

Capítulo 7

Mapas Auto-Organizados de Kohonen - SOM

Neste capítulo estudaremos um dos mais populares algoritmos na categoria de aprendizado não-supervisionado, as RNAs conhecidas como Mapas Auto-Organizados de Kohonen (*Self-Organizing Map* - SOM).

Os Mapas Auto-Organizados são redes competitivas que possuem a habilidade de formar mapeamentos que preservam a topologia entre os espaços de entrada e de saída. As redes SOM são utilizadas em muitos projetos industriais como ferramentas para resolver problemas práticos de difícil solução. Diversos campos da ciência adotaram os SOMs como uma ferramenta analítica padrão. Dentre eles encontram-se campos como: a estatística, o processamento de sinais, a teoria de controle, a análise financeira, a física experimental, a química e a medicina.

As RNAs SOM resolvem problemas não-lineares de alta dimensionalidade, tais como: extração de características e classificação de imagens e padrões acústicos, controle adaptativo de robôs, equalização, demodulação e transmissão de sinais. Além disso, cabe salientar que o SOM é um dos modelos representativos mais realísticos da função biológica do cérebro.

O texto apresentado neste capítulo segue basicamente Haykin em [3] (sob a forma de uma tradução livre, resumida) e tutoriais e artigos do Professor Teuvo Kohonen, amplamente divulgados em [1] e [2].

As redes SOM são baseadas no aprendizado competitivo. Os neurônios de saída da RNA competem entre si para serem ativados, com o resultado de que apenas um neurônio de saída (ou um neurônio por grupo) está "ligado" a qualquer instante. Um neurônio de

saída que vence tal competição é chamado neurônio vencedor (*winner-takes-all neuron*). Uma maneira de induzir tal tipo de competição entre os neurônios de saída é usar conexões inibitórias laterais entre eles (ou seja, caminhos de realimentação negativa), idéia originalmente proposta por Rosenblatt em 1958.

Os neurônios em uma rede SOM são colocados nos nós de uma treliça (*lattice*) que é usualmente de uma ou duas dimensões. Mapas de dimensões maiores são também possíveis, porém mais raros.

Os neurônios se tornam seletivamente "sintonizados" a vários estímulos (padrões de entrada) ou classes de padrões de entrada ao longo de um processo competitivo de aprendizado. A localização destes neurônios (que são os neurônios vencedores) se torna ordenada entre si de tal forma que um sistema de coordenadas significativo é criado na treliça, para diferentes características de entrada.

Um SOM é, portanto, caracterizado pela formação de um mapa topográfico dos padrões de entrada, no qual as localizações espaciais (ou coordenadas) dos neurônios na treliça são indicativas de características estatísticas intrínsecas contidas nos padrões de entrada.

Como modelo neural, as redes SOM constituem uma ponte entre dois níveis de adaptação: as regras de adaptação formuladas ao nível de um único neurônio e a formação de melhores e mais acessíveis padrões de seletividade de características, ao nível de camadas de neurônios. Devido ao fato de serem inerentemente não-lineares, os SOMs podem ser vistos como uma generalização não-linear da heurística para análise de componentes principais.

O desenvolvimento dos SOMs como modelo neural foi motivado por uma característica do cérebro humano, que é organizado em muitas regiões, de tal forma que entradas sensoriais distintas são representadas por mapas computacionais topologicamente ordenados. Por exemplo, entradas sensoriais tácteis, visuais e acústicas são mapeadas em diferentes áreas do córtex cerebral, de uma forma topologicamente ordenada.

Assim, pode-se considerar que um mapa computacional constitui um bloco básico de construção na estrutura de processamento de informação do sistema nervoso. Um mapa computacional é definido como uma matriz de neurônios, os quais operam nos sinais que transportam informação sensorial, em paralelo. Conseqüentemente, os neurônios transformam sinais de entrada em uma distribuição de probabilidade codificada na região que representa os valores computados de parâmetros por regiões de máxima atividade relativa dentro do mapa. A informação assim derivada é tal que pode ser acessada prontamente utilizando esquemas relativamente simples.

O principal objetivo das RNAs SOM é transformar um sinal padrão de entrada de dimensão arbitrária em um mapa discreto de uma ou duas dimensões, e desempenhar esta transformação adaptativamente, em uma forma topologicamente ordenada. A Figura 7.1 mostra o diagrama esquemático de uma treliça bidimensional de neurônios comumente utilizada como mapa discreto.

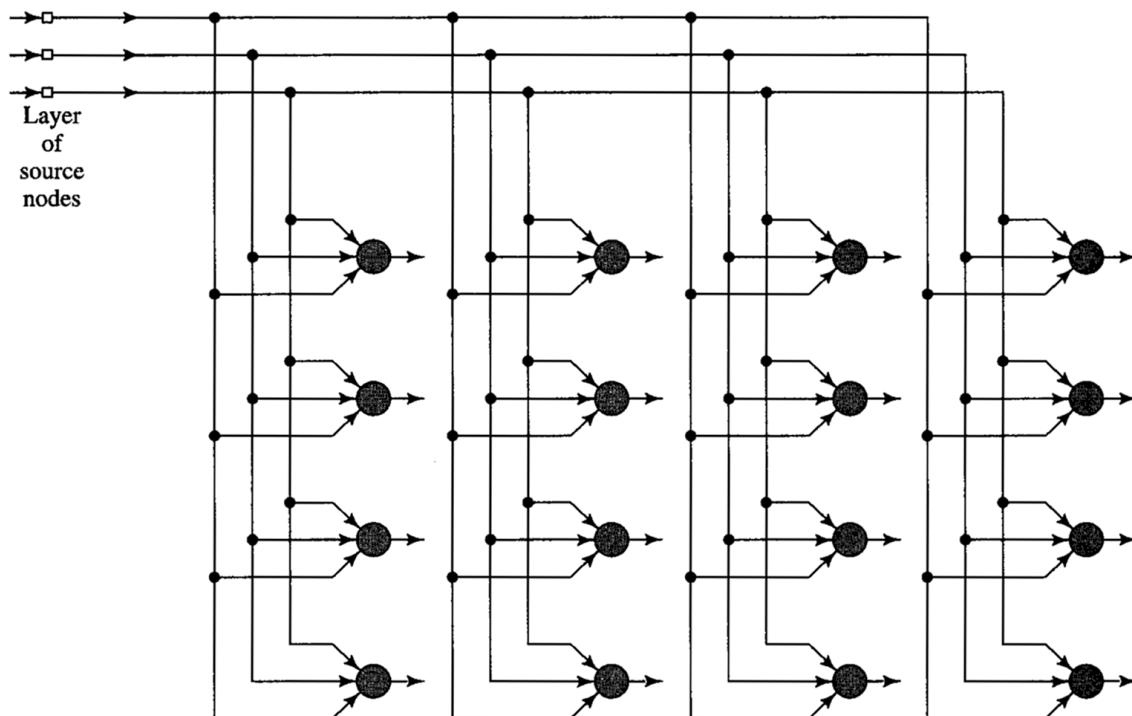


Figura 7.1: Treliça bidimensional de neurônios.

Cada neurônio na treliça é completamente conectado a todos os nós fonte na camada de entrada. A rede da Figura (7.1) representa uma estrutura progressiva, com uma única camada computacional, consistindo de neurônios arranjados em linhas e colunas. Uma treliça de uma dimensão é um caso especial da configuração descrita na Figura 7.1: neste caso especial a camada computacional consiste simplesmente de uma única coluna ou linha de neurônios.

Cada padrão de entrada apresentado à rede consiste de uma região localizada de atividade. A localização e natureza de tal região usualmente varia de uma realização de padrão de entrada, para outra. Todos os neurônios na rede devem, portanto, ser expostos a um número suficiente de diferentes realizações dos padrões de entrada, para garantir que o processo de auto-organização ocorra de forma apropriada.

O algoritmo responsável pela formação do SOM em primeiro lugar inicializa os pesos sinápticos da rede. Este procedimento pode ser feito atribuindo pequenos valores tomados de um gerador de números aleatórios; desta forma, nenhuma ordem prévia é imposta ao mapa de características. Desde que a rede tenha sido adequadamente inicializada, há três processos essenciais envolvidos na formação do SOM, conforme descritos abaixo:

1. Competição.

Para cada padrão de entrada, os neurônios da rede computam os seus respectivos valores de uma função discriminante. Esta função provê as bases para a competição entre os neurônios. O particular neurônio com o maior valor de função discriminante é declarado vencedor da competição.

2. Cooperação.

O neurônio vencedor determina a localização espacial de uma vizinhança topológica de neurônios excitados, provendo, desta forma, as bases para a cooperação entre tais neurônios vizinhos.

3. Adaptação sináptica.

Este último mecanismo permite aos neurônios excitados aumentar seus valores individuais da função discriminante em relação ao padrão de entrada, através de ajustes adequados aplicados a seus pesos sinápticos. Os ajustes feitos são tais que a resposta do neurônio vencedor à subsequente aplicação de um padrão similar de entrada é realçada.

Os processos de competição e cooperação estão de acordo com dois dos quatro princípios de auto-organização que estudamos em capítulos anteriores, assim como o processo de auto-amplificação apresenta-se em uma forma modificada do aprendizado Hebbiano no processo adaptativo. Ainda, a presença de redundância nos dados de entrada é necessária para o aprendizado, desde que é responsável por prover o conhecimento.

Passemos agora a uma explanação detalhada de cada um dos processo acima listados: Competição, Cooperação e Adaptação Sináptica.

7.1. O Processo Competitivo

Seja m a dimensão do espaço de dados de entrada. Seja um padrão de entrada (vetor) selecionado aleatoriamente a partir do espaço de entrada, denotado por

$$\underline{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_m]^T \quad (7.1)$$

O vetor de pesos sinápticos de cada neurônio na rede tem a mesma dimensão do espaço de entrada. Seja o vetor de pesos sinápticos do neurônio j denotado por

$$\underline{w}_j = [w_{j1} \ w_{j2} \ \dots \ w_{jm}]^T, \quad j = 1, 2, \dots, l \quad (7.2)$$

onde l é o número total de neurônios na rede.

Para encontrar o vetor de entrada \underline{x} que mais se aproxima do vetor de pesos sinápticos \underline{w}_j , são comparados os produtos internos

$$\underline{w}_j^T \underline{x} \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, l \quad (7.3)$$

e é selecionado o que apresenta maior valor.

Esta operação assume que o mesmo *threshold* seja aplicado a todos os neurônios. (Lembre que, conforme vimos no Capítulo 4, quando uma polarização (ou *bias*) é aplicada a um neurônio, seu efeito é representado por uma sinapse de peso b conectada a uma entrada fixa e igual a (+1). De forma alternativa, a polarização pode ser gerada por uma sinapse de peso θ conectada a uma entrada de valor fixo e igual a (-1), quando, então, recebe o nome de *threshold*.)

Ao selecionar o neurônio com o maior produto interno $\underline{w}_j^T \underline{x}$, teremos, na realidade, determinado a localização onde a vizinhança topológica de neurônios excitados deverá estar centrada.

O critério para determinar qual vetor de entrada \underline{x} mais se aproxima do vetor de pesos sinápticos \underline{w}_j – baseado na maximização do produto interno $\underline{w}_j^T \underline{x}$ e mostrado na Equação (7.3) – é matematicamente equivalente a minimizar a distância Euclidiana entre os vetores \underline{x} e \underline{w}_j [3].

Se usarmos o índice $i(\underline{x})$ para identificar o neurônio que mais se aproxima do vetor de entrada \underline{x} poderemos, então, determiná-lo aplicando a condição mostrada na equação abaixo,

$$i(\underline{x}) = \underset{j}{\operatorname{arg\,min}} \|\underline{x} - \underline{w}_j\|, \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, l \quad (7.4)$$

que resume a essência do processo de competição entre os neurônios.

O particular neurônio i que satisfaz a condição expressa na Equação (7.4) é chamado de neurônio vencedor para o vetor de entrada \underline{x} .

A Equação (7.4) leva a esta observação:

"Um espaço de entrada contínuo de padrões de ativação é mapeado em um espaço de saída discreto de neurônios, por meio de um processo de competição entre os neurônios na rede."

Dependendo da aplicação de interesse, a resposta da rede pode ser tanto o índice do neurônio vencedor (isto é, sua posição na treliça), quanto o vetor de pesos sinápticos que está mais próximo do vetor de entrada, no sentido da distância Euclidiana.

7.2. O Processo Cooperativo

O neurônio vencedor localiza o centro de uma vizinhança topológica de neurônios cooperativos. A definição desta vizinhança topológica é baseada na evidência neurobiológica de que há interação lateral entre um conjunto de neurônios biológicos excitados.

Em particular, um neurônio que está "ligado" tende a excitar mais os neurônios em sua vizinhança imediata, do que a excitar aqueles neurônios que estão mais distantes. Assim, podemos afirmar que a vizinhança topológica ao redor do neurônio vencedor i decai suavemente com a distância lateral.

Para sermos específicos, seja $h_{j,i}$ a vizinhança topológica centrada no neurônio vencedor i e circundada por um conjunto de neurônios excitados cooperativos, dos quais um neurônio típico é denotado por j . Seja $d_{i,j}$ a distância lateral entre o neurônio vencedor i e o neurônio excitado j . Então, podemos assumir que a vizinhança topológica $h_{j,i}$ é uma função unimodal da distância lateral $d_{i,j}$, tal que satisfaça a dois requerimentos distintos:

1. A vizinhança topológica $h_{j,i}$ é simétrica ao redor do ponto máximo definido por $d_{i,j} = 0$; em outras palavras, atinge seu valor máximo no neurônio vencedor i , para o qual a distância $d_{i,j}$ é zero.
2. A amplitude da vizinhança topológica $h_{j,i}$ decresce monotonicamente com o aumento da distância lateral $d_{i,j}$, decaindo a zero para $d_{i,j} \rightarrow \infty$; condição necessária para convergência.

Uma escolha para $h_{j,i}$ que satisfaz a estes requerimentos é a função Gaussiana

$$h_{j,i(x)} = \exp\left(-\frac{d_{j,i}^2}{2\sigma^2}\right), \quad (7.5)$$

a qual é invariante à translação (isto é, independente da localização do neurônio vencedor). O parâmetro σ , presente na Equação (7.5) expressa a "largura efetiva" da vizinhança topológica, conforme ilustrado na Figura 7.2 (Figura 9.3, página 449 H-NN) e mede o grau com que os neurônios excitados, vizinhos do neurônio vencedor, participam no processo de aprendizagem.

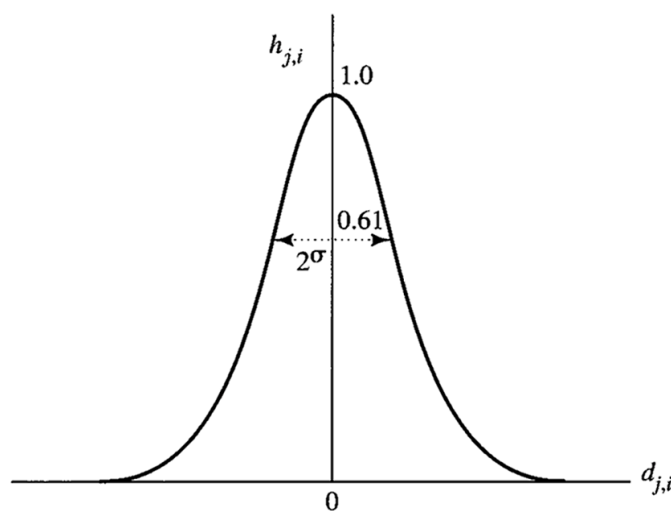


Figura 7.2: Função de Vizinhança Gaussiana.

Para o caso de neurônios biológicos, a vizinhança topológica Gaussiana expressa pela Equação (7.5) é mais apropriada do que o seria uma vizinhança retangular. O uso da vizinhança topológica Gaussiana também faz com que o algoritmo SOM convirja mais rapidamente do que no caso de utilizar-se uma vizinhança topológica retangular.

Para que exista cooperação entre neurônios vizinhos, é necessário que a vizinhança topológica $h_{j,i}$ seja mais dependente da distância lateral $d_{i,j}$ entre o neurônio vencedor i e o neurônio excitado j no espaço de saída, do que de alguma medida de distância no espaço de entrada original. Isto é exatamente o que demonstra a Equação (7.5).

No caso de uma treliça de uma dimensão, $d_{i,j}$ é um inteiro igual a $|j-i|$. No caso de uma treliça bidimensional, a distância $d_{i,j}$ é dada por

$$d_{i,j}^2 = \left\| \underline{r}_j - \underline{r}_i \right\|^2 \quad (7.6)$$

onde o vetor discreto \underline{r}_j define a posição do neurônio excitado j e \underline{r}_i define a posição discreta do neurônio vencedor i , ambas medidas no espaço discreto de saída.

Uma outra característica única do algoritmo SOM é que o tamanho da vizinhança topológica encolhe com o tempo. Este requerimento é satisfeito fazendo a largura σ da função de vizinhança topológica $h_{j,i}$ decrescer com o tempo. Uma escolha popular para a dependência de σ no tempo discreto n é o decaimento exponencial descrito por

$$\sigma(n) = \sigma_0 \exp\left(-\frac{n}{\tau_1}\right) \quad n = 0,1,2,\dots \quad (7.7)$$

onde σ_0 é o valor de σ na inicialização do algoritmo SOM, e τ_1 é uma constante de tempo. De forma correspondente, a vizinhança topológica assume uma forma variante com o tempo, conforme mostrada por

$$h_{j,i(\underline{x})}(n) = \exp\left(-\frac{d_{j,i}^2}{2\sigma^2(n)}\right) \quad n = 0,1,2,\dots \quad (7.8)$$

onde $\sigma(n)$ é definido pela Equação (7.7). Assim, à medida que o tempo n (isto é, o número de iterações) aumenta, a largura $\sigma(n)$ diminui a uma taxa exponencial, e a vizinhança topológica encolhe de forma correspondente. Doravante iremos nos referir a $h_{j,i(\underline{x})}(n)$ como a função de vizinhança.

Outra forma de interpretar a variação da função de vizinhança $h_{j,i(\underline{x})}(n)$ ao redor de um neurônio vencedor $i(\underline{x})$ é considerar que o propósito da largura $h_{j,i(\underline{x})}(n)$ é essencialmente correlacionar as direções das atualizações dos pesos de um grande número de neurônios excitados na treliça. À medida que a largura $h_{j,i(\underline{x})}(n)$ diminui, também é diminuído o número de neurônios cujas direções de atualização são correlacionadas (este fenômeno pode ser observado quando o treinamento de uma rede SOM é visualizado graficamente na tela do computador).

Para que a operação descrita não constitua desperdício de recursos computacionais (mover um grande número de graus de liberdade ao redor de um neurônio vencedor de forma correlacionada) é preferível usar uma forma normalizada de treinamento para o algoritmo SOM. Nesta forma de treinamento pode-se trabalhar com um número muito menor de graus de liberdade normalizados. Esta função é facilmente desempenhada na forma discreta, tendo uma função de vizinhança $h_{j,i(\underline{x})}(n)$ de largura constante, mas aumentando gradualmente o número total de neurônios. Os novos neurônios são inseridos entre os antigos, e as propriedades de suavização do algoritmo SOM garantem que os novos neurônios sejam agregados adequadamente à adaptação sináptica.

7.3. O Processo Adaptativo

O último processo envolvido na formação auto-organizada de um mapa de características (SOM) é o processo adaptativo dos pesos sinápticos.

Para que a rede possa se auto-organizar, o vetor de pesos sinápticos \underline{w}_j do neurônio j deverá variar com relação ao vetor de entrada \underline{x} . No postulado de aprendizado de Hebb, um peso sináptico é aumentado quando há ocorrência simultânea de atividades pré e pós-sinápticas. O uso de tal regra é adequado para o aprendizado associativo.

Para o tipo de aprendizado não-supervisionado aqui considerado, entretanto, a hipótese de Hebb em sua forma básica é insatisfatória pela seguinte razão: mudanças em conectividades ocorrem apenas em uma direção, o que acabaria por levar todos os pesos sinápticos à saturação.

Para superar esta dificuldade a hipótese de Hebb é modificada incluindo um termo de esquecimento, $g(y_j)\underline{w}_j$, onde \underline{w}_j é o vetor de pesos sinápticos do neurônio j e $g(y_j)$ é alguma função escalar positiva da resposta y_j . A única condição imposta sobre a função $g(y_j)$ é que o termo constante na expansão em série de Taylor de $g(y_j)$ seja zero, para que possamos escrever

$$g(y_j)=0 \text{ para } y_j = 0 \quad (7.9)$$

Dada uma tal função, podemos então expressar a mudança no vetor de pesos sinápticos do neurônio j na treliça, conforme segue:

$$\Delta \underline{w}_j = \eta y_j \underline{x} - g(y_j)\underline{w}_j \quad (7.10)$$

onde η é o parâmetro razão de aprendizado do algoritmo. O primeiro termo no lado direito da Equação (7.10) é o termo Hebbiano e o segundo termo é o termo de esquecimento. Para satisfazer a condição dada pela Equação (7.9), escolhe-se uma função linear para $g(y_j)$, conforme

$$g(y_j) = \eta y_j \quad (7.11)$$

A Equação (7.10) pode, ainda, ser simplificada fazendo-se

$$y_j = h_{j,i}(\underline{x}) \quad (7.12)$$

Substituindo as Equações (7.11) e (7.12) na Equação (7.10), obteremos

$$\Delta \underline{w}_j = \eta h_{j,i(\underline{x})}(\underline{x} - \underline{w}_j) \quad (7.13)$$

Finalmente, usando o formalismo de tempo-discreto, dado o vetor de pesos sinápticos $\underline{w}_j(n)$ do neurônio j no tempo n , o vetor de pesos atualizado $\underline{w}_j(n+1)$ no tempo $n+1$ é definido por

$$\underline{w}_j(n+1) = \underline{w}_j(n) + \eta(n) h_{j,i(\underline{x})}(n)(\underline{x} - \underline{w}_j(n)) \quad (7.14)$$

o qual é aplicado a todos os neurônios na treliça que estão dentro da vizinhança topológica do neurônio vencedor i .

A equação (7.14) tem o efeito de mover o vetor de pesos sinápticos \underline{w}_i do neurônio vencedor i na direção do vetor de entrada \underline{x} . Sob repetidas apresentações dos dados de treino, os vetores de pesos sinápticos tendem a seguir a distribuição dos vetores de entrada, devido à atualização da vizinhança. O algoritmo, portanto, conduz a uma ordenação topológica do mapa de características no espaço de entrada, no sentido de que os neurônios que são adjacentes na treliça tenderão a ter vetores de pesos sinápticos similares.

A equação (7.14) é a expressão desejada para computar os pesos sinápticos do mapa de características. Em adição a esta equação, entretanto, é necessário considerar-se a heurística dada pela Equação (7.8) para selecionar a função de vizinhança $h_{j,i(\underline{x})}(n)$ e uma heurística adicional para selecionar o parâmetro razão de aprendizado $\eta(n)$.

O parâmetro razão de aprendizado $\eta(n)$ deve variar com o tempo, como indicado na Equação (7.14). Em particular, a razão de aprendizado deve iniciar em um valor η_0 , e, então, decrescer gradualmente com o aumento do tempo n . Esta condição pode ser satisfeita escolhendo um decaimento exponencial para $\eta(n)$, conforme

$$\eta(n) = \eta_0 \exp\left(-\frac{n}{\tau_2}\right) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.15)$$

onde τ_2 é uma outra constante de tempo do algoritmo SOM. Embora as fórmulas de decaimento exponencial descritas nas Equações (7.7) e (7.15) para a largura da função de vizinhança e para o parâmetro razão de aprendizado possam não ser ótimas, são adequadas para a formação do mapa de características de uma forma auto-organizada.

7.3.1. Duas Fases do Processo Adaptativo: Ordenar e Convergir

Partindo de um estado inicial de desordem completa, o algoritmo SOM gradualmente conduz a uma representação organizada dos padrões de ativação extraídos do espaço de entrada, desde que os parâmetros do algoritmo sejam selecionados de forma apropriada.

Pode-se decompor em duas fases a adaptação dos pesos sinápticos, na rede (adaptação computada de acordo com a Equação (7.14)): uma fase relativa à ordenação ou auto-organização, seguida por uma fase relativa à convergência, assim descritas:

1. Fase de ordenação ou auto-organização.

É durante esta primeira fase do processo adaptativo que a ordenação topológica dos vetores pesos sinápticos acontece. A fase de ordenação pode durar 1000 ou mais iterações do algoritmo SOM. As escolhas do parâmetro razão de aprendizado e da função de vizinhança devem ser feitas de forma cuidadosa:

- ❖ O parâmetro razão de aprendizado $\eta(n)$ deve iniciar com um valor próximo a 0.1, decrescendo após gradualmente, mas permanecendo acima de 0.01. Estes valores são atingidos através das seguintes escolhas para os parâmetros da Equação (7.15):

$$\eta_0 = 0.1 \text{ e } \tau_2 = 1000.$$

- ❖ A função de vizinhança $h_{j,i}(n)$ deve incluir inicialmente quase todos os neurônios na rede centrados no neurônio vencedor i e, então, encolher lentamente com o tempo.

Especificamente, durante a fase de ordenação (que pode ocupar 1000 iterações ou mais), $h_{j,i}(n)$ pode ser reduzida a um valor tão pequeno quanto a apenas dois neurônios vizinhos ao redor de um neurônio vencedor, ou mesmo ao próprio neurônio vencedor. Assumindo o uso de uma treliça de duas dimensões de neurônios para o mapa discreto, pode-se então ajustar o tamanho inicial σ_0 da função de vizinhança igual ao "raio" da treliça. Correspondentemente, pode-se ajustar a constante de tempo τ_1 na Equação (7.7) conforme segue:

$$\tau_1 = \frac{1000}{\log \sigma_0}$$

2. Fase de convergência.

Esta segunda fase do processo adaptativo é necessária para o "ajuste fino" do mapa de características e, portanto, para prover uma quantificação estatística acurada do espaço de entrada.

Como regra geral, o número de iterações que constituem a fase de convergência deve ser pelo menos 500 vezes o número de neurônios presentes na rede.

Assim, a fase de convergência pode durar por milhares e, possivelmente, por dezenas de milhares de iterações:

- ❖ Para uma boa precisão estatística, o parâmetro razão de aprendizado $\eta(n)$ deve ser mantido em um valor pequeno durante a fase de convergência, da ordem de 0.01, não devendo cair a zero em nenhuma situação. Caso contrário, a rede poderá ficar presa em um estado metaestável. Um estado metaestável pertence a uma configuração do mapa de características com um defeito topológico. O decaimento exponencial presente na Equação (7.15) evita possíveis estados metaestáveis.
- ❖ A função de vizinhança $h_{j,i(\underline{x})}$ deve conter somente os vizinhos mais próximos de um neurônio vencedor, podendo, eventualmente, reduzir o número de neurônios vizinhos mais próximos a um, ou mesmo a zero.

7.4 Sumário do Algoritmo SOM

Os parâmetros essenciais do algoritmo são:

1. Um espaço de entrada contínuo de padrões de ativação que são gerados de acordo com uma certa distribuição de probabilidade.
2. Uma topologia da rede na forma de uma treliça de neurônios, a qual define um espaço de saída discreto.
3. Uma função de vizinhança $h_{j,i(\underline{x})}(n)$ variante no tempo que é definida ao redor de um neurônio vencedor $i(\underline{x})$.
4. Um parâmetro razão de aprendizado $\eta(n)$ que inicie em um valor inicial η_0 e, então, decresça gradualmente com o tempo n , mas nunca caia a zero.

Na fase de ordenação as Equações (7.8) e (7.15) podem ser usadas para determinar, respectivamente, a função de vizinhança e o parâmetro razão de aprendizado (isto é, durante aproximadamente as primeiras 1000 iterações).

Na fase de convergência, para obter boa precisão estatística, $\eta(n)$ deve ser mantido em um valor pequeno (0.01 ou menor) por um longo período de tempo, o qual equivale a milhares de iterações e, no começo da fase de convergência, a função de vizinhança deve conter apenas os vizinhos mais próximos do neurônio vencedor podendo, eventualmente, encolher para um ou mesmo para zero neurônios vizinhos.

Há três passos básicos envolvidos na aplicação do algoritmo, após a inicialização: amostragem, verificação de similaridade e atualização. Estes três passos são repetidos até que a formação do mapa de características esteja completa. O algoritmo é sumariado como segue:

1. Inicialização:

Para a inicialização dos vetores de pesos sinápticos, $\underline{w}_j(0)$, são escolhidos valores aleatórios, com a restrição de que $\underline{w}_j(0)$ seja diferente para $j = 1, 2, \dots, l$; onde l é o número de neurônios na treliça. Pode ser conveniente manter pequena a magnitude dos pesos sinápticos.

Outra forma de inicializar o algoritmo é selecionar aleatoriamente os vetores de pesos $\{\underline{w}_j(0)_{j=1}^l\}$ a partir do conjunto de vetores de entrada $\{\underline{x}_i\}_{i=1}^N$.

2. Amostragem:

Um vetor \underline{x} é extraído do espaço de dados de entrada, com uma associada probabilidade de ocorrência. Este vetor representa o padrão de ativação que é aplicado à treliça. A dimensão do vetor \underline{x} é igual a m .

3. Verificação de Similaridade:

O neurônio vencedor $i(\underline{x})$ (*best-matching neuron*) no instante de tempo n é encontrado, utilizando-se o critério da mínima distância Euclidiana (conforme Equação (7.4)):

$$i(\underline{x}) = \arg \min_j \|\underline{x}(n) - \underline{w}_j\|, \text{ para } j = 1, 2, \dots, l$$

4. Atualização:

Os vetores de pesos sinápticos de todos os neurônios são ajustados através da Equação (7.14):

$$\underline{w}_j(n+1) = \underline{w}_j(n) + \eta(n) h_{j,i(\underline{x})}(n) (\underline{x}(n) - \underline{w}_j(n))$$

onde $\eta(n)$ é o parâmetro razão de aprendizado e $h_{j,i(\underline{x})}(n)$ é a função de vizinhança centrada ao redor do neurônio vencedor $i(\underline{x})$. Tanto $\eta(n)$ quanto $h_{j,i(\underline{x})}(n)$ são variados dinamicamente durante o aprendizado, para otimização dos resultados.

5. Continuação:

Retorna-se ao passo 2 e continua-se o procedimento até que não sejam observadas mudanças consideráveis no mapa de características.

7.5 Propriedades do Mapa de Características

Após a convergência do algoritmo SOM, o mapa de características computado exhibe características estatísticas importantes do espaço de entrada.

Seja X um espaço de dados de entrada contínuo, cuja topologia é definida pela relação métrica dos vetores $\underline{x} \in X$.

Seja A um espaço de saída discreto, cuja topologia vem do arranjo de um conjunto de neurônios sob a forma de nós computacionais de uma treliça.

Seja Φ uma transformação não-linear chamada "mapa de características", a qual mapeia o espaço de entrada X no espaço de saída A , ou seja, $\Phi: X \rightarrow A$. (7.16)

A Equação (7.16) pode ser vista como uma abstração da Equação (7.4), a qual define a localização de um neurônio vencedor $i(\underline{x})$ a partir de um vetor de entrada \underline{x} .

Por exemplo, em um contexto neurobiológico, o espaço de entrada X pode representar o conjunto de coordenadas de receptores sensoriais físicos distribuídos densamente pela superfície do corpo. Correspondentemente, o espaço de saída A poderá representar o conjunto de neurônios localizados naquela camada do córtex cerebral à qual os receptores sensoriais físicos estão confinados.

Dado um vetor de entrada \underline{x} , o algoritmo SOM inicialmente identifica um neurônio vencedor $i(\underline{x})$, que seja o mais semelhante no espaço de saída A , de acordo com o mapa de características Φ . O vetor de pesos sinápticos \underline{w}_i do neurônio $i(\underline{x})$ pode, então, ser visto como um ponteiro para aquele neurônio no espaço de entrada X ; ou seja, os elementos sinápticos do vetor \underline{w}_i podem ser vistos como as coordenadas da imagem do neurônio i projetado no espaço de entrada. Estas duas operações encontram-se representadas na Figura 7.3.

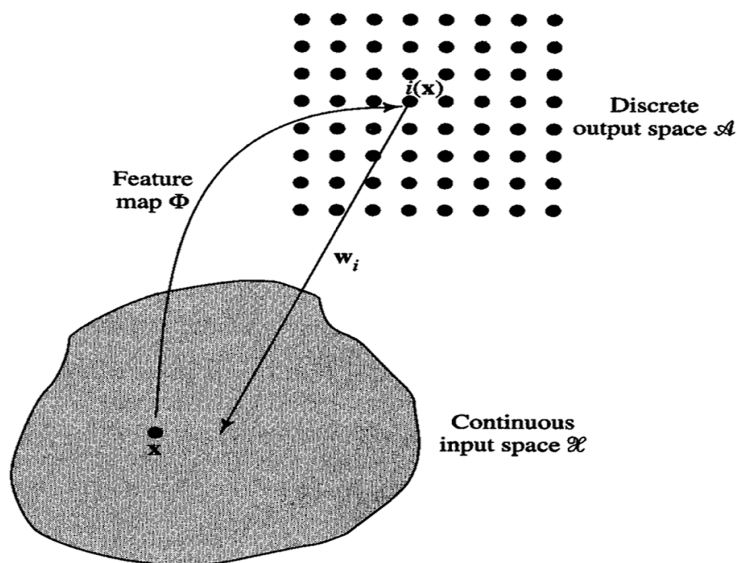


Figura 7.3: Ilustração da relação entre o mapa de características Φ e o vetor de pesos \underline{w}_i do neurônio vencedor j .

O mapa de características Φ tem algumas propriedades importantes:

1. O mapa de características Φ , representado pelo conjunto de vetores de pesos sinápticos $\{\underline{w}_i\}$ no espaço de saída A , provê uma boa aproximação do espaço de entrada X .
2. O mapa de características Φ computado pelo algoritmo SOM é topologicamente ordenado, no sentido de que a localização espacial de um neurônio na treliça corresponde a um particular domínio ou característica dos padrões de entrada.
3. O mapa de características Φ reflete variações na estatística da distribuição de entrada: regiões no espaço de entrada X das quais os vetores amostra \underline{x} são extraídos com uma alta probabilidade de ocorrência são mapeados sobre maiores domínios do espaço de saída A e, portanto, com melhor resolução do que regiões em X das quais os vetores amostra \underline{x} são extraídos com uma baixa probabilidade de ocorrência.
4. Se os dados que compõem um espaço de entrada possuem uma distribuição não-linear, o mapa auto-organizado é capaz de selecionar um conjunto de características adequado para aproximar a distribuição não-linear subjacente.

7.6 Referências Bibliográficas do Capítulo 7

- [1] <http://www.cis.hut.fi>
- [2] <http://www.shf.ac.uk>
- [3] S. Haykin, *Neural Networks*, 2nd ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1999.