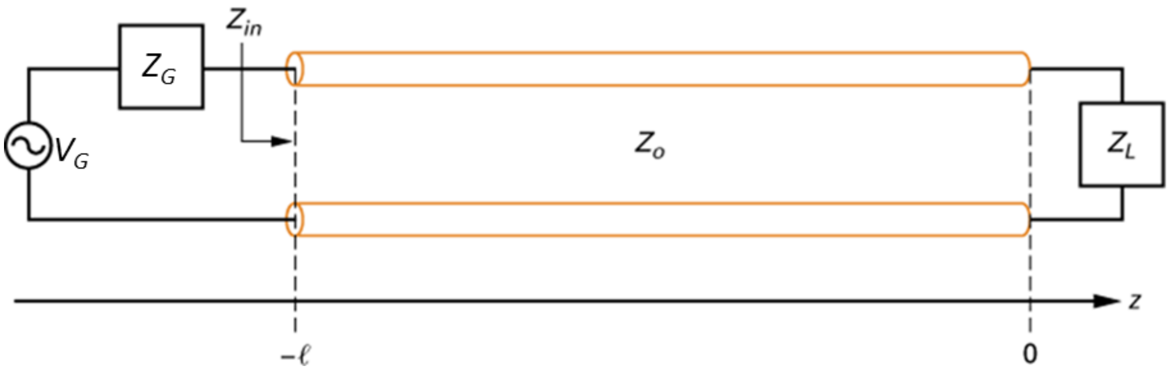
- A onda incidente encontra descontinuidade na carga e é refletida na direção do gerador. Esta onda refletida encontra descontinuidade na entrada da linha e é refletida na direção da carga. E assim, sucessivamente, de tal forma que haverá várias instâncias da onda incidente se propagando na LT.

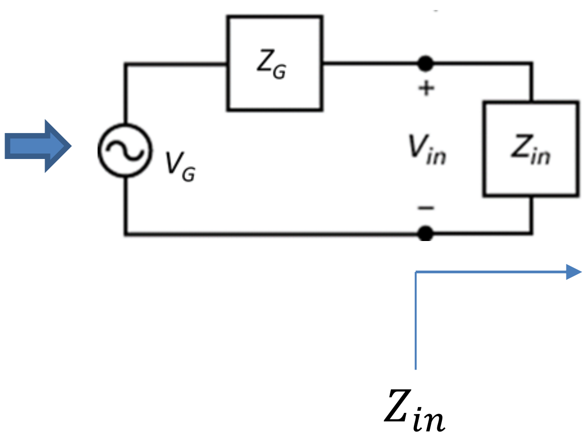


- Dado que estamos trabalhando em regime permanente senoidal, cada uma destas várias instâncias da onda incidente pode ser representada por um fasor.

- A soma dos fasores de todas as ondas incidentes (ou seja, a composição de todas estas ondas superpostas) resultará em uma única onda de tensão equivalente, com um único fasor associado.

- Para determinar este fasor de tensão equivalente, devemos lembrar que a tensão em qualquer ponto da linha é dada por $V(z) = {V_0}^{+} e^{-j\beta z} + {V_0}^{-} e^{+j\beta z}$ e que $V_{in} = V(-l)$, conforme mostra a figura abaixo.



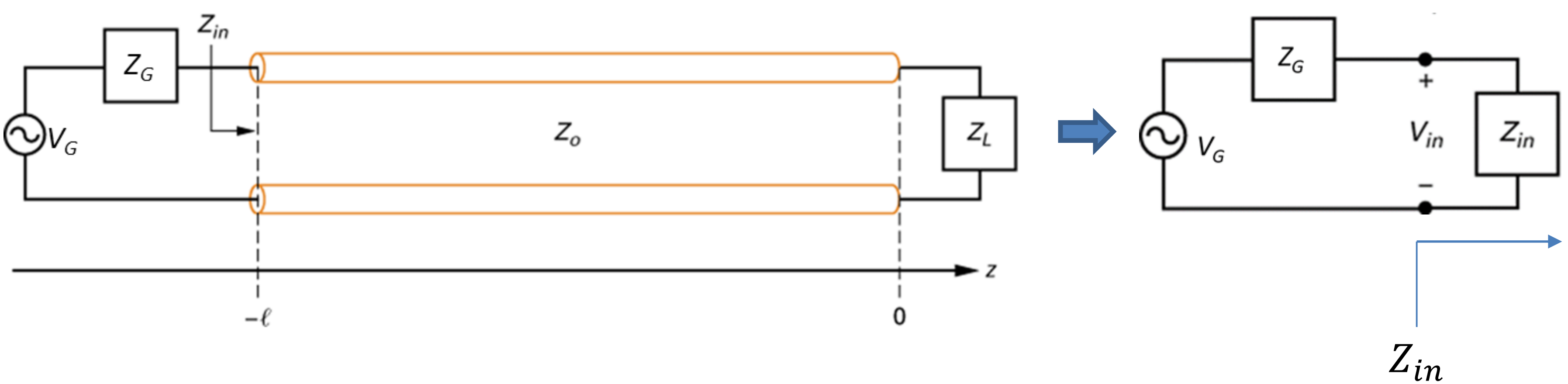


Então, considerando $z = -l$ em $V(z) = {V_0}^{+}e^{-j\beta z} + {V_0}^{-}e^{+j\beta z}$, temos

$$V(-l) = {V_0}^{+}(e^{+j\beta l} + \Gamma_L e^{-j\beta l}), \text{com} \quad \Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

A tensão V_{in} também pode ser expressa por meio do divisor de tensão na entrada da linha, de onde,

$$V_{in} = V_G \frac{Z_{in}}{Z_{in} + Z_G}$$

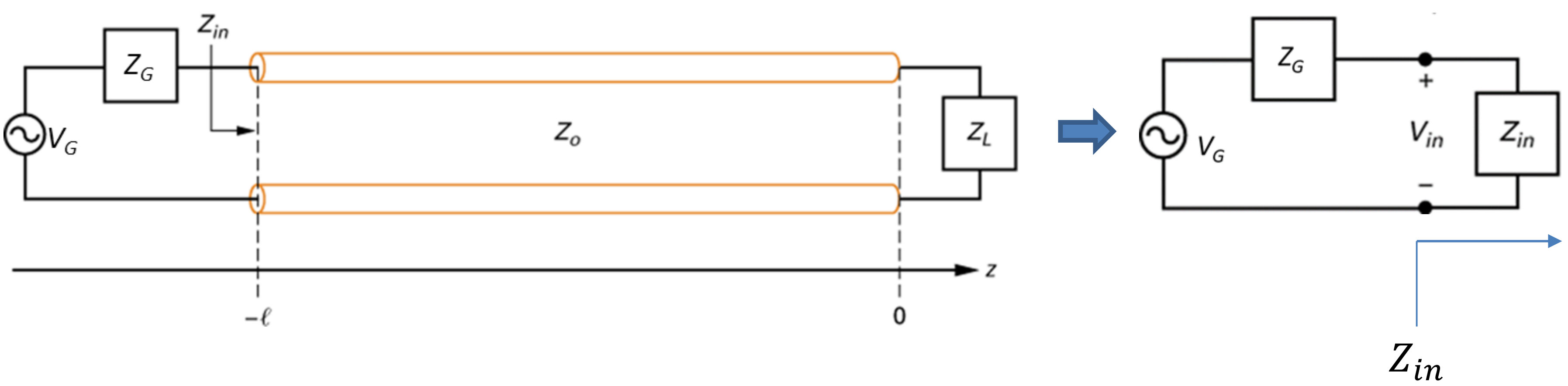


Dado que $V_{in} = V(-l)$, podemos escrever que

$$V_G \frac{Z_{in}}{Z_{in}+Z_G} = {V_0}^{+}(e^{+j\beta l}+\Gamma_L e^{-j\beta l}),$$

de onde podemos determinar ${V_0}^{+}$, conforme

$${V_0}^{+} = V_G \frac{Z_{in}}{Z_{in}+Z_G} \frac{1}{(e^{j\beta l}+\Gamma_L e^{-j\beta l})}$$



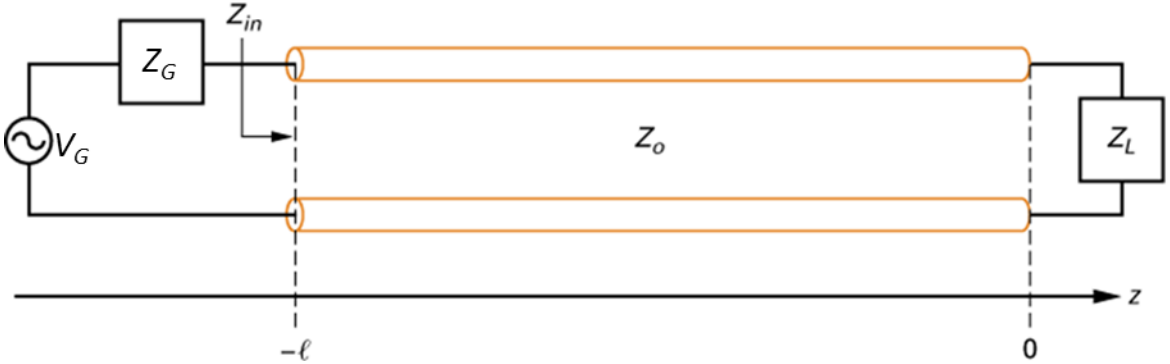
Dado que impedância de entrada Z_{in}, olhando a LT da direção do gerador para a carga, é expressa por

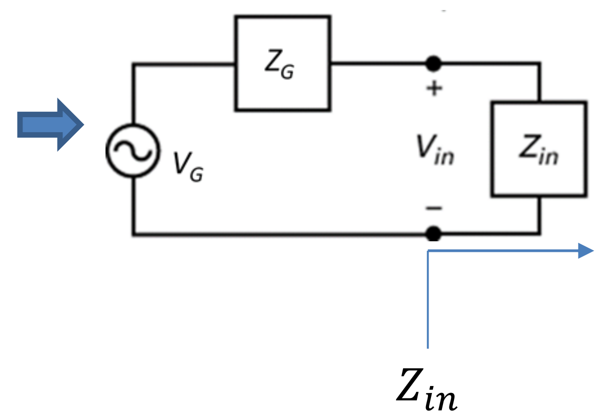
$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 tg(\beta l)}{Z_0 + jZ_L tg(\beta l)}$$

a expressão para $V_0{}^+$ pode ser reescrita como

$$V_0{}^+ = V_G \frac{Z_0}{Z_0 + Z_G} \frac{e^{-j\beta l}}{(1 - \Gamma_L \Gamma_G e^{-2j\beta l})}, \text{ com } \Gamma_G = \frac{Z_G - Z_0}{Z_G + Z_0},$$

onde Γ_G é o coeficiente de reflexão, olhando na direção do gerador.

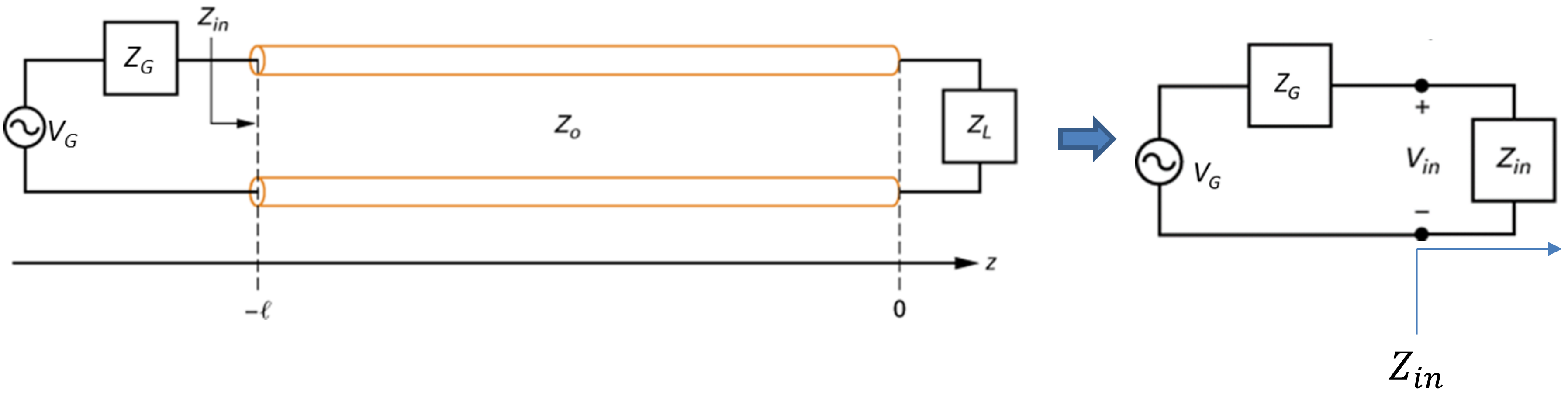




- Em LTs, quando há descasamento na carga e no gerador, o fasor ${V_0}^+$ expressa o módulo e a fase da onda de tensão incidente equivalente, a qual ocorre por superposição de todas as instâncias das ondas incidentes geradas por reflexão nas interfaces gerador-linha e linha-carga.

- Cabe notar que a expressão para ${V_0}^+$ é função dos coeficientes de reflexão na carga e no gerador (Γ_L e Γ_G).

$${V_0}^+ = V_G \frac{Z_0}{Z_0 + Z_G} \frac{e^{-j\beta l}}{(1 - \Gamma_L \Gamma_G e^{-2j\beta l})} \qquad \Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \qquad \Gamma_G = \frac{Z_G - Z_0}{Z_G + Z_0}$$

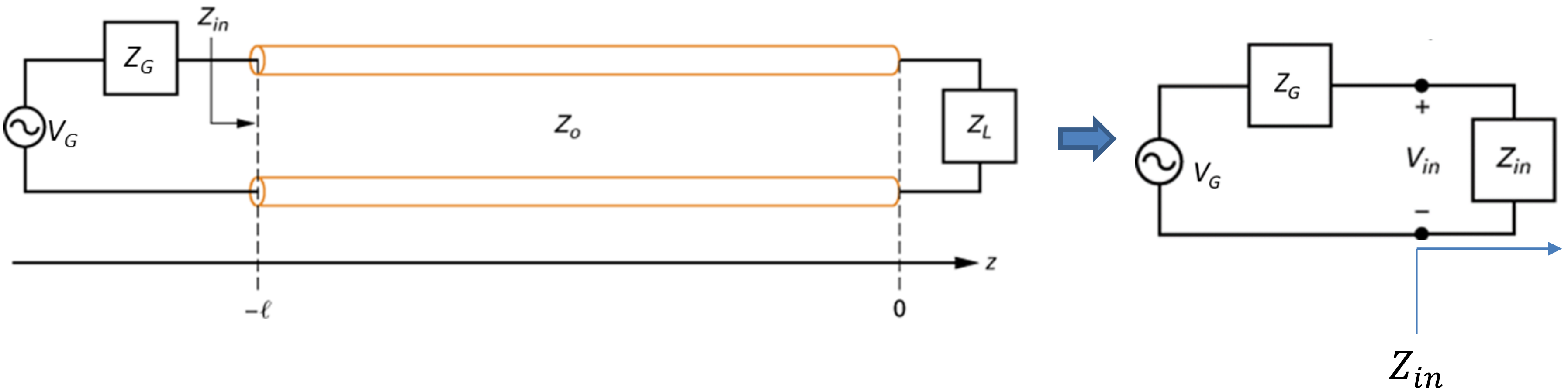


A tensão na carga ($z = 0$) é expressa por

$$V_L = {V_0}^+(1 + \Gamma_L)$$

A razão de onda estacionária na linha é dada por

$$ROE = \frac{1 + |\Gamma_L|}{1 - |\Gamma_L|}$$



A potência entregue à carga é dada por

$$P_{ave} = \frac{1}{2} Re\{V_{in} I_{in}{}^{*}\} = \frac{1}{2} |V_{in}|^2 Re\left\{\frac{1}{Z_{in}}\right\} = \frac{1}{2} |V_G|^2 \left|\frac{Z_{in}}{Z_{in} + Z_G}\right|^2 Re\left\{\frac{1}{Z_{in}}\right\}$$

Note que $Z_{in} = R_{in} + jX_{in}$ e $Z_G = R_G + jX_G$ logo, a potência entregue à carga pode ser expressa como

$$P_{ave} = \frac{1}{2} |V_G|^2 \frac{R_{in}}{(R_{in} + R_G)^2 + (X_{in} + X_G)^2}$$

Circuito com gerador e carga: Carga casada com a linha

Para este caso,

$$Z_L = Z_0, \text{ logo } \Gamma_L = 0, \ ROE = 1 \text{ e } Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 tg(\beta l)}{Z_0 + jZ_L tg(\beta l)} = Z_0$$

A potência entregue à carga, dada por

$$P_{ave} = \frac{1}{2}|V_G|^2 \frac{R_{in}}{(R_{in} + R_G)^2 + (X_{in} + X_G)^2}$$

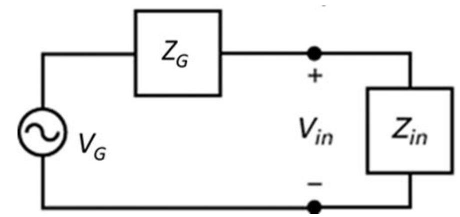
$Z_{in} = R_{in} + jX_{in} = Z_0$,
como a LT é sem perdas,
$Z_{in} = R_{in} = Z_0, X_{in} = 0$.

pode ser expressa conforme

$$P_{ave} = \frac{1}{2}|V_G|^2 \frac{Z_0}{(Z_0 + R_G)^2 + {X_G}^2}$$

Circuito com gerador e carga: Gerador casado com a linha

Para este caso, $Z_{in} = Z_G$, logo



$$\Gamma_{geral} = \frac{Z_{in} - Z_G}{Z_{in} + Z_G} = 0$$

A potência entregue à carga, dada por

$$P_{ave} = \frac{1}{2}|V_G|^2 \frac{R_{in}}{(R_{in} + R_G)^2 + (X_{in} + X_G)^2}$$

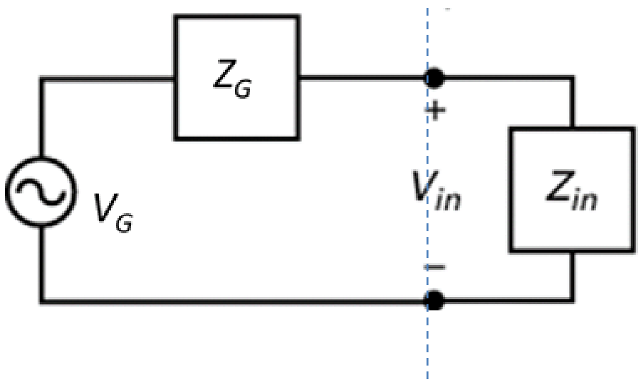
$$\left(\begin{array}{l} Z_{in} = Z_G, \\ R_{in} + jX_{in} = R_G + jX_G \end{array} \right)$$

pode ser expressa conforme

$$P_{ave} = \frac{1}{2}|V_G|^2 \frac{R_G}{4({R_G}^2 + {X_G}^2)}$$

Onda se propaga internamente no gerador em direção à interface com a linha, se refletindo nesta interface.

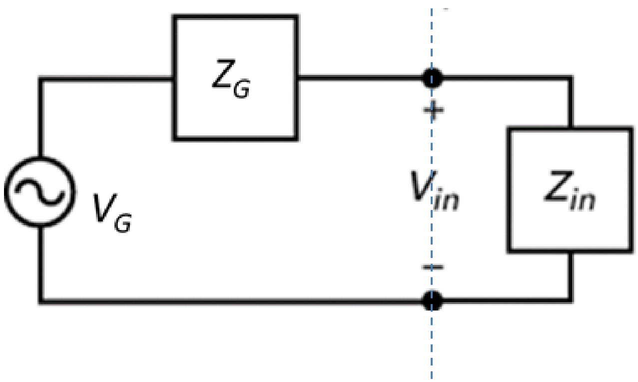
$$\Gamma_{geral} = \frac{Z_{in} - Z_G}{Z_{in} + Z_G}$$



O gerador é considerado como uma LT, então a impedância de carga desta linha é Z_{in}, e a impedância característica desta linha é a impedância Z_G do gerador .

Onda se propaga na linha, em direção à interface com o gerador, se refletindo nesta interface.

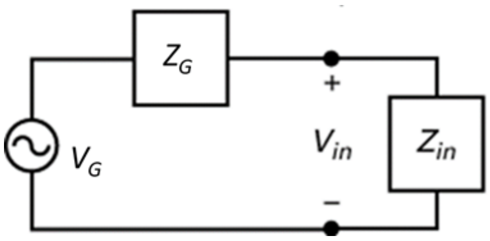
$$\Gamma_G = \frac{Z_G - Z_0}{Z_G + Z_0}$$



O gerador é considerado como impedância de carga Z_G da linha de transmissão de impedância característica Z_0.

Casamento Conjugado: Máxima transferência de potência

A máxima transferência de potência à carga é obtida quando a impedância da fonte Z_G é igual ao conjugado da impedância de entrada da LT terminada Z_{in}, ou seja, quando $Z_{in} = {Z_G}^*$.



Dado que

$$Z_G = R_G + jX_G \quad \text{e} \quad Z_{in} = R_{in} + jX_{in}\,,$$

$$R_{in} = R_G \quad \text{e} \quad X_{in} = -X_G$$

Desta forma, a potência entregue à carga, dada por

$$P_{ave} = \frac{1}{2}|V_G|^2 \frac{R_{in}}{(R_{in}+R_G)^2 + (X_{in}+X_G)^2}$$

será máxima, conforme

$$P_{ave} = \frac{1}{2}|V_G|^2 \frac{1}{4R_G}$$

Note que estamos maximizando a transferência de potência na entrada da LT, mas como a LT é sem perdas, equivale a maximizar a transferência de potência à carga.

Casamento Conjugado: Máxima transferência de potência

$$Z_{in} = {Z_G}^*$$

- Note que os coeficientes de reflexão $\Gamma_L, \Gamma_G, \Gamma(z)$ podem não ser iguais a zero. Fisicamente isto significa que, em alguns casos, as múltiplas reflexões em uma linha descasada podem se somar construtivamente na carga, podendo ocorrer uma entrega de potência à carga maior do que seria entregue se não houvessem reflexões.

- Se a impedância da fonte é real $(Z_G = R_G)$, então os dois últimos casos se reduzem ao mesmo resultado, ou seja, máxima potência é entregue à carga, quando a linha terminada é casada com o gerador ($R_{in} = R_G$, com $X_{in} = X_G = 0$).

Considere a linha de transmissão sem perdas mostrada na Figura 1. A impedância característica da LT é $Z_0 = 50\Omega$ e o fator de velocidade é $p = 0.65$, em $f = 30MHz$. A LT é terminada em uma impedância de carga $Z_L = 25 + j30\Omega$, nesta frequência. Sabe-se que a linha tem comprimento $l = 5.0$m, e que é alimentada por um gerador cuja tensão é $V_G = 30\cos(2\pi\ 30 \times 10^6 t)$. A impedância interna do gerador é $Z_G = 45\Omega$.

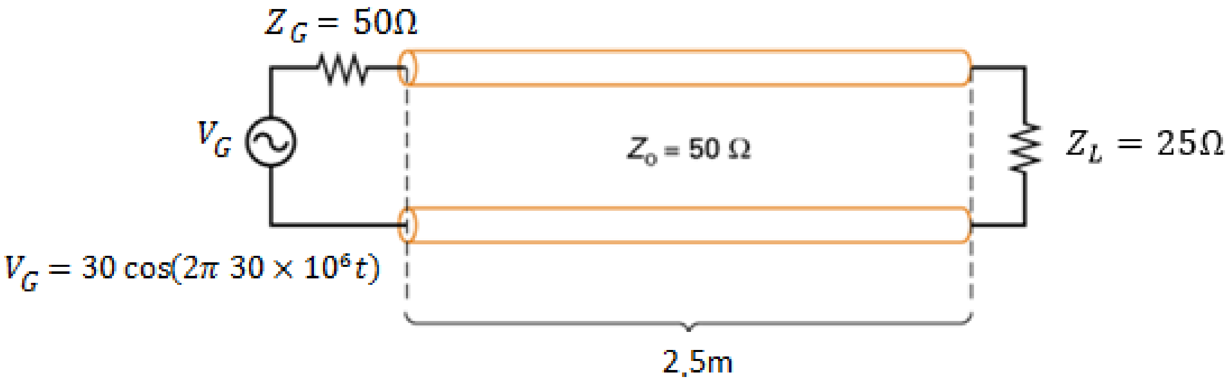


Figura 1: Linha de transmissão sem perdas

Determine:

a) A impedância de entrada da linha, Z_{in}.
b) O coeficiente de reflexão na carga e no gerador, Γ_L e Γ_G.
c) O fasor de tensão da onda incidente, V_0^+.
d) A expressão de V(z) na forma fasorial e o gráfico do módulo do fasor V(z), isto é, $|V(z)|$ em função de z.
e) Idem ao item (d) para o fasor de corrente $I(z)$.

São dados:

$$ZL := (25 + i \cdot 30)\Omega \qquad Z0 := 50\Omega \qquad ZG := 45\Omega$$

$$f := 30 \cdot 10^{6} \cdot Hz \qquad p := 0.65$$

$$VG := 30 \cdot V \qquad l := 5.0 \cdot m$$

Comprimento de onda guiado:

$$\lambda g := \frac{c \cdot p}{f} = 6.496m$$

Constante de fase:

$$\beta := \frac{2 \cdot \pi}{\lambda g} = 0.967 \cdot \frac{rad}{m}$$

a) Impedância na entrada da LT:

$$Zin := Z0\cdot\frac{ZL + i\cdot(Z0\tan(\beta\cdot l))}{Z0 + i\cdot(ZL\cdot\tan(\beta\cdot l))} = (32.745 - 41.228i)\,\Omega$$

b) Coeficiente de Reflexão na carga:

$$\Gamma L := \frac{ZL - Z0}{ZL + Z0} = -0.149 + 0.46i$$

Coeficiente de Reflexão no gerador:

$$\Gamma G := \frac{ZG - Z0}{ZG + Z0} = -0.053$$

c) Fasor da tensão da onda incidente:

$$V0p := VG \cdot \frac{Z0}{(Z0 + ZG)} \cdot \frac{e^{-i \cdot \beta \cdot l}}{\left(1 - \Gamma L \cdot \Gamma G \cdot e^{-2 \cdot i \cdot \beta \cdot l}\right)} = (1.555 + 15.681i)\,V$$

$$|V0p| = 15.758\,V$$

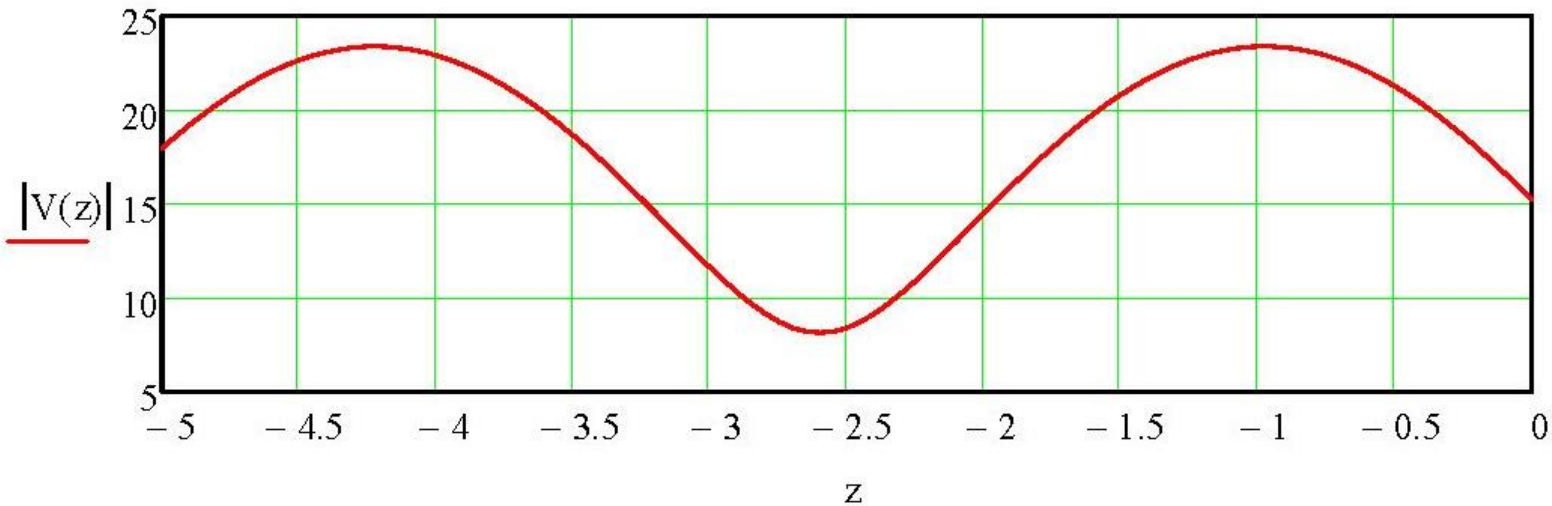
$$\arg(V0p) = 1.472 \cdot rad$$

$$\arg(V0p) = 84.337 \cdot {}^\circ$$

d) Gráfico da onda estacionária de tensão ao longo da LT:

$$z := -1, -0.99\cdot 1 .. 0$$

$$V(z) := V0p\cdot\left(e^{-i\cdot\beta\cdot z} + \Gamma L\cdot e^{i\cdot\beta\cdot z}\right)$$



e) Gráfico da onda estacionária de corrente ao longo da LT:

$$I(z) := \frac{V0p}{Z0}\cdot\left(e^{-i\cdot\beta\cdot z} - \Gamma L\cdot e^{i\cdot\beta\cdot z}\right)$$