

Modelo genérico de um sistema de comunicação digital. Digitalização e compressão da informação para mínima ocupação espectral. *Forward error correction* para mínima taxa de erro de bit. Introdução à modulação e demodulação digital. *Design flow* de um sistema de comunicação digital. Canal AWGN , Capacidade de canal - Teorema de Shannon. Canal com degradação da curva de resposta em frequência (canal com *multipath*).

Centro de Tecnologia – Departamento de Eletrônica e Computação

UFSM00261 – SISTEMAS DE COMUNICAÇÃO DIGITAL I

Prof. Fernando DeCastro



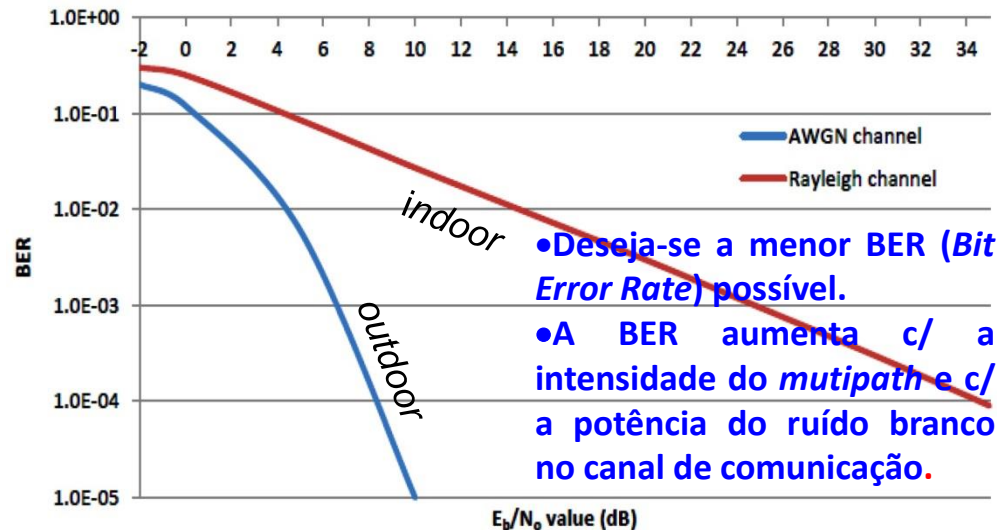
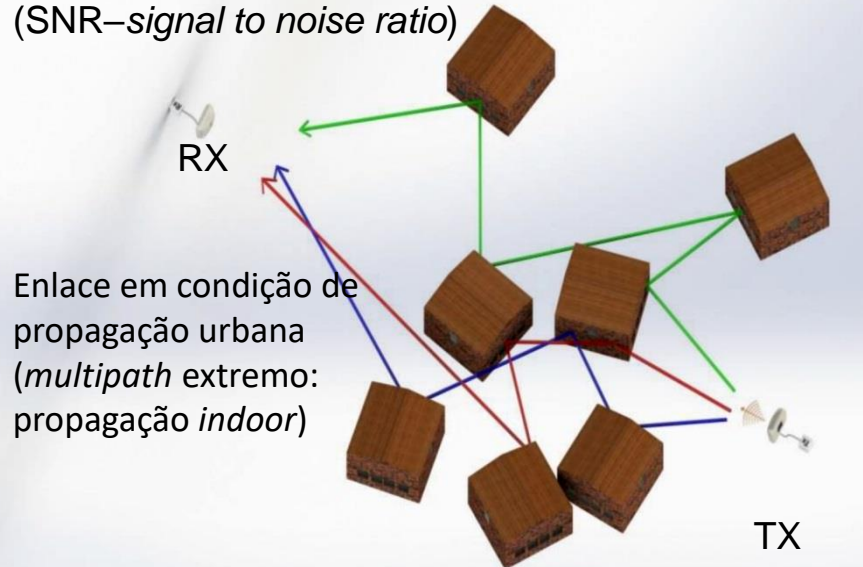
Parâmetros de desempenho de um sistema de comunicação digital em função das condições operacionais no canal de comunicação (no caso-exemplo, um canal *wireless*):



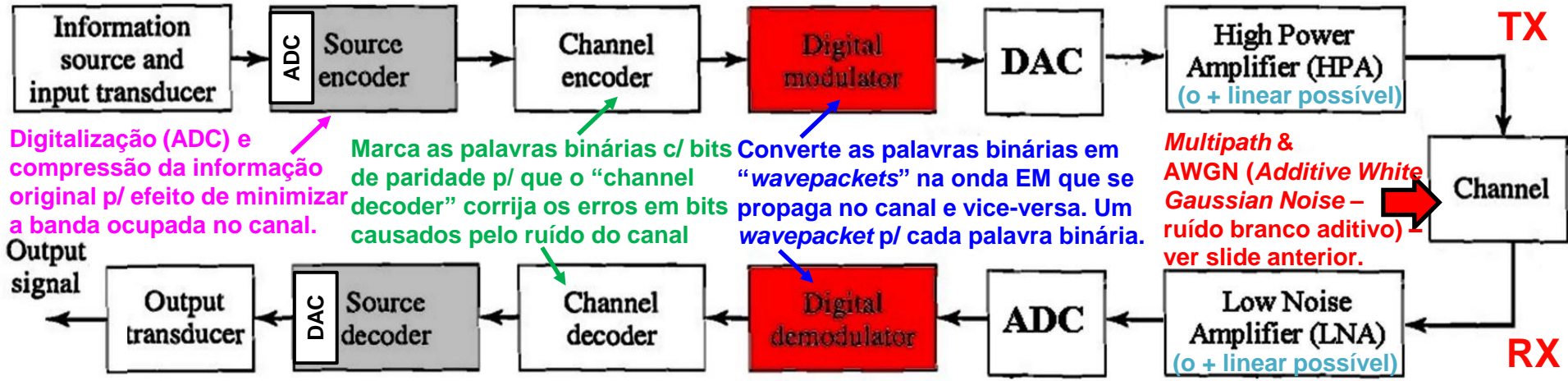
Curva de desempenho BERxSNR

E_b/N_0 expressa a relação em dB entre a potência do sinal (por bit transmitido) e a potência de ruído no canal (SNR – *signal to noise ratio*)

BER x E_b/N_0 for BPSK



Arquitetura genérica dos blocos funcionais de um sistema de comunicação digital p/ que os parâmetros de desempenho desejados para o sistema sejam alcançados:



Digitalização (ADC) e compressão da informação original p/ efeito de minimizar a banda ocupada no canal.

Marca as palavras binárias c/ bits de paridade p/ que o "channel decoder" corrija os erros em bits causados pelo ruído do canal

Converte as palavras binárias em "wavepackets" na onda EM que se propaga no canal e vice-versa. Um wavepacket p/ cada palavra binária.

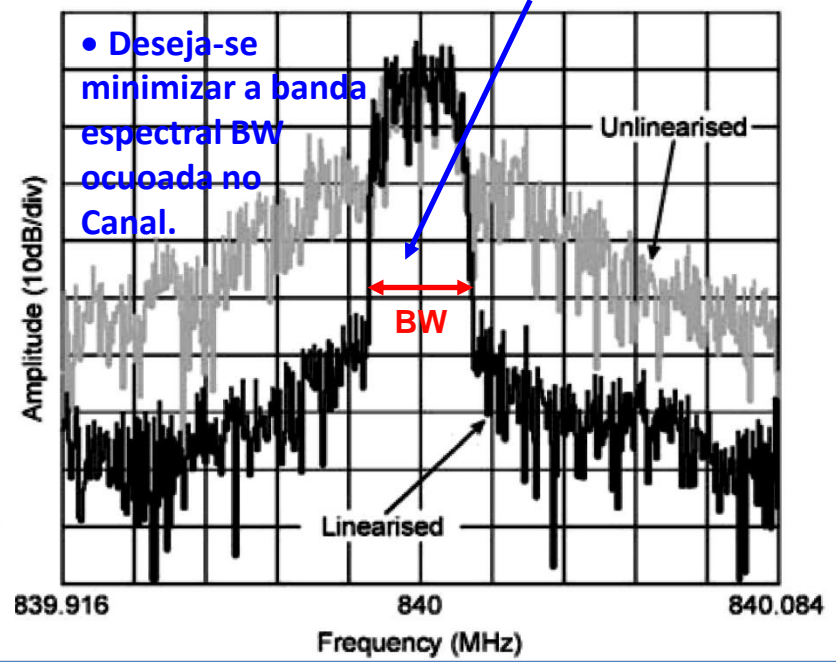
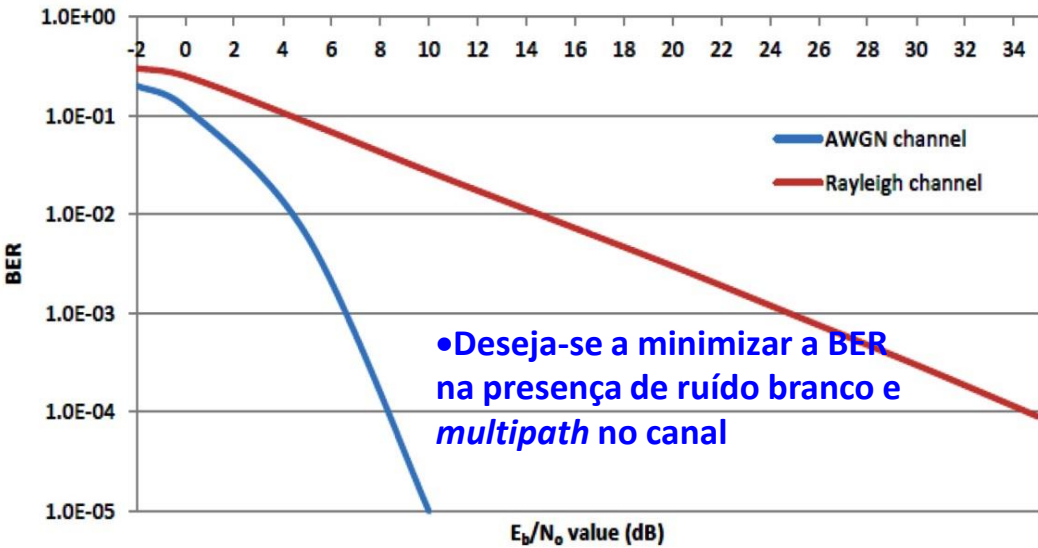
Multipath & AWGN (Additive White Gaussian Noise - ruído branco aditivo) - ver slide anterior.

Output signal

Processo inverso do "source encoder" (codificador de fonte), processo este que recupera a informação original.

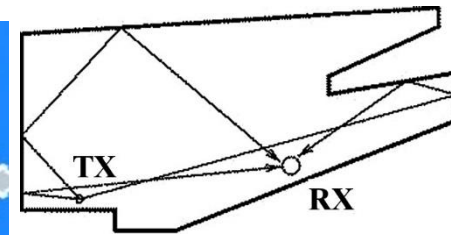
Contenção espectral: BW é a banda que o espectro do sinal do TX ocupa no canal. Quanto maior a taxa em bits/s a ser transmitida, maior é a BW.

BER x E_b/N_0 for BPSK



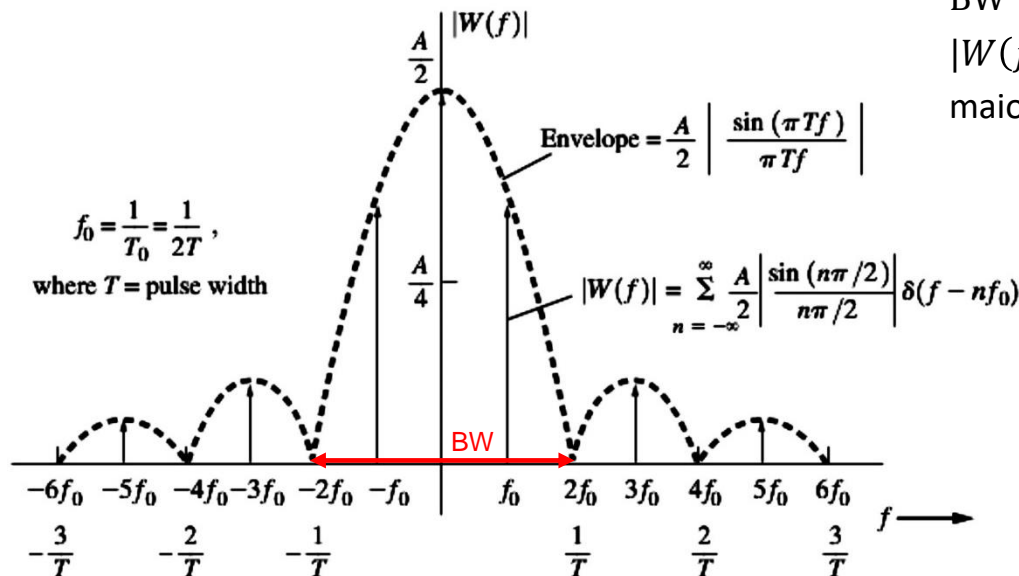
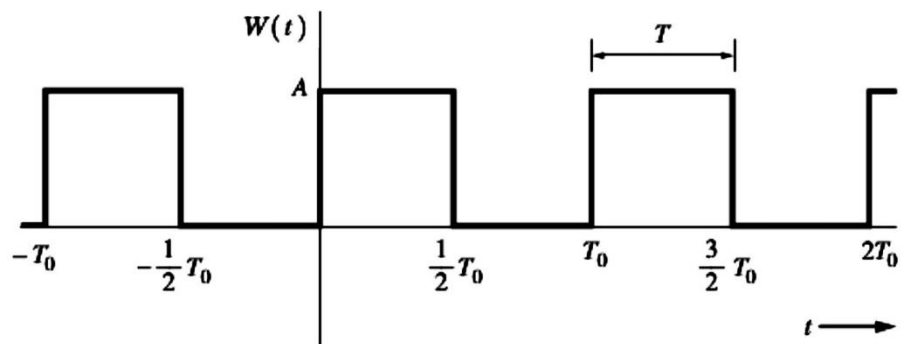
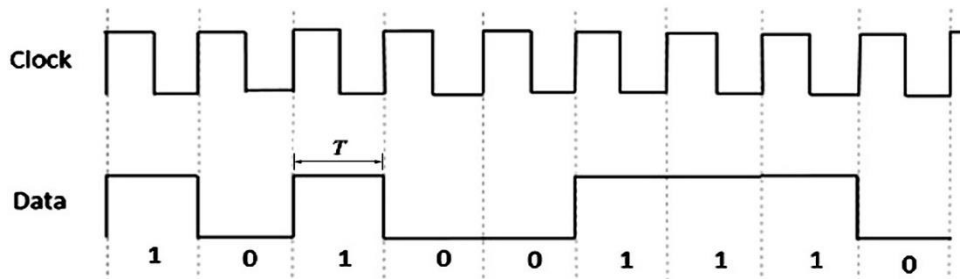
Degradação da inteligibilidade do sinal recebido causada pelo *multipath* no canal de comunicação – analogia acústica:

Duas pessoas, uma em cada extremidade de um longo corredor tentando estabelecer conversação terão dificuldade na inteligibilidade das palavras (mesmo não havendo ruído) **caso a duração das palavras proferidas seja aproximadamente de mesma duração dos ecos da onda acústica originados nas paredes do corredor.** Isto ocorre porque cada palavra recebida será interferida pelo seu eco que se superpõe à palavra original tornando-a ininteligível. **Note que é inútil falar mais alto porque é o próprio sinal interferindo nele mesmo.** Este fenômeno é denominado de **Interferência Intersimbólica** (ISI – *Inter Symbol Interference*), onde, neste exemplo acústico, cada símbolo na conversação é uma palavra proferida. Em um sistema de comunicação digital, um símbolo é um “*wavepacket*” na onda EM que se propaga no canal, e que é atribuído à respectiva palavra binária no modulador, conforme veremos adiante.



Uma possível solução é falar bem mais devagar, quase soletrando, de modo que a duração do eco interferente seja desprezível em relação a das palavras (que, alegoricamente, é a solução adotada em sistemas multiportadoras).

Compressão da informação no codificador de fonte (“source encoder”) p/ minimizar a banda BW ocupada no canal pelo sinal do TX:



Vamos supor que o *stream* de bits “Data” mostrado na figura ao lado transporte informação que é transmitida a uma taxa (= *throughput*) de 1.0 Kbps. Então a duração T de cada pulso $W(t)$ que representa um bit “0” ou um bit “1” no *stream* “Data” é $T = 1/1.0 \text{ Kbps} = 1\text{ms}$. Portanto, a largura da banda BW (BW = *bandwidth*) ocupada entre os dois primeiros nulos da magnitude $|W(f)|$ do espectro de $W(t)$ é $BW = \frac{2}{T} = 2\text{KHz}$ (ver exemplo no slide 6 de https://www.fccdecastro.com.br/pdf/SS_Aula7&8_020420_20.pdf e ver $|W(f)|$ na figura abaixo).

Vamos agora supor que o *stream* de bits “Data” transporte informação que é transmitida a uma taxa de 1.0 Mbps (1000 vezes maior que o caso anterior). Então a duração T de cada pulso $W(t)$ que representa um bit “0” ou um bit “1” no *stream* “Data” é $T = 1/1.0 \text{ Mbps} = 1\mu\text{s}$. Portanto, a banda BW ocupada entre os dois primeiros nulos da magnitude $|W(f)|$ do espectro de $W(t)$ é $BW = \frac{2}{T} = 2\text{MHz}$ (1000 vezes maior que o caso anterior).

“Moral da estória”: Quanto mais bits forem transmitidos por segundo maior será a largura de banda BW necessária p/ transportar o sinal. Note que esta conclusão se refere ao sinal na saída do codificador de fonte, mas como os blocos estão em sequencia (vide figura no slide 3), ela se estende ao espectro do sinal no canal. Portanto, a compressão da informação efetuada no codificador de fonte (i.e., a redução do número de bits por segundo) minimiza a BW ocupada no canal pelo espectro do sinal transmitido.

Exemplo de compressão da informação – código Morse binário (“•” = “0” e “-” = “1”):

Morse Code Codebook

A •-	J •---	S •••
B -•••	K -•-	T -
C -•-•	L •-••	U ••-
D -••	M --	V •••-
E •	N -•	W •--
F ••-•	O ---	X -••-
G --•	P •--•	Y -•--
H ••••	Q --•-	Z --••
I ••	R •-•	

A cada instante que o manipulador é manualmente pressionado no TX um sinal de RF é transmitido através do canal. O RX faz a heterodinação (ver Apêndice B no slide 48) através de um *mixer* (veremos *mixer* adiante). O *mixer* (=downconverter) efetua a multiplicação entre o sinal de RF recebido do TX e o sinal de um oscilador local (BFO – *Beat Frequency Oscillator*) c/ um desvio de frequência de aproximadamente 1KHz da frequência do sinal recebido de modo que um tom audível de 1KHz é produzido no alto-falante do RX.



LOW
••• - - - •••
ENEMY
• -• • - - -•••

Exemplo de compressão da informação – código Morse binário (“•” = “0” e “-” = “1”):

Morse Code Codebook

A ●-	J ●---	S ●●●
B -●●●	K -●-	T -
C -●-●	L ●-●●	U ●●-
D -●●	M --	V ●●●-
E ●	N -●	W ●--
F ●●-●	O ---	X -●●-
G --●	P ●--●	Y -●--
H ●●●●	Q --●-	Z --●●
I ●●	R ●-●	

“E” e “T” são os caracteres utilizados c/ + frequência na língua inglesa, então o Codebook (*look up table*) atribui a eles palavras binárias de 1 bit. “A”, “I”, “M”, “N” são os segundos caracteres utilizados c/ + frequência, então é atribuído a eles palavras binárias de 2 bits. E assim sucessivamente de modo que na média ao longo do tempo ocorre uma significativa redução do número de bits transmitidos.

Esta redução do número de bits transmitidos resulta de os caracteres que ocorrem com mais frequência, como é o caso de “E” e “T”, serem representados por palavras binárias de menor número de bits enquanto os caracteres que ocorrem raramente são representados por palavras binárias de maior número de bits, como é o caso dos caracteres “B”, “C” e “F”.



Correção de bits recebidos em erro – exemplo em que um código de bloco $(n, k)=(6,3)$ no “channel encoder” do TX mapeia mensagens ($k = 3$ bits info útil) em palavras-código ($n = 6 = 3$ bits info útil + 3 bits paridade). A info de paridade é usada pelo “channel decoder” do RX p/ corrigir o bit recebido em erro:

Exemplo do Codebook (look-up table) de um código de bloco (6,3)

Mensagem - palavra binária de $k = 3$ bits na entrada do “channel-encoder” (e na saída do “channel decoder” se o erro de bits ocorrido no canal for corrigível)			Palavra-código (codeword) - palavra binária de $n = 6$ bits na saída do “channel-encoder” (e na entrada do “channel decoder” se não ocorreu erro de bits no canal)					
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1	0
1	0	1	1	0	1	1	1	0
1	1	0	0	1	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	0	0	1

$d_H \Rightarrow$ **distância de hamming**: número de bits desiguais entre duas palavras binárias. Quanto maior for a d_H mínima no conjunto de d_H 's entre todos os pares de *codewords* do *codebook*, mais dissimilares serão entre si as *codewords* e mais resiliente será o código a erros de bit. No *codebook* c/ 8 *codewords* deste exemplo, se calcularmos as $7+6+5+4+3+2+1=28$ d_H 's entre todos os pares de *codewords* e identificarmos o valor mínimo de d_H obteremos $d_{Hmin}=3$.

Vamos supor que, em um determinado instante, a palavra binária na entrada do “channel-encoder” no TX (mensagem) seja “010”, a qual o *codebook* transforma na *codeword* “010111”. Ruído no canal degrada a informação fazendo com que o *codeword* recebido na entrada do “channel-decoder” no RX seja “010011” (1 bit errado).



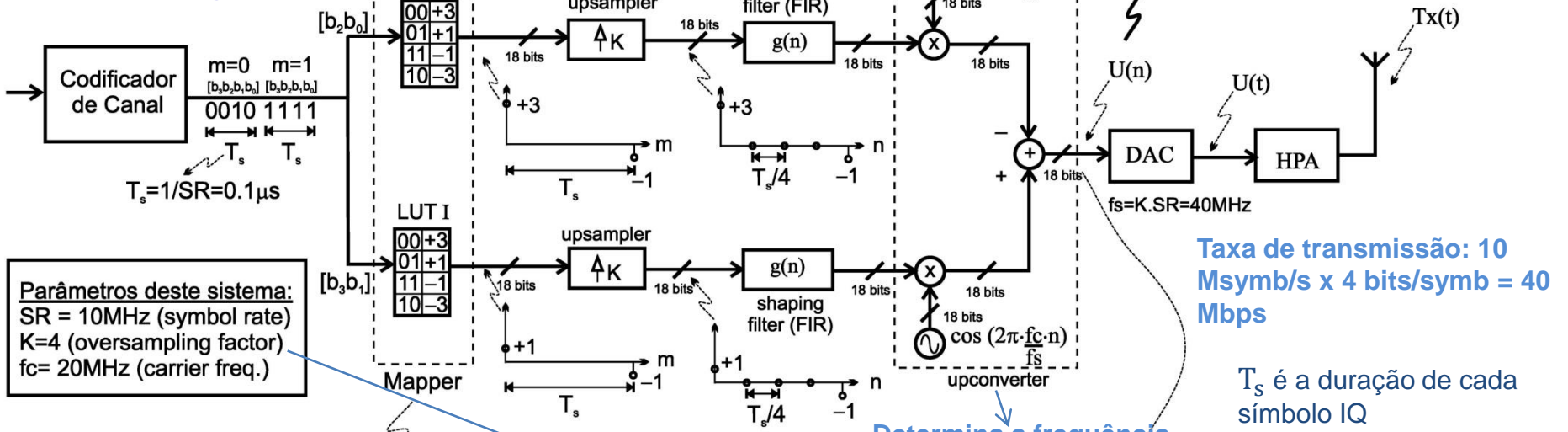
Note a necessidade de que $T_{msg} = T_{cwd}$, caso contrário o espectro da informação codificada será alterado. Esta condição inviabiliza códigos com muitos bits de paridade, porque aumenta n , aumentando a BW final (\Rightarrow pulso + curto p/ cada bit).

Para corrigir o bit errado em “010011”, simplificadaamente, o “channel-decoder” determina as 8 respectivas d_H 's entre “010011” recebido e as 8 *codewords* do *codebook*, resultando no conjunto $d_{H}RX = \{ 3, 4, 1, 2, 2, 5, 5, 3 \}$. O decoder identifica então qual a menor d_H no conjunto $d_{H}RX$ (no caso, a menor d_H é 1) e infere que a mensagem transmitida foi “010”, porque esta é a mensagem associada à *codeword* “010111” que resultou na menor d_H no conjunto $d_{H}RX$. Note que o bit errado foi corrigido porque a mensagem originalmente transmitida “010” foi recuperada no RX, apesar do bit errado.

Correção dos bits recebidos em erro pelo “channel decoder” – a importância dos bits adicionais de paridade para maximizar a d_H mínima no conjunto de d_H 's entre todos os pares de *codewords* do *codebook*, de modo a tornar as *codewords* do *codebook* o mais dissimilar entre si. A dissimilaridade entre *codewords* viabilizada pelos bits de paridade facilita a sua identificação pelo “channel decoder”, que age como uma pessoa tentando identificar o indivíduo culpado em uma cena de identificação de criminoso através de características particulares (bits de paridade) nos indivíduos:



Exemplo e detalhe do Modulador Digital (TX)



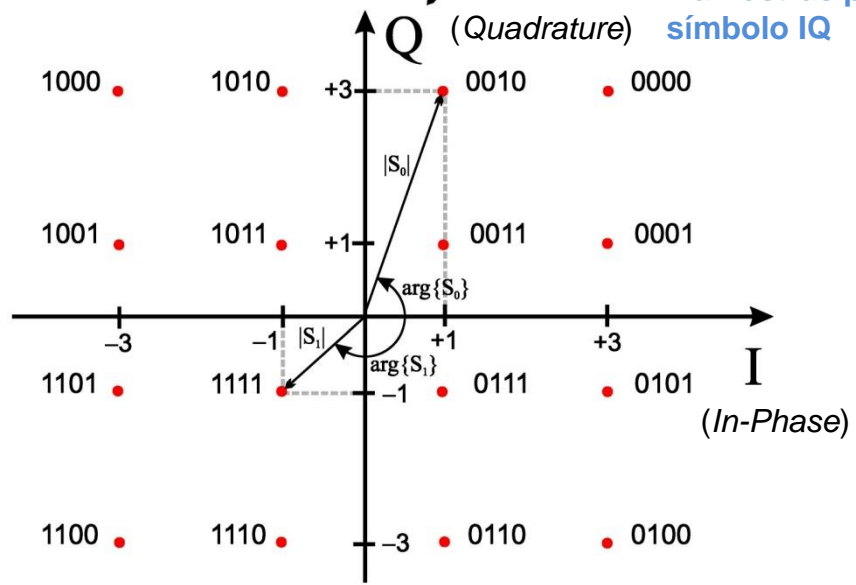
Parâmetros deste sistema:
 SR = 10MHz (symbol rate)
 K=4 (oversampling factor)
 fc= 20MHz (carrier freq.)

Taxa de transmissão: 10 Msymb/s x 4 bits/symb = 40 Mbps

T_s é a duração de cada símbolo IQ

Determina a frequência central f_c do canal

4 amostras por símbolo IQ

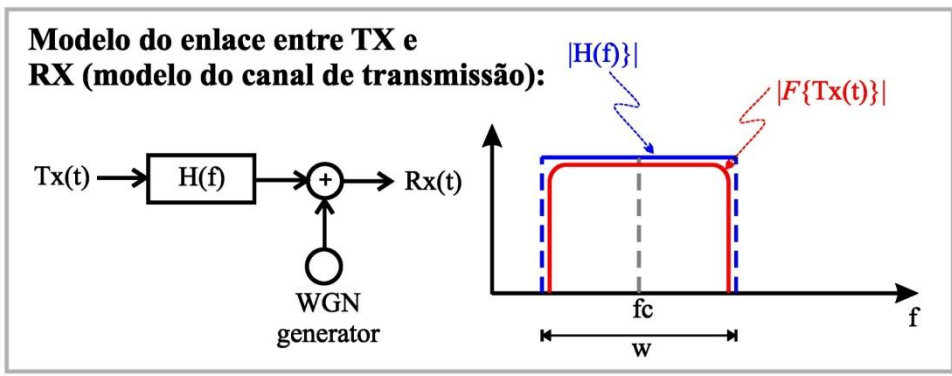


Identificação dos bits das palavras binárias: $[b_3, b_2, b_1, b_0]$
 Constelação 16-QAM (Quadrature Amplitude Modulation)

$U_m(n)$ p/ $m=0$ e $m=1$ neste exemplo:

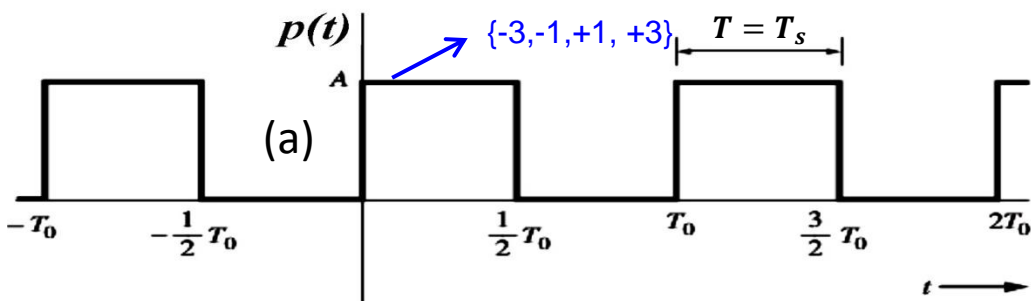
$$U_0(n) = \{\sqrt{3^2+1^2} * g(n)\} \cdot \cos(2\pi \cdot \frac{20}{40} \cdot n + \text{atan}(3/1))$$

$$U_1(n) = \{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2} * g(n)\} \cdot \cos(2\pi \cdot \frac{20}{40} \cdot n - \text{atan}(-1/-1))$$

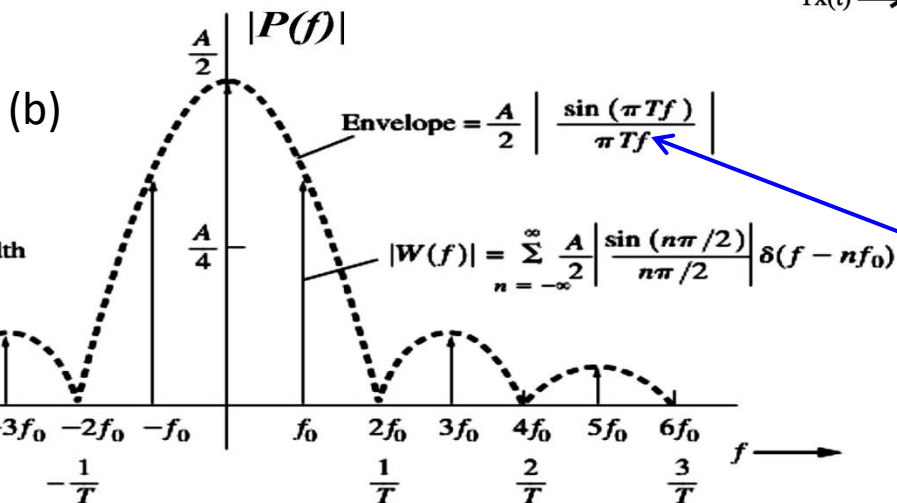
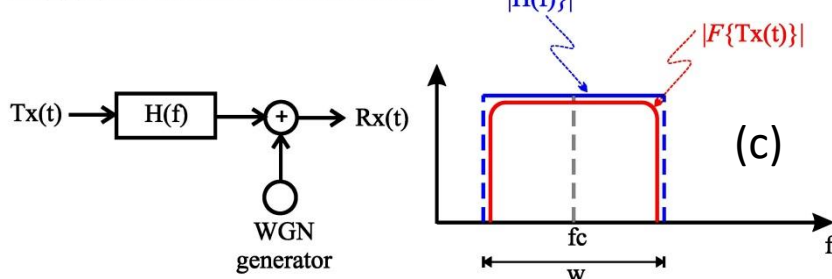


Shaping filter (filtro de formatação de pulso) e Up-sampler (superamostrador) – contenção espectral da sequencia de pulsos quadrados na saída das LUTs I e Q.

Vamos supor que retirássemos o DAC na saída do *upconverter* no slide anterior e em substituição colocássemos dois DACs respectivamente nas saídas das LUTs I e Q, de modo que o sinal seria discreto antes dos DACs e contínuo após os DACs. Fizemos isto para que o sistema opere com um *shaping filter* analógico, cuja análise no domínio frequência é mais simples (faremos a análise do caso digital ao final desta discussão). Note nesta situação, com referência ao slide anterior, em que a amplitude A de cada pulso quadrado de duração T_s no trem de pulso $p(t)$ na saída dos DACs I e Q (conforme (a) abaixo) é um dos valores na 2ª coluna das respectivas LUTs $\{-3, -1, +1, +3\}$, valores que dependem da palavra binária de dois bits na 1ª coluna, na entrada da LUT. Note também que a largura do espectro $P(f)$ de um trem de pulsos $p(t)$ de duração $T = T_s$ (conforme (a) abaixo) é **ilimitado no domínio frequência** (conforme (b) abaixo), e, portanto, **é incompatível com a largura de banda do canal limitada em W** (ver slide anterior e (c) abaixo), alocado pelo órgão regulador (Anatel, FCC, etc ...).



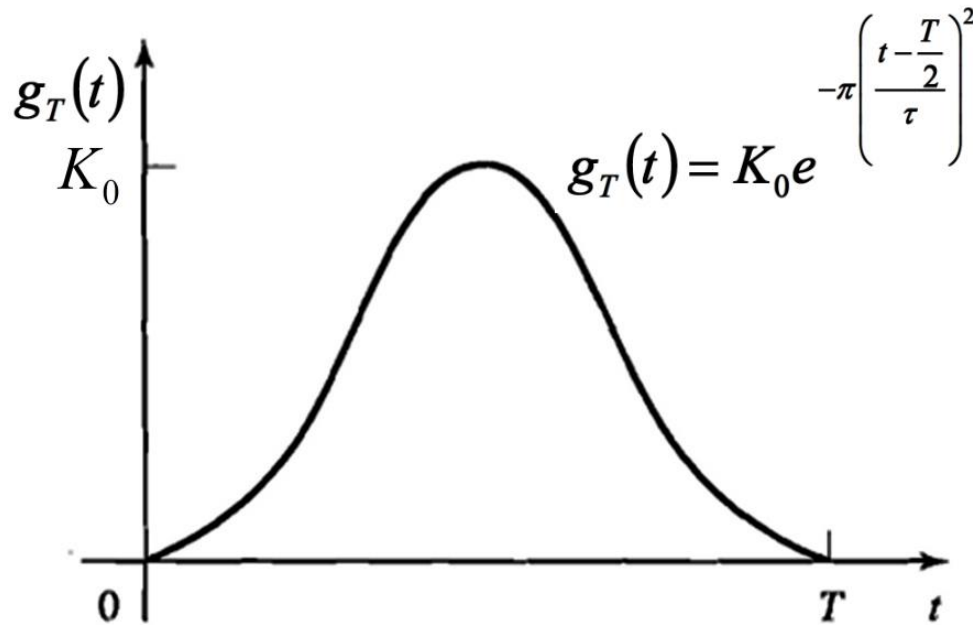
Modelo do canal de transmissão:



O envelope decai lentamente com o valor de f porque é necessário que $f \rightarrow \infty$ p/ que $\text{Envelope} \rightarrow 0$, o que caracteriza um espectro de largura infinita.

Shaping filter (filtro de formatação de pulso) e Up-sampler (superamostrador) – contenção espectral da sequencia de pulsos quadrados na saída das LUTs I e Q.

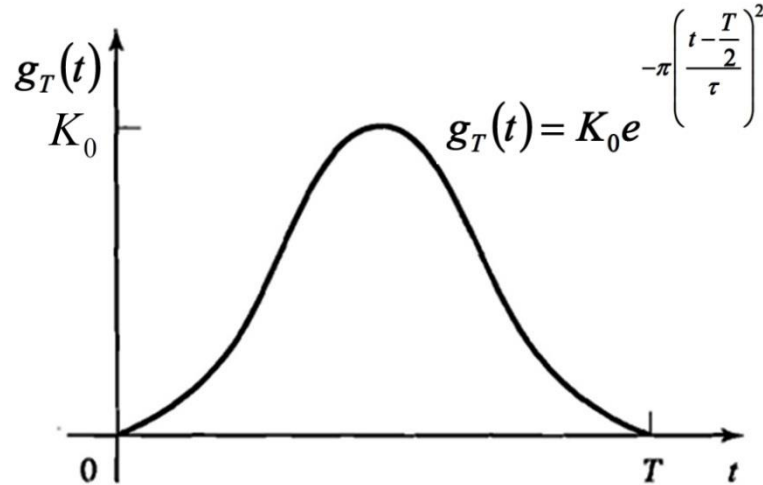
Uma solução usual para efetuar a contenção espectral de um trem de pulsos $p(t)$ de duração $T = T_s$ (ver (a) slide anterior) é aplicar um *shaping filter* Gaussiano, conforme abaixo, p/ suavizar as bordas de subida e descida dos pulsos, dado que a rápida (idealmente instantânea) variação no tempo das bordas de subida e descida dos pulsos quadrados são os responsáveis pela largura infinita do espectro $P(f)$ conforme mostrado em (b) do slide anterior.



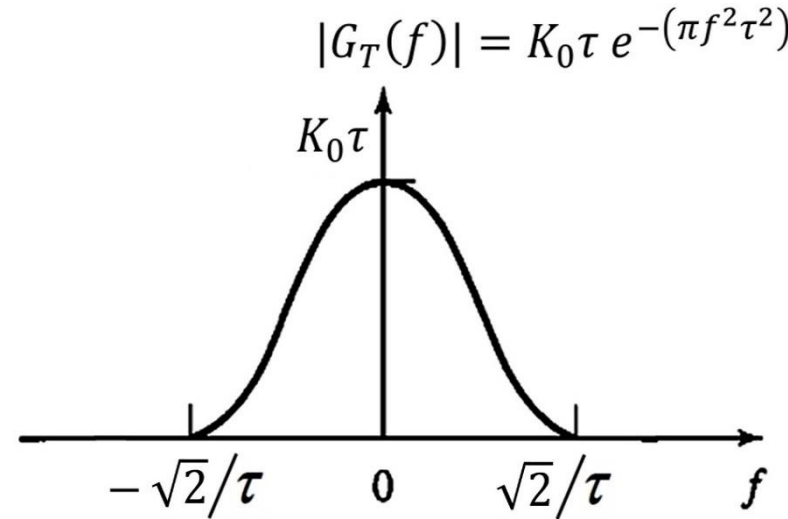
Para cada pulso quadrado de duração $T = T_s$ no trem de pulso na saída das LUTs+DACs, o *shaping filter* Gaussiano responde com um pulso $g_T(t)$ conforme acima, de amplitude proporcional ao pulso quadrado na entrada do filtro e de duração $T \leq T_s$ (usualmente $T = T_s$). **Deve-se evitar a todo custo $T > T_s$ porque os pulsos se superporiam no tempo e gerariam a mesma ISI gerada pelo *multipath* no canal, só que agora estaríamos gerando ISI no próprio hardware ...**

Shaping filter (filtro de formatação de pulso) e Up-sampler (superamostrador) – contenção espectral da sequencia de pulsos quadrados na saída das LUTs I e Q.

O espectro do pulso $g_T(t)$ é obtido aplicando a Transformada de Fourier à $g_T(t) = K_0 e^{-\pi \left(\frac{t-T}{\tau}\right)^2}$, isto é, $G_T(f) = \mathcal{F}\{g_T(t)\} = K_0 \tau e^{-(\pi f^2 \tau^2 + j\pi f T)} = K_0 \tau e^{-\pi f^2 \tau^2} e^{-j\pi f T}$ (ver operações com números complexos no apêndice A slide 47), de modo que $|G_T(f)| = K_0 \tau e^{-\pi f^2 \tau^2}$, $\angle G_T(f) = -j\pi f T$ e $T = T_s$:



$\mathcal{F}\{\cdot\}$
 \Rightarrow



Note que a magnitude $|G_T(f)|$ do espectro de $g_T(t)$ decai exponencialmente com o quadrado de f , que é um decaimento muito rápido se comparado com o decaimento do envelope do espectro $P(f)$ de um trem de pulsos retangulares $p(t)$, conforme (b) no slide 11, envelope que decai apenas lentamente com o valor de f . A rapidez exponencial do decaimento da magnitude $|G_T(f)|$ é tal que $20\log|G_T(f = \sqrt{2}/\tau)| - 20\log|G_T(f = 0)| = -54.6$ dB (535.5 vezes menor), o que permite considerar $|G_T(f)|$ nulo para frequências fora do intervalo $-\sqrt{2}/\tau \leq f \leq \sqrt{2}/\tau$. Já a magnitude do espectro $P(f)$ do trem de pulsos retangulares $p(t)$ visto no slide 11 decai tão lentamente com o valor de f que é necessário que $f \rightarrow \infty$ p/ que Envelope $\rightarrow 0$, o que caracteriza um espectro de largura infinita dado que a magnitude do espectro somente pode ser considerada nula para frequências fora do intervalo $-\infty \leq f \leq \infty$.

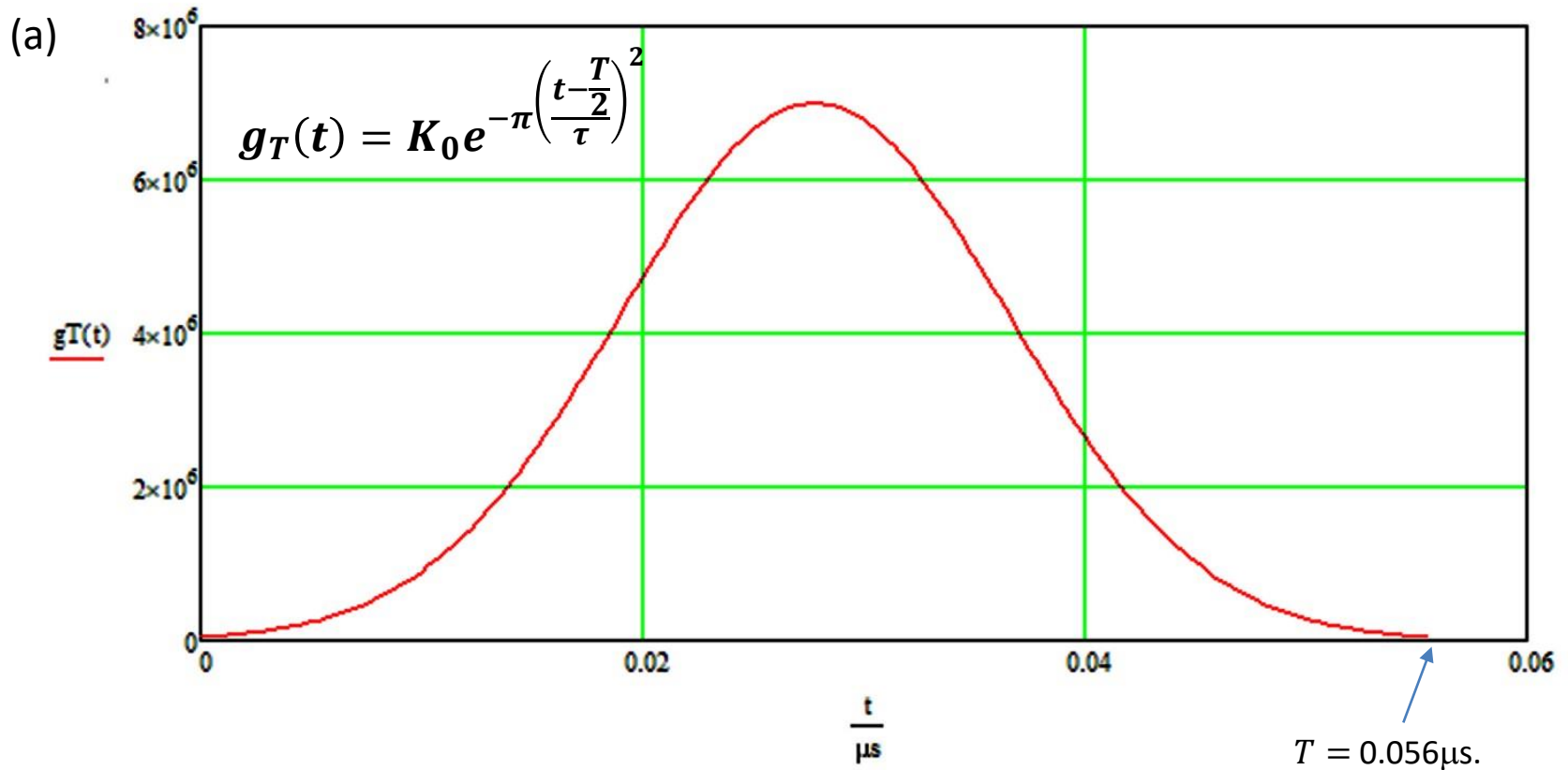
Portanto, transmitir pulsos na forma $s_m(t) = A g_T(t) = A K_0 e^{-\pi \left(\frac{t-T}{\tau}\right)^2}$, com A correspondendo à amplitude dos pulsos retangulares na saída da LUT + DAC resulta um sinal espectralmente contido e factível de ser transmitido através do canal de largura W .

Shaping filter (filtro de formatação de pulso) e Up-sampler (superamostrador) – exemplo da contenção espectral obtida com um filtro Gaussiano contínuo (analógico)

Exemplo 1: Consideremos um *shaping filter* Gaussiano com $K_0 = 7 \times 10^6$ e $\tau = 0.022\mu\text{s}$ que faz a contenção espectral em um modulador digital cujo SymbolRate=18MHz. **Pede-se:** (a) Plote o gráfico de $g_T(t) = K_0 e^{-\pi\left(\frac{t-T}{\tau}\right)^2}$ (b) Plote o gráfico da magnitude do espectro $|G_T(f)| = K_0\tau e^{-\pi f^2\tau^2}$.

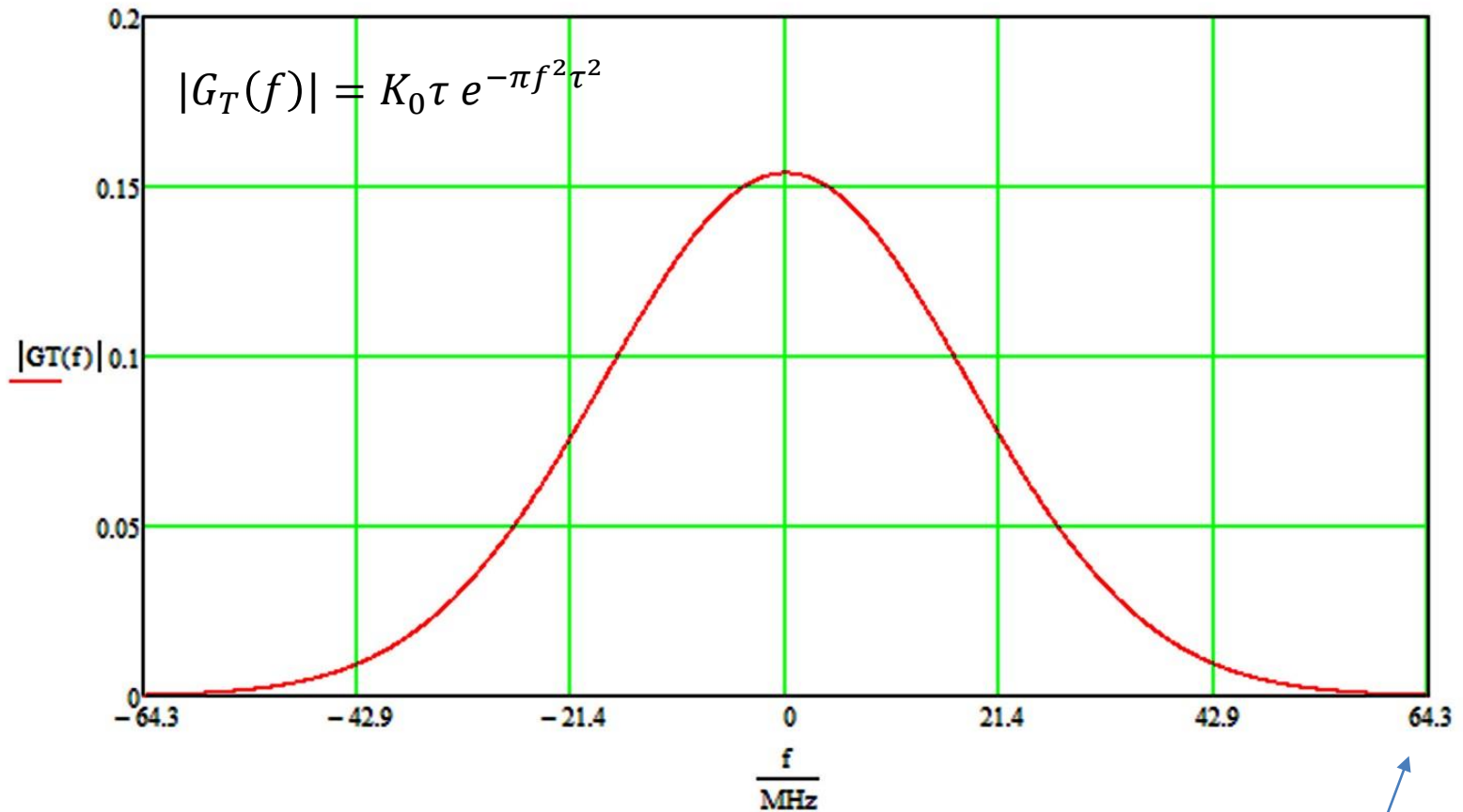
Solução:

Duração do símbolo IQ: $T = 1/\text{SymbolRate} = 1/18\text{MHz} = 0.056\mu\text{s}$.



Shaping filter (filtro de formatação de pulso) e Up-sampler (superamostrador) – exemplo da contenção espectral obtida com um filtro Gaussiano contínuo (analógico)

(b)



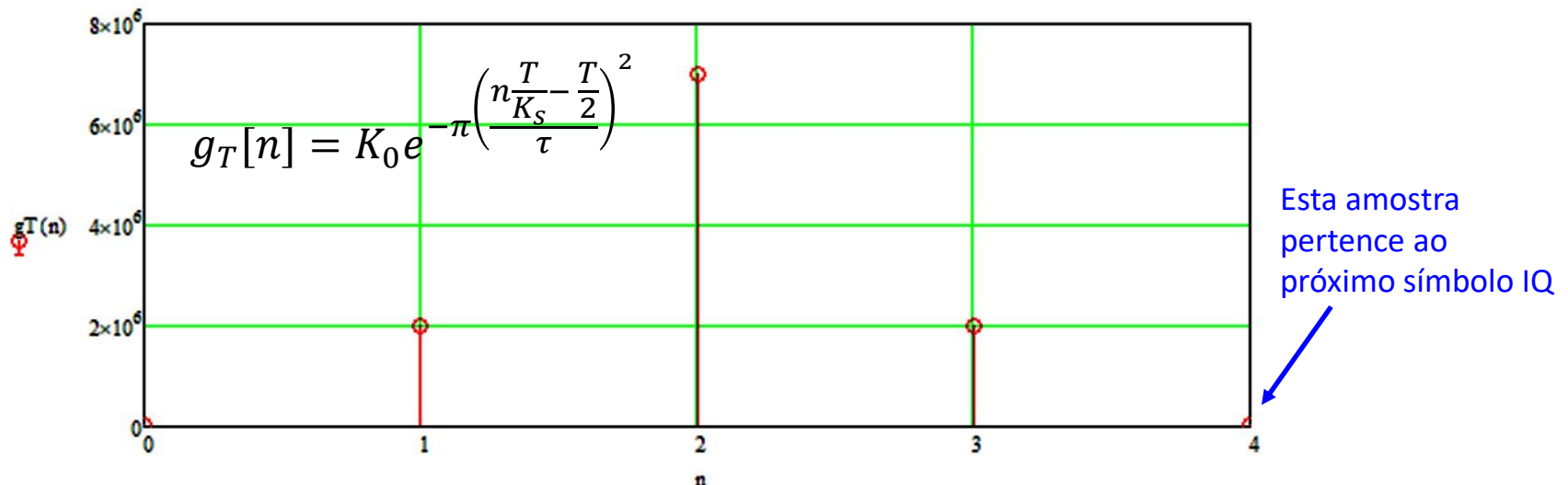
$$\frac{\sqrt{2}}{\tau} = 64.3 \text{ MHz}$$

Shaping filter (filtro de formatação de pulso) e Up-sampler (superamostrador) – discretização no tempo do filtro Gaussiano contínuo

Para um modulador digital em que o DAC está na saída do *upconverter* (que é a arquitetura usual), como mostrado no slide 10, o *shaping filter* é digital e a sua resposta no tempo é discreta, diferente do *shaping filter* analógico analisado nos slides anteriores cuja resposta é contínua. A resposta discreta do *shaping filter* é facilmente obtida da resposta contínua. Para um modulador com um *oversampling fator* K_s , a passagem da resposta contínua para a resposta discreta é conforme:

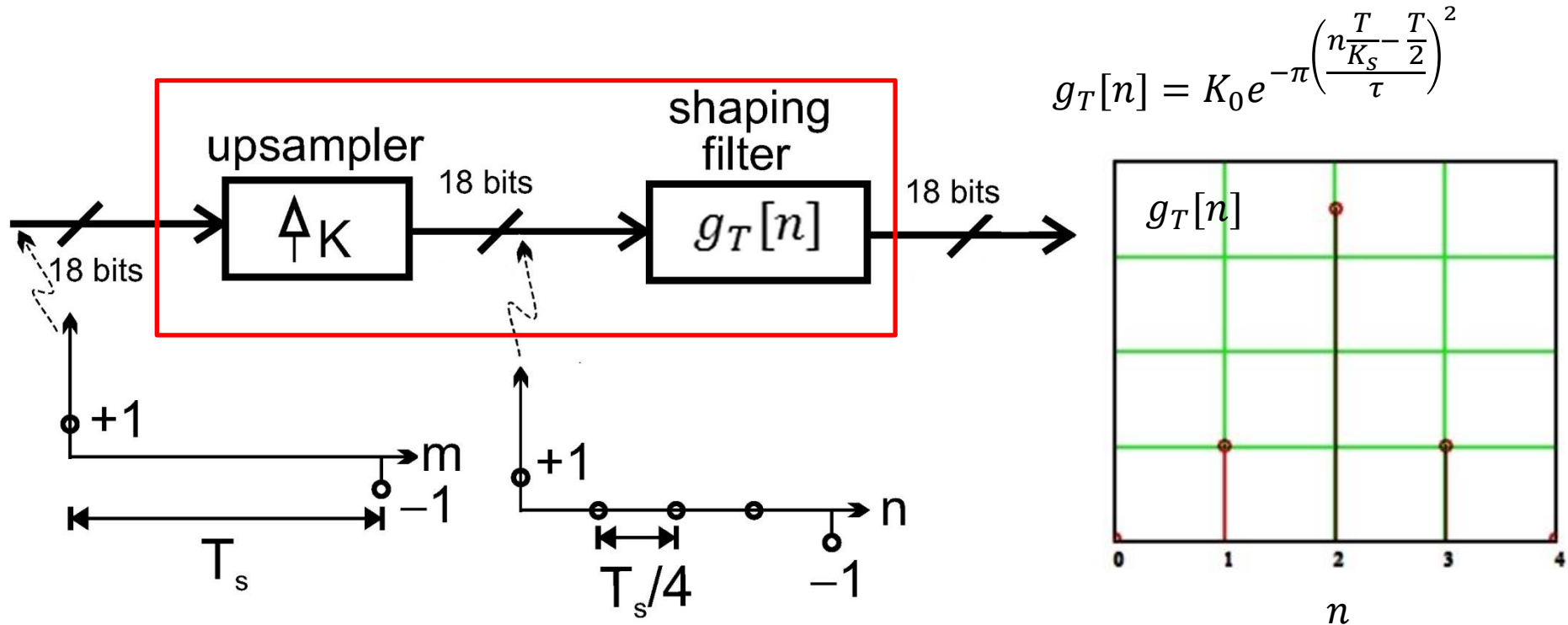
$$g_T(t) = K_0 e^{-\pi \left(\frac{t - \frac{T}{2}}{\tau} \right)^2} \quad \xrightarrow{t = n \frac{T}{K_s}} \quad g_T[n] = K_0 e^{-\pi \left(\frac{n \frac{T}{K_s} - \frac{T}{2}}{\tau} \right)^2}$$

Por exemplo, o *shaping filter* Gaussiano com $K_0 = 7 \times 10^6$ e $\tau = 0.022 \mu\text{s}$ contínuo no tempo, cuja resposta $g_T(t) = K_0 e^{-\pi \left(\frac{t - \frac{T}{2}}{\tau} \right)^2}$ é mostrada no gráfico do slide 14, ao ser discretizado com $K_s = 4$ (4 amostras por símbolo IQ) como mostrado no slide 10, apresentará a resposta $g_T[n] = K_0 e^{-\pi \left(\frac{n \frac{T}{K_s} - \frac{T}{2}}{\tau} \right)^2}$ conforme gráfico abaixo:



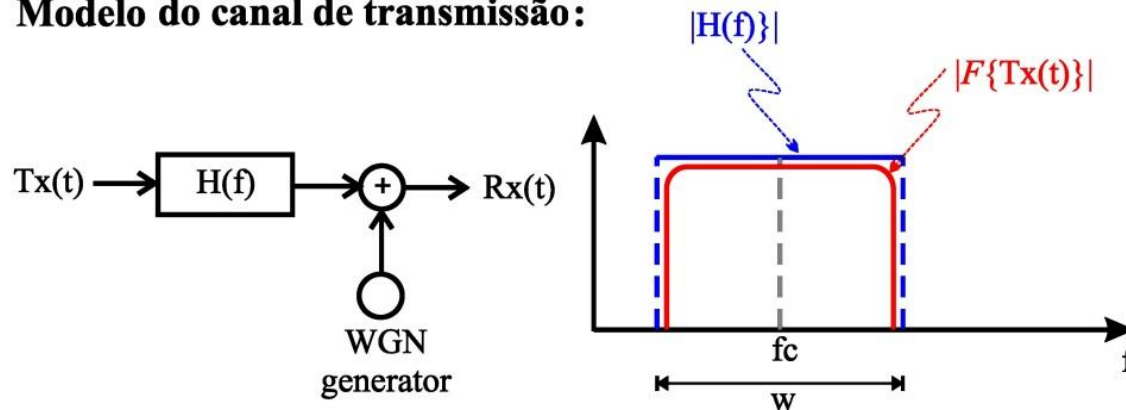
Shaping filter (filtro de formatação de pulso) e Up-sampler (superamostrador) – discretização no tempo do filtro Gaussiano contínuo

Portanto, note que, para um modulador com um *oversampling fator* K_s , como o modulador mostrado no slide 10, a resposta $g_T[n]$ para $K_s = 4$ mostrada no exemplo do slide anterior pode ser considerada a resposta ao impulso do bloco formado pelo *upsampler* seguido do *shaping filter* (bloco em vermelho abaixo):



Upconverter – a definição da frequência central f_c do canal de largura W

Modelo do canal de transmissão:

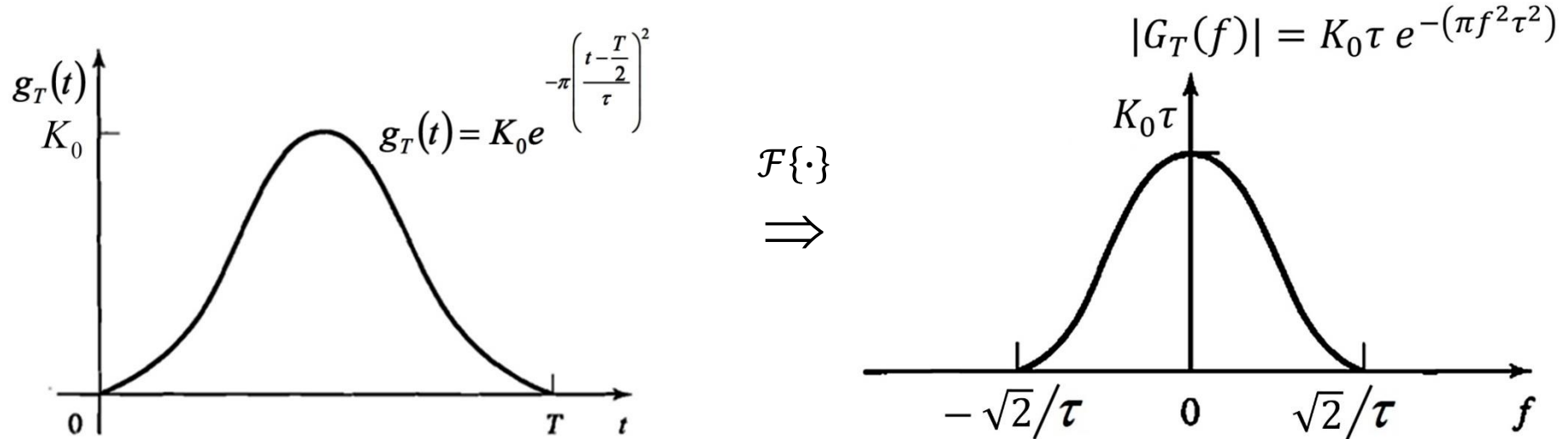


Passamos a discutir agora o processo que define a frequência central f_c do canal de comunicações, conforme determina a alocação de frequências determinada pelo órgão regulador (Anatel, FCC, etc ...).

Para efeito de análise do *upconverter* (vide slide 10), vamos novamente utilizar a abordagem simplificada em que retira-se o DAC na saída do *upconverter* no slide 10 e em substituição coloca-se dois DACs respectivamente nas saídas das LUTs I e Q, de modo que o sinal é discreto antes dos DACs e contínuo após os DACs. Novamente estamos fazendo isto para que o sistema opere com um *shaping filter* analógico e com um *upconverter* analógico, cuja análise no domínio frequência é mais simples do que o caso discreto. As inferências e conclusões são as mesmas nos dois casos – discreto ou contínuo, com a única diferença de que no caso discreto as frequências das expressões analíticas envolvidas são normalizadas pela frequência f_s de amostragem do DAC.

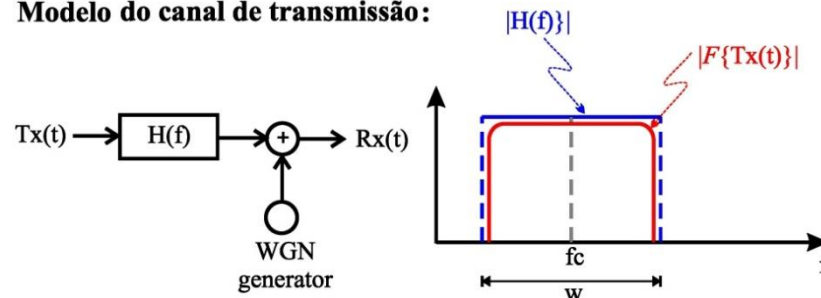
Upconverter – a definição da frequência central f_c do canal de largura W

Conforme já visto no slide 13, a informação é transmitida através de um trem de pulsos da forma $s_m(t) = Ag_T(t) = AK_0 e^{-\pi\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{\tau}\right)^2}$, com A correspondendo à amplitude dos pulsos retangulares na saída da LUT + DAC, e resulta um sinal espectralmente contido e factível de ser transmitido através do canal de largura W , mas cujo espectro é *baseband*, isto é, a frequência central é $f_c = 0$, conforme mostra o gráfico da magnitude $|G_T(f)|$ do espectro, abaixo:



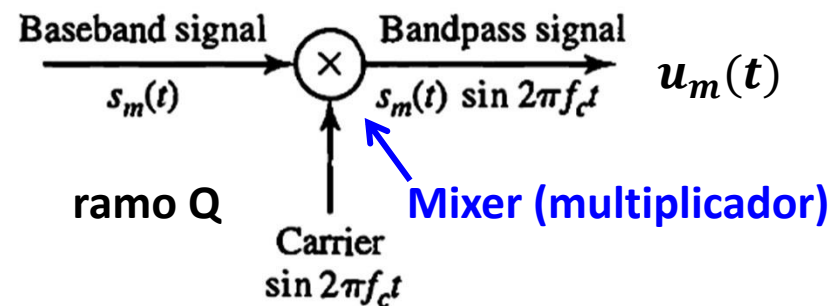
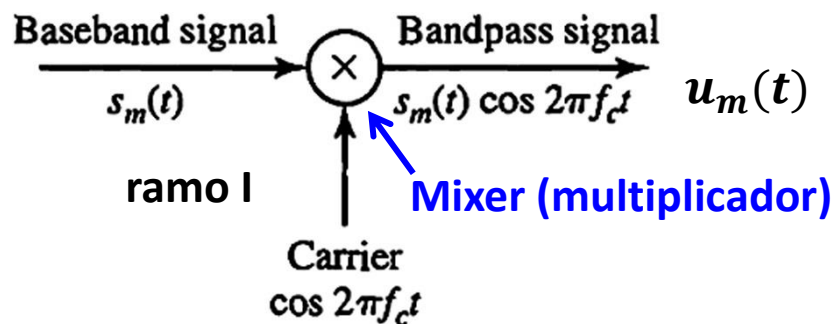
No entanto, o órgão regulador (Anatel, FCC ...) determina uma frequência central f_c que depende do tipo de serviço. É necessário, portanto, transformar o espectro $G_T(f)$ *baseband* em um espectro *passband* com frequência central f_c definida pelo órgão regulador:

Modelo do canal de transmissão:



Upconverter – a definição da frequência central f_c do canal de largura W

Vimos no slide 10 que o *upconverter* multiplica o trem de pulsos $s_m(t) = Ag_T(t) = AK_0 e^{-\pi\left(\frac{t-T}{\tau}\right)^2}$ na saída de cada *shaping filter* respectivamente por um seno e por um cosseno, ambos de frequência f_c , respectivamente no ramo I e no ramo Q do modulador, processo que é denominado de **heterodinação** (vide Apêndice B no slide 48):

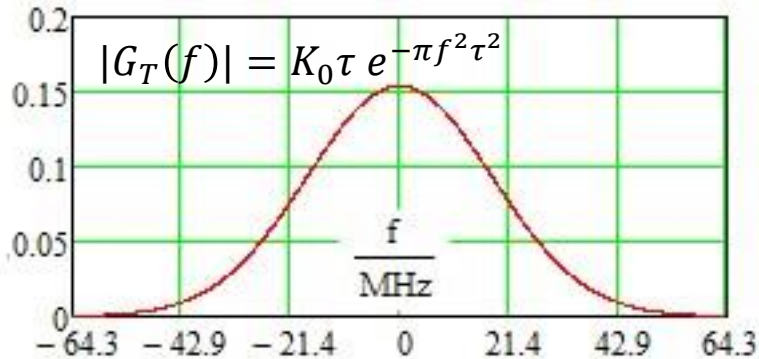


A *heterodinação* entre o sinal $s_m(t)$ e $\cos 2\pi f_c t$ no ramo I do modulador e a *heterodinação* entre o sinal $s_m(t)$ e $\sin 2\pi f_c t$ no ramo Q do modulador resultará, conforme Apêndice B, na translação do espectro *baseband* $G_T(f)$ dos pulsos $s_m(t)$ para um espectro *passband* $U_m(f)$ na forma:

$$U_m(f) = \frac{A}{2} [G_T(f - f_c) + G_T(f + f_c)]$$

Upconverter – a definição da frequência central f_c do canal de largura W – exemplo

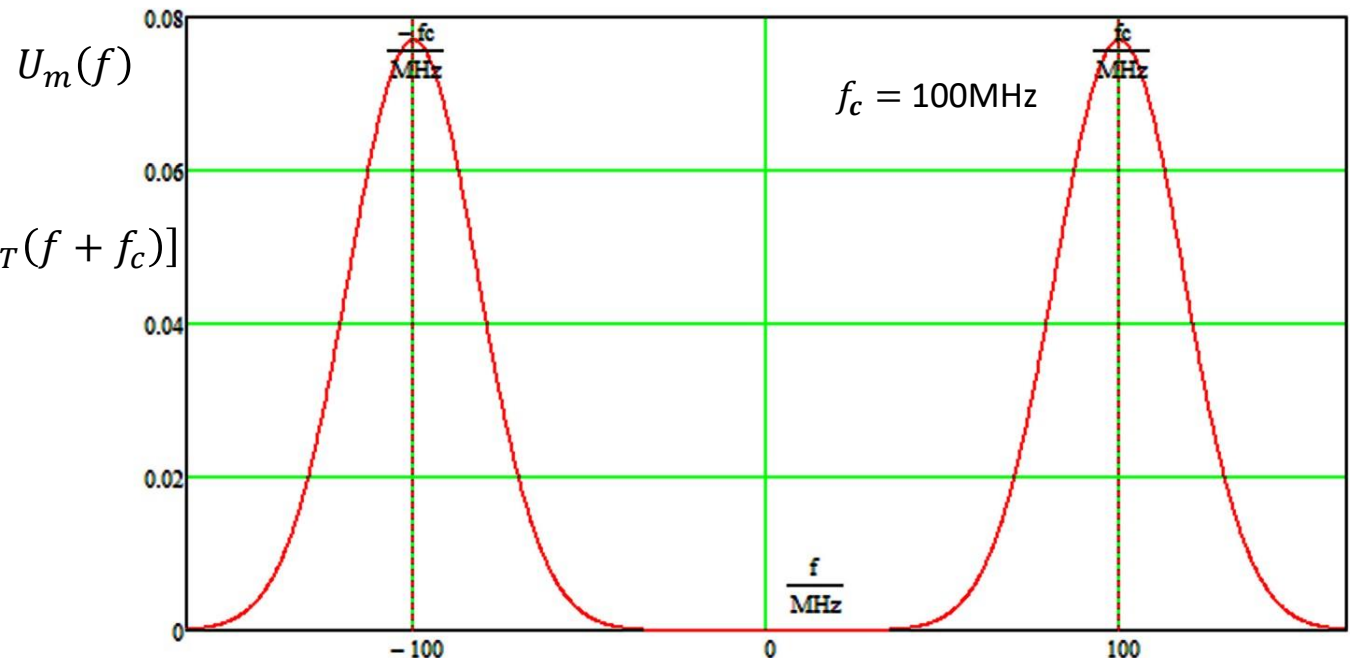
Exemplo 2: Consideremos o trem de pulsos gerados por um *shaping filter* Gaussiano com resposta $g_T(t) = K_0 e^{-\pi \left(\frac{t-T}{\tau}\right)^2}$, $K_0 = 7 \times 10^6$ e $\tau = 0.022\mu\text{s}$, que faz a contenção espectral em um modulador digital cujo SymbolRate=18MHz e $T = 1/\text{SymbolRate} = 1/18\text{MHz} = 0.056\mu\text{s}$, conforme Exemplo 1 no slide 14. O gráfico da magnitude do espectro $|G_T(f)| = K_0 \tau e^{-\pi f^2 \tau^2}$ do trem de pulsos antes do *upconverter* é conforme abaixo (vide slide 15):



Pede-se: Sabendo que o modulador efetua a *heterodinação* entre o sinal $s_m(t)$ e $\cos 2\pi f_c t$ no ramo **I** e efetua a *heterodinação* entre o sinal $s_m(t)$ e $\sin 2\pi f_c t$ no ramo **Q**, sendo $f_c = 100\text{MHz}$ a frequência central do canal, plote o gráfico da magnitude do espectro do sinal $u_m(t)$ na saída do upconverter.

Solução:

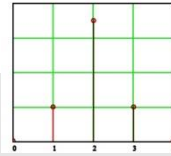
$$U_m(f) = \frac{A}{2} [G_T(f - f_c) + G_T(f + f_c)]$$



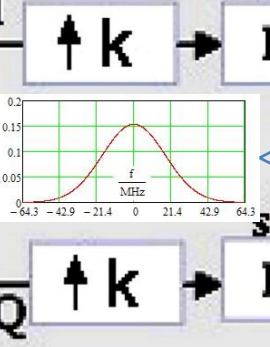
LUT – Look Up Table (TX)

I: [b ₃ b ₁]		Q: [b ₂ b ₀]	
00	+3	00	+3
01	+1	01	+1
11	-1	11	-1
10	-3	10	-3

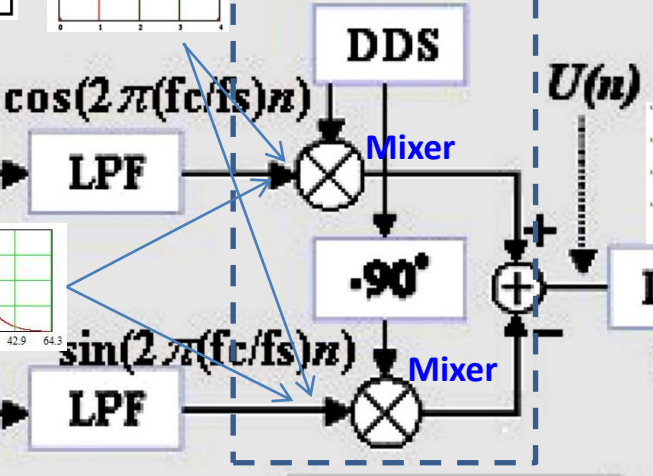
O TX e o RX (demodulador) operando em conjunto (ver slide 10):



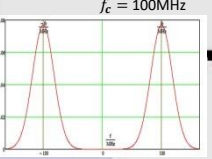
bit stream de entrada



Upconverter



DDS: *direct digital synthesizer*



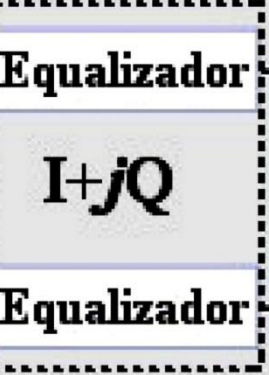
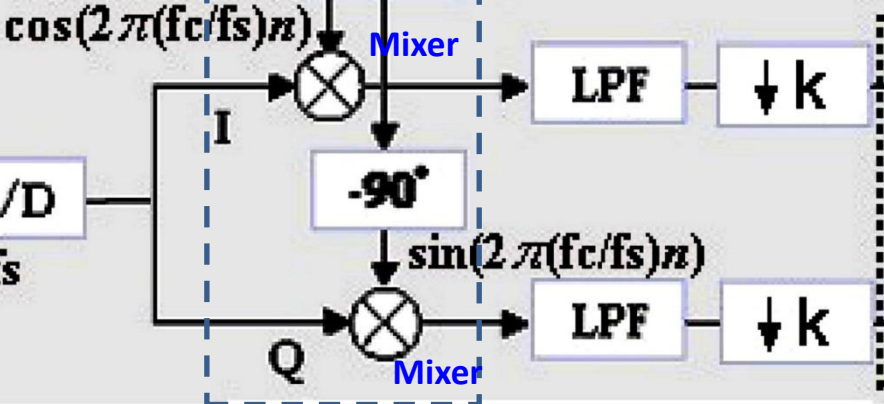
$$k = \frac{fs}{\text{SymbolRate}}$$

TX
LUT - Look Up Table (RX)

I: [b ₃ b ₁]		Q: [b ₂ b ₀]	
NN{+3}	00	NN{+3}	00
NN{+1}	01	NN{+1}	01
NN{-1}	11	NN{-1}	11
NN{-3}	10	NN{-3}	10

Canal de Transmissão

Downconverter



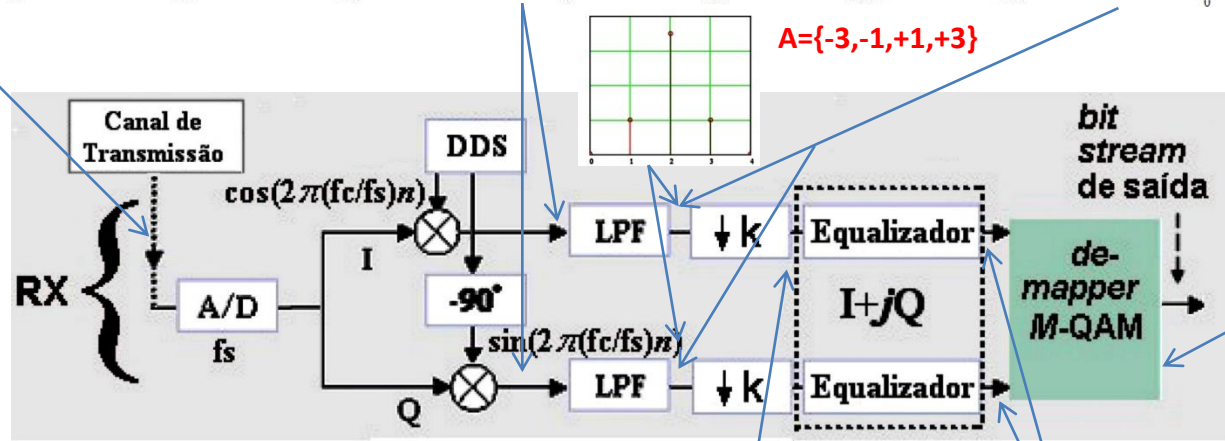
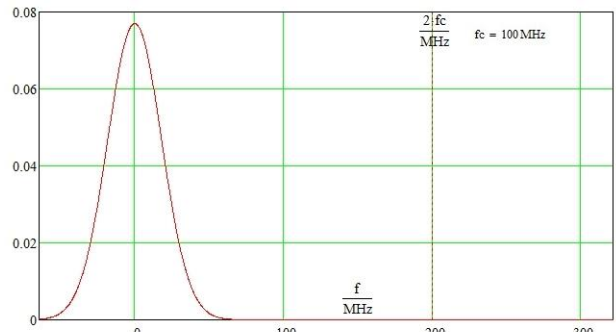
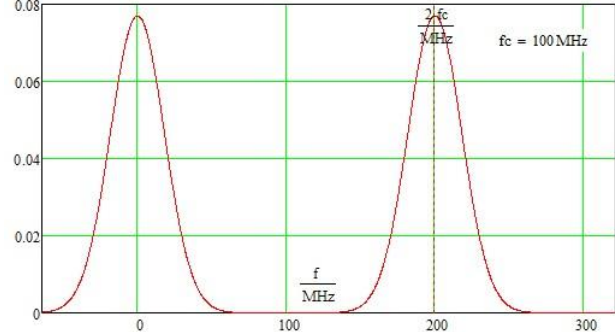
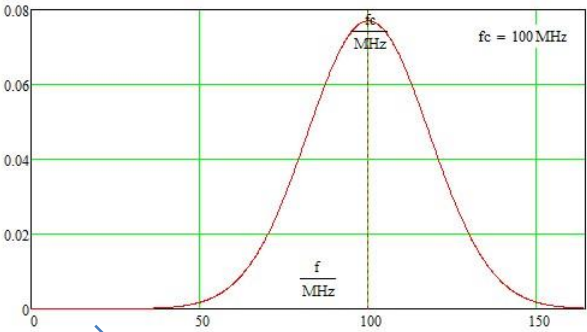
bit stream de saída



RX

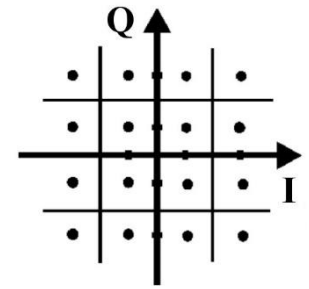
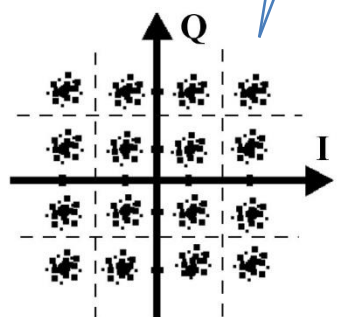
NN{·} é o operador Nearest Neighbour (vizinho mais próximo), o qual retorna "Verdadeiro" quando o valor de entrada na coluna esquerda da LUT RX é o vizinho mais próximo (menor distância Euclidiana) de seu argumento {·}, e retorna "Falso" em caso contrário.

O demodulador digital (RX)



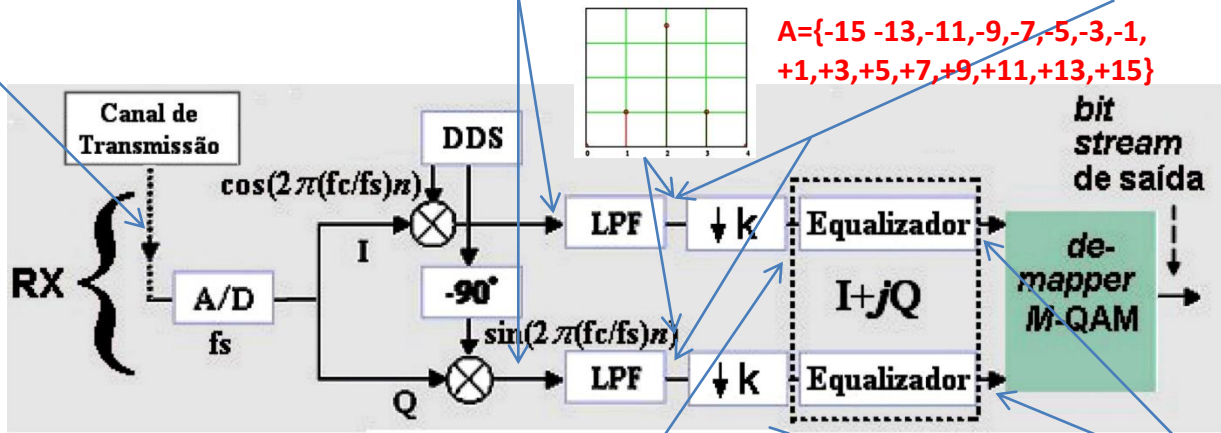
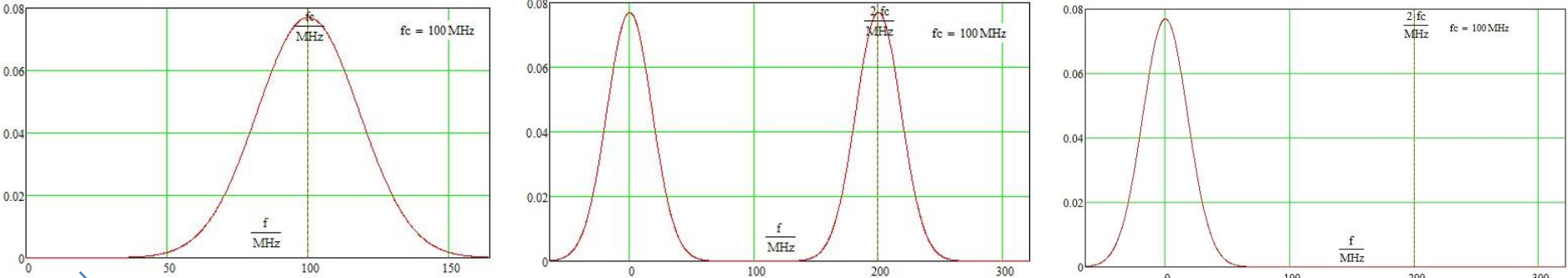
I: [b3b1]		Q: [b2b0]	
NN{+3}	00	NN{+3}	00
NN{+1}	01	NN{+1}	01
NN{-1}	11	NN{-1}	11
NN{-3}	10	NN{-3}	10

Constelação recebida com os símbolos IQ dispersos devido ao multipercurso (e, eventualmente, devido ao ruído branco)



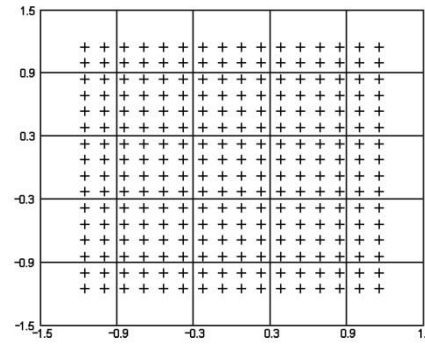
Constelação resultante após o equalizador, com a dispersão de símbolos minimizada.

O que acontece com a taxa e com a robustez do enlace se configurarmos o modulador do slide 10, para utilizar uma modulação 256-QAM ao invés da modulação 16-QAM, mantendo symbol rate = 10Msymb/s?

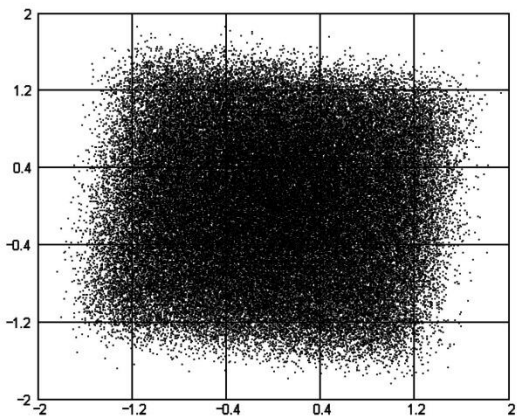


$A = \{-15, -13, -11, -9, -7, -5, -3, -1, +1, +3, +5, +7, +9, +11, +13, +15\}$

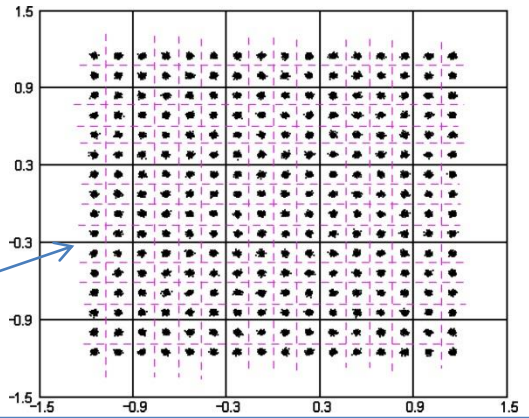
Constelação 256-QAM de referência (normalizada p/ potência unitária):



Taxa de transmissão: 10 Msymb/s x 8 bits/symb = 80 Mbps ⇒ dobro da taxa obtida com 16-QAM (ver slide 10)

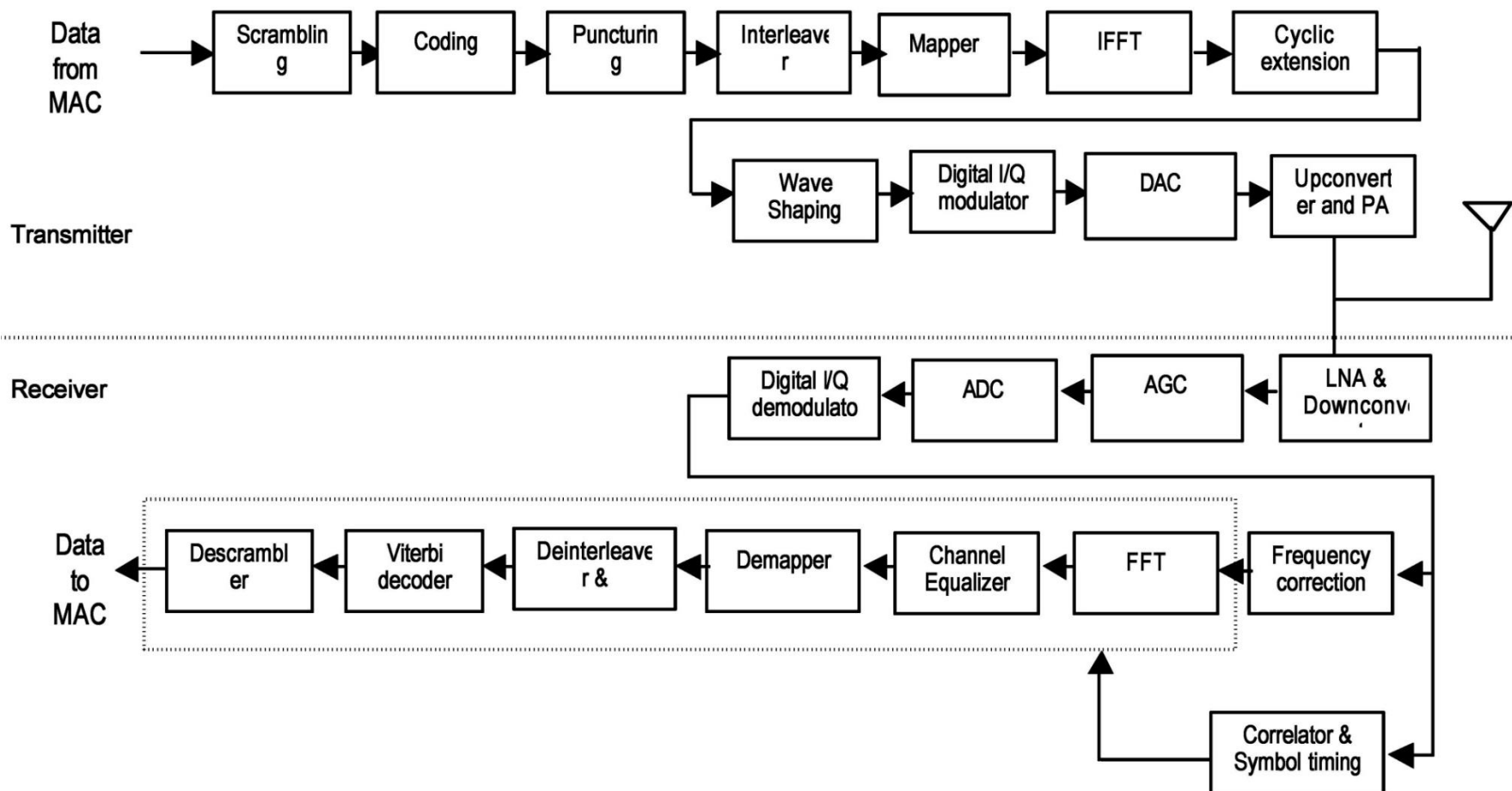


Note que as regiões de decisão (em magenta) da constelação 256-QAM são 4 vezes menores que as regiões de decisão de 16-QAM, portanto a modulação 256-QAM é 4 vezes menos robusta que 16-QAM:



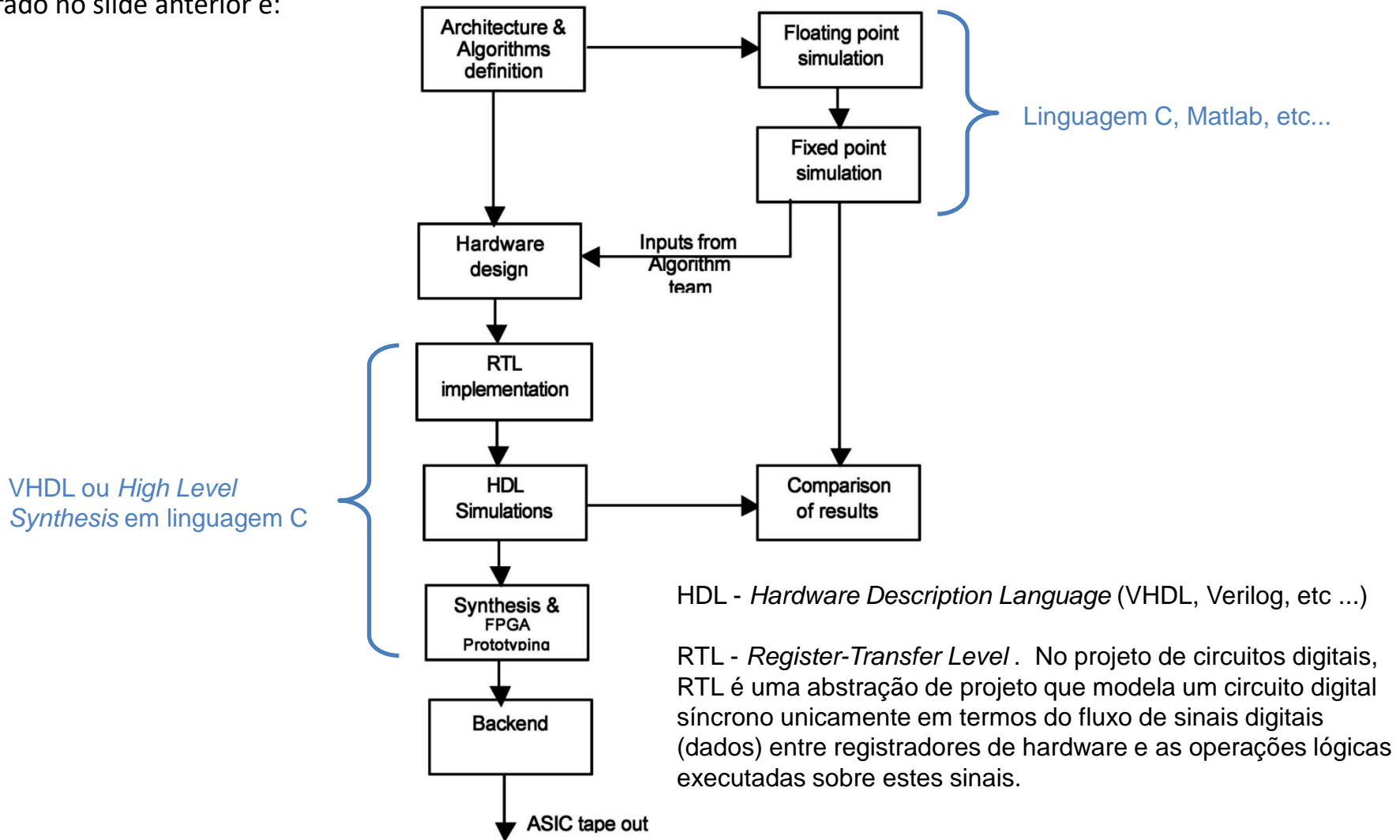
Design Flow – metodologia de projeto de sistemas de comunicações – implementação em ASIC (Application-Specific Integrated Circuit) e/ou em FPGA (Field-Programmable Gate Array)

Consideremos, por exemplo, o projeto em VLSI (Very Large Scale Integration) de um modem OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing) IEEE 802.11a, cujo diagrama de blocos funcionais é similar ao abaixo (ver http://www.fccdecastro.com.br/pdf/VLSI_OFDM.pdf):



Design Flow – metodologia de projeto de sistemas de comunicações – implementação em ASIC (Application-Specific Integrated Circuit) e/ou FPGA (Field-Programmable Gate Array)

Uma possível metodologia de projeto para um modem OFDM IEEE 802.11a, conforme arquitetura de blocos funcionais mostrado no slide anterior é:

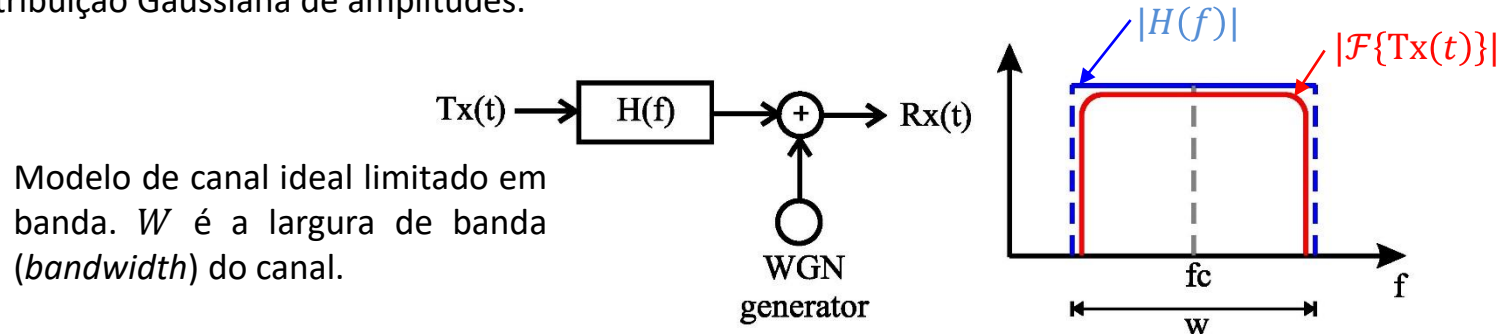


High Level Synthesis em linguagem C:

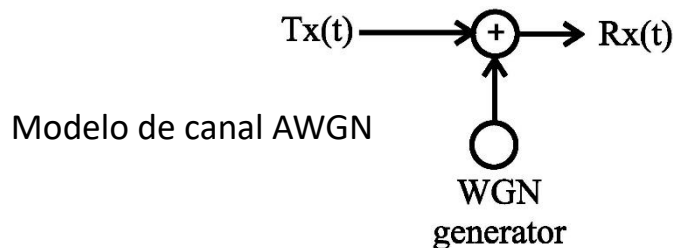
<http://www.fccdecastro.com.br/pdf/ug871.pdf>

Canal AWGN (Additive White Gaussian Noise) × canal com multipath

O canal de transmissão do enlace entre TX e RX é modelado por um filtro passabanda com função de transferência $H(f)$ que idealmente apresenta uma curva de magnitude $|H(f)|$ plana ao longo de toda largura W do espectro $\mathcal{F}\{Tx(t)\}$ do sinal $Tx(t)$ do transmissor, sendo $\mathcal{F}\{\cdot\}$ o operador que retorna a Transformada de Fourier do argumento $\{\cdot\}$. Na saída do filtro é acrescido um gerador de ruído branco (WGN – *White Gaussian Noise*), conforme mostra a figura abaixo, para efeito de modelar o conjunto de todas as fontes de ruído cujo ruído se somam ao sinal $Tx(t)$ ao longo do canal de transmissão, e que, pelo teorema do limite central (ver https://en.wikipedia.org/wiki/Additive_white_Gaussian_noise), resulta em um ruído com distribuição Gaussiana de amplitudes.

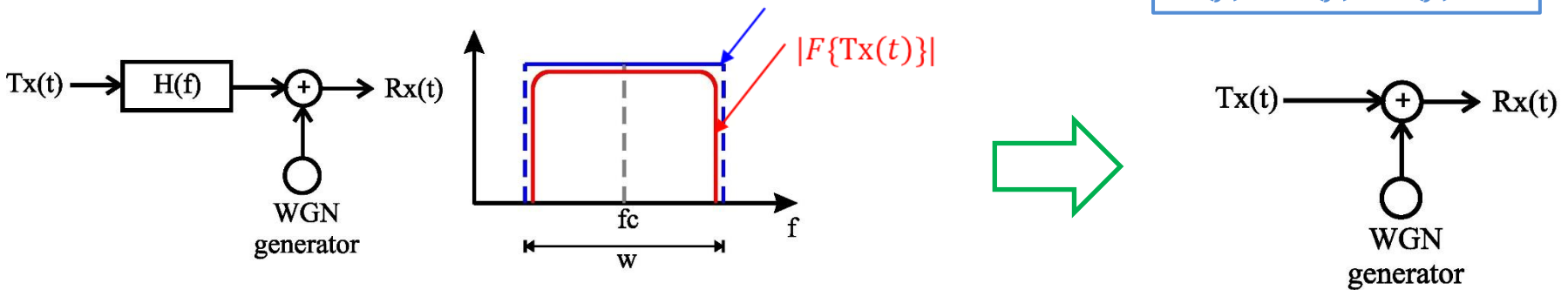
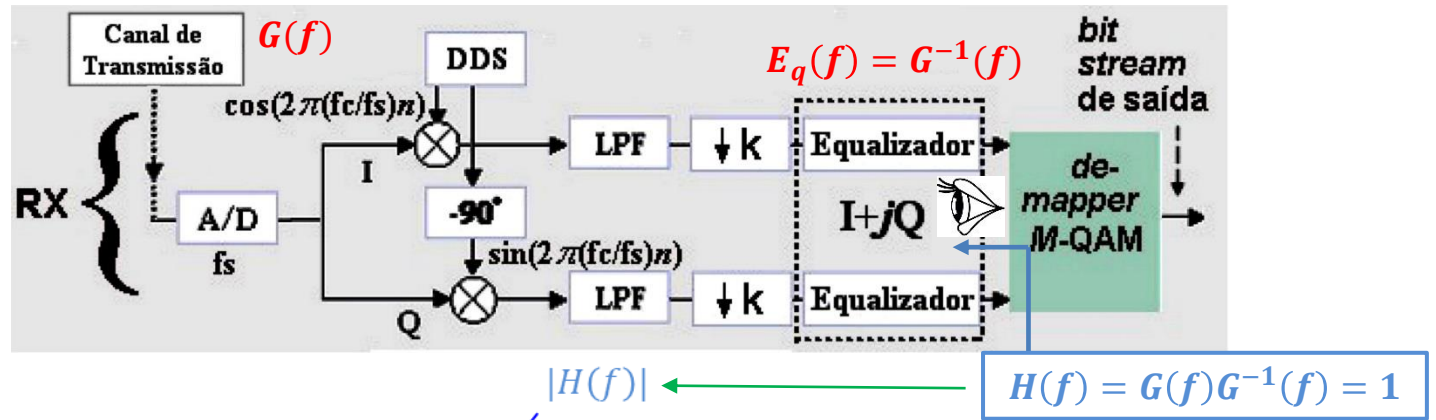


Dado que, idealmente, a curva de magnitude $|H(f)|$ é plana ao longo de toda largura W da curva de magnitude $|\mathcal{F}\{Tx(t)\}|$ do espectro do sinal $Tx(t)$, então a função de transferência $H(f)$ do filtro que representa o canal deixa passar sem qualquer alteração de magnitude ou fase a totalidade das componentes espectrais do sinal $Tx(t)$. Portanto a única degradação do sinal $Tx(t)$ em um canal cuja $H(f)$ do filtro deixa passar “intocáveis” (sem qualquer alteração de magnitude ou fase) a totalidade das componentes espectrais de $Tx(t)$ é a degradação causada pela adição do ruído do gerador WGN. Assim, por não interagir com as componentes espectrais do sinal $Tx(t)$, o filtro com função de transferência $H(f)$ pode ser retirado do modelo de canal acima, simplificando o modelo de canal ideal limitado em banda para o modelo de canal AWGN (*Additive White Gaussian Noise*), em que a única degradação imposta pelo canal é a adição de ruído branco Gaussiano:



Canal AWGN (Additive White Gaussian Noise) × canal com multipath

Ocorre que o modelo de canal ideal limitado em banda só existe na prática por ação do equalizador do RX, cujo hardware implementa um filtro adaptativo com função de transferência $E_q(f)$ que idealmente aproxima a função de transferência inversa $G^{-1}(f)$ da função de transferência $G(f)$ do canal (equalizadores serão estudados em Sistemas de Comunicação Digital II). Como o bloco do canal de transmissão está em série com o bloco do equalizador no diagrama do RX (vide abaixo), então a função de transferência conjunta dos dois blocos, que é o que o *de-mapper* “vê” na sua entrada, é $H(f) = G(f)G^{-1}(f) = 1$. Especificamente, o equalizador é um sistema adaptativo que busca identificar as frequências dos zeros da $G(f)$ que são estabelecidos pelo cenário de *multipath* no canal, tentando fazer com que os pólos de sua função de transferência $E_q(f) \cong G^{-1}(f)$ ocorra nas frequências dos zeros de $G(f)$, de modo que os polos do equalizador anulem os zeros do canal, e a função de transferência resultante $H(f) = G(f)G^{-1}(f) = 1$ “vista” pelo *de-mapper* seja a função de transferência de um canal ideal limitado em banda, e, em consequência, o canal seja “visto” pelo RX como um canal AWGN:

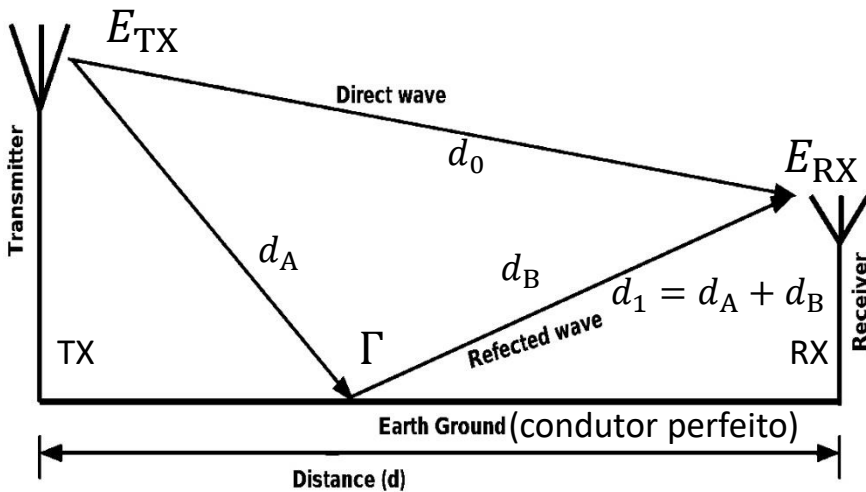


Modelo de canal ideal limitado em banda. W é a largura de banda (*bandwidth*) do canal.

Modelo de canal AWGN

Canal com *multipath*

O motivo pelo qual o cenário de *multipath* estabelece zeros na função de transferência $G(f)$ do canal decorre da interferência destrutiva que ocorre no RX entre as diversas frente de onda que nele incidem, e que dependendo da fase e amplitude relativa entre elas, podem apenas se atenuarem mutuamente em determinadas frequências e em outras frequências podem totalmente se cancelar com resultante nula. Por exemplo, consideremos um caso simples de multipercurso (*multipath*) em que a onda do campo elétrico E_{TX} irradiado pela antena transmissora se propaga apenas em dois percursos (percurso = raio de propagação): uma onda direta que se propaga em um percurso direto cujo comprimento é d_0 e uma onda refletida que se propaga em um percurso com reflexão em condutor perfeito (coeficiente de reflexão $\Gamma = 1.0e^{-j180^\circ} = -1$) e cujo comprimento é $d_1 = d_A + d_B$. As duas ondas, direta e refletida, incidem e se superpõe na antena do RX, distante d da antena TX, de modo a formar o campo E_{RX} , conforme figura a abaixo.



O campo elétrico $E(r)$ de uma onda eletromagnética de frequência f que se propaga no espaço livre na direção \hat{r} do raio de propagação, com valor $E(r_0)$ medido na posição $r = r_0$, resultará em um campo elétrico $E(r_0 + d) = E(r_0) \left(\frac{r_0}{r_0 + d} \right) e^{j\frac{2\pi d}{\lambda}}$ medido na posição $r = r_0 + d$, onde $\lambda = \frac{c}{f}$ é o comprimento de onda e $c = 2.998 \times 10^8$ m/s é a velocidade da luz. Ou seja, a amplitude do campo E de uma onda que se propaga no espaço livre varia inversamente com a distância d percorrida e sua fase gira $360^\circ (= 2\pi \text{ rad})$ a cada distância d percorrida equivalente a um comprimento de onda λ .

Portanto, sendo r_0 a posição em que se mede o campo E_{TX} , a superposição das duas ondas, direta e refletida, que incidem na antena do RX, resultam em um campo elétrico E_{RX} dado por:

$$E_{RX} = E_{TX} \frac{r_0}{(r_0 + d_0)} e^{j\frac{2\pi d_0}{\lambda}} + E_{TX} \Gamma \frac{r_0}{(r_0 + d_1)} e^{j\frac{2\pi d_1}{\lambda}} = E_{TX} \underbrace{\left(\frac{r_0}{(r_0 + d_0)} e^{j\frac{2\pi f d_0}{c}} - \frac{r_0}{(r_0 + d_1)} e^{j\frac{2\pi f d_1}{c}} \right)}_{G(f) \text{ do canal}}$$

Ocorre Interferência destrutiva entre as ondas direta e refletida quando $\left(\frac{r_0}{(r_0 + d_0)} e^{j\frac{2\pi f d_0}{c}} - \frac{r_0}{(r_0 + d_1)} e^{j\frac{2\pi f d_1}{c}} \right) \cong 0$, que é equivalente à condição $\frac{(r_0 + d_0)}{(r_0 + d_1)} e^{j\frac{2\pi f (d_1 - d_0)}{c}} \cong 1$.

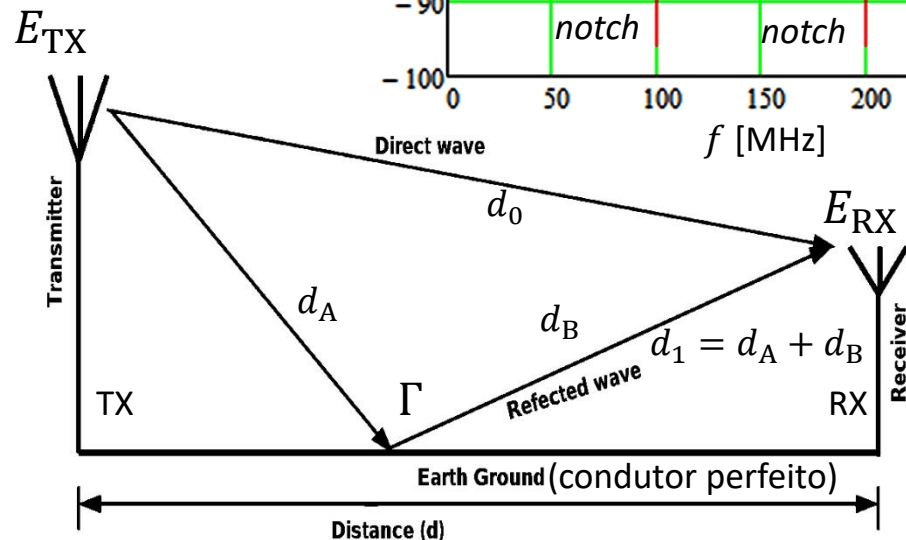
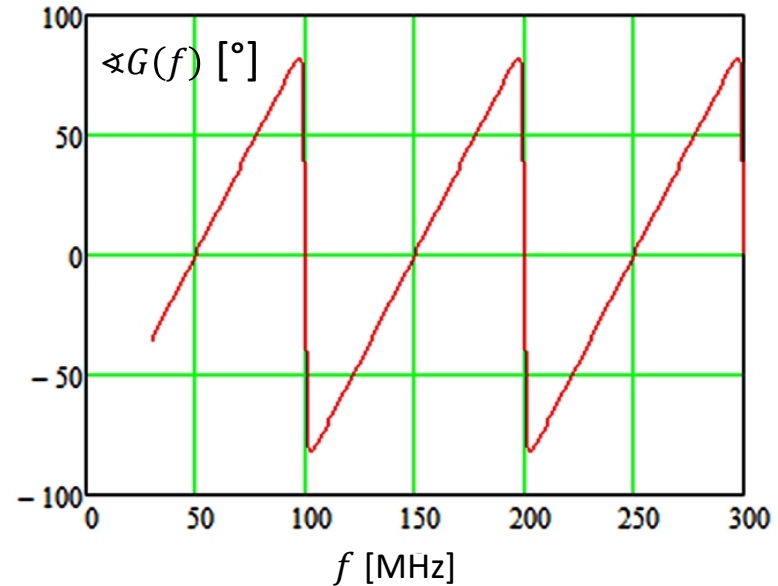
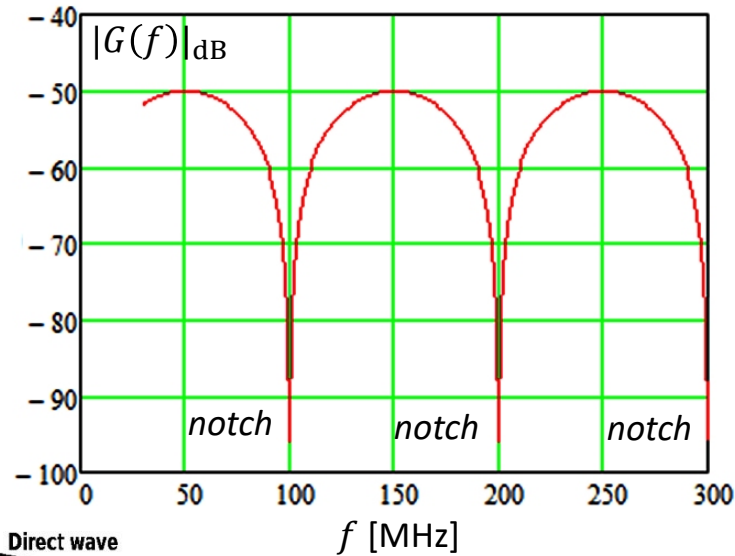
Canal com *multipath*

Exemplo 3: Considere um enlace com um percurso direto e um percurso com reflexão em condutor perfeito perfeito (coeficiente de reflexão $\Gamma = 1.0e^{-j180^\circ} = -1$), operando em $f_c = 100$ MHz ($\lambda = \frac{c}{f_c} = 2.998$ m), com $r_0 = \lambda/2\pi = 47.713$ cm, $d_0 = 100\lambda = 299.792$ m, $d_1 = 101\lambda = 302.790$ m. Plote os gráficos de magnitude (em dB) e fase (em graus) de $G(f)$ na faixa $30\text{MHz} < f < 300$ MHz. Identifique as frequências dos zeros de $G(f)$ na faixa especificada.

Solução:

$$G(f) = \left(\frac{r_0}{(r_0 + d_0)} e^{j\frac{2\pi f d_0}{c}} - \frac{r_0}{(r_0 + d_1)} e^{j\frac{2\pi f d_1}{c}} \right) \quad |G(f)|_{\text{dB}} = 20\log(|G(f)|) \quad \angle G(f) = \text{atan2} \left(\frac{\text{Im}\{G(f)\}}{\text{Re}\{G(f)\}} \right)$$

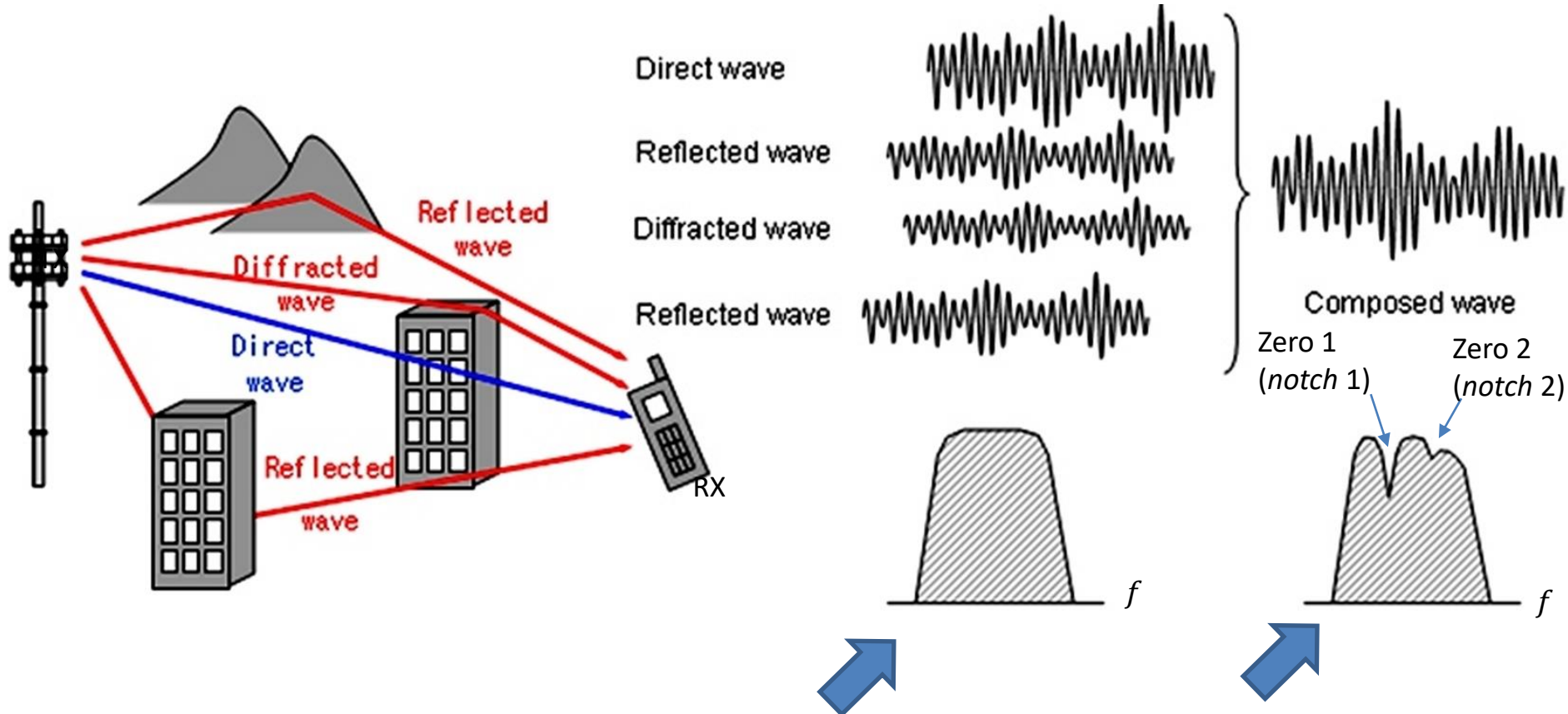
Nota: A função $\text{atan2}()$ delimita a faixa de variação angular da fase no intervalo $[-180^\circ, +180^\circ]$ (ver <https://en.wikipedia.org/wiki/Atan2>).



Frequências dos zeros de $G(f)$: 100 MHz, 200MHz e 300MHz, respectivamente correspondendo aos 3 *notches* na curva de $|G(f)|_{\text{dB}}$. Note que o sinal é transmitido em $f_c = 100$ MHz, portanto o zero de $G(f)$ em $f = 100$ MHz anula o sinal recebido.

Canal com *multipath*

A figura abaixo mostra um cenário de *multipath* com um percurso direto, dois percursos com reflexão e um percurso com difração. Este cenário de multipercurso estabelece múltiplos zeros na função de transferência $G(f)$ do canal decorrentes da interferência destrutiva que ocorre no RX entre as diversas frentes de onda que nele incidem, interferência que depende da fase e amplitude relativa entre as frentes de onda.

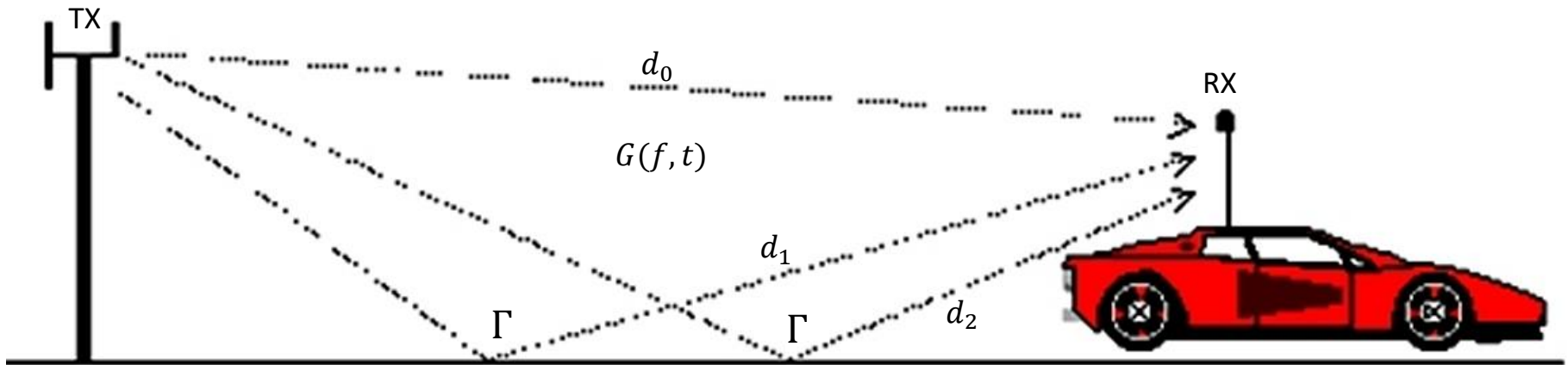


Curva de magnitude do espectro do sinal recebido no RX caso houvesse somente o caminho direto (não há reflexão nem difração).

Curva de magnitude do espectro do sinal recebido no RX degradada pelos *notches* de $G(f)$ resultantes da interferência destrutiva que ocorre em consequência do cenário de multipercurso do canal.

Canal com *multipath*

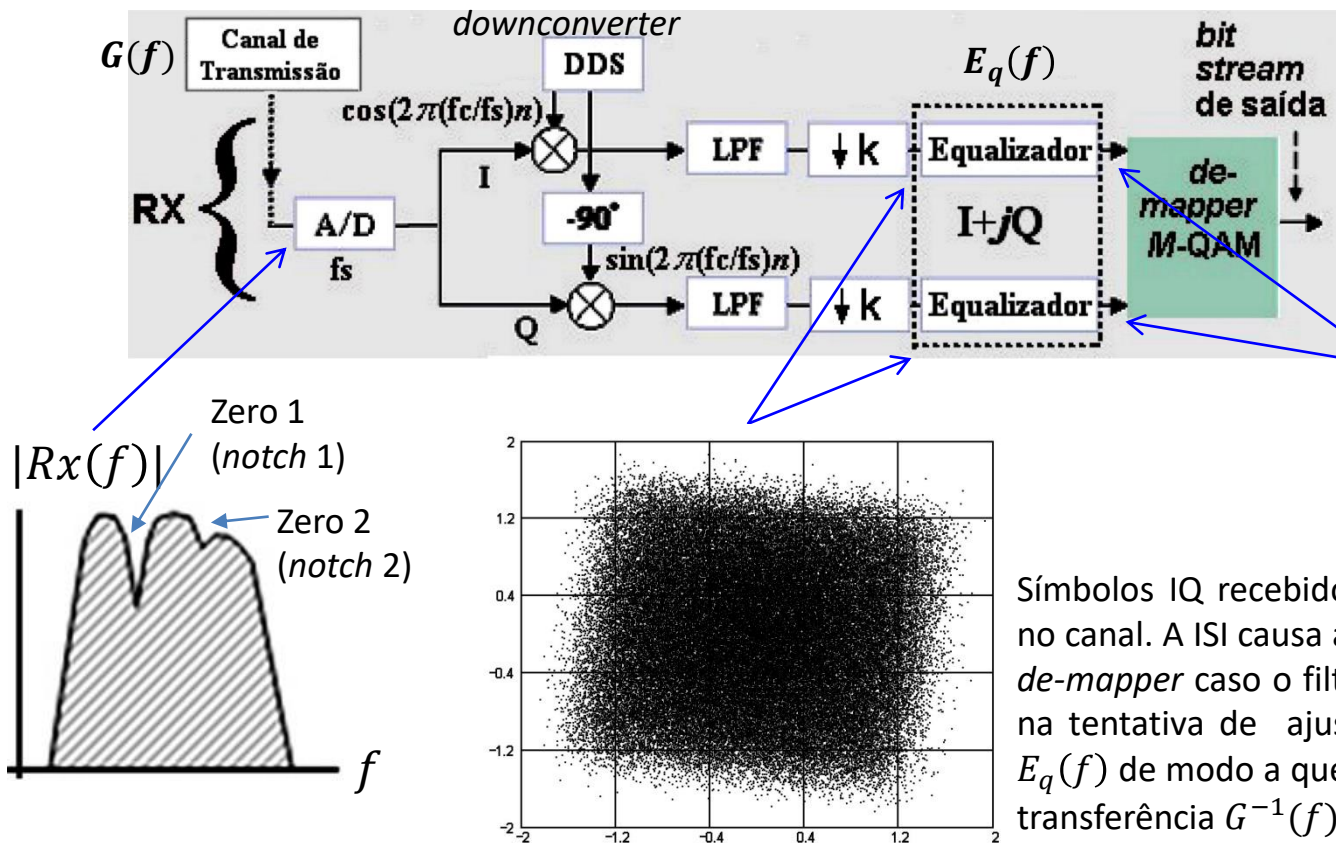
A figura abaixo mostra um cenário dinâmico de *multipath* com um percurso direto e dois percursos com reflexão em solo condutor perfeito (coeficiente de reflexão $\Gamma = 1.0e^{-j180^\circ} = -1$). Os zeros da função de transferência $G(f)$ do canal (decorrentes da interferência destrutiva que ocorre entre as ondas que incidem no RX) variam sua frequência de acordo com a posição do RX que está em movimento. Os zeros variam sua frequência porque, conforme visto no slide 29, ocorre interferência destrutiva entre as ondas direta e refletidas quando $\left(\frac{r_0}{(r_0+d_0)} e^{j\frac{2\pi f d_0}{c}} - \frac{r_0}{(r_0+d_1)} e^{j\frac{2\pi f d_1}{c}} - \frac{r_0}{(r_0+d_2)} e^{j\frac{2\pi f d_2}{c}} \right) \cong 0$, condição que depende não somente da frequência f como também depende das distâncias d_0 , d_1 e d_2 , as quais são função da posição momentânea do RX em movimento:



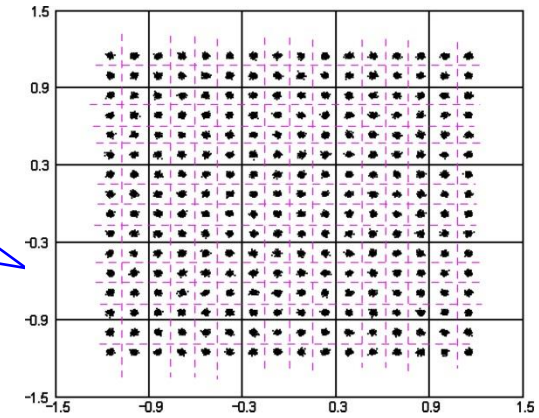
Como os zeros da $G(f)$ do canal variam sua frequência de acordo com a posição do RX em movimento, então a função de transferência $G(f, t)$ do canal será variante no tempo t , o que impõe um custo computacional elevado ao hardware que executa o algoritmo adaptativo do equalizador, dado que o algoritmo necessita não somente implementar a função de transferência inversa $G^{-1}(f, t)$ do canal como também deve ser capaz de se adaptar às variações no tempo de $G(f, t)$. Se o RX se movimenta em uma velocidade muito alta, o algoritmo adaptativo do equalizador pode falhar na tentativa de se adaptar às variações rápidas no tempo de $G(f, t)$, o que inviabiliza a determinação precisa de $G^{-1}(f, t)$.

Canal com *multipath*

Note na figura abaixo que a degradação da magnitude $|R_x(f)|$ de espectro do sinal recebido (que é uma degradação no domínio frequência f causada pelos zeros na função de transferência $G(f)$ do canal estabelecidos pela superposição de ondas no cenário de *multipath* no canal, causando *notches* em $G(f)$) resulta simultaneamente em uma degradação no domínio tempo do sinal em banda-base após o *downconverter* do RX, dado que a superposição de ondas no canal implica simultaneamente na superposição de símbolos IQ na entrada do equalizador, gerando ISI (*Inter Symbol Interference* – interferência intersimbólica) conforme mostra a figura. Caso o processo adaptativo do equalizador seja apto a ajustar a função de transferência $E_q(f)$ do equalizador de modo a que a mesma implemente a função de transferência $G^{-1}(f)$ do canal, i.e., caso os polos de $E_q(f)$ cancelem os zeros de $G(f)$, então o RX “vê” o canal como um canal AWGN conforme discutido no slide 28:



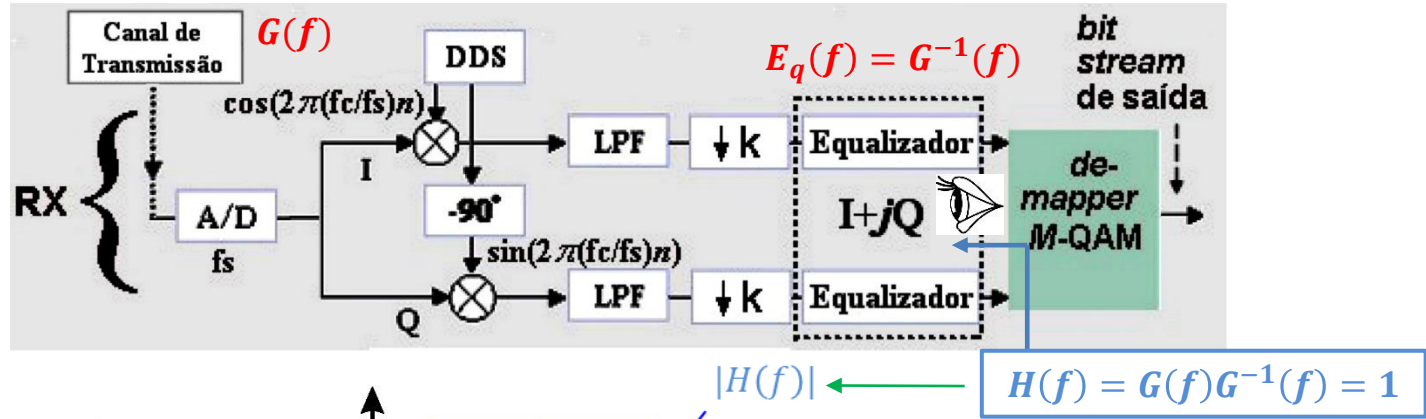
Símbolos IQ com ISI minimizada por ação de $E_q(f) = G^{-1}(f)$:



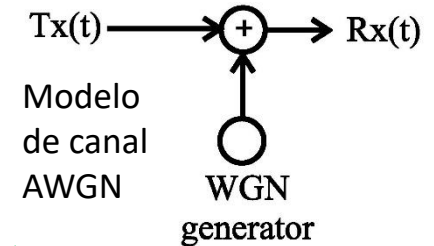
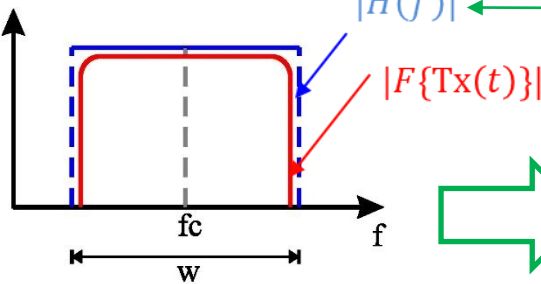
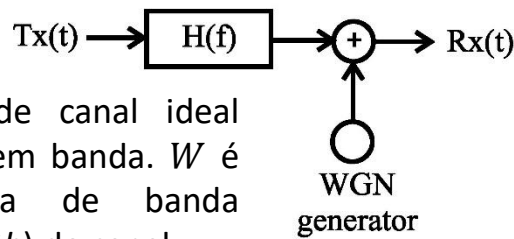
Símbolos IQ recebidos com ISI causada pelo *multipath* no canal. A ISI causa alta BER (*Bit Error Rate*) na saída do *de-mapper* caso o filtro adaptativo do equalizador falhe na tentativa de ajustar a sua função de transferência $E_q(f)$ de modo a que a mesma implemente a função de transferência $G^{-1}(f)$ do canal.

Capacidade de Canal – Teorema de Shannon

Conforme discutido no slide anterior, quando o filtro adaptativo do equalizador é apto a ajustar a sua função de transferência $E_q(f)$ de modo a que a mesma implemente a função de transferência $G^{-1}(f)$ do canal, i.e., quando os polos de $E_q(f)$ cancelam os zeros de $G(f)$, então o RX “vê” o canal como um canal AWGN. A operação sob canal AWGN é a situação de operação considerada normal para um receptor digital, em que a BER (*Bit Error Rate*) na saída do *de-mapper* é minimizada pelo fato da ISI na entrada do *de-mapper* ter sido minimizada pelo equalizador.

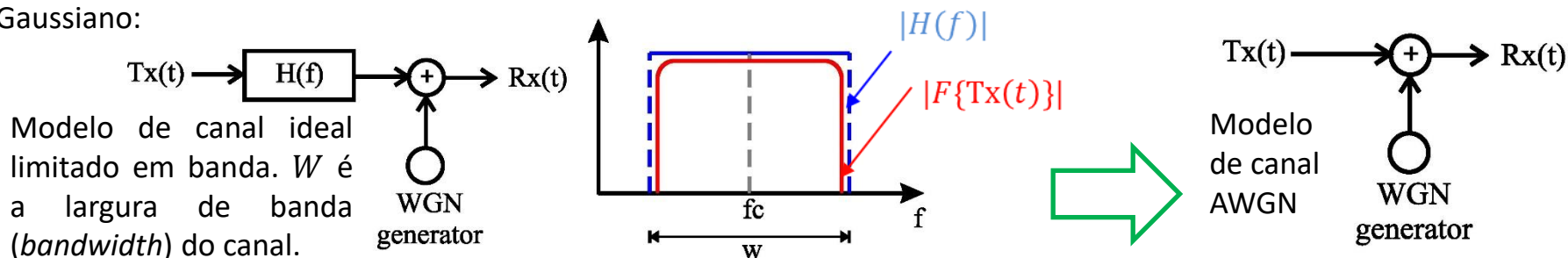


Modelo de canal ideal limitado em banda. W é a largura de banda (*bandwidth*) do canal.



Capacidade de Canal – Teorema de Shannon

Para um canal AWGN, a única degradação do sinal $T_x(t)$ é a degradação causada pela adição do ruído do gerador WGN, porque um canal AWGN é um canal ideal limitado em banda cuja curva de magnitude $|H(f)|$ da sua função de transferência $H(f)$ é plana ao longo de toda largura W da curva de magnitude $|F\{T_x(t)\}|$ do espectro do sinal $T_x(t)$, conforme mostra a figura abaixo. Nesta situação, $|H(f)|$ deixa passar “intocáveis” (sem qualquer alteração de magnitude ou fase) a totalidade das componentes espectrais de $T_x(t)$. Por não interagir com as componentes espectrais do sinal $T_x(t)$, o filtro com função de transferência $H(f)$ pode ser retirado do modelo de canal limitado em banda, simplificando para o modelo de canal AWGN, em que a única degradação imposta pelo canal é a adição de ruído branco Gaussiano:



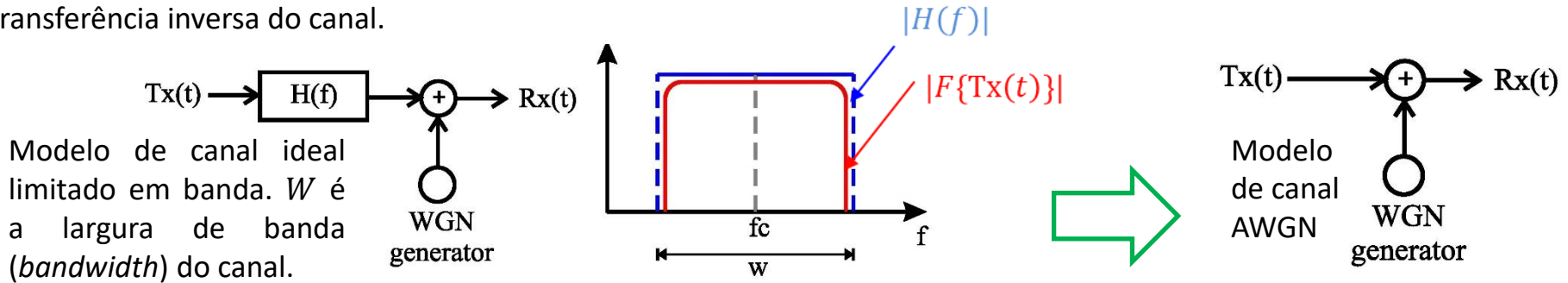
Note que se a curva de magnitude $|F\{T_x(t)\}|$ do espectro do sinal $T_x(t)$ não “couber” em banda dentro do retângulo da curva de magnitude $|H(f)|$ ao longo de toda largura W na figura acima, então $|H(f)|$ não deixa passar de modo “intocável” a totalidade das componentes espectrais de $T_x(t)$, alterando a magnitude e fase das componentes espectrais de $T_x(t)$ que estão fora da banda de largura W , o que gera ISI e degrada a BER na saída do *de-mapper*.

Na década de 40 do século XX, Claude Shannon propôs um desenvolvimento analítico (ver https://pt.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Shannon%E2%80%93Hartley) que estabelece a taxa de transmissão máxima C através do canal sem que ocorra degradação da BER **na saída do channel decoder** (que corrige os bits em erro na saída do *de-mapper* através de um código corretor de erro, conforme introdutoriamente discutido nos slides 8 e 9).

O desenvolvimento de Shannon especificamente aplicado à comunicação digital considera que a degradação da BER na saída do *channel decoder* é causada por Deterioração do sinal recebido pelo RX em consequência do ruído aditivo branco gaussiano que ocorre no canal de largura de banda W . A ISI na entrada do *de-mapper*, que ocorre caso o espectro do sinal $T_x(t)$ não “couber” em banda dentro do retângulo da curva de magnitude $|H(f)|$ ao longo de toda largura de banda W também afeta a BER, mas isto não é contemplado no desenvolvimento de Shannon.

Capacidade de Canal – Teorema de Shannon

O desenvolvimento analítico proposto por Claude Shannon é específico para um canal AWGN, em que o espectro do sinal cabe em banda dentro do retângulo da curva de magnitude da resposta em frequência do canal ao longo de toda largura de banda W , conforme mostra a figura abaixo. Conforme discutido no slide 34, a operação sob canal AWGN é a situação de operação considerada normal para um receptor digital, i.e., o equalizador implementa com sucesso a função de transferência inversa do canal.



O resultado do referido desenvolvimento analítico tornou-se conhecido como **Teorema de Shannon** e estabelece a seguinte relação:

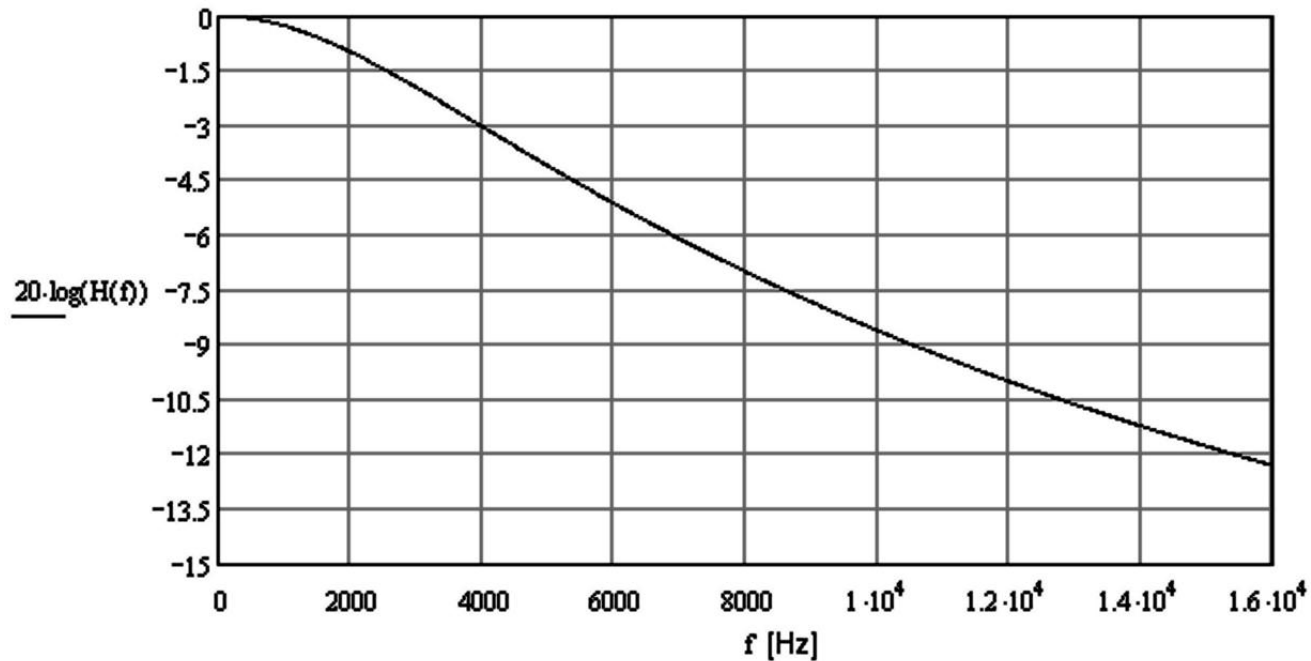
$$C = W \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right) = \frac{W}{\ln(2)} \ln \left(1 + \frac{S}{N} \right) \quad [\text{bps}]$$

onde C é a capacidade de transmissão em [bps] do canal AWGN de largura de banda W em [Hz], S é a potência [W] do sinal medido **na entrada do RX** e P é a potência [W] do ruído do canal medido **na entrada do RX**.

A capacidade de transmissão C do canal é a taxa máxima em [bps] de transmissão de informação que pode ser transportada através do canal para que o código corretor de erro no “channel decoder” do RX corrija todos os bits errados na saída do *de-mapper*. Para qual código corretor a capacidade C calculado pela equação acima zera a BER na saída do “channel decoder”? Na realidade, o Teorema de Shannon não especifica o código corretor de erro, ele apenas garante que é possível projetar um código corretor de erro que assegura uma taxa de transmissão C com BER zero na saída do “channel decoder”. Fica ao encargo do projetista implementar o código corretor. Neste contexto, a real utilidade do Teorema de Shannon reside na seguinte interpretação alternativa: Deve-se evitar transmitir informação a uma taxa de transmissão maior que C porque, caso contrário, teremos a certeza de que, independente do código corretor utilizado no “channel decoder”, é certo que a BER na sua saída não será nula.

Capacidade de Canal – Teorema de Shannon - Exemplo

Exemplo 4: Um TX digital é interligado ao RX digital através do par de fios de uma linha telefônica. O módulo da função de transferência $H(f)$ desta linha telefônica foi medido com um *vector network analyzer*, resultando em



Sabe-se que o ruído na linha telefônica é gaussiano, branco e aditivo resultando em uma SNR de 32 dB medida nos terminais de entrada do RX.

Determine a velocidade máxima (em bps) que o sinal digital pode ser transmitido através desta linha telefônica.

Capacidade de Canal – Teorema de Shannon - Exemplo

Solução:

$$W := 4 \cdot 10^3 \quad [\text{Hz}] \rightarrow \text{banda passante -3dB do canal}$$

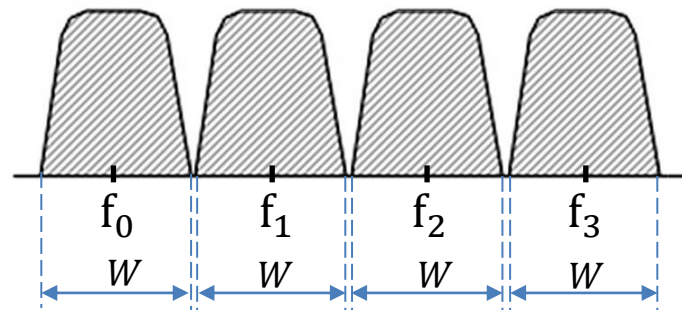
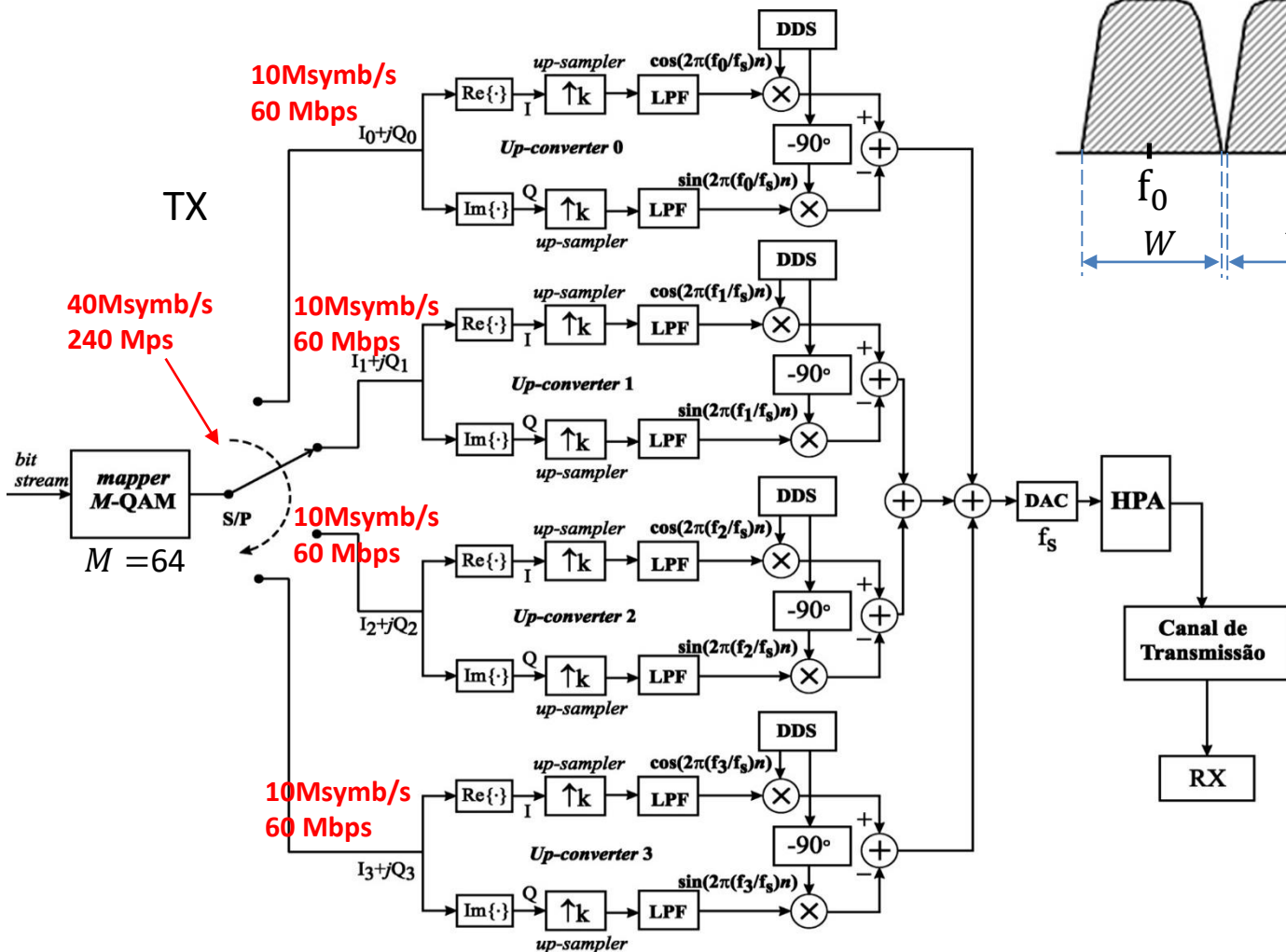
$$\text{SNR} := 32 \quad [\text{dB}] \rightarrow \text{relação sinal-ruído do canal}$$

$$C := \frac{1}{\ln(2)} \cdot W \cdot \ln\left(1 + 10^{\frac{\text{SNR}}{10}}\right) \quad [\text{bps}] \rightarrow \text{Expressão geral da capacidade de transmissão de um canal de banda passante } W \text{ e relação sinal-ruído SNR}$$

$$C = 4.252 \times 10^4 \quad [\text{bps}] \rightarrow \text{máxima taxa do canal (capacidade de transmissão do canal)}$$

Capacidade de canal de sistemas *multicarrier* – Exemplo

Exemplo 5: Um sistema *multicarrier* (=multiportadora) coloca em paralelo N_p *upconverters*, com respectivos N_p sub-canais de largura W centrados em N_p frequências de portadora distintas, assim reduzindo o SymbolRate de cada sub-canal de um fator $1/N_p$ e portanto aumentando de um fator N_p a duração dos símbolos IQ em cada sub-canal. Com isto os ecos gerados no cenário de multipercurso no canal tornam-se de duração desprezível em relação à duração dos símbolos IQ, aumentando a inteligibilidade da sequência de símbolos IQ recebidos (ver análogo acústico no slide 4 do Cap I das notas de aula). Abaixo é mostrado um exemplo p/ SymbolRate=40Msymb/s e $N_p=4$ sub-canais de largura W centrados em f_0, f_1, f_2 e f_3 ($N_p=4$ portadoras f_0, f_1, f_2 e f_3) com modulação 64-QAM :

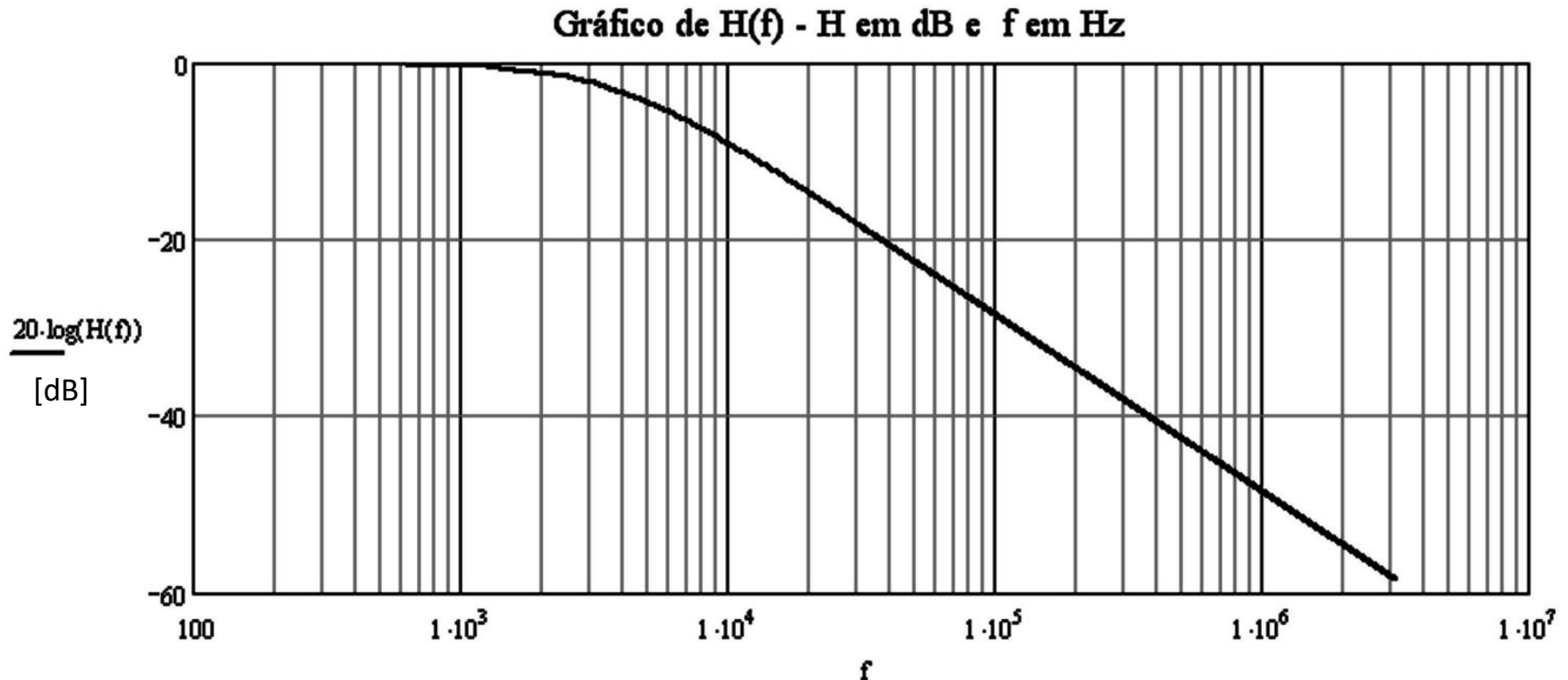


Note que embora cada *upconverter* transmita com um SymbolRate de apenas 10Msymb/s, a taxa de símbolo 40Msymb/s na saída do *mapper* é mantida porque os 4 *upconverters* estão em paralelo. A modulação 64-QAM transporta 6 bits/símbolo, então a taxa de bits na saída do *mapper* de 240 Mbps é dividida entre os 4 *upconverters*, cada um transmitindo a 60 Mbps.

Capacidade de canal de sistemas *multicarrier* – Exemplo

Vamos considerar neste exemplo um sistema digital multiportadora que utiliza $N_p = 16$ portadoras (16 sub-canais) igualmente espaçadas na faixa de 0 Hz a 3.2 MHz. Sabe-se que o ruído no canal é gaussiano, branco e aditivo resultando em uma SNR de 32 dB, medida para um sinal de referência na frequência $f_0 = 100\text{Hz}$. O canal possui uma função de transferência $H(f)$ conforme expressão analítica e gráfico abaixo:

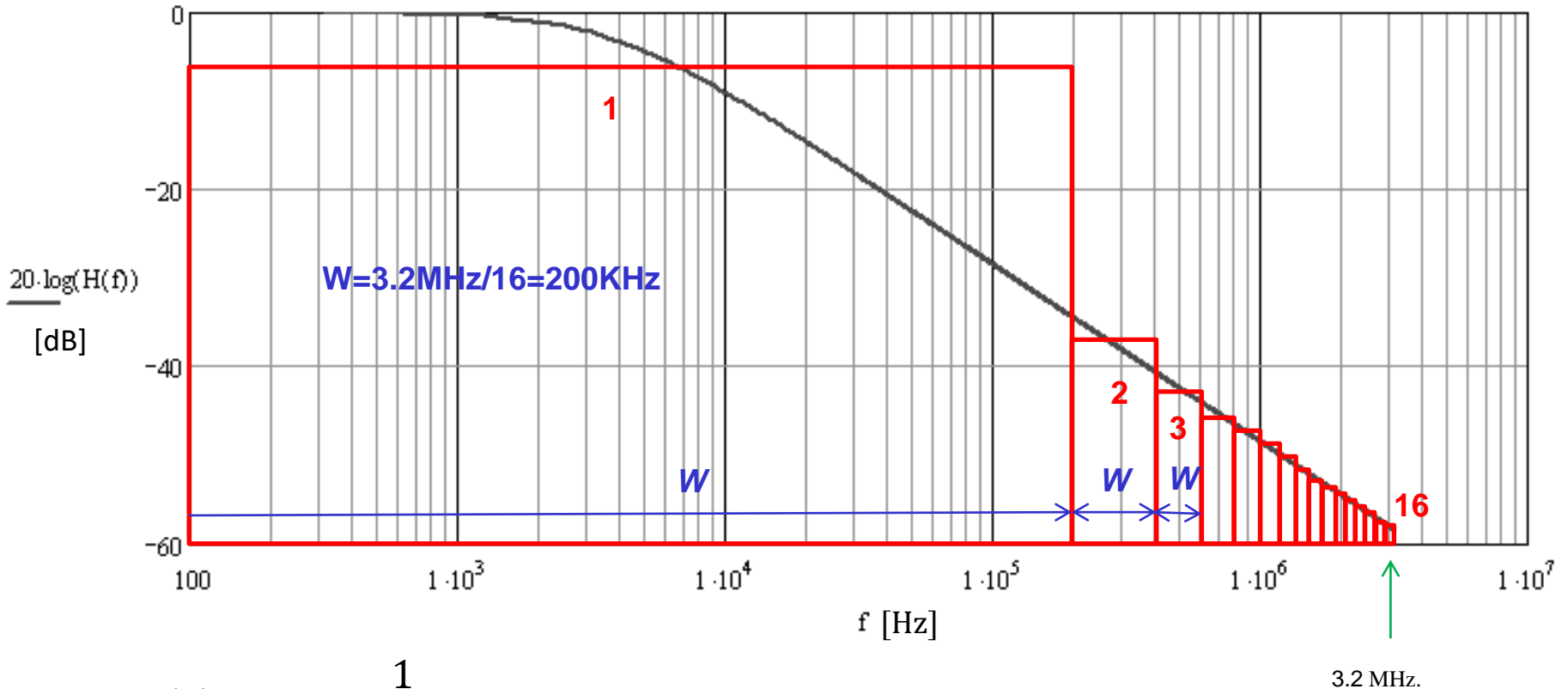
$$H(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_{-3dB}}\right)^2}} \quad f_{-3dB} = 3.8 \times 10^3 \text{ Hz}$$



Capacidade de canal de sistemas *multicarrier* – Exemplo

O RX “vê” os $N_p = 16$ sub-canais transmitidos pelo TX através da $H(f)$ do canal de transmissão, e, portanto, cada sub-canal recebido pelo RX é atenuado pela $H(f)$ do canal calculada na frequência central f_k do respectivo k -ésimo sub-canal dentre os 16 sub-canais , conforme mostra a figura abaixo.

Gráfico de $H(f)$ - H em dB e f em Hz



$$H(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_{-3dB}}\right)^2}} \quad f_{-3dB} = 3.8 \times 10^3 \text{ Hz}$$

Capacidade de canal de sistemas *multicarrier* – Exemplo

Pede-se: Determine uma estimativa da capacidade máxima de transmissão em bps deste sistema de $N_p = 16$ portadoras para as seguintes situações.

- Sem compensação da função de transferência $H(f)$ do canal.
- Com compensação da função de transferência $H(f)$ do canal.

Solução:

$f_{\text{corte}} := 3.8 \cdot 10^3$ [Hz] → frequência de corte -3dB do canal

$\text{SNR}_0 := 32$ [dB] → relação sinal-ruído do canal medida em 100Hz

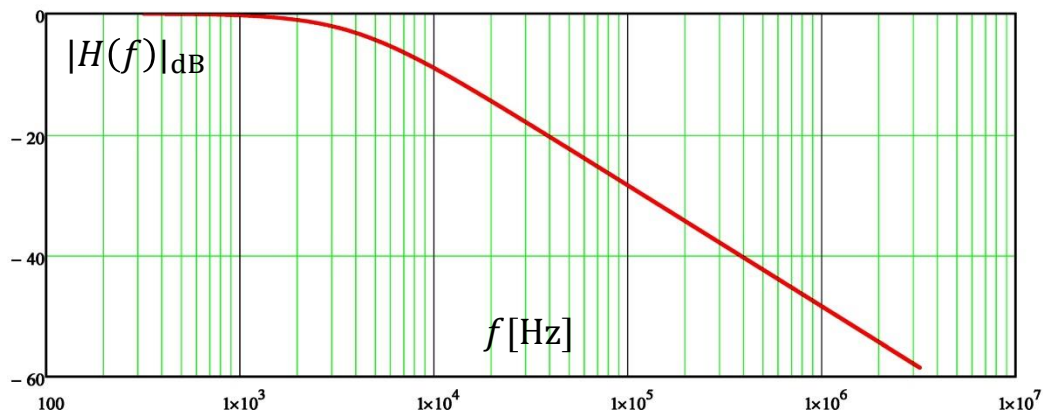
$F_{\text{Max}} := 3.2 \cdot 10^6$ [Hz] → frequência máxima da faixa de frequências a ser transmitida através do canal

$N_p := 16$ → número de portadoras = número de sub-canais

$W := \frac{F_{\text{Max}}}{N_p}$ $W = 2 \times 10^5$ [Hz] → banda passante de cada sub-canal

$H(f) := \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_{\text{corte}}}\right)^2}}$ → expressão analítica da função de transferência $H(f)$ do canal

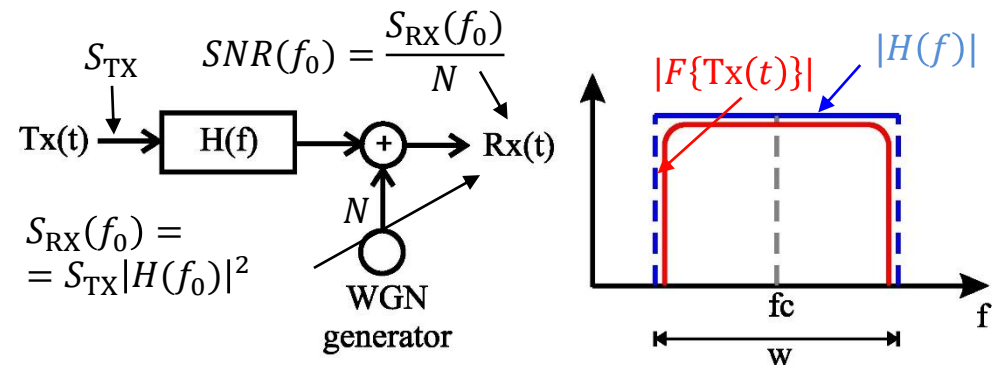
Capacidade de canal de sistemas *multicarrier* – Exemplo



$$|H(f)|_{dB} = 20 \log |H(f)| = 20 \log \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_{-3dB}}\right)^2}} \right\}$$

$$f_{-3dB} = 3.8 \times 10^3 \text{ Hz}$$

A relação sinal-ruído *SNR* (*Signal to Noise Ratio*) medida em uma frequência específica f_0 é a razão entre a potência $S_{RX}(f_0)$ do sinal de frequência f_0 **na entrada do RX** e a potência N do ruído branco **na entrada do RX**, i.e., $SNR(f_0) = \frac{S_{RX}(f_0)}{N}$ conforme mostra a figura. Note que a $H(f)$ do canal afeta a amplitude do sinal na entrada do RX **mas não afeta a amplitude do ruído porque o gerador de ruído está depois do filtro $H(f)$ no modelo do canal**. Portanto, se uma $SNR(f_0)$ é medida na entrada do RX em uma frequência específica f_0 então uma $SNR(f_x)$ que se deseja determinar em qualquer outra frequência f_x pode ser obtida através de:



$$SNR(f_0) = \frac{S_{RX}(f_0)}{N}$$

$$S_{RX}(f_0) = S_{TX} |H(f_0)|^2$$

$$SNR(f_x) = \frac{S_{RX}(f_x)}{N} = \frac{S_{RX}(f_0) \frac{|H(f_x)|^2}{|H(f_0)|^2}}{N} = \frac{S_{RX}(f_0)}{N} \frac{|H(f_x)|^2}{|H(f_0)|^2} = SNR(f_0) \frac{|H(f_x)|^2}{|H(f_0)|^2}$$

$$10 \log\{SNR(f_x)\} = 10 \log \left\{ SNR(f_0) \frac{|H(f_x)|^2}{|H(f_0)|^2} \right\} \rightarrow 10 \log\{SNR(f_x)\} = 10 \log\{SNR(f_0)\} + 20 \log\{|H(f_x)|\} - 20 \log\{|H(f_0)|\}$$

$$S_{RX_{dB}}(f_x) = S_{RX_{dB}}(f_0) + |H(f_x)|_{dB} - |H(f_0)|_{dB}$$

Capacidade de canal de sistemas *multicarrier* – Exemplo

$$C = \frac{1}{\ln(2)} \cdot W \cdot \ln \left(1 + 10^{\frac{\text{SNR}}{10}} \right) \quad [\text{bps}] \rightarrow \text{Expressão geral da capacidade de transmissão de um canal de banda passante } W \text{ e relação sinal-ruído SNR}$$

A equação acima determina a capacidade de canal C de cada k -ésimo sub-canal dentre os $N_p = 16$ sub-canais em função da SNR no respectivo k -ésimo sub-canal, SNR que depende da frequência central f_k do k -ésimo sub-canal (= frequência da k -ésima portadora). Conforme slide anterior e visto que $\text{SNR}(f_0 = 100\text{Hz}) = 32\text{dB}$ conforme dado no slide 40, temos que

$$\text{SNR}(f_k) = \underbrace{\text{SNR}(f_0 = 100\text{Hz})}_{\text{SNRo}=32 \text{ dB}} + |H(f_x)|_{\text{dB}} - \underbrace{|H(f_0 = 100\text{Hz})|_{\text{dB}}}_{0 \text{ dB}}$$

sendo a frequência central f_k do k -ésimo sub-canal (= frequência da k -ésima portadora) dada por:

$$\frac{W}{2} \cdot (2 \cdot k + 1) = [\text{Hz}] \rightarrow \text{Frequência da } k\text{-ésima portadora} = \text{Frequência central do } k\text{-ésimo sub-canal de largura } W$$

1·10 ⁵
3·10 ⁵
5·10 ⁵
7·10 ⁵
9·10 ⁵
1.1·10 ⁶
1.3·10 ⁶
1.5·10 ⁶
1.7·10 ⁶
1.9·10 ⁶
2.1·10 ⁶
2.3·10 ⁶
2.5·10 ⁶
2.7·10 ⁶
2.9·10 ⁶
3.1·10 ⁶

sendo $k = 0, 1, \dots, 15$

Capacidade de canal de sistemas *multicarrier* – Exemplo

A compensação da função de transferência $H(f)$ do canal é uma funcionalidade de todo RX multiportadora (a ser estudado em Sistemas de Comunicação Digital II) que, basicamente, elimina a dependência da amplitude e fase do sinal recebido em cada sub-canal da magnitude e fase da $H(f)$ do canal. Como, neste exemplo, $H(f)$ é uma função real (não tem fase), a compensação será apenas em magnitude.

De acordo com o discutido no slide anterior, a capacidade de canal $C(k)$ de cada k -ésimo sub-canal dentre os 16 sub-canais em função da SNR no respectivo k -ésimo sub-canal, SNR que depende da frequência central f_k do k -ésimo sub-canal (= frequência da k -ésima portadora), é dada por:

$$C(k) := \frac{1}{\ln(2)} \cdot W \cdot \ln \left[1 + 10^{\frac{\text{SNR}_0 + 20 \cdot \log \left[H \left[\frac{W}{2} \cdot (2 \cdot k + 1) \right] \right]}{10}} \right]$$

[bps] → Capacidade do sub-canal na frequência da k -ésima portadora sem compensação da função de transferência $H(f)$ do canal

A capacidade de canal $C_c(k)$ de cada k -ésimo sub-canal dentre os 16 sub-canais estando acionado o bloco do RX que faz compensação da função de transferência $H(f)$ é:

$$C_c(k) := \frac{1}{\ln(2)} \cdot W \cdot \ln \left[1 + 10^{\frac{\text{SNR}_0 + 20 \cdot \log \left[H \left[\frac{W}{2} \cdot (2 \cdot k + 1) \right] \right] - 20 \cdot \log \left[H \left[\frac{W}{2} \cdot (2 \cdot k + 1) \right] \right]}{10}} \right]$$

[bps] → Capacidade do sub-canal na frequência da k -ésima portadora com compensação da função de transferência $H(f)$ do canal

Capacidade de canal de sistemas *multicarrier* – Exemplo

Portanto, a capacidade total de canal é a soma da capacidade individual de cada um dos N_p sub-canais:

$$C_{\text{TotC}} := \sum_{k=0}^{N_p-1} C(k)$$

$$C_{\text{TotC}} = 4.775 \times 10^5 \text{ [bps]} \rightarrow \text{Capacidade total do canal} \\ \text{sem compensação da função} \\ \text{de transferência } H(f) \text{ do canal}$$

$$C_{\text{TotCc}} := \sum_{k=0}^{N_p-1} C_c(k)$$

$$C_{\text{TotCc}} = 3.402 \times 10^7 \text{ [bps]} \rightarrow \text{Capacidade total do canal} \\ \text{com compensação da função} \\ \text{de transferência } H(f) \text{ do canal}$$

Note a importância da compensação da função de transferência $H(f)$ do canal implementada no RX, que resultou em um aumento de quase duas ordens de grandeza na capacidade de canal do sistema.

Apêndice A:

Operation	Formula
Rectangular to Polar Conversion	$z = x + jy = re^{j\theta}$ where $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ and $\theta = \arctan(y/x)$
Polar to Rectangular Conversion	$z = re^{j\theta} = r [\cos(\theta) + j\sin(\theta)] = x + jy$ where $x = r \cos(\theta)$ and $y = r \sin(\theta)$
Add: $z_3 = z_1 + z_2$	$(x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$
Subtract: $z_3 = z_1 - z_2$	$(x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$
Multiply: $z_3 = z_1 z_2$ (polar form)	$(x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + y_1 x_2)$ $r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$
Divide: $z_3 = z_1 / z_2$ (polar form)	$\frac{(x_1 x_2 - y_1 y_2) - j(x_1 y_2 - y_1 x_2)}{x_2^2 + y_2^2}$ $\frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$

Apêndice B:

Sejam $u = 2\pi f_1 t$ e $v = 2\pi f_2 t$. Valem as seguintes relações (*relationships*) trigonométricas:

<i>Relationship</i>	<i>Relationship</i>
$\sin u = \cos(u - \pi/2)$	$\cos u = \sin(u + \pi/2)$
$\cos(-u) = \cos u$	$\sin(-u) = -\sin(u)$
$\sin^2 u + \cos^2 u = 1$	$\cos^2 u = \frac{1}{2}(1 + \cos 2u)$
$\sin^2 u = \frac{1}{2}(1 - \cos 2u)$	$\cos(u \pm v) = \cos u \cos v \mp \sin u \sin v$
$\sin(u \pm v) = \sin u \cos v \pm \cos u \sin v$	$\cos u \cos v = \frac{1}{2}[\cos(u - v) + \cos(u + v)]$
$\sin u \sin v = \frac{1}{2}[\cos(u - v) - \cos(u + v)]$	$\sin u \cos v = \frac{1}{2}[\sin(u - v) + \sin(u + v)]$
$\cos u = \frac{1}{2}[e^{ju} + e^{-ju}]$	$\sin u = \frac{1}{2j}[e^{ju} - e^{-ju}]$
$e^{ju} = \cos u + j \sin u$	

→ **heterodinação**
das frequências f_1 e f_2

Apêndice C:

Name	Continuous	Discrete
Impulse	$\delta(t) = 0, t \neq 0$ $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$	$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$
Step	$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$	$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$
Rectangle Pulse	$\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 1, & t \leq \tau/2 \\ 0, & t > \tau \end{cases}$	$u[n] - u[n - M]$
Triangle Pulse	$\Lambda\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 1 - t/\tau , & t \leq \tau \\ 0, & t > \tau \end{cases}$	$\begin{cases} n + 1, & 0 \leq n \leq M - 1 \\ 2M - 1 - n, & M - 1 < n \leq 2M - 2 \end{cases}$
sinc() and aliased sinc()	$\text{sinc}(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$	$\frac{\sin(N\pi x)}{\sin(\pi x)}$, aliased sinc()
Sinusoid	$A \cos(2\pi f_0 t + \phi)$	$A \cos(\hat{\omega}_0 n + \phi)$, $\hat{\omega}$ is mod 2π

Apêndice D:

Property	Continuous	Discrete
Energy	$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) ^2 dt < \infty$	$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] ^2$
Power	$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) ^2 dt < \infty$	$P_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] ^2 < \infty$
Periodic	$x(t - T_0) = x(t), T_0 = \text{period}$	$x[n - N_0] = x[n], N_0 = \text{period}$
Even	$x(-t) = x(t)$	$x[-n] = x[n]$
Odd	$x(-t) = -x(t)$	$x[-n] = -x[n]$