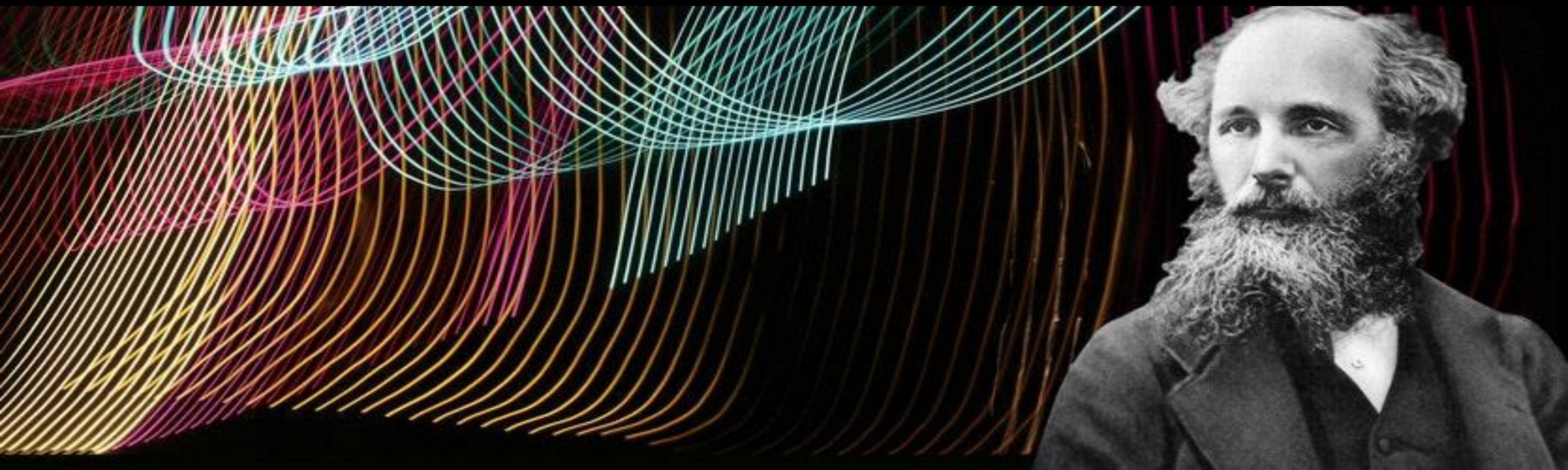
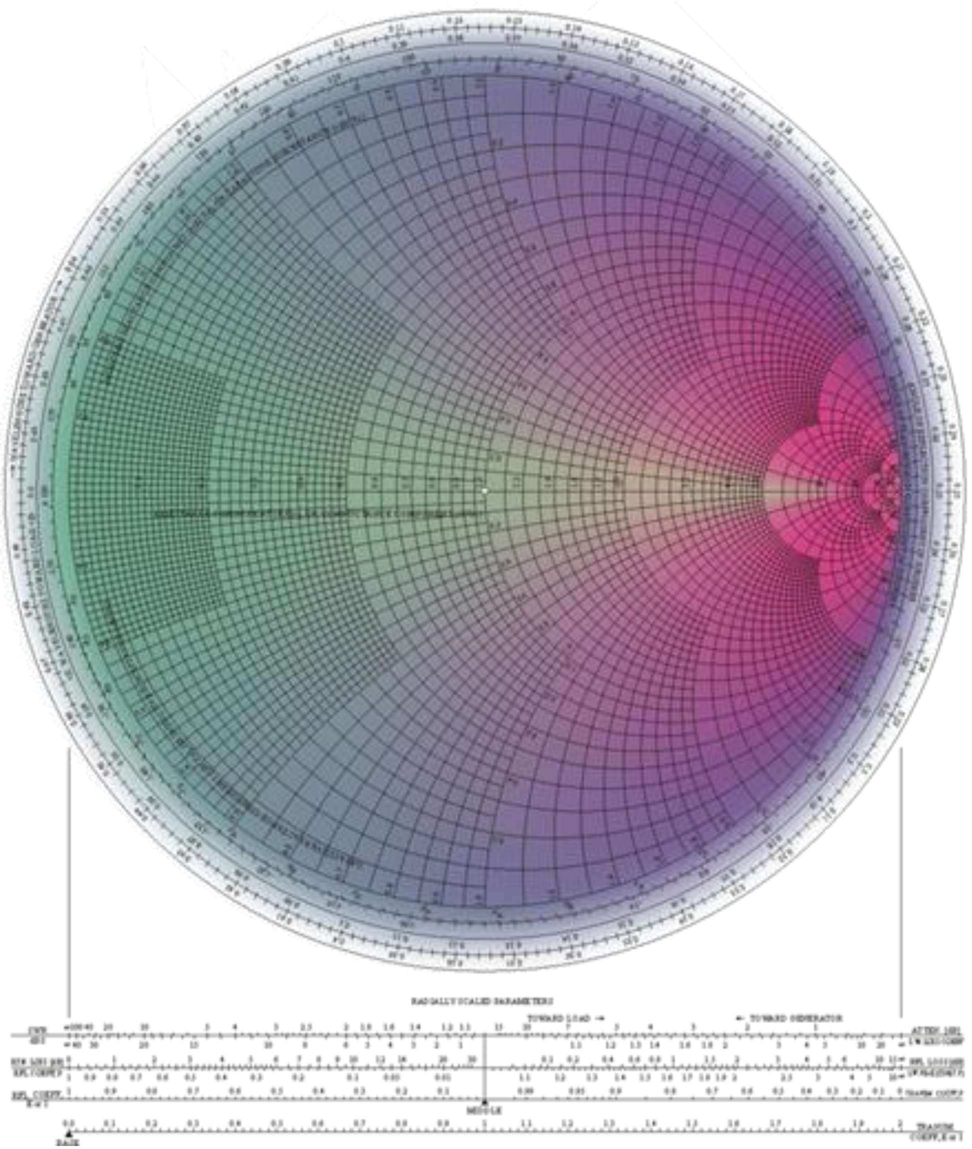
Módulo II – Linhas de Transmissão

Carta de Smith



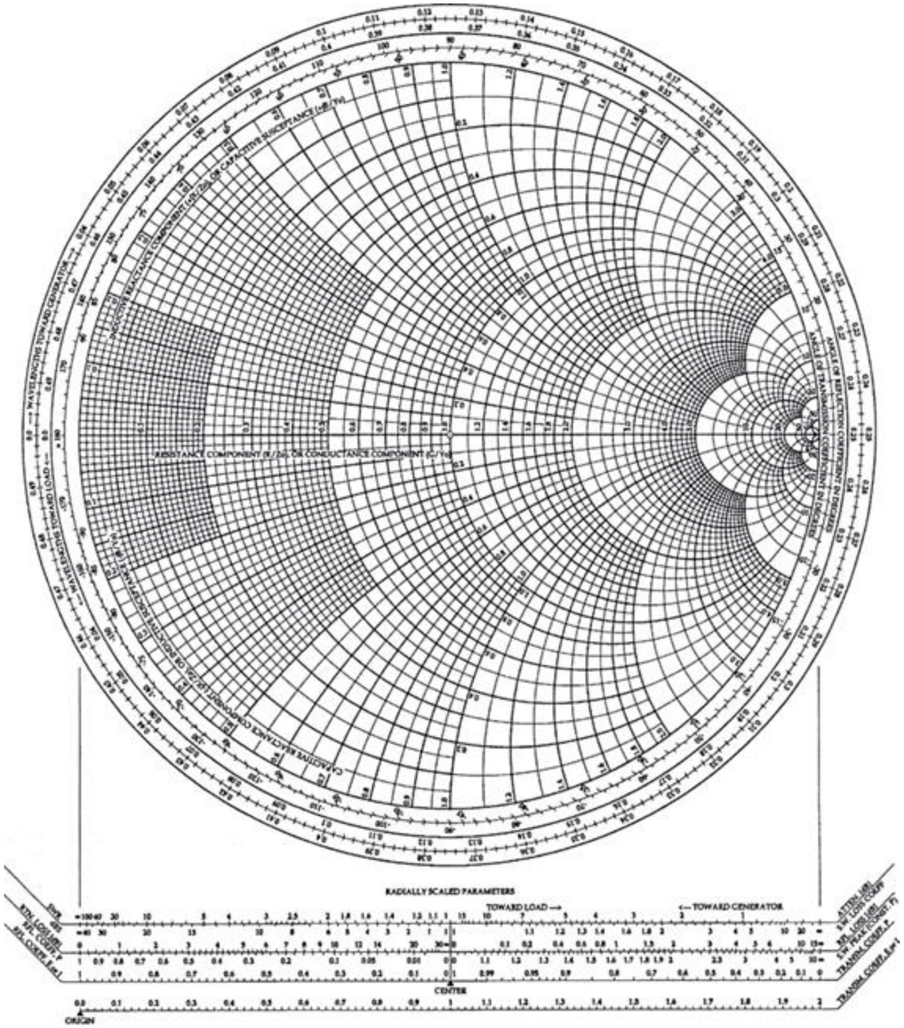
- Ferramenta gráfica para resolver problemas envolvendo linhas de transmissão e casamento de impedância.
- Foi desenvolvida em 1939 por Phillip Smith, engenheiro do Bell Telephone Labs.
- Permite visualizar os fenômenos de linhas de transmissão sem a necessidade de cálculos numéricos detalhados.



- No uso da Carta de Smith vamos assumir que a LT é sem perdas.
- A Carta de Smith pode ser entendida como dois gráficos em um:
  - O primeiro traça a impedância normalizada em qualquer ponto ao longo de uma LT.
  - O segundo traça o coeficiente de reflexão para qualquer ponto ao longo da linha.
- Dado que o coeficiente de reflexão pode ser expresso na forma polar, como $\Gamma = |\Gamma| e^{j\theta}$, então a magnitude $|\Gamma|$ é plotada como o raio a partir do centro da Carta de Smith, e o ângulo θ ($-180° \leq \theta \geq 180°$) é medido no sentido anti-horário a partir do lado direito do diâmetro horizontal.
- Cada possível coeficiente de reflexão de $|\Gamma| \leq 1$ pode ser plotado como um único ponto em uma Carta de Smith.

- A real utilidade da carta de Smith está no fato de que ela pode ser utilizada para converter coeficientes de reflexão em impedâncias (ou admitâncias) normalizadas e vice versa, utilizando os círculos de impedância (ou admitância) impressos na carta.

- Para a utilização da Carta de Smith, as impedâncias (ou admitâncias) são normalizadas em relação à impedância (ou admitância) característica da linha de transmissão.



Conforme vimos anteriormente, se uma LT sem perdas está terminada por uma impedância de carga $\mathrm{Z_L}$, o coeficiente de reflexão na carga pode ser expresso por

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$, onde $\mathrm{Z_0}$ é a impedância característica da LT.

Normalizando $\mathrm{Z_L}$ pela impedância caraterística da LT, temos

$$z_L = \frac{Z_L}{Z_0}, \quad \text{de onde} \quad \Gamma_L = \frac{z_L - 1}{z_L + 1} = |\Gamma_L| e^{j\theta}$$

Expressando z_L em função de Γ_L em $\Gamma_L = \dfrac{z_L - 1}{z_L + 1} = |\Gamma_L|e^{j\theta}$, temos

$$z_L = \frac{1 + |\Gamma_L|e^{j\theta}}{1 - |\Gamma_L|e^{j\theta}}$$

Dado que $z_L = r_L + jx_L$ e $\Gamma_L = R\{\Gamma_L\} + Im\{\Gamma_L\} = \Gamma_r + j\Gamma_i$, podemos escrever a equação acima como

$$r_L + jx_L = \frac{(1 + \Gamma_r) + j\Gamma_i}{(1 - \Gamma_r) - j\Gamma_i}$$

A parte real e a parte imaginária em $r_L + jx_L = \dfrac{(1+\Gamma_r) + j\Gamma_i}{(1-\Gamma_r) - j\Gamma_i}$

podem ser separadas multiplicando o numerador e o denominador pelo complexo conjugado do denominador ($(1-\Gamma_r) + j\Gamma_i$). Assim, obtemos

$$r_L = \frac{1-\Gamma_r^2-\Gamma_i^2}{(1-\Gamma_r)^2+{\Gamma_i}^2} \qquad x_L = \frac{2\Gamma_i}{(1-\Gamma_r)^2+{\Gamma_i}^2}$$

Rearranjando as equações acima, encontramos

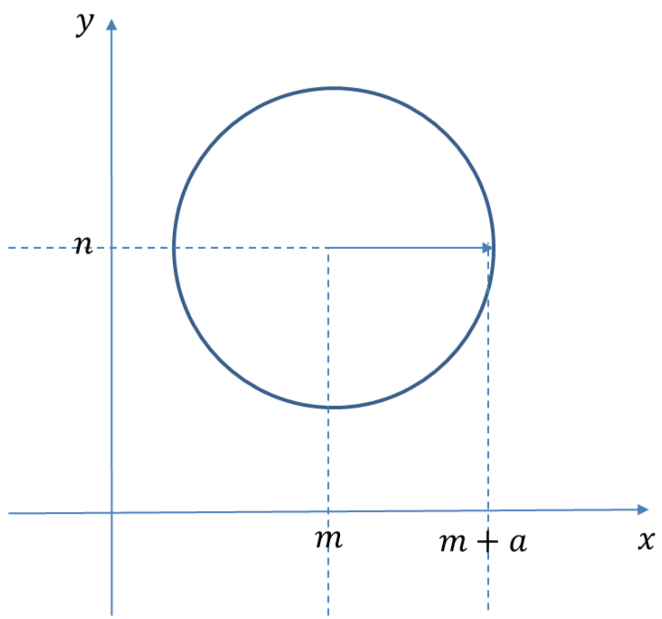
$$\left(\Gamma_r - \frac{r_L}{1+r_L}\right)^2 + {\Gamma_i}^2 = \left(\frac{1}{1+r_L}\right)^2 \qquad (\Gamma_r - 1)^2 + \left(\Gamma_i - \frac{1}{x_L}\right)^2 = \left(\frac{1}{x_L}\right)^2$$

que representam duas famílias de círculos no plano Γ_r, Γ_i.

Lembrando que a equação geral para um círculo de raio a,

centrado em $x = m$ e $y = n$, é

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = a^2.$$



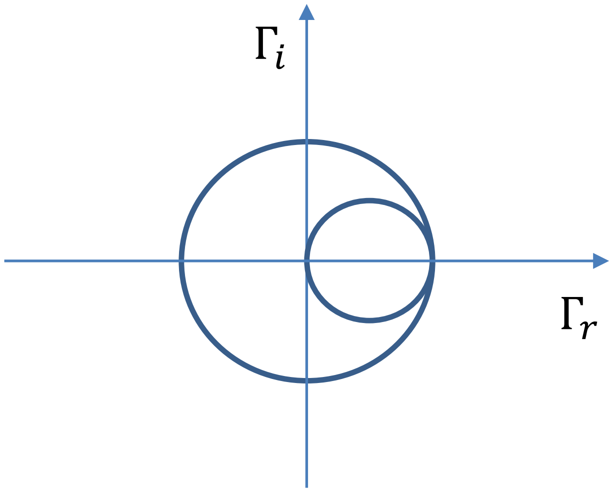
Podemos, então, analisar as equações obtidas para r_L e x_L conforme

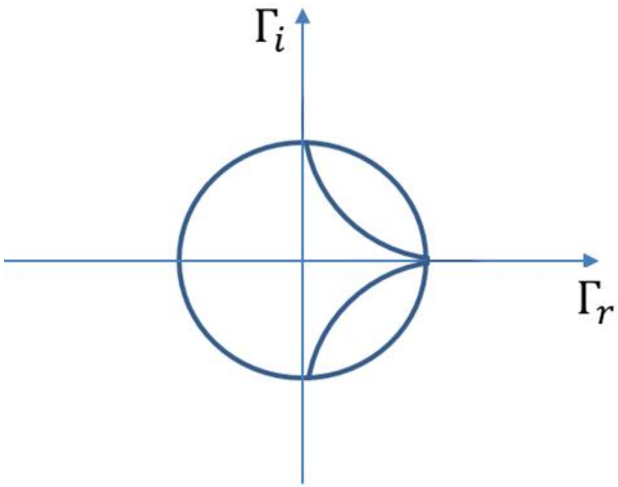
$$\left(\Gamma_r - \frac{r_L}{1+r_L}\right)^2 + {\Gamma_i}^2 = \left(\frac{1}{1+r_L}\right)^2$$

Círculos de Resistência plano Γ_r, Γ_i.

$$(\Gamma_r - 1)^2 + \left(\Gamma_i - \frac{1}{x_L}\right)^2 = \left(\frac{1}{x_L}\right)^2$$

Círculos de Reatância plano Γ_r, Γ_i.





Círculos de resistência normalizada r_L são traçados por

$$\left(\Gamma_r - \frac{r_L}{1+r_L}\right)^2 + {\Gamma_i}^2 = \left(\frac{1}{1+r_L}\right)^2$$

Para resistência normalizada $r_L = 1$:

$$\left(\Gamma_r - \frac{1}{2}\right)^2 + {\Gamma_i}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

círculo de raio ½

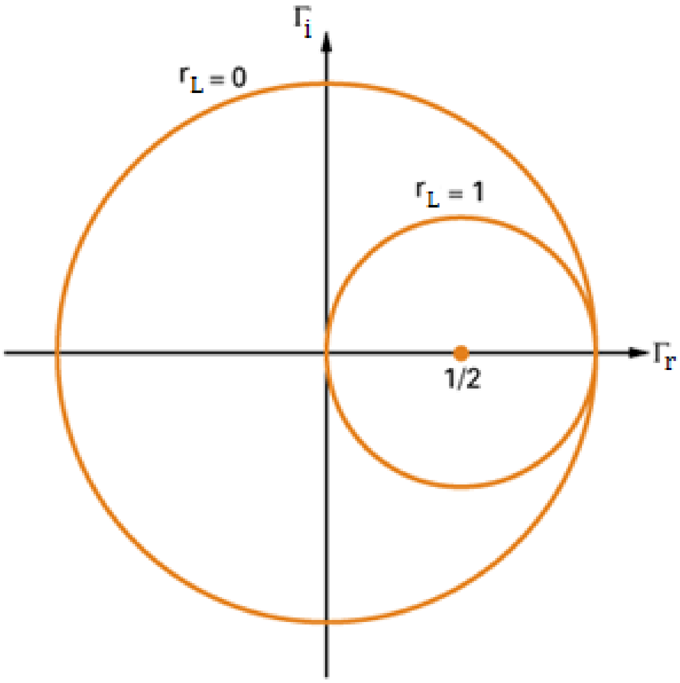
centrado em $\Gamma_r = \frac{1}{2}$ e $\Gamma_i = 0$.

Para resistência normalizada $r_L = 0$:

$$(\Gamma_r)^2 + {\Gamma_i}^2 = (1)^2$$

círculo de raio 1

centrado em $\Gamma_r = 0$ e $\Gamma_i = 0$.



Equação geral para um círculo de raio a, centrado em $x = m$ e $y = n$:

$$(x-m)^2 + (y-n)^2 = a^2$$

Círculos de reatância normalizada x_L são traçados por

$$(\Gamma_r - 1)^2 + \left(\Gamma_i - \frac{1}{x_L}\right)^2 = \left(\frac{1}{x_L}\right)^2$$

Para reatância normalizada $x_L = 1$:

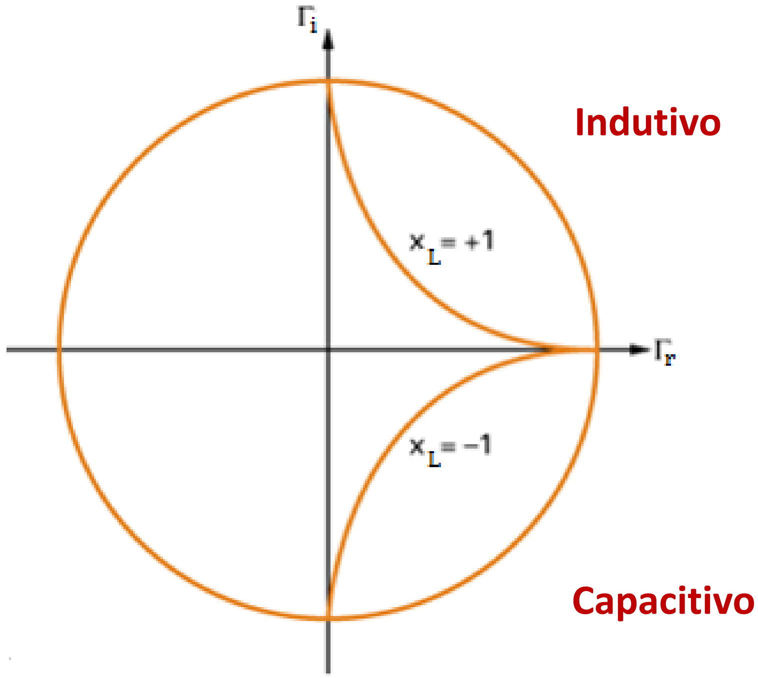
$$(\Gamma_r - 1)^2 + (\Gamma_i - 1)^2 = (1)^2$$

círculo de raio 1
centrado em $\Gamma_r = 1$ e $\Gamma_i = 1$.

Para reatância normalizada $x_L = -1$:

$$(\Gamma_r - 1)^2 + (\Gamma_i + 1)^2 = (-1)^2$$

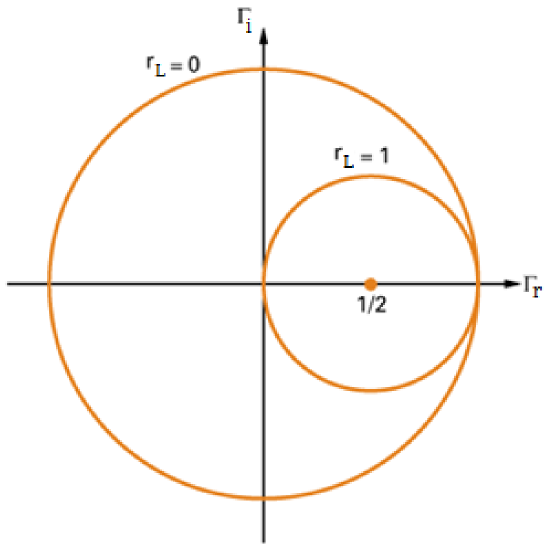
círculo de raio 1
centrado em $\Gamma_r = 1$ e $\Gamma_i = -1$.

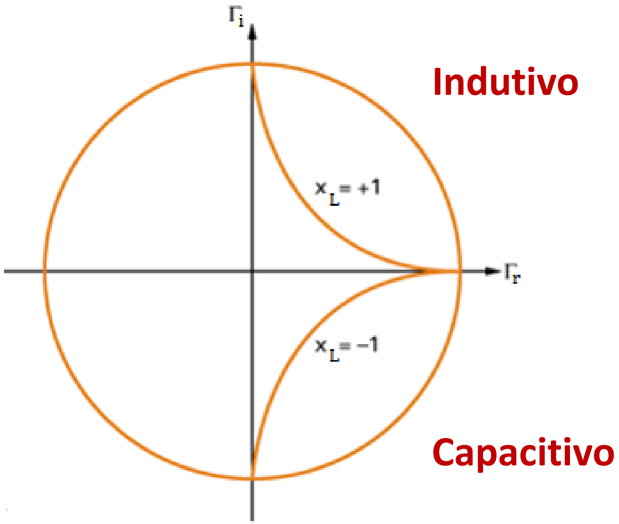


Equação geral para um círculo de raio a, centrado em $x = m$ e $y = n$:

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = a^2$$

$$\left(\Gamma_r - \frac{r_L}{1+r_L}\right)^2 + \Gamma_i^{\,2} = \left(\frac{1}{1+r_L}\right)^2 \qquad (\Gamma_r - 1)^2 + \left(\Gamma_i - \frac{1}{x_L}\right)^2 = \left(\frac{1}{x_L}\right)^2$$





Observe que:

- Todos os círculos de resistência tem centros no eixo horizontal Γ_i = 0 e passam pelo ponto Γ_r = 1 no lado direito da carta;
- Todos os círculos de reatância têm centros na linha vertical Γ_r = 1 (fora da carta) e passam pelo ponto Γ_r = 1;
- Os círculos de resistência e reatância são ortogonais.

- A Carta de Smith também pode ser utilizada para determinar a impedância da linha de transmissão, resolvendo a equação

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta l}{Z_0 + jZ_L \tan \beta l}$$

- A equação acima também pode ser expressa em termos do coeficiente de reflexão conforme

$$Z_{in} = Z_0 \frac{1 + \Gamma_L e^{-2j\beta l}}{1 - \Gamma_L e^{-2j\beta l}}$$

onde Γ_L é o coeficiente de reflexão na carga e l é o tamanho da linha de transmissão (note que aqui l é positivo).

- Note que as equações

$$Z_{in} = Z_0 \frac{1 + \Gamma_L e^{-2j\beta l}}{1 - \Gamma_L e^{-2j\beta l}} \qquad \text{e} \qquad z_L = \frac{1 + |\Gamma_L| e^{j\theta}}{1 - |\Gamma_L| e^{j\theta}}$$

diferem unicamente pelos ângulos de fase dos termos Γ_L.

- Assim, se plotamos o coeficiente $|\Gamma_L| e^{j\theta}$ na carga, a impedância de entrada normalizada (z_{in}) vista a partir de um comprimento de linha de tamanho l terminado por uma impedância de carga normalizada (z_L) pode ser encontrada girando o ponto de $2\beta l$ no sentido horário (i.é, subtraindo $2\beta l$ de θ) ao redor do centro da carga.

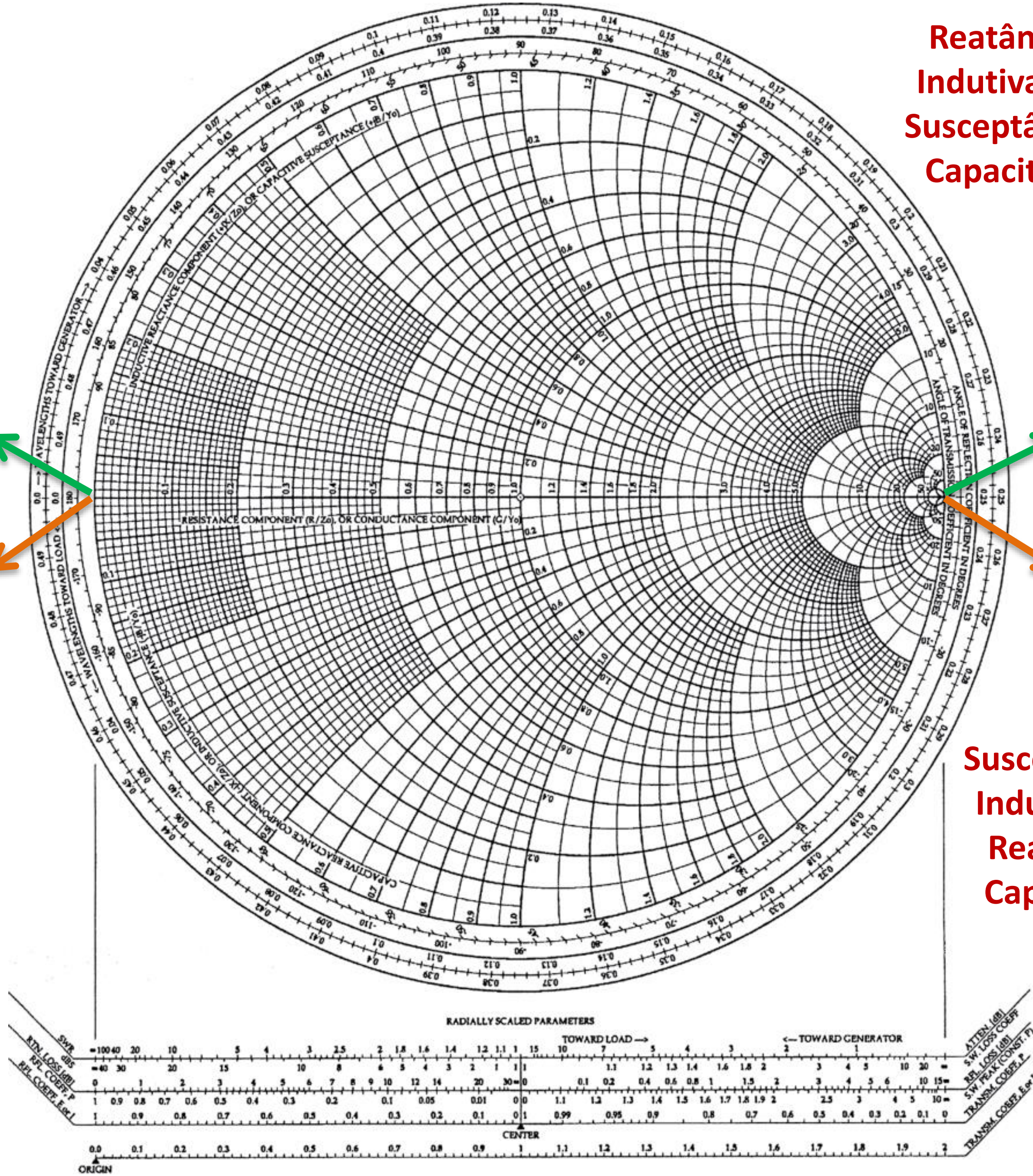
- O raio permanece com a mesma magnitude, dado que a magnitude de Γ_L não muda com a posição ao longo da LT (que é assumida sem perdas).

- Para facilitar essas rotações, a Carta de Smith tem escalas em torno de sua periferia, calibradas em comprimentos de onda, em direção ao gerador e se afastando de gerador (i.é, indo em direção à carga).
- Estas escalas são relativas, portanto, apenas a diferença nos comprimentos de onda entre dois pontos da Carta de Smith é significativa.
- As escalas cobrem uma gama de 0 a 0.5 λ, o que reflete o fato de que a Carta de Smith inclui automaticamente a periodicidade que se apresenta na linha de transmissão.
- Assim, uma linha de comprimento $\lambda/2$ (ou qualquer múltiplo) requer uma rotação de $2\beta l = 2\pi$ em torno do centro da Carta, trazendo o ponto de volta para sua posição original, mostrando que a impedância de entrada de uma carga vista através de uma linha de comprimento $\lambda/2$ é inalterada.

Reatância Indutiva ou Susceptância Capacitiva

Resistência = 0
curto circuito

Condutância = 0
circuito aberto

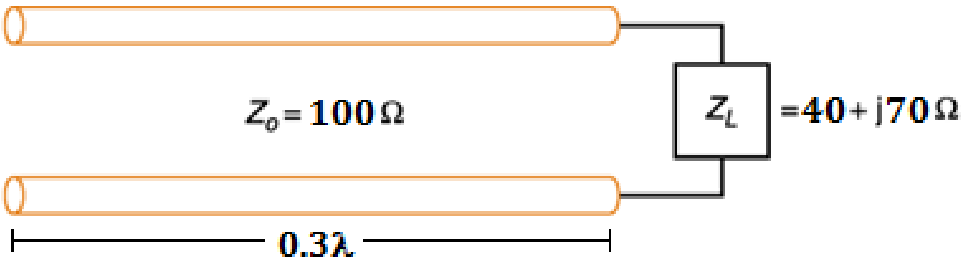


Resistência = ∞
circuito aberto

Condutância = ∞
curto circuito

Susceptância Indutiva ou Reatância Capacitiva

- Uma LT sem perdas, com $Z_0 = 100\Omega$ é terminada em uma carga $Z_L = 40 + j70\Omega$. A dimensão da LT é 0.3 λ.



- Utilizando a Carta de Smith, determine:

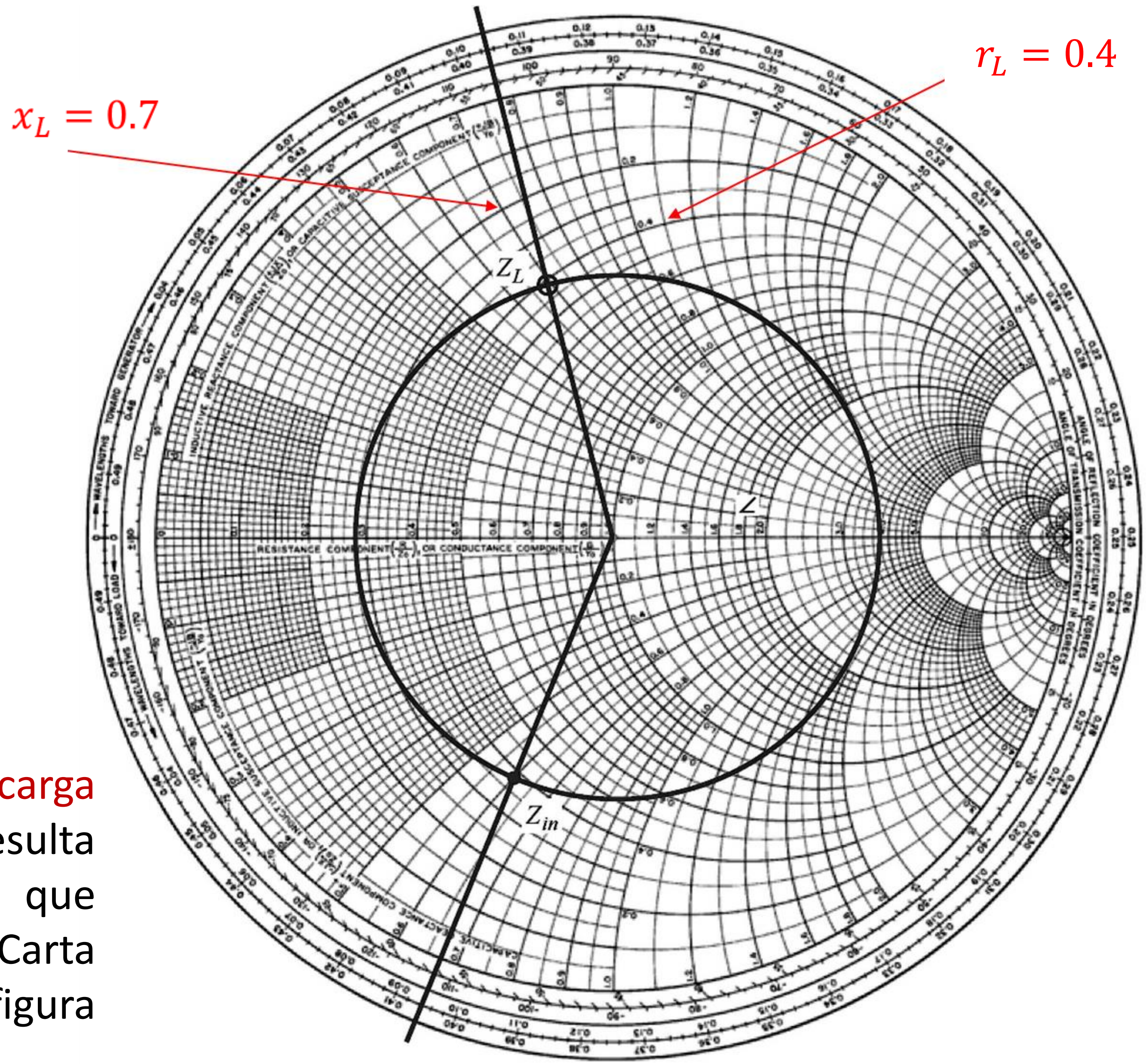
  (a) o coeficiente de reflexão na carga;

  (b) o coeficiente de reflexão na entrada da LT;

  (c) a impedância de entrada da LT;

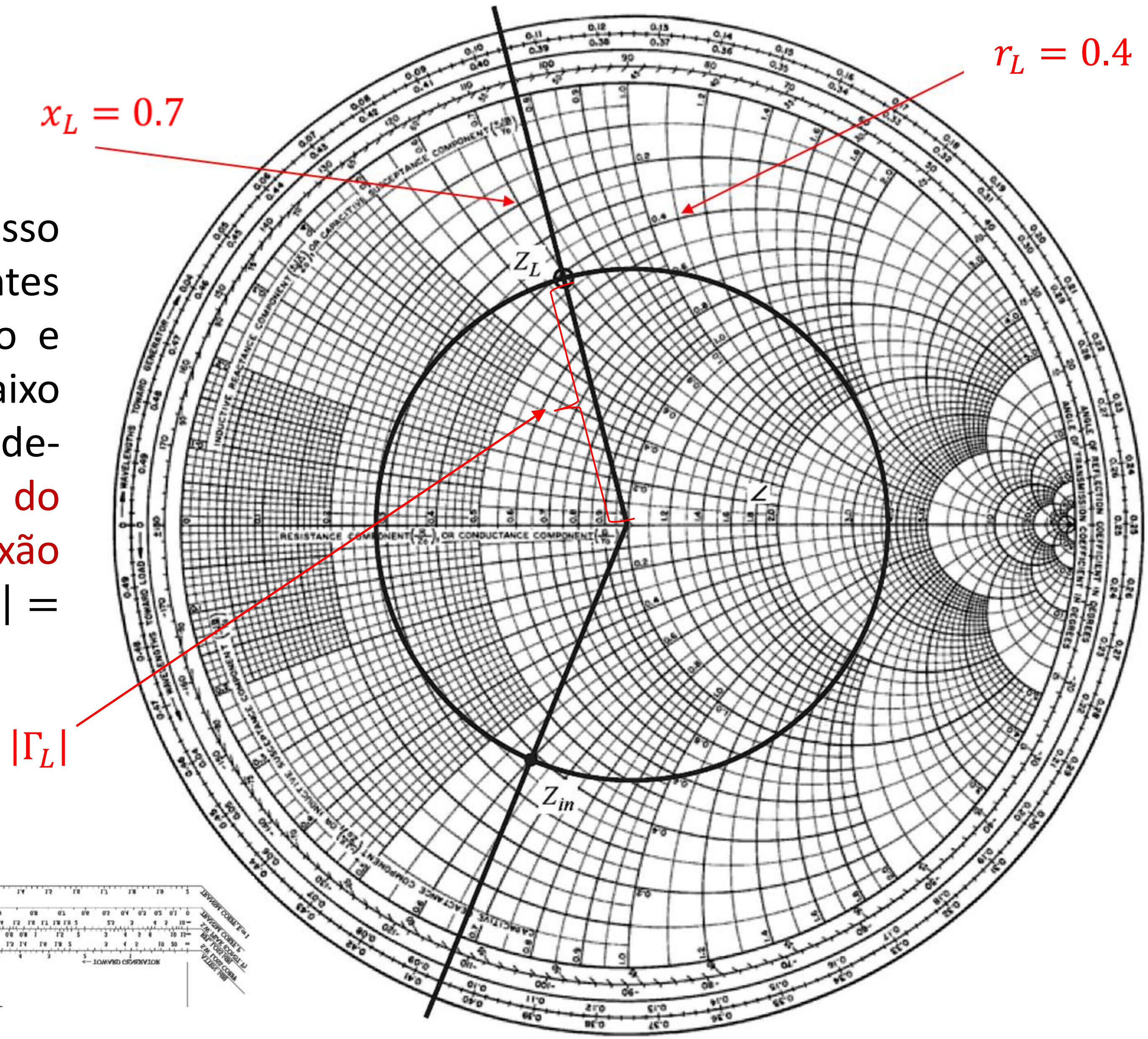
  (d) a relação de onda estacionária na LT;

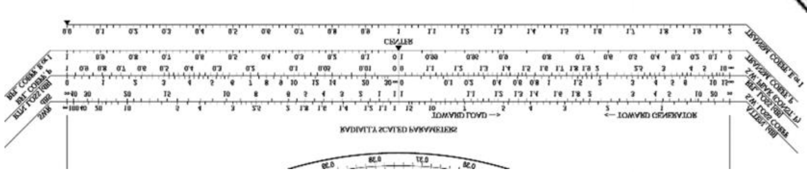
  (e) a perda de retorno.



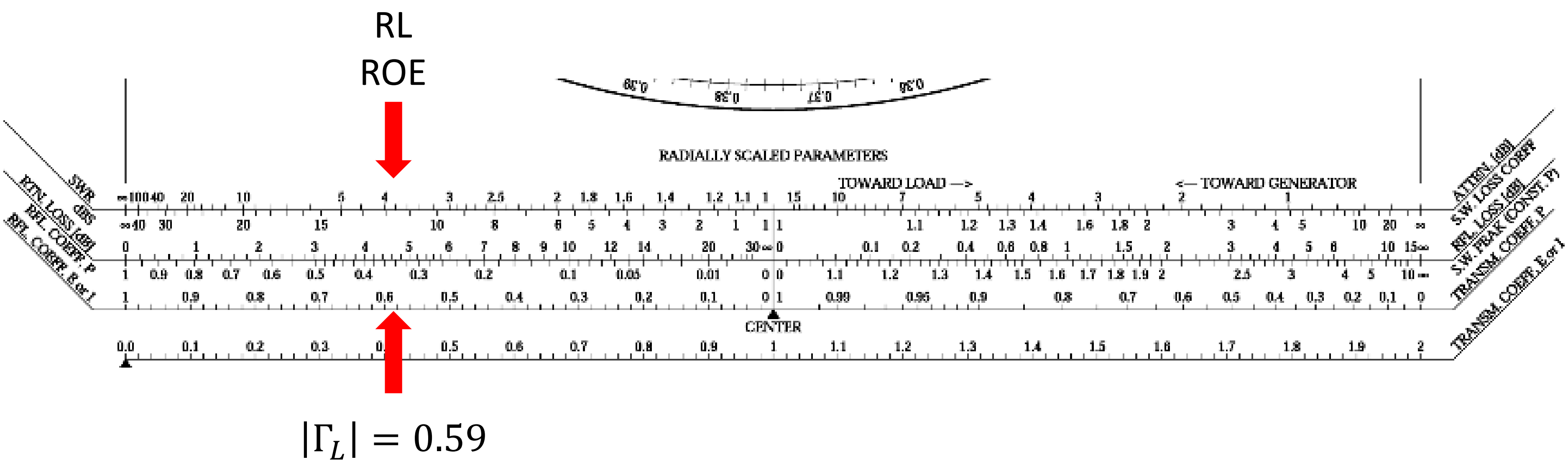
A impedância de carga normalizada por Z_0 resulta em $z_L = 0.4 + j0.7\Omega$, que pode ser plotada na Carta de Smith conforme figura ao lado.

Utilizando um compasso e a escala de coeficientes de reflexão de tensão e corrente impressa abaixo da Carta de Smith, pode-se ler a magnitude do coeficiente de reflexão na carga como $|\Gamma_L| = 0.59$.

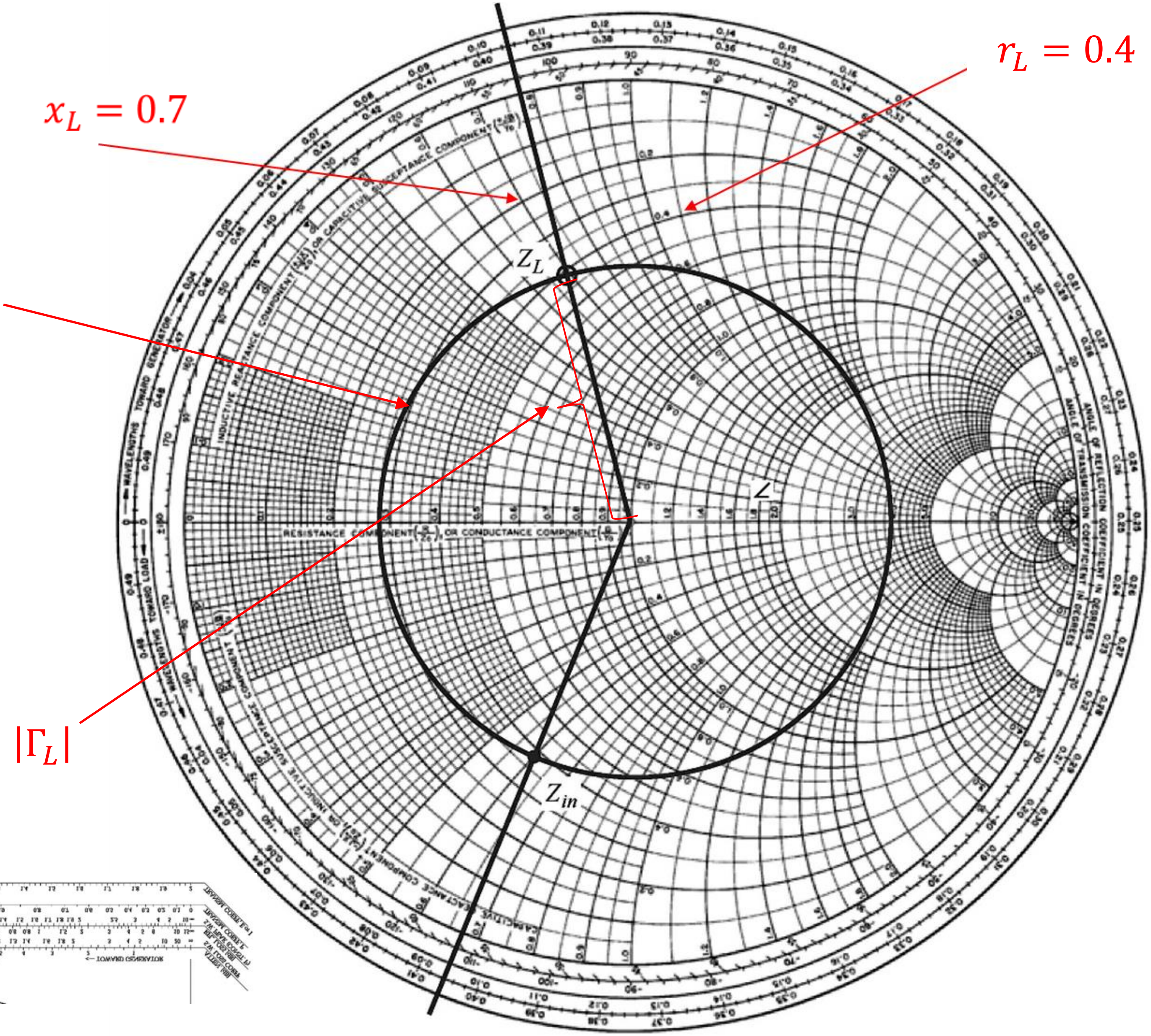


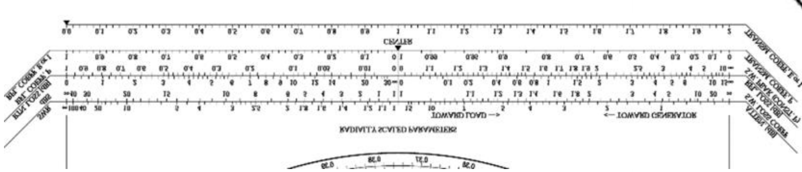


A mesma medida obtida com o compasso que foi usada para determinar a magnitude do coeficiente de reflexão na carga pode ser aplicada à escala de Relação de Onda Estacionária para obter ROE = 3.87 e à escala de Perda de Retorno, para determinar RL = 4.6dB.

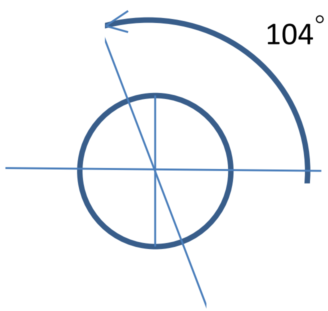


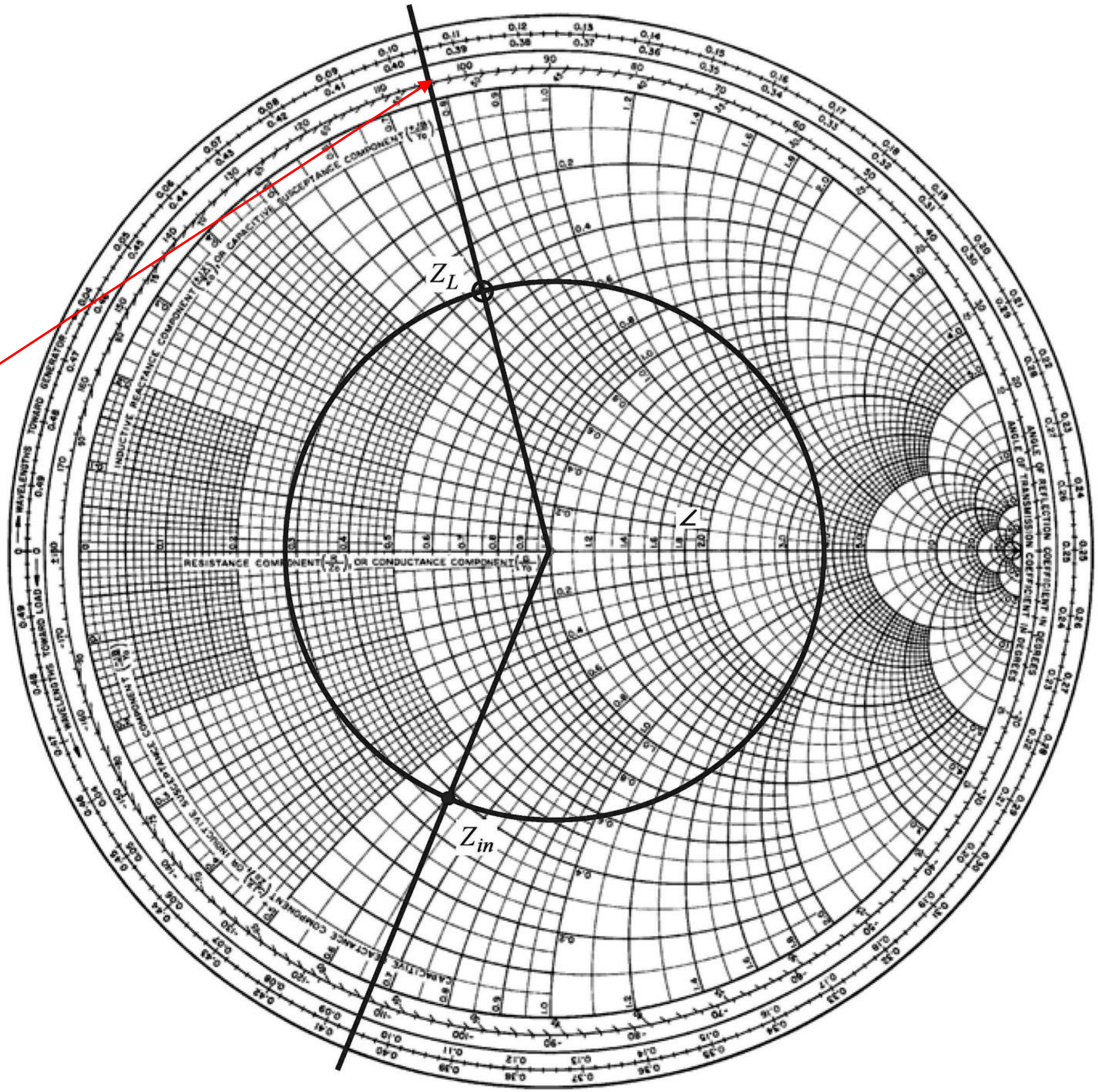
O próximo passo é desenhar um círculo com raio igual a $|\Gamma_L|$.



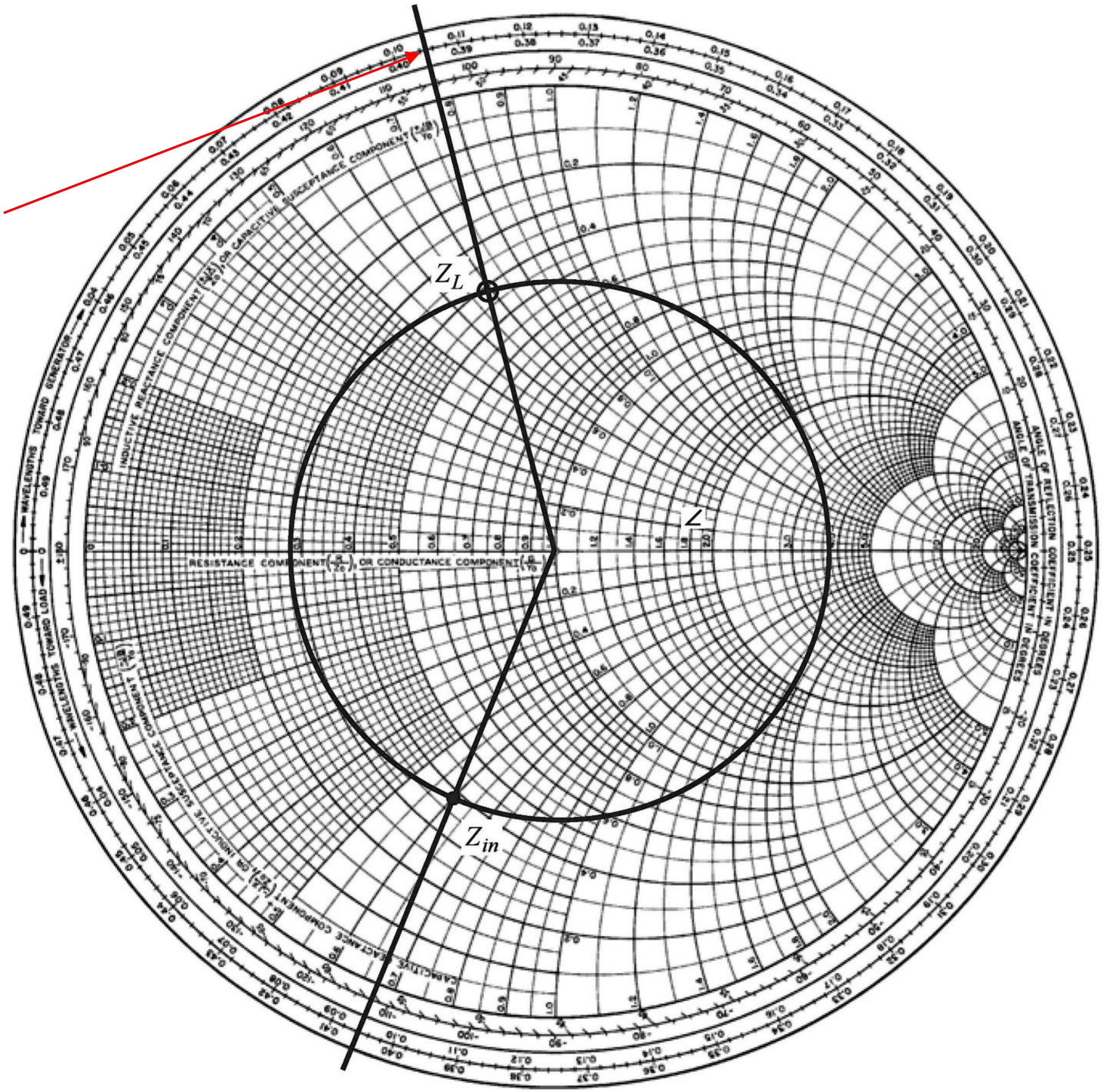


Desenhando uma linha radial que passe através do ponto de impedância de carga (z_L) até a escala externa do gráfico pode-se ler o ângulo do coeficiente de reflexão na carga (Γ_L), como 104°.

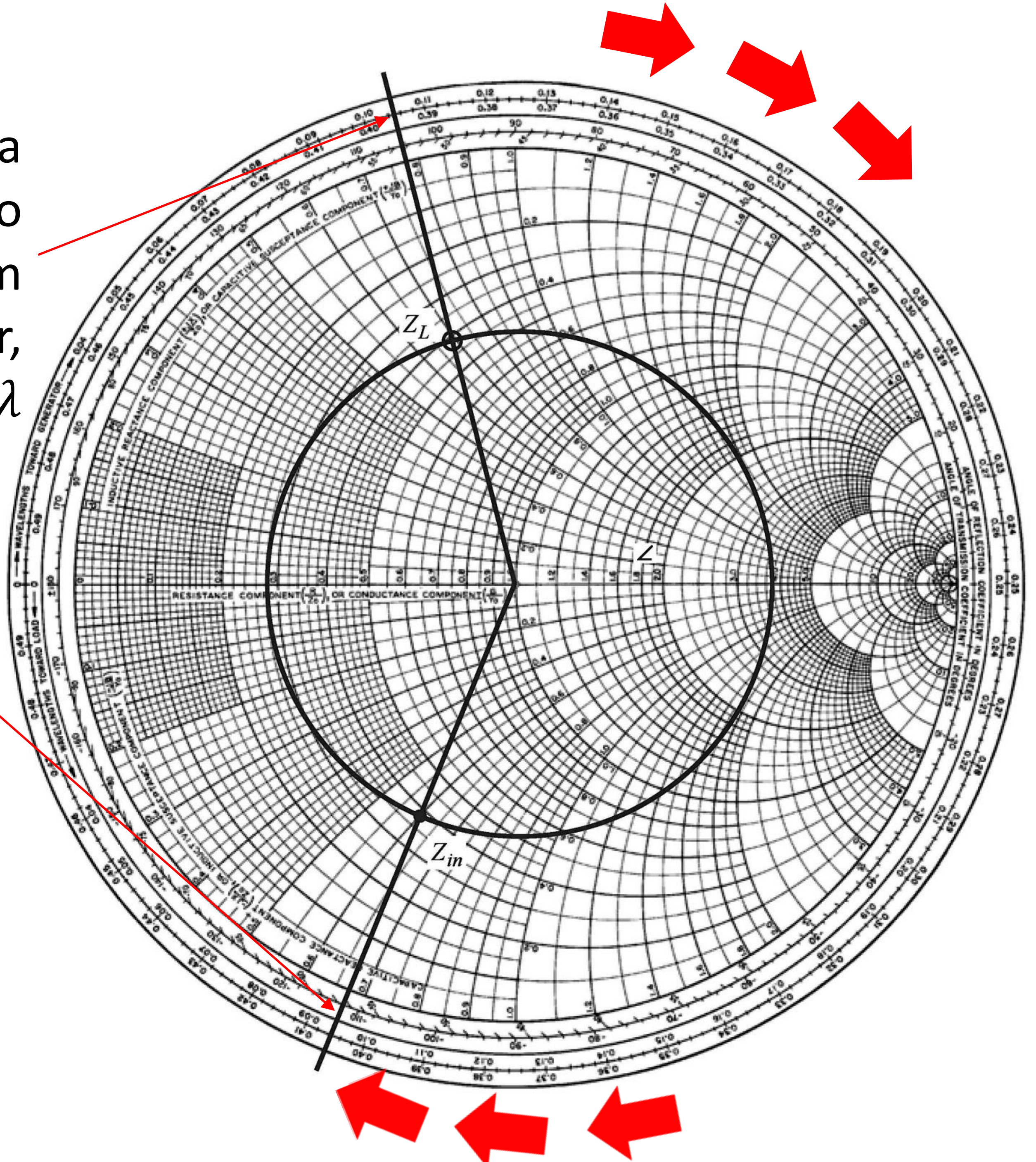




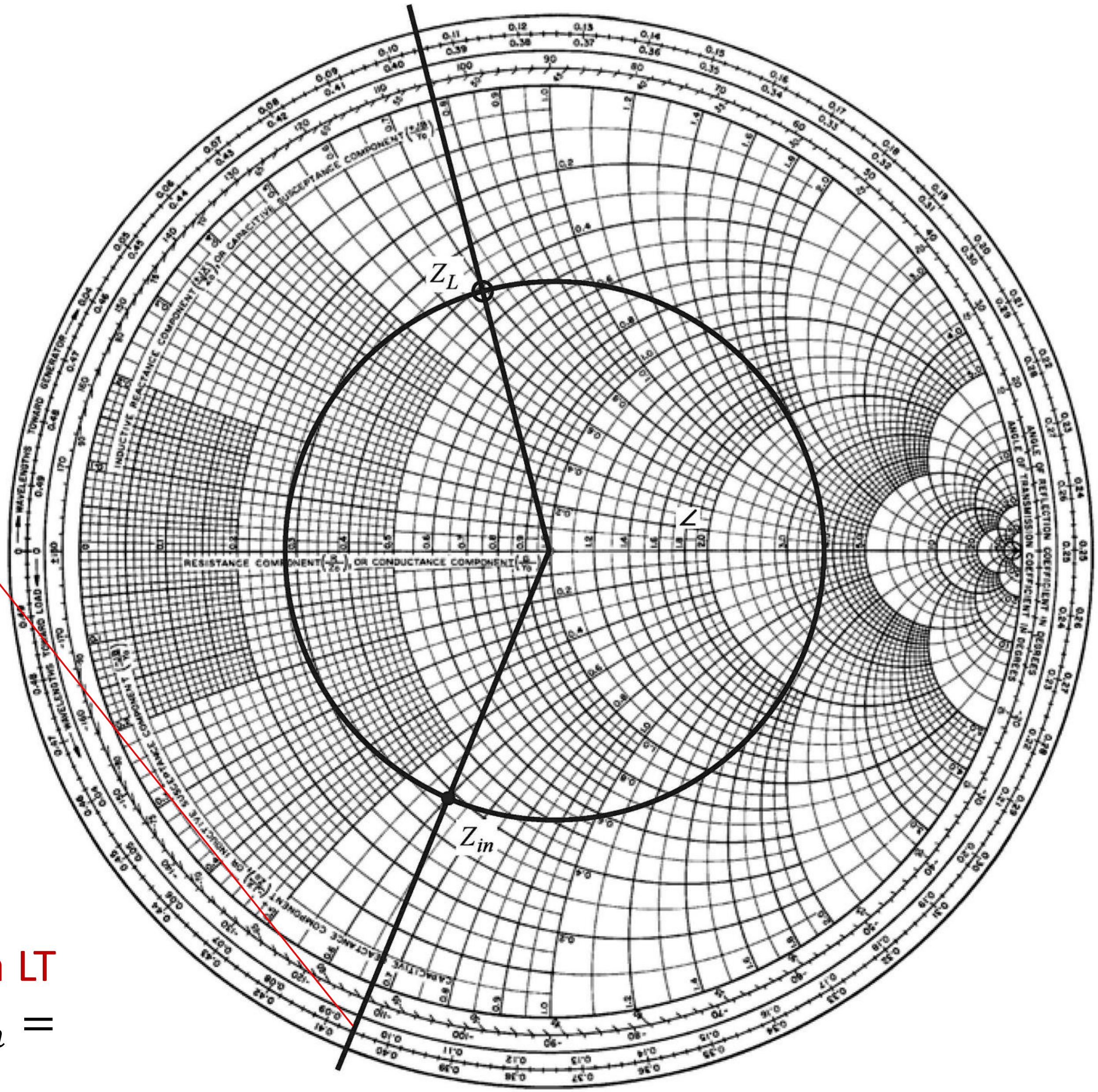
Estendendo esta linha radial até a escala de comprimento de onda em direção ao gerador (WTG, na Carta), obtém-se o valor de 0,106λ.



Deslocando a linha radial 0.3λ (a dimensão da LT é 0.3 λ) em direção ao gerador, encontraremos 0.406 λ na escala WTG.



A partir desta posição (0.406λ na escala WTG) , traçamos uma linha radial que interceptará o círculo de raio $|\Gamma_L|$.



O ponto definido pela interceptação identificará a impedância de entrada normalizada (z_{in}), como $z_{in} = (0.365 - j0.611)\ \Omega$.

A impedância de entrada da LT será, portanto, $Z_{in} = Z_0 z_{in} = = (36.5 - j61.1)\ \Omega$.

A magnitude do coeficiente de reflexão na entrada é a mesma ($|\Gamma_{in}| = |\Gamma_L| = 0.59$), e a fase é lida a partir da linha radial na escala de fase, como -112º.