



Modulação digital: QAM, PAM, PSK, FSK e MSK. Demodulação por correlação. Demodulação por filtro casado.

# Centro de Tecnologia – Departamento de Eletrônica e Computação

## UFSM00261 – SISTEMAS DE COMUNICAÇÃO DIGITAL I

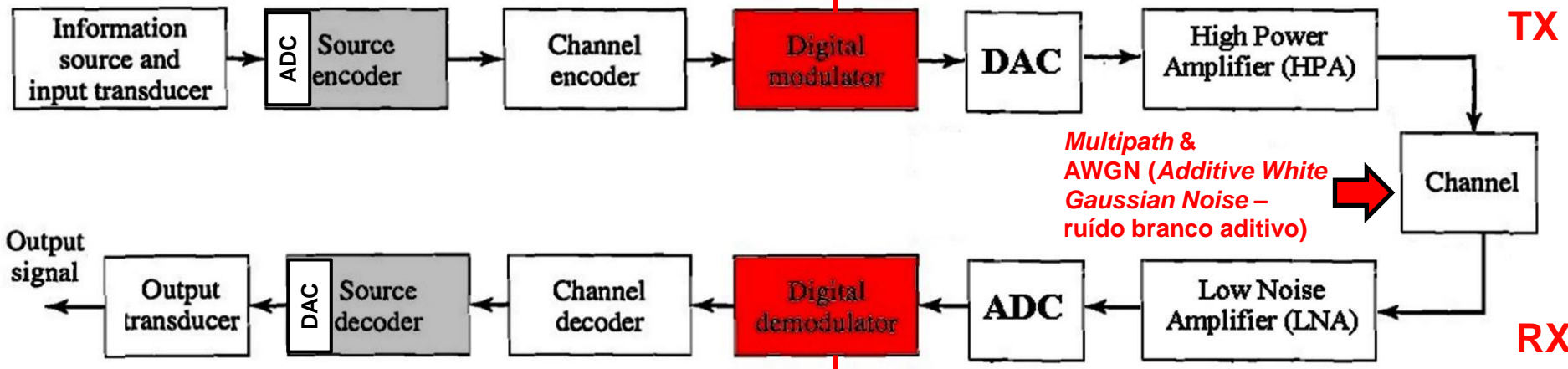
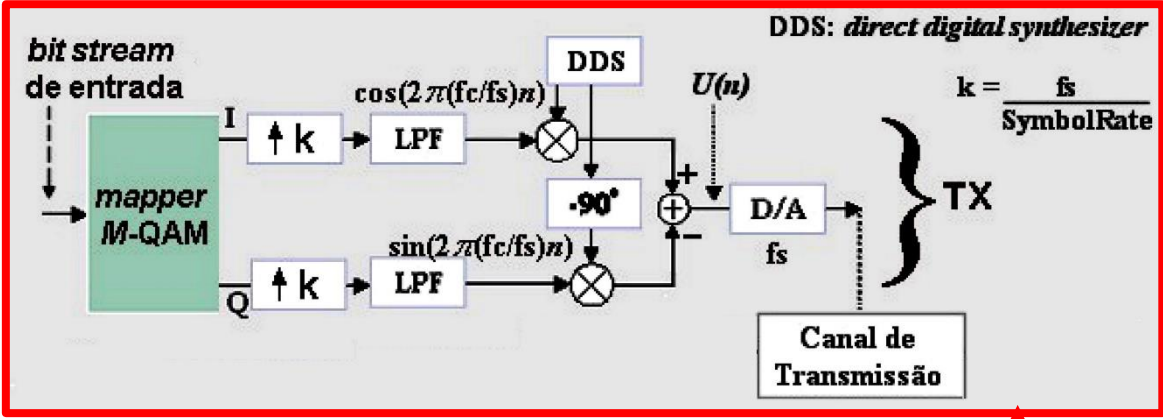
### Prof. Fernando DeCastro



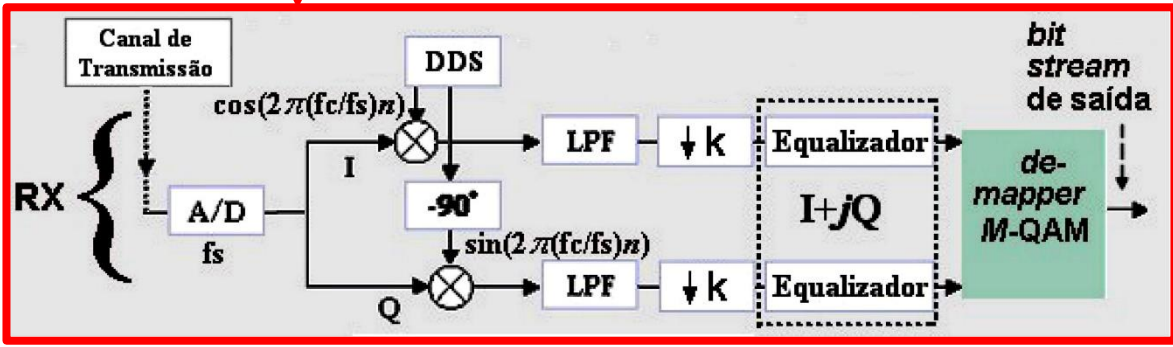


# Modulador e demodulador na arquitetura geral de um sistema de comunicações digital

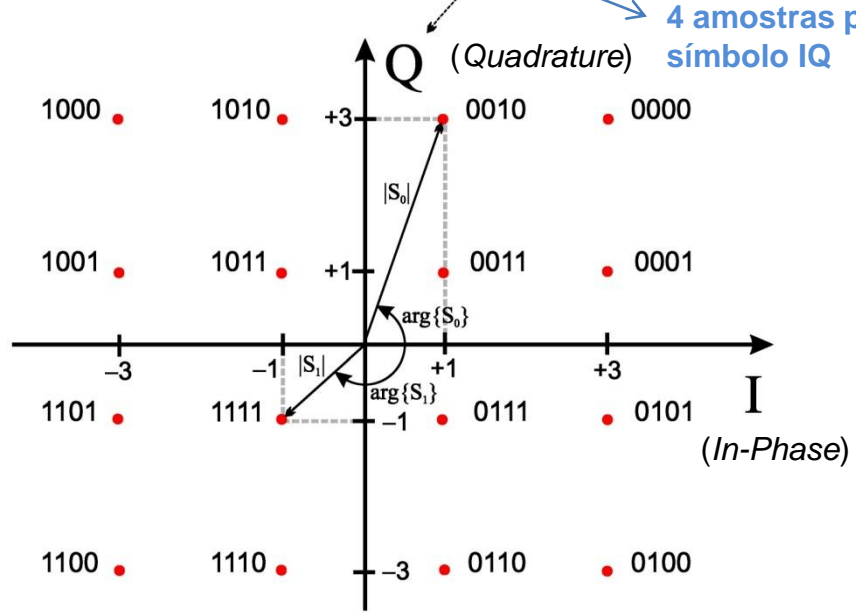
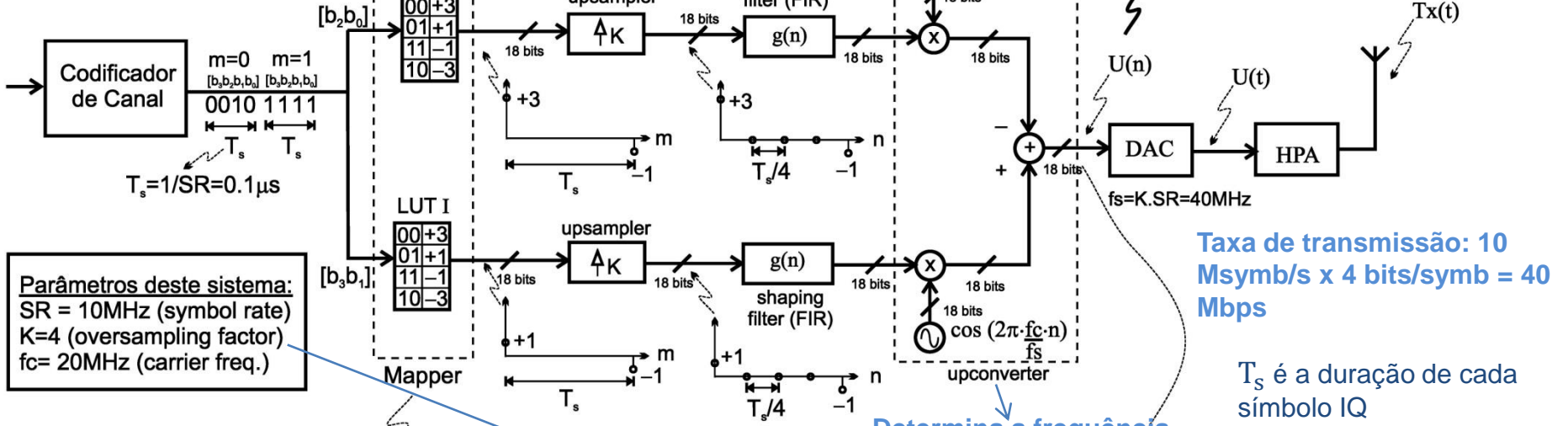
Conforme discutido p/ modulação 16-QAM nos slides 22 a 24 do Cap I das notas de aula, o modulador no TX converte cada palavra binária do *bit stream* de entrada em “*wavepackets*” que se propagam no canal. Para cada palavra binária do *bit stream* o correspondente *wavepacket* no canal representa uma onda eletromagnética de amplitude  $A$  e/ou fase  $\varphi$  e/ou frequência  $f$  distintos. O parâmetro variado na onda ( $A$  e/ou  $\varphi$  e/ou  $f$ ) depende do tipo de modulação adotado (QAM, PAM, PSK, FSK), conforme veremos adiante neste capítulo.



O demodulador no RX reconverte cada *wavepacket* recebido do canal na palavra binária correspondente no *bit stream* de entrada do modulador no TX e que a ele deu origem. A fidelidade da palavra binária no *bit stream* de saída do demodulador em relação à correspondente no TX depende do quanto a onda eletromagnética do TX tenha sido degradada por ruído e *multipath* no canal de transmissão, conforme slides 27 e 28 do Cap I.



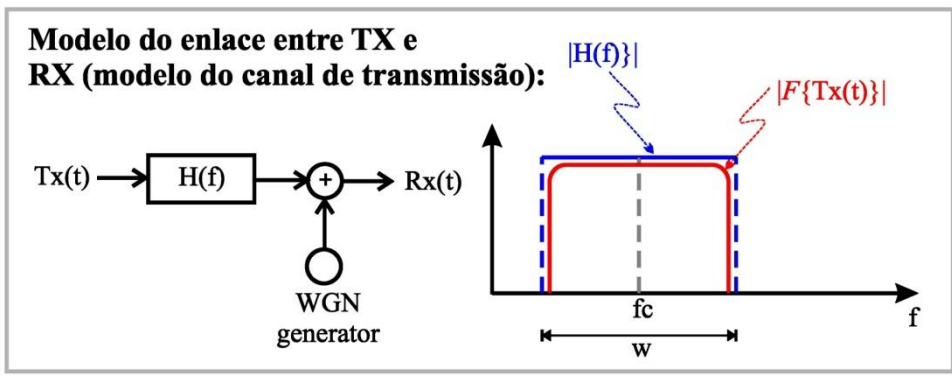
# Exemplo: Modulador 16-QAM



**$U_m(n)$  p/  $m=0$  e  $m=1$  neste exemplo:**

$$U_0(n) = \{\sqrt{3^2+1^2} * g(n)\} \cdot \cos(2\pi \cdot \frac{20}{40} \cdot n + \text{atan}(3/1))$$

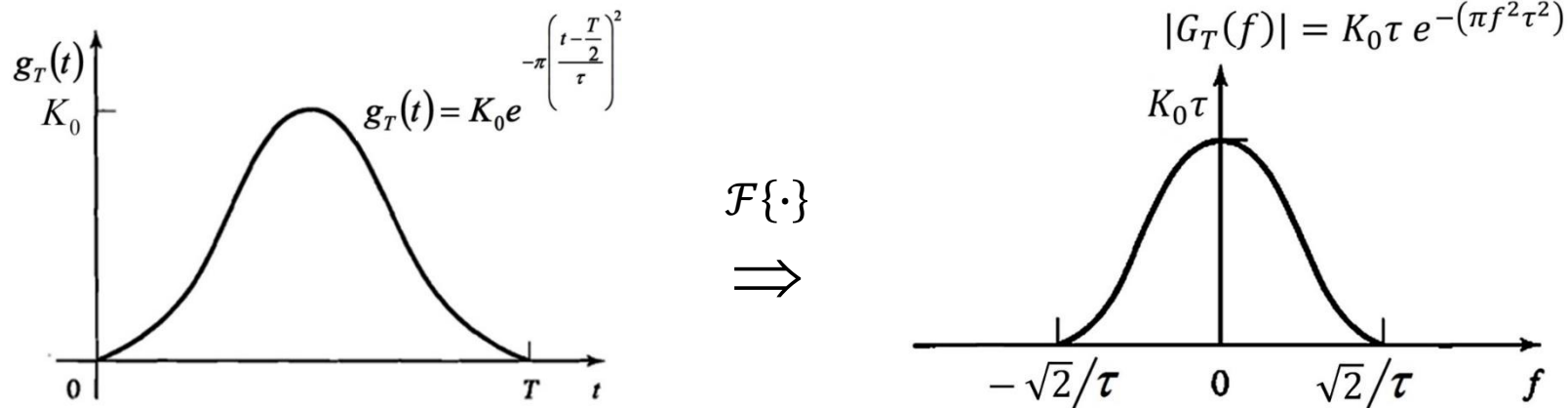
$$U_1(n) = \{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2} * g(n)\} \cdot \cos(2\pi \cdot \frac{20}{40} \cdot n - \text{atan}(-1/-1))$$



## Contenção espectral da sequencia de pulsos retangulares na saída das LUTs I e Q - *shaping filter* (filtro de formatação de pulso) e *Up-sampler* (superamostrador)

Conforme discutido nos slides 12 a 17 do Cap I das notas de aula, a contenção espectral da sequência de pulsos retangulares na saída das LUTs I e Q é feita através de um filtro passa baixa denominado *shaping filter* (ver slide anterior). Uma possível resposta ao impulso para o *shaping filter* no domínio tempo contínuo é a resposta ao impulso Gaussiana  $g_T(t)$ , conforme mostra a figura abaixo. A convolução de  $g_T(t)$  com a sequência de pulsos retangulares na saída das respectivas LUTs Q e I suaviza as bordas de subida e descida dos pulsos. A contenção espectral é efetuada pela suavização das bordas dos pulsos porque, caso não fossem suavizadas pelo *shaping filter*, a rápida (instantânea) variação no tempo das bordas de subida e descida dos pulsos retangulares seriam responsáveis por uma largura infinita do espectro do sinal transmitido através do canal de transmissão. Uma largura infinita de espectro é incompatível com a largura de banda do canal limitada em  $W$  (ver slide anterior), alocado pelo órgão regulador (Anatel, FCC, etc ...).

O espectro do pulso  $g_T(t)$  é obtido aplicando a Transformada de Fourier à  $g_T(t) = K_0 e^{-\pi \left(\frac{t-T}{\tau}\right)^2}$ , i.e.,  $G_T(f) = \mathcal{F}\{g_T(t)\} = K_0 \tau e^{-(\pi f^2 \tau^2 + j\pi f T)} = K_0 \tau e^{-\pi f^2 \tau^2} e^{-j\pi f T}$ , de modo que  $|G_T(f)| = K_0 \tau e^{-\pi f^2 \tau^2}$ ,  $\angle G_T(f) = -j\pi f T$  e  $T = T_s$ .



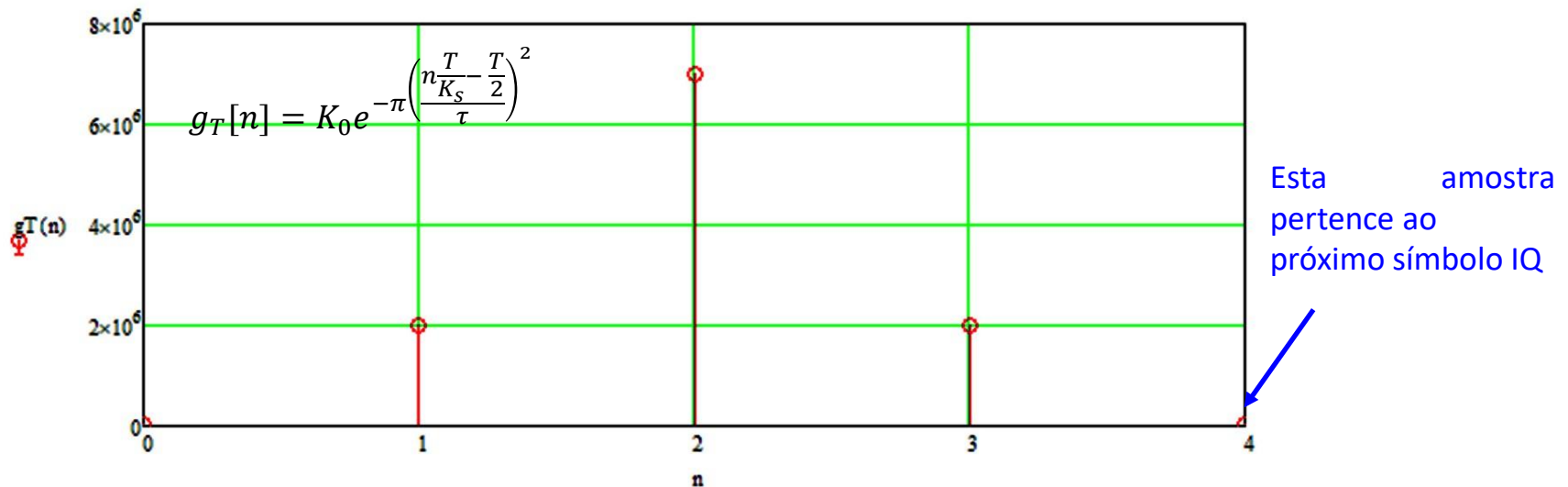
Portanto o filtro passa-baixa Gaussiano contínuo no tempo transmite pulsos na forma  $s_m(t) = A g_T(t) = A K_0 e^{-\pi \left(\frac{t-T}{\tau}\right)^2}$ , com  $A$  correspondendo à amplitude dos pulsos retangulares na saída da LUT. Para um modulador 16-QAM, como o mostrado no slide anterior,  $A \in \{-3, -1, +1, +3\}$ . Note na figura acima que o espectro  $G_T(f)$  resultante é contido no domínio frequência  $f$  e, portanto, factível de ser transmitido através do canal de largura de banda limitada em  $W$  (ver modelo de canal no slide anterior).

## Contenção espectral da sequencia de pulsos retangulares na saída das LUTs I e Q - *shaping filter* (filtro de formatação de pulso) e *Up-sampler* (superamostrador)

Mas observe que os pulsos retangulares na saída das LUTs I e Q não são contínuos no tempo no modulador do slide 3 – mas sim são amostras cuja amplitude é a mesma dos pulsos contínuos referidos no slide anterior. O pulsos seriam contínuos no tempo se retirássemos o DAC na saída do *upconverter* no slide 3 e em substituição colocássemos dois DACs respectivamente nas saídas das LUTs I e Q, de modo que o sinal seria discreto antes dos DACs e contínuo após os DACs, conforme discutimos no slide 11 do Cap I das notas de aula. No modulador do slide 3 as saídas das LUTs I e Q são uma sequencia de amostras e, portanto, o *shaping filter* é um filtro FIR digital e a sua resposta no tempo é discreta, A resposta discreta do *shaping filter* é obtida da resposta contínua. Para um modulador com um *oversampling factor*  $K_s$ , a passagem da resposta contínua para a resposta discreta é conforme:

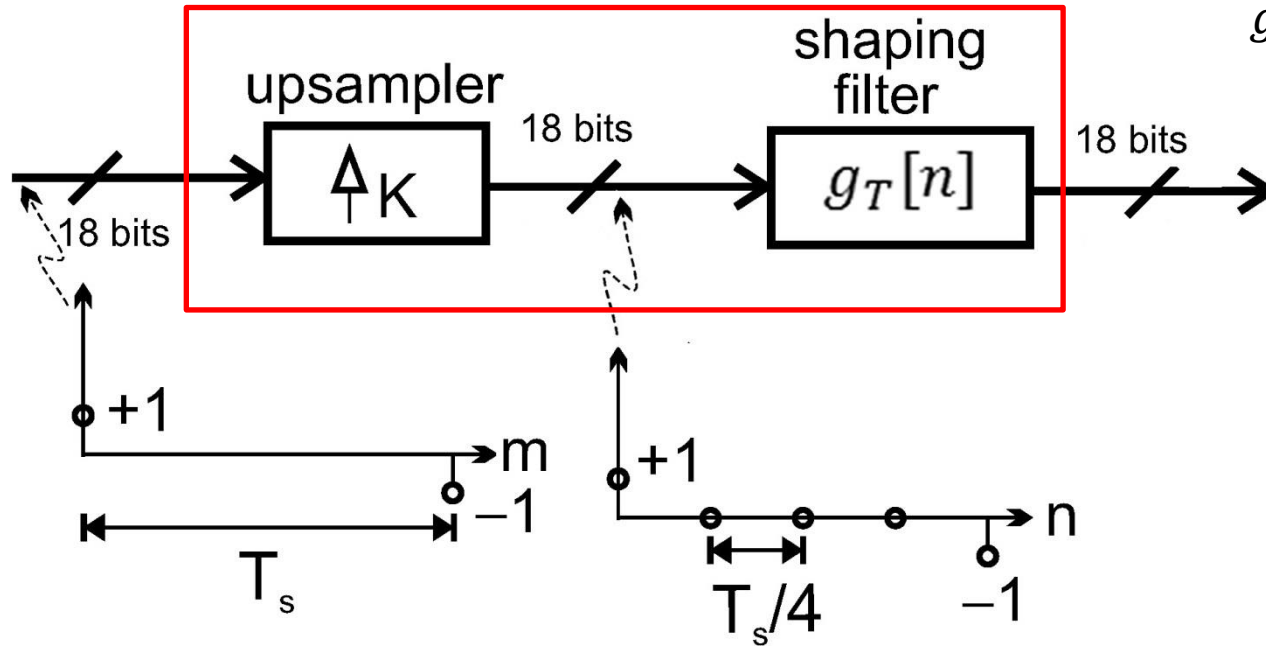
$$g_T(t) = K_0 e^{-\pi \left( \frac{t - \frac{T}{2}}{\tau} \right)^2} \xrightarrow{t = n \frac{T}{K_s}} g_T[n] = K_0 e^{-\pi \left( \frac{n \frac{T}{K_s} - \frac{T}{2}}{\tau} \right)^2}$$

Por exemplo, um *shaping filter* Gaussiano de resposta ao impulso contínua no tempo dada por  $g_T(t) = K_0 e^{-\pi \left( \frac{t - \frac{T}{2}}{\tau} \right)^2}$  com  $K_0 = 7 \times 10^6$  e  $\tau = 0.022 \mu\text{s}$ , ao ser discretizado com  $K_s = 4$  (4 amostras por símbolo IQ) apresentará a resposta discreta no tempo  $g_T[n] = K_0 e^{-\pi \left( \frac{n \frac{T}{K_s} - \frac{T}{2}}{\tau} \right)^2}$  conforme gráfico abaixo:

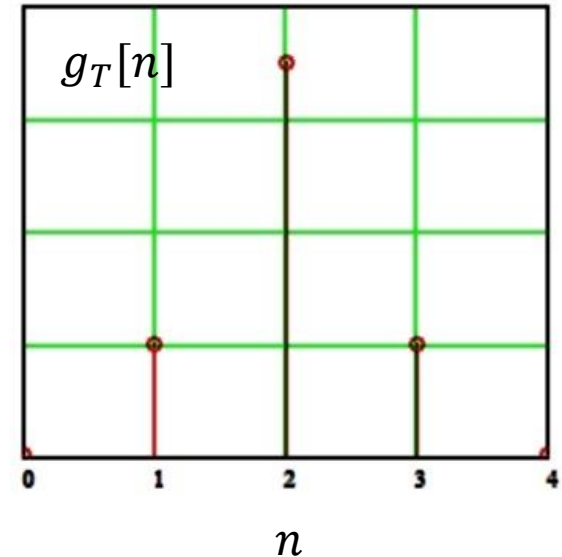


## Contenção espectral da sequencia de pulsos retangulares na saída das LUTs I e Q - *shaping filter* (filtro de formatação de pulso) e *Up-sampler* (superamostrador)

Portanto, note que, para um modulador com um *oversampling factor*  $K_s$ , como o modulador mostrado no slide 3, a resposta  $g_T[n]$  para  $K_s = 4$  mostrada no exemplo do slide anterior pode ser considerada a resposta ao impulso do bloco formado pelo *upsampler* seguido do *shaping filter* (bloco em vermelho abaixo):

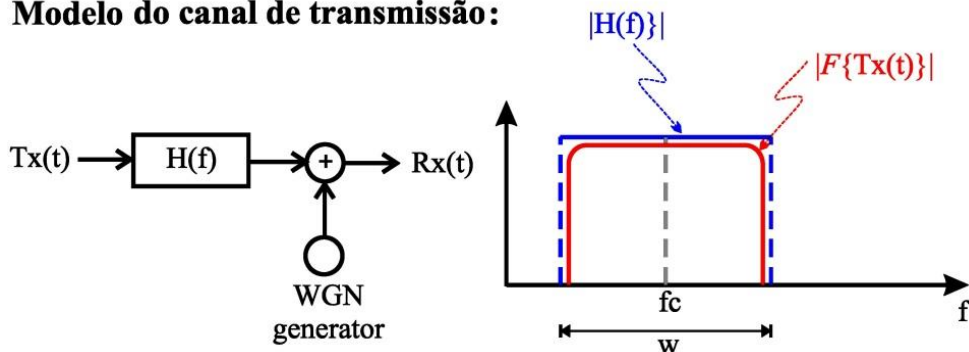


$$g_T[n] = K_0 e^{-\pi \left( \frac{n \frac{T}{K_s} - \frac{T}{2}}{\tau} \right)^2}$$

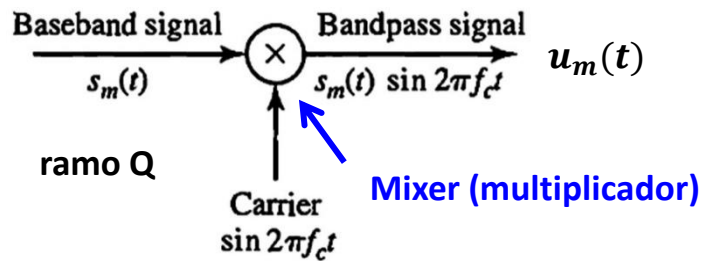
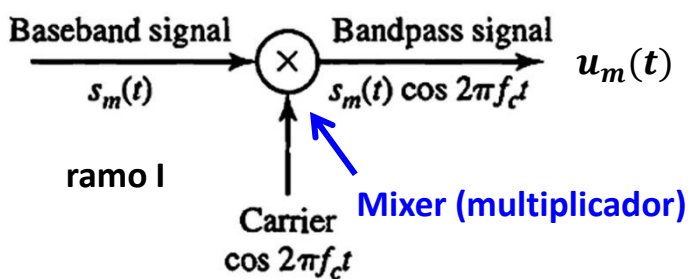


## Upconverter – a definição da frequência central $f_c$ do canal de largura $W$

Modelo do canal de transmissão:



Para colocar o centro do espectro do sinal transmitido na frequência central  $f_c$  do canal, o *upconverter* no slide 3 multiplica o trem de pulsos gaussianos na saída de cada *shaping filter* respectivamente por um seno e por um cosseno, ambos de frequência  $f_c$ , respectivamente no ramo I e no ramo Q do modulador, efetuando o processo de **heterodinação**:



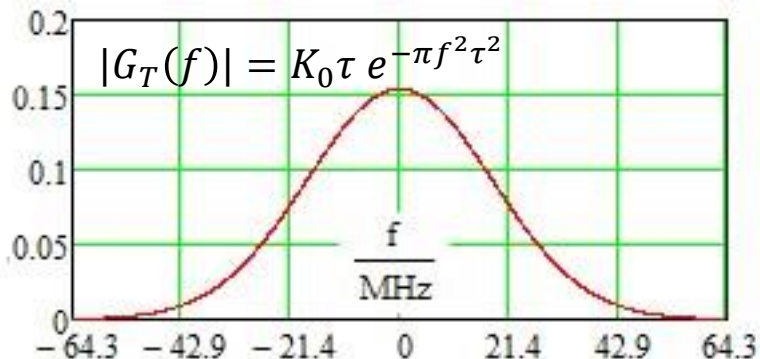
A **heterodinação** entre o sinal  $s_m(t)$  e  $\cos 2\pi f_c t$  no ramo I do modulador e a **heterodinação** entre o sinal  $s_m(t)$  e  $\sin 2\pi f_c t$  no ramo Q do modulador resultará na translação do espectro *baseband*  $G_T(f)$  dos pulsos  $s_m(t)$  para um espectro *passband*  $U_m(f)$  na forma (ver Apêndice B):

$$U_m(f) = \frac{A}{2} [G_T(f - f_c) + G_T(f + f_c)]$$

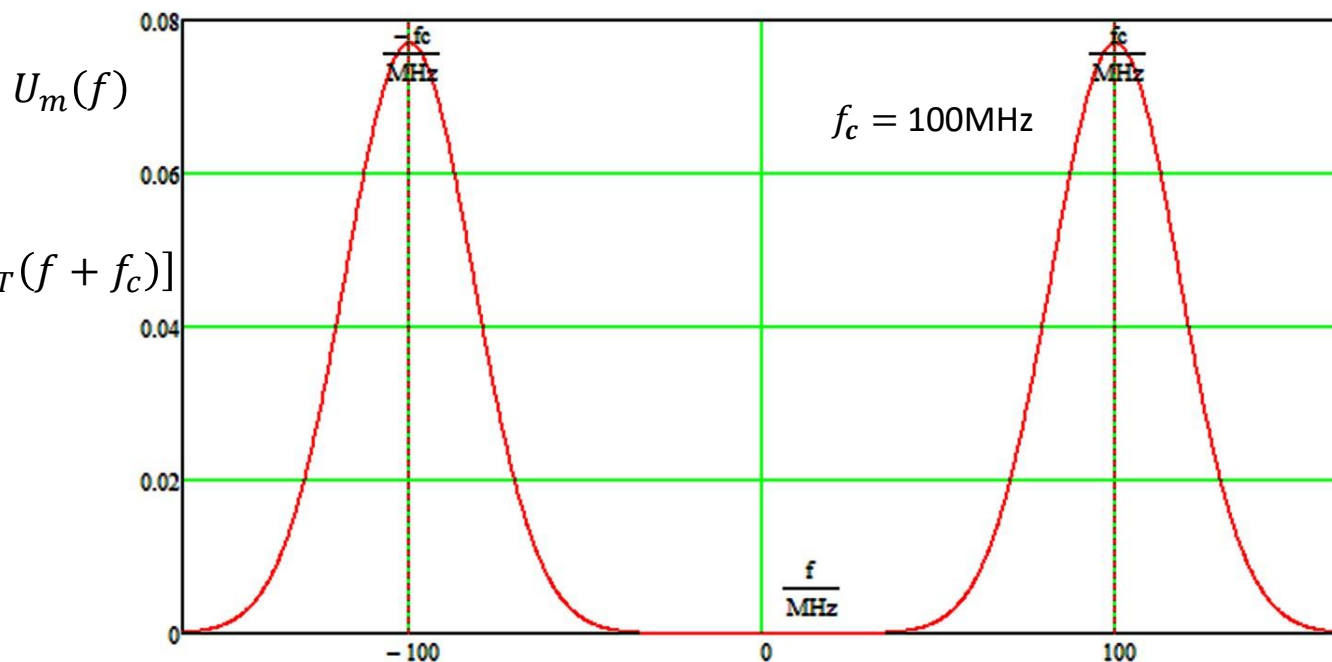


## Upconverter – a definição da frequência central $f_c$ do canal de largura $W$

Por exemplo, consideremos o trem de pulsos gerados por um *shaping filter* Gaussiano com resposta  $g_T(t) = K_0 e^{-\pi \left(\frac{t-T}{\tau}\right)^2}$ ,  $K_0 = 7 \times 10^6$  e  $\tau = 0.022\mu\text{s}$ , que faz a contenção espectral em um modulador digital cujo SymbolRate=18MHz e  $T = 1/\text{SymbolRate} = 1/18\text{MHz} = 0.056\mu\text{s}$ . O gráfico da magnitude do espectro  $|G_T(f)| = K_0 \tau e^{-\pi f^2 \tau^2}$  do trem de pulsos antes do *upconverter* é conforme abaixo:



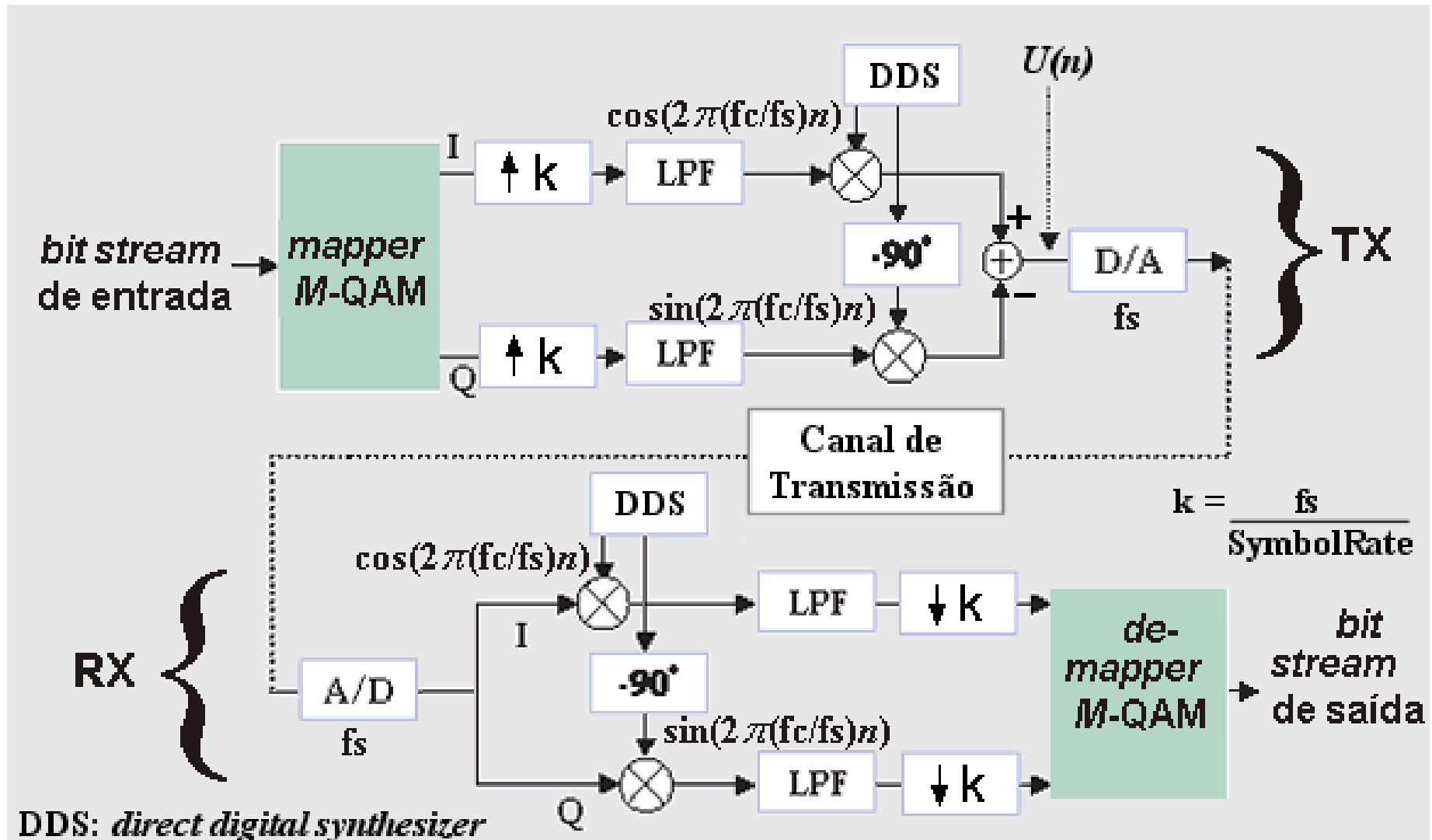
O modulador efetua a **heterodinação** entre o sinal  $s_m(t)$  e  $\cos 2\pi f_c t$  no ramo **I** e efetua a **heterodinação** entre o sinal  $s_m(t)$  e  $\sin 2\pi f_c t$  no ramo **Q**, sendo  $f_c = 100\text{MHz}$  a frequência central do canal. O gráfico da magnitude do espectro do sinal  $u_m(t)$  na saída do *upconverter* é conforme abaixo.



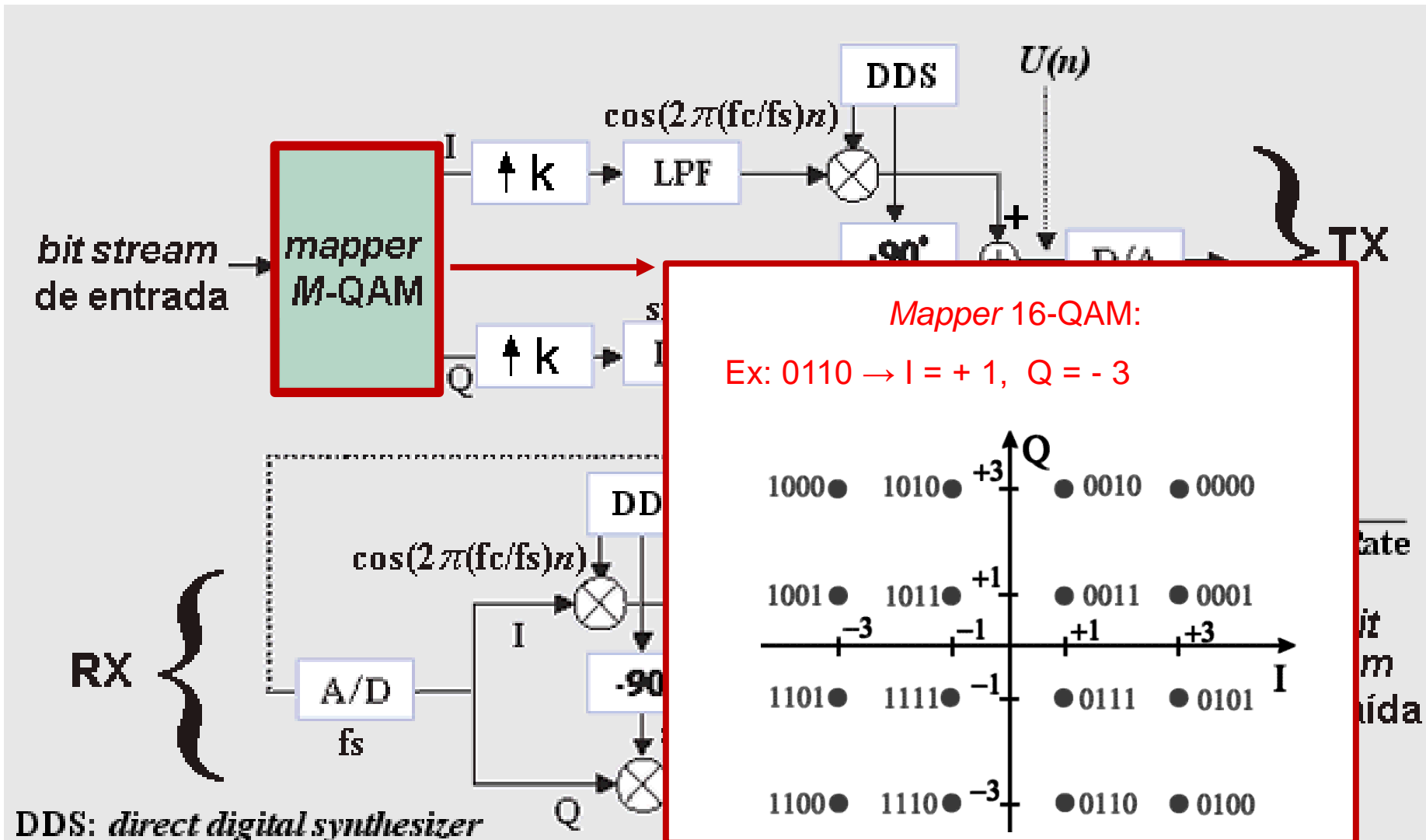
$$U_m(f) = \frac{A}{2} [G_T(f - f_c) + G_T(f + f_c)]$$



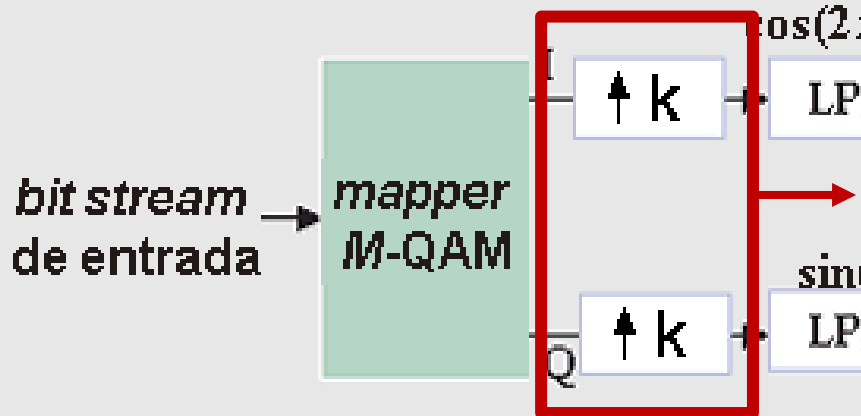
# Sumário das operações/processos em um modulador digital



# Sumário das operações/processos em um modulador digital

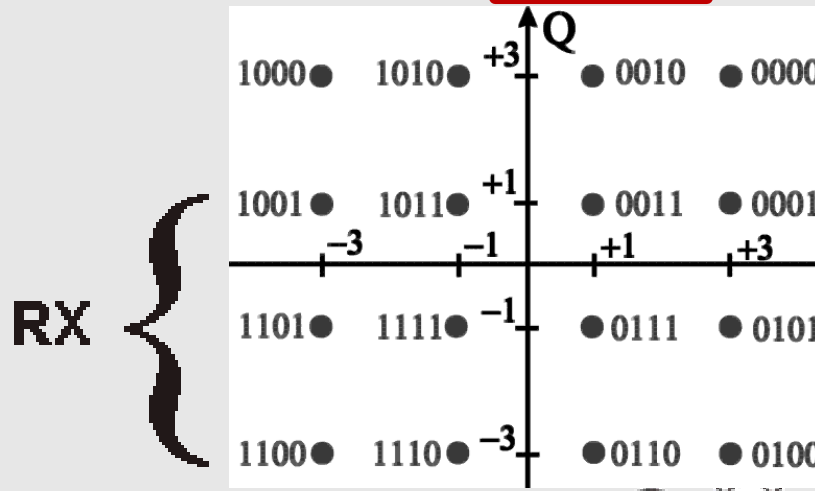


# Sumário das operações/processos em um modulador digital



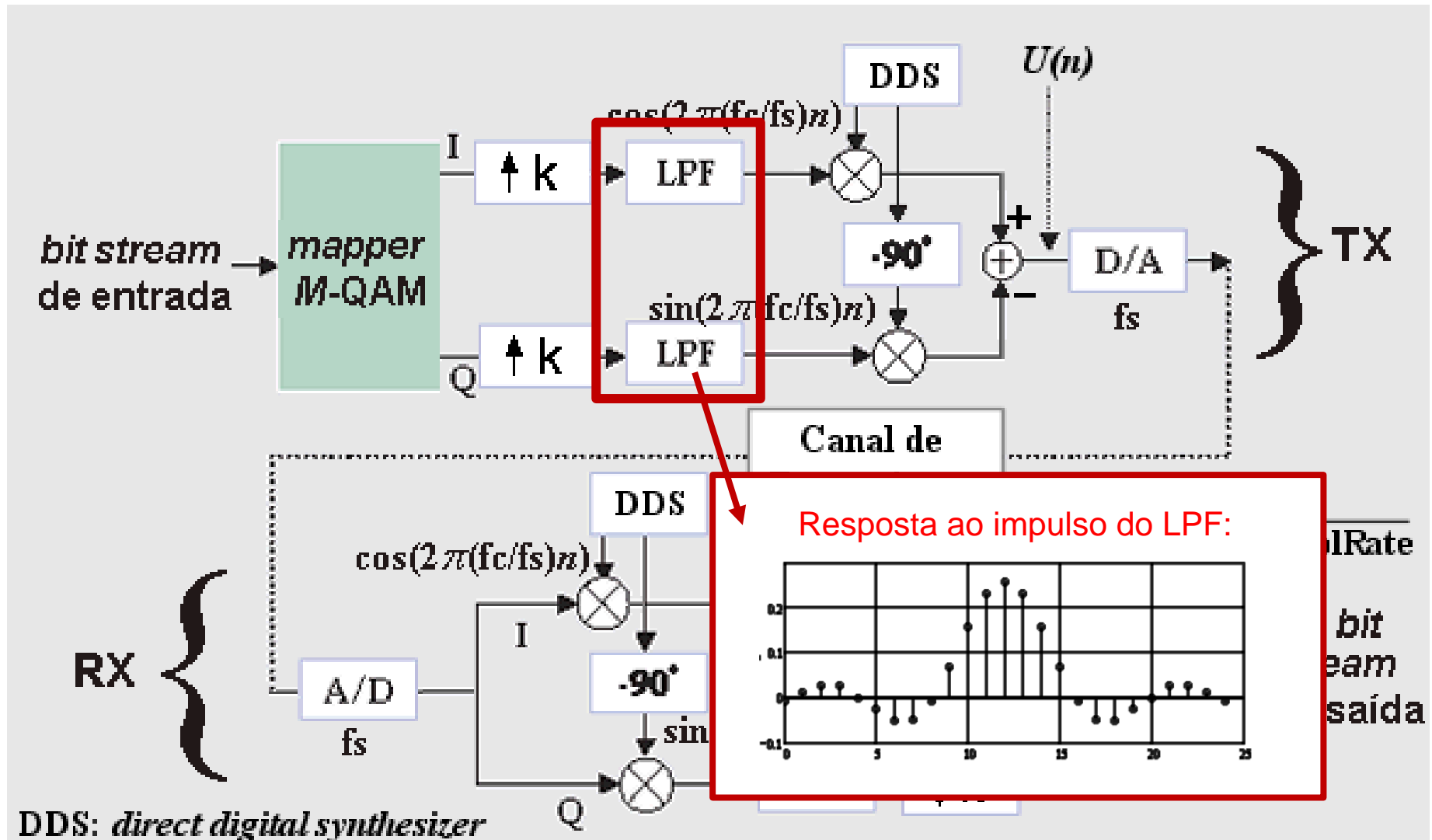
*Upsampler*: um *upsampler* de ordem  $k$  insere  $k - 1$  valores nulos entre duas amostras consecutivas dentro do intervalo de um símbolo.

Ex:  $k = 4$



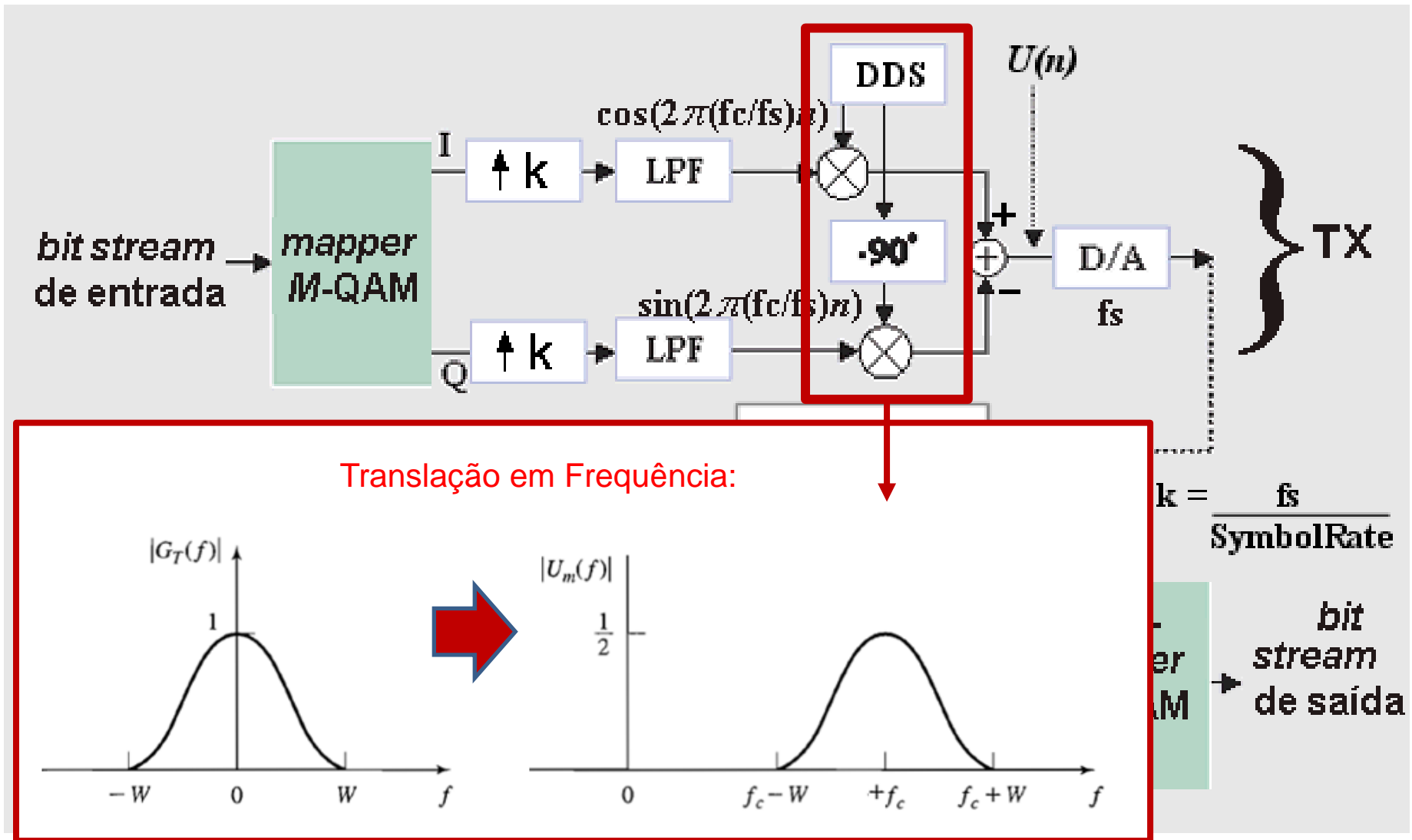
DDS: *direct digital synthesizer*

# Sumário das operações/processos em um modulador digital

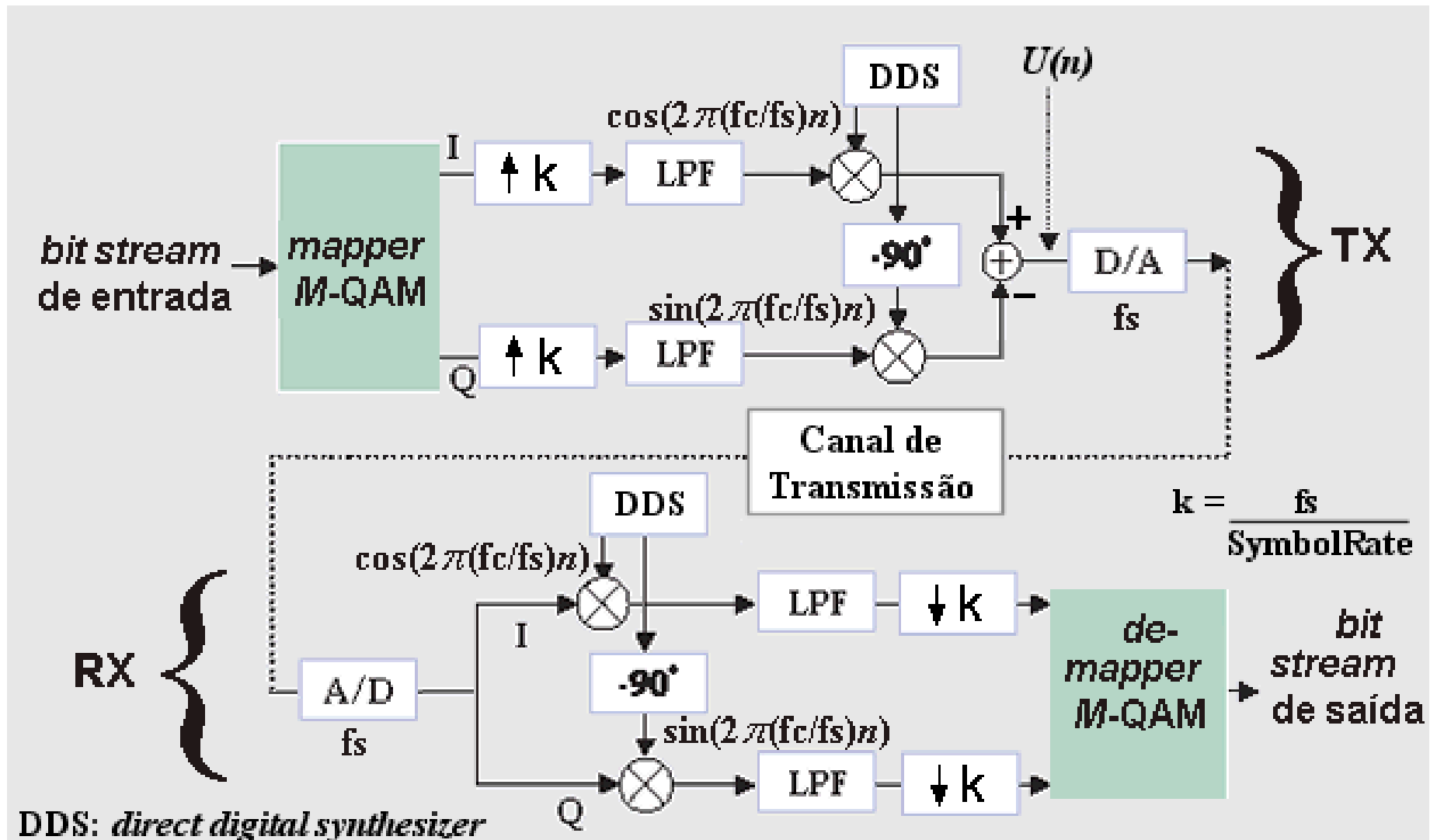




# Sumário das operações/processos em um modulador digital



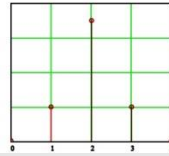
## Sumário das operações/processos em um modulador digital



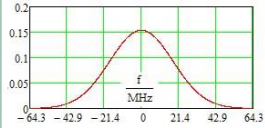
Sumário dos processos e sinais nos domínios tempo e frequência na operação conjunta do modulador (slide 3) e demodulador

LUT – Look Up Table (TX)

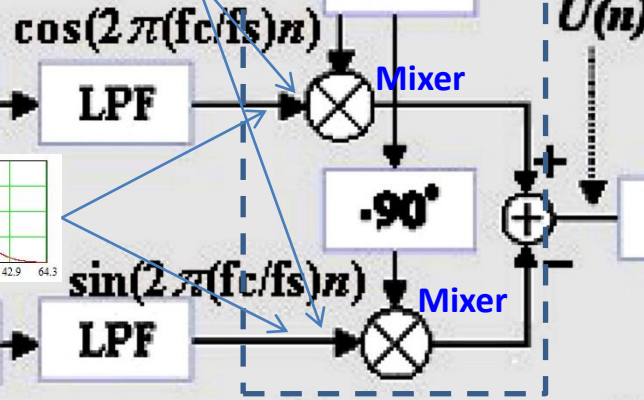
I: [b <sub>3</sub> b <sub>1</sub> ]		Q: [b <sub>2</sub> b <sub>0</sub> ]	
00	+3	00	+3
01	+1	01	+1
11	-1	11	-1
10	-3	10	-3



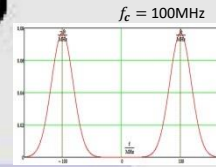
bit stream de entrada



Upconverter



DDS: *direct digital synthesizer*



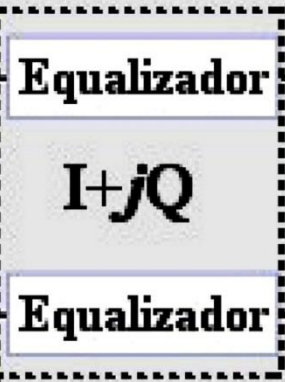
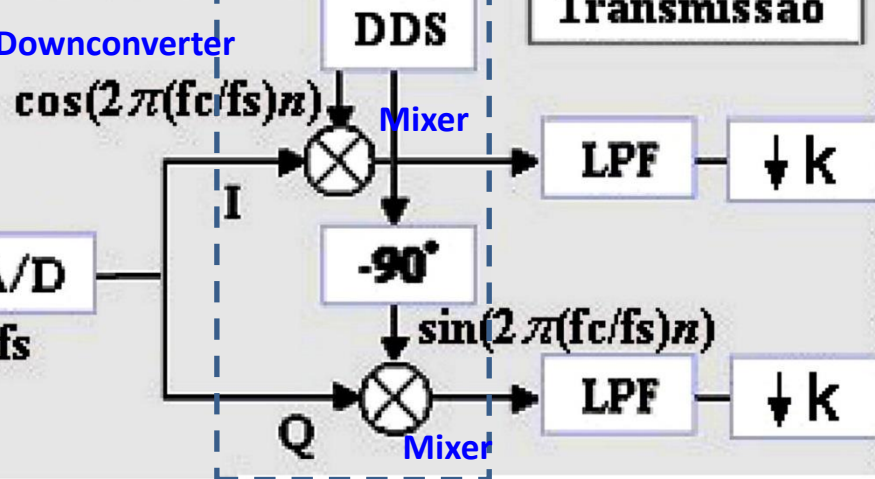
$$k = \frac{f_s}{\text{SymbolRate}}$$

TX LUT - Look Up Table (RX)

I: [b <sub>3</sub> b <sub>1</sub> ]		Q: [b <sub>2</sub> b <sub>0</sub> ]	
NN{+3}	00	NN{+3}	00
NN{+1}	01	NN{+1}	01
NN{-1}	11	NN{-1}	11
NN{-3}	10	NN{-3}	10

Canal de Transmissão

Downconverter

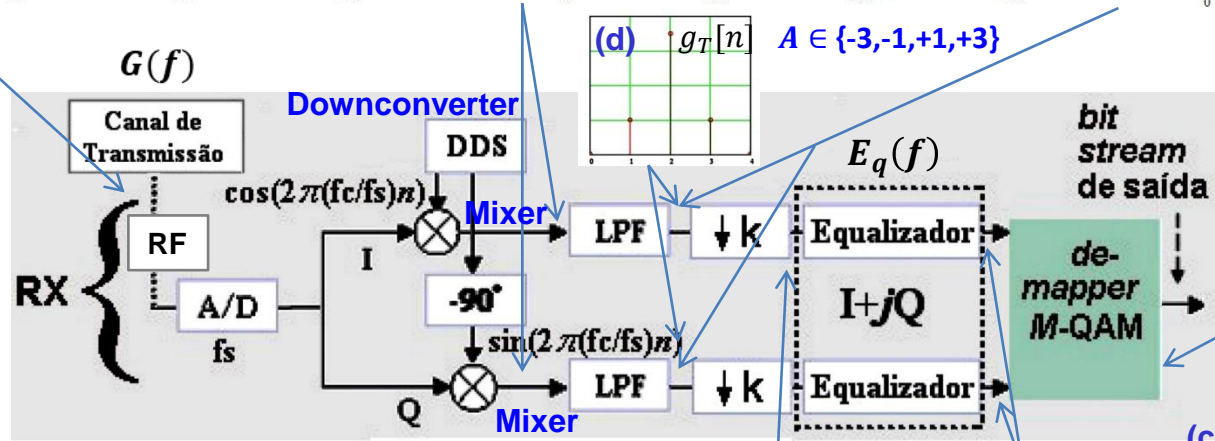
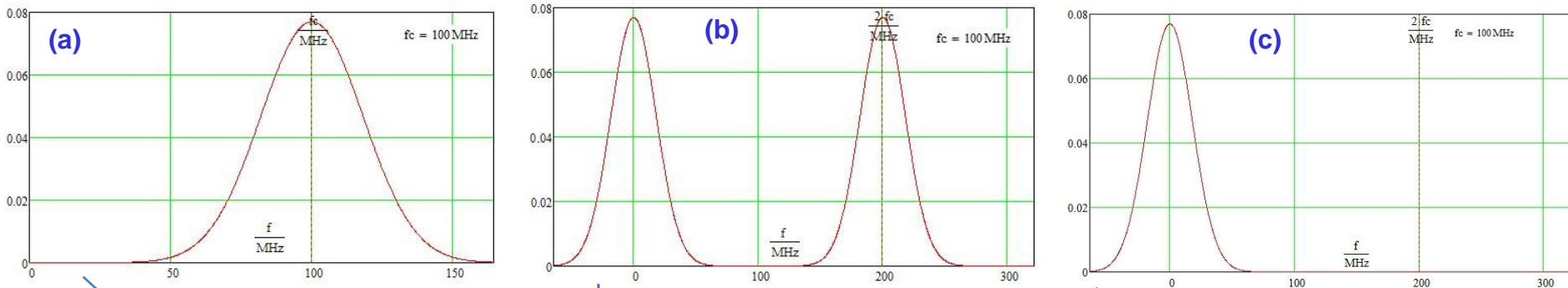


bit stream de saída



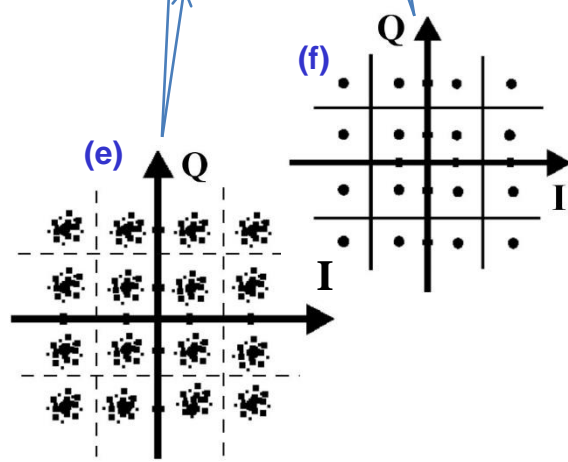
NN{.} é o operador *Nearest Neighbour* (vizinho mais próximo), o qual retorna "Verdadeiro" quando o valor de entrada na coluna esquerda da LUT RX é o vizinho mais próximo (menor distância Euclidiana) de seu argumento {.}, e retorna "Falso" em caso contrário.

# Processos e sinais nos domínios tempo e frequência na operação do demodulador



(g)

I: $[b_3b_1]$		Q: $[b_2b_0]$	
$NN\{+3\}$	00	$NN\{+3\}$	00
$NN\{+1\}$	01	$NN\{+1\}$	01
$NN\{-1\}$	11	$NN\{-1\}$	11
$NN\{-3\}$	10	$NN\{-3\}$	10



(a) O sinal centrado em 100 MHz é recebido do canal de transmissão e o AGC (*Automatic Gain Control*) do *front-end* de RF ajusta a amplitude do sinal de RF de modo que a magnitude dos símbolos IQ ( $s = I + jQ$ ) na saída do Equalizador se enquadrem no *frame* de decisão do *de-mapper*.

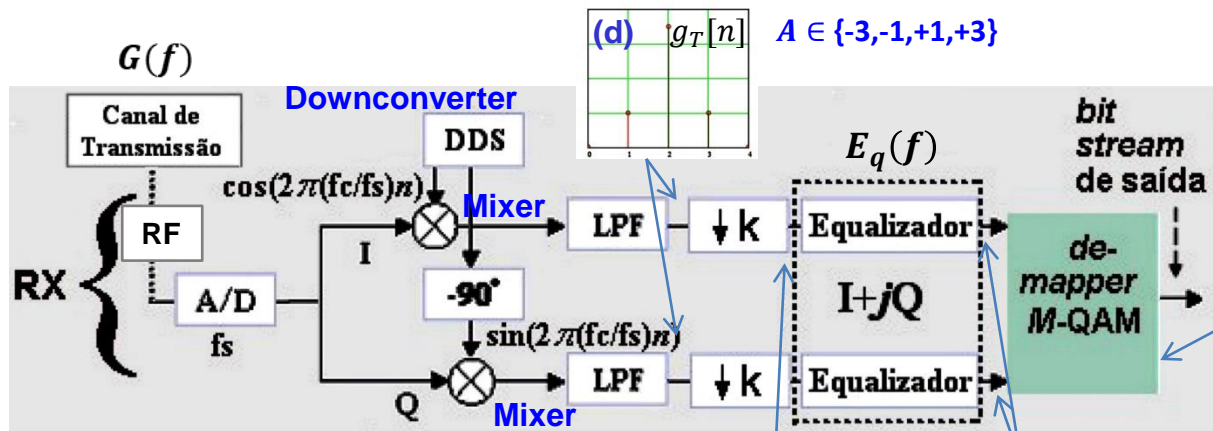
(b) O downconverter efetua o processo de heterodinação trazendo o espectro centrado em 100MHz para bandabase (centrado em  $f = 0$  Hz) e gerando um espectro adicional, que é o produto da heterodinação centrado em 200MHz.

(c) O filtro passa baixa LPF (*Low Pass Filter*) elimina o produto de heterodinação em 200MHz restando apenas o espectro do sinal em bandabase .

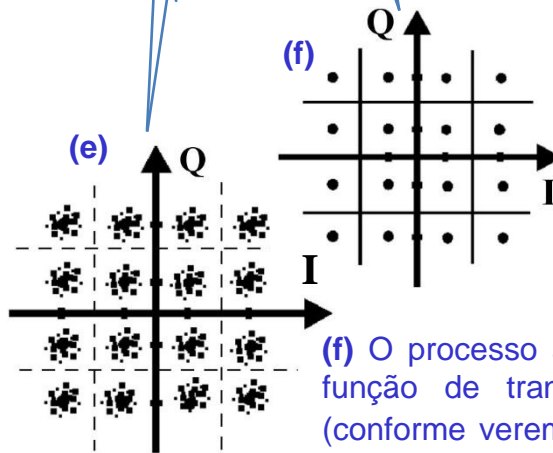
(d) O espectro bandabase referido em (c) corresponde no domínio tempo ao pulso  $g_T[n]$  ( $p/ K_s = 4$ ) cujas amplitudes  $A \in \{-3, -1, +1, +3\}$  dependem das palavras binárias na entrada das LUTs no modulador (ver slide 3) que foram originalmente transmitidas.



# Processos e sinais nos domínios tempo e frequência na operação do demodulador



(e) Os *downsamplers*  $\downarrow k$  do ramo I e Q selecionam a maior amostra dentre as  $K_s = 4$  e entregam para o equalizador uma sequência de símbolos IQ com ISI (*Inter Symbol Interference* – interferência intersimbólica). A ISI é observada em (e) pela dispersão dos símbolos IQ em torno dos símbolos de referência da constelação 16-QAM. A ISI observada nos símbolos IQ em (e) é decorrente da superposição de símbolos IQ no domínio tempo causada pelo *multipath* no canal de transmissão, e tem como causa no domínio frequência  $f$  a ocorrência de zeros na função de transferência  $G(f)$  do canal. Os zeros são estabelecidos pela interferência destrutiva originada da superposição de ondas no cenário de *multipath* no canal, causando *notches* em  $G(f)$ , conforme slides 29 a 33 do Cap I das notas de aula. A superposição de ondas no canal é o fenômeno que implica simultaneamente na superposição de símbolos IQ na entrada do equalizador, gerando ISI conforme mostra (e).



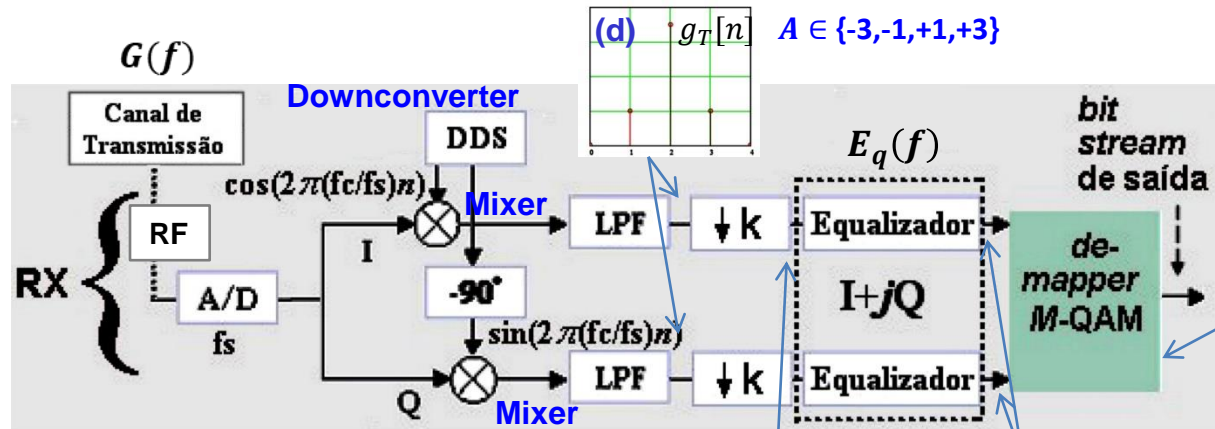
(f) O processo adaptativo do equalizador ajusta a função de transferência  $E_q(f)$  do equalizador (conforme veremos em Sistemas de Comunicação Digital II) de modo a que  $E_q(f)$  implemente a função de transferência  $G^{-1}(f)$  do canal (os polos de  $E_q(f)$  cancelam os zeros de  $G(f)$ ). Nesta situação o RX “vê” o canal como um canal AWGN, conforme discutido no slide 28 do Cap I das notas de aula. Se a SNR no canal for alta (SNR>60dB), que é o caso mostrado em (f), o conjunto de símbolos IQ originalmente transmitidos é recuperado com mínima dispersão em torno dos símbolos IQ de referência da constelação 16-QAM.

(g)

I: $[b_3b_1]$		Q: $[b_2b_0]$	
$NN\{+3\}$	00	$NN\{+3\}$	00
$NN\{+1\}$	01	$NN\{+1\}$	01
$NN\{-1\}$	11	$NN\{-1\}$	11
$NN\{-3\}$	10	$NN\{-3\}$	10

$NN\{\cdot\}$  é o operador *Nearest Neighbour* (vizinho mais próximo), o qual retorna “Verdadeiro” quando o valor de entrada na coluna esquerda da LUT RX é o vizinho mais próximo (menor distância Euclidiana) de seu argumento  $\{\cdot\}$ , e retorna “Falso” em caso contrário.

# Processos e sinais nos domínios tempo e frequência na operação do demodulador



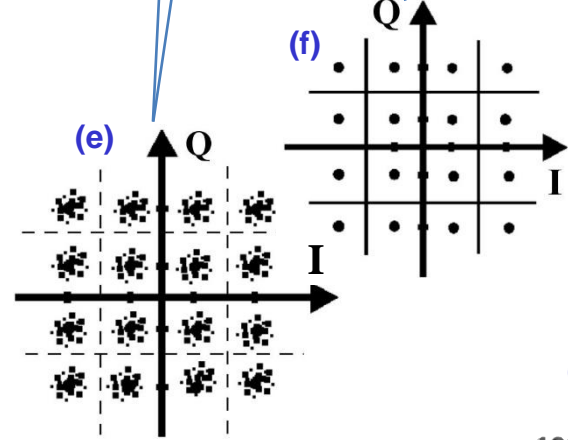
(d)  $g_T[n] \quad A \in \{-3,-1,+1,+3\}$

(g)

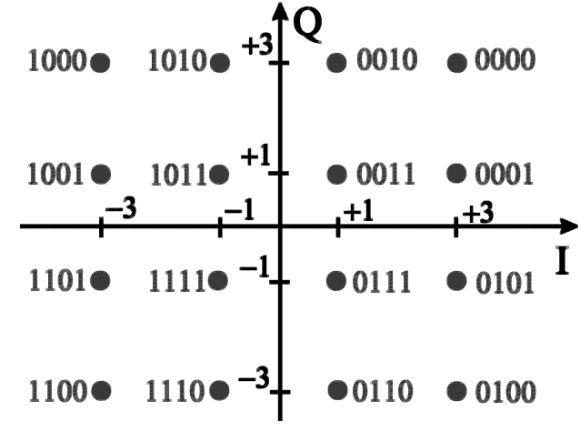
I: $[b_3 b_1]$		Q: $[b_2 b_0]$	
$NN\{+3\}$	00	$NN\{+3\}$	00
$NN\{+1\}$	01	$NN\{+1\}$	01
$NN\{-1\}$	11	$NN\{-1\}$	11
$NN\{-3\}$	10	$NN\{-3\}$	10

$NN\{\cdot\}$  é o operador *Nearest Neighbour* (vizinho mais próximo), o qual retorna "Verdadeiro" quando o valor de entrada na coluna esquerda da LUT RX é o vizinho mais próximo (menor distância Euclidiana) de seu argumento  $\{\cdot\}$ , e retorna "Falso" em caso contrário.

(g) O equalizador entrega p/ o *de-mapper* uma sequência de símbolos IQ com ISI mínima. A ISI mínima é observada em (f) pela quase total ausência de dispersão dos símbolos equalizados em torno dos símbolos IQ de referência da constelação 16-QAM. Os símbolos IQ de referência  $I_{ref} + jQ_{ref}$  da constelação 16-QAM e respectivas palavras binárias  $[b_3 b_2 b_1 b_0]$  associadas são mostrados em (h). Para cada símbolo  $s = I + jQ$  entregue pelo equalizador ao *de-mapper* este calcula a distância euclidiana entre  $s$  e todos os 16 símbolos IQ de referência  $I_{ref} + jQ_{ref}$  da constelação 16-QAM.



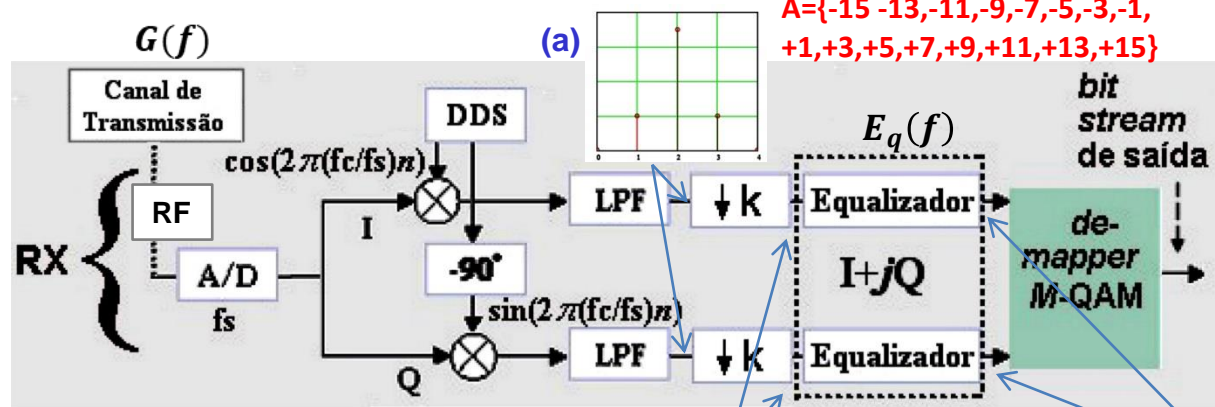
(h)  $[b_3 b_2 b_1 b_0] \leftrightarrow I_{ref} + jQ_{ref}$



Para o símbolo  $I_{ref} + jQ_{ref}$  que apresentar a menor distância euclidiana ao símbolo  $s = I + jQ$  dentre as 16 distâncias que foram calculadas, o *de-mapper* decide que este símbolo de referência é o símbolo IQ originalmente transmitido e a respectiva palavra binária  $[b_3 b_2 b_1 b_0]$  associada é considerada a palavra binária transmitida. Isto equivale a verificar a qual região de decisão (região de decisão = cada um dos 16 quadrados em (e) e (f)) o símbolo  $s$  pertence e considerar como símbolo IQ transmitido (e  $[b_3 b_2 b_1 b_0]$  associada) o símbolo  $I_{ref} + jQ_{ref}$  no centro da respectiva região de decisão. Isto também equivale ao operador *Nearest Neighbour* (vizinho mais próximo) selecionar (através do valor de retorno V ou F) a correspondente linha das LUTs I e Q em (g) e retornar as respectivas palavras binárias  $[b_3 b_1]$  e  $[b_2 b_0]$  que formam a palavra binária  $[b_3 b_2 b_1 b_0]$ .

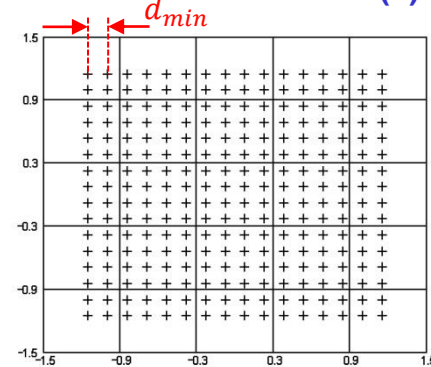
A robustez da modulação é expressa pela capacidade do *de-mapper* decidir corretamente qual palavra binária foi transmitida em presença de um determinado nível de ruído e de *multipath* no canal. A robustez da modulação é reduzida com o aumento do número  $M$  de símbolos de referência da modulação  $M$ -QAM (Nbits/símbolo =  $\log_2 M$ ):

Por exemplo, a taxa de transmissão do modulador 16-QAM com SR=10 Msymb/s do slide 3 é 10 Msymb/s x 4 bits/symb = 40 Mbps. Para aumentar a taxa de transmissão podemos utilizar uma modulação 256-QAM (ver (d)) ao invés da modulação 16-QAM, situação em que a taxa de transmissão aumenta para 10 Msymb/s x 8 bits/symb = 80 Mbps. Mas daí a consequência é que as regiões de decisão em (c) (em cor magenta) da constelação 256-QAM resultam 4 vezes menores do que as regiões de decisão de 16-QAM. Portanto a modulação 256-QAM é 4 vezes menos robusta que 16-QAM porque uma dispersão de símbolos 4 vezes menor em torno dos símbolos IQ de referência da constelação 256-QAM já é suficiente para que o *de-mapper* tome uma decisão errada e gere uma palavra binária no *bit stream* de saída que não corresponde à palavra binária originalmente transmitida. Uma interpretação alternativa é que a distância euclidiana entre símbolos adjacentes, denominada **distância mínima  $d_{min}$** , é quatro vezes maior para 16-QAM quando comparada com 256-QAM.

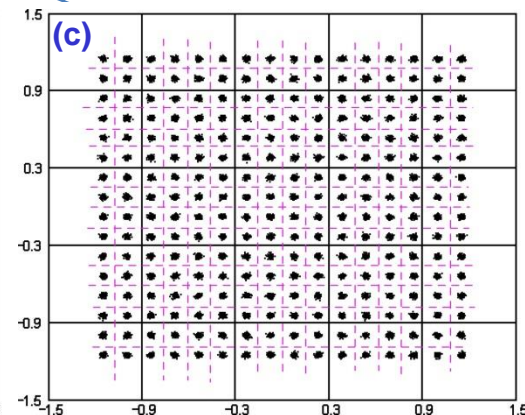
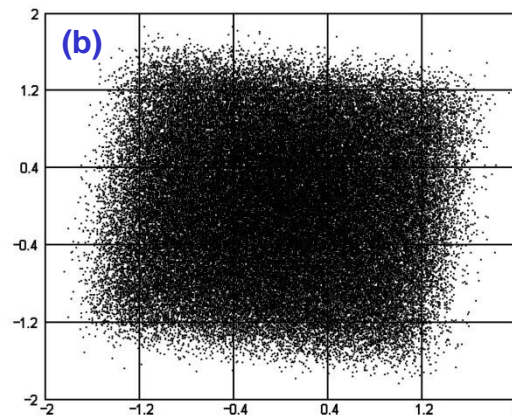


$A = \{-15, -13, -11, -9, -7, -5, -3, -1, +1, +3, +5, +7, +9, +11, +13, +15\}$

Constelação 256-QAM de referência (normalizada p/ potência unitária): (d)

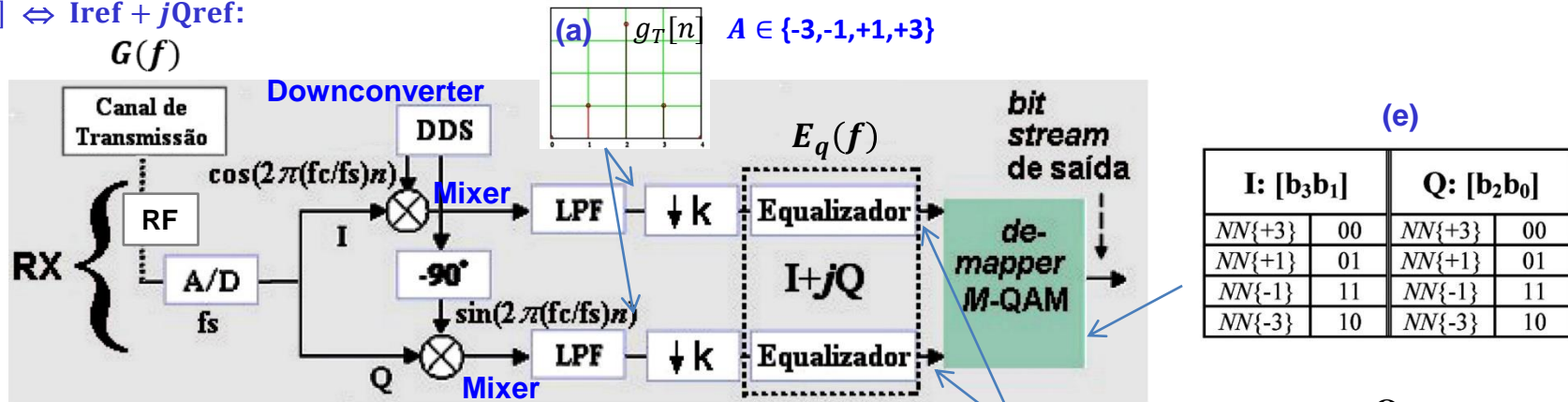


(b&c) O processo adaptativo do equalizador ajusta a função de transferência  $E_q(f)$  do equalizador (conforme veremos em Sistemas de Comunicação Digital II) de modo a que  $E_q(f)$  implemente a função de transferência  $G^{-1}(f)$  do canal (os polos de  $E_q(f)$  cancelam os zeros de  $G(f)$ ). Nesta situação o RX “vê” o canal como um canal AWGN, conforme discutido no slide 28 do Cap I das notas de aula. Se a SNR no canal for alta (SNR>60dB), que é o caso mostrado em (c), o conjunto de símbolos IQ originalmente transmitidos é recuperado com pouca dispersão residual em torno dos símbolos IQ de referência da constelação 256-QAM.

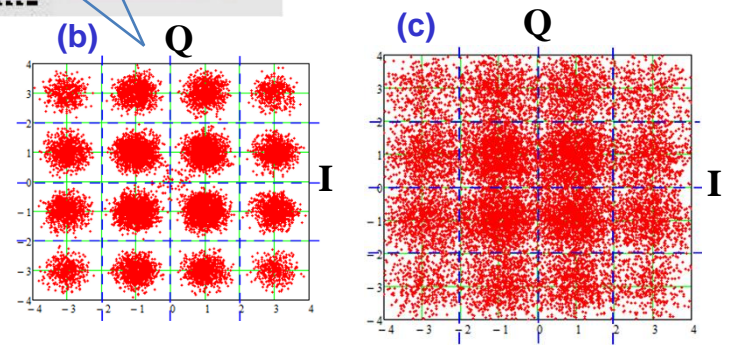




A dispersão residual em torno dos símbolos IQ de referência da constelação na entrada do de-mapper e o mapeamento  $[b_3 b_2 b_1 b_0] \Leftrightarrow I_{ref} + jQ_{ref}$ :

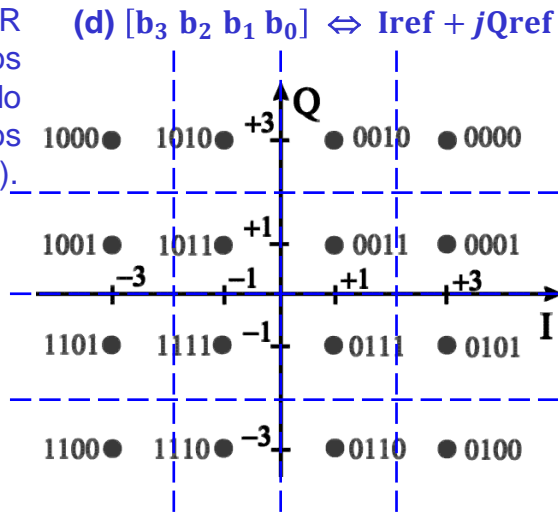


(b) Caso o processo adaptativo do equalizador falhe em ajustar a função de transferência  $E_q(f)$  do equalizador de modo que a mesma não consiga implementar a função de transferência  $G^{-1}(f)$  do canal então ocorrerá ISI residual (cuja origem é o *multipath* no canal) e a dispersão de símbolos em torno dos símbolos IQ de referência  $I_{ref} + jQ_{ref}$  da constelação 16-QAM será significativa na entrada do *de-mapper*, conforme mostrado em (b). Uma dispersão residual de símbolos significativa também pode decorrer em consequência de uma baixa SNR no canal.



(c) Se a causa da dispersão dos símbolos IQ na entrada do *de-mapper* for excessiva (SNR muito baixa e/ou excessiva ISI residual) as palavras binárias  $[b_3 b_2 b_1 b_0]$  associadas aos respectivos símbolos IQ originalmente transmitidos serão recuperadas com erro na saída do *de-mapper* para aqueles símbolos da “nuvem” de símbolos dispersos em torno dos símbolos  $I_{ref} + jQ_{ref}$  que invadirem uma das regiões de decisão adjacentes, conforme mostrado em (c).

(d) Em consequência da dispersão excessiva referida em (c) o mapeamento  $[b_3 b_2 b_1 b_0] \Leftrightarrow I_{ref} + jQ_{ref}$  mostrado em (d) é feito de tal maneira que palavras binárias  $[b_3 b_2 b_1 b_0]$  associadas à regiões de decisão adjacentes mantenham entre si uma distância de Hamming unitária (distância de Hamming unitária = somente um bit de diferença entre as palavras – ver [https://en.wikipedia.org/wiki/Gray\\_code](https://en.wikipedia.org/wiki/Gray_code)). Este mapeamento faz com que, caso a “nuvem” de símbolos dispersos em torno dos símbolos  $I_{ref} + jQ_{ref}$  invada uma das regiões de decisão adjacentes, os consequentes erros de decisão do *de-mapper* seja apenas de 1 bit, o que facilita o trabalho do código corretor de erro no Decodificador de Canal.



(e)

I: $[b_3 b_1]$		Q: $[b_2 b_0]$	
$NN\{+3\}$	00	$NN\{+3\}$	00
$NN\{+1\}$	01	$NN\{+1\}$	01
$NN\{-1\}$	11	$NN\{-1\}$	11
$NN\{-3\}$	10	$NN\{-3\}$	10



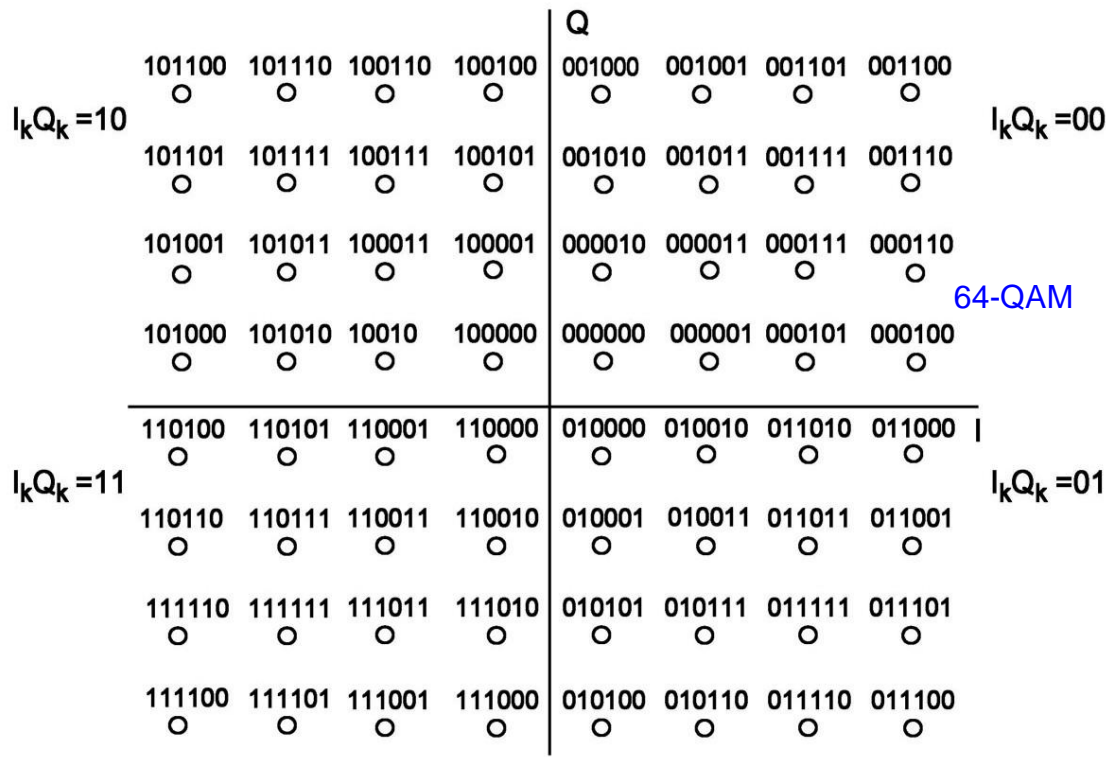
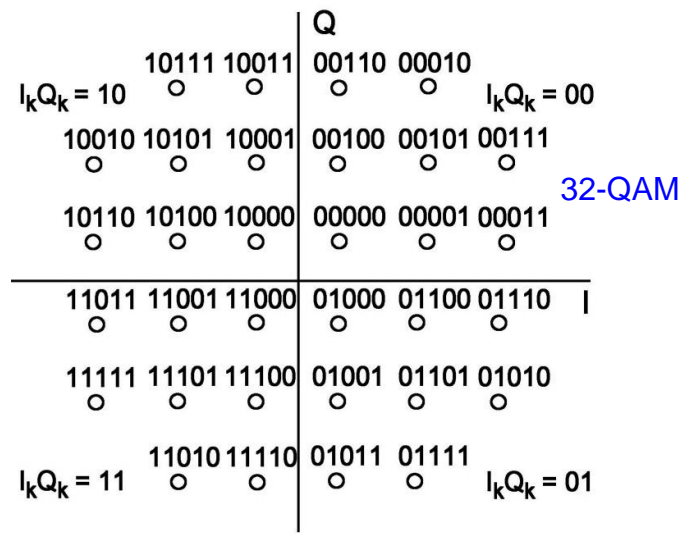
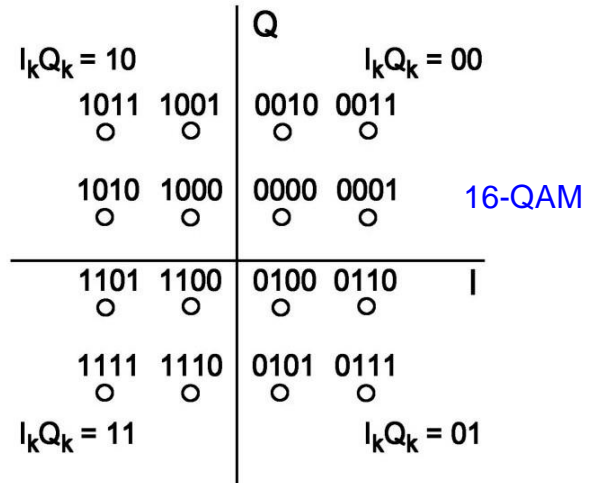
Tipos básicos de modulação em função da posição dos símbolos  $I_{ref} + jQ_{ref}$  no mapeamento  $[b_{N-1} \dots b_1 b_0] \Leftrightarrow I_{ref} + jQ_{ref}$ , sendo  $N = \log_2 M$  o número de bits transportados por cada símbolo IQ do conjunto de  $M$  símbolos  $I_{ref} + jQ_{ref}$  no mapa da constelação:

**M-QAM (Quadrature Amplitude Modulation):**

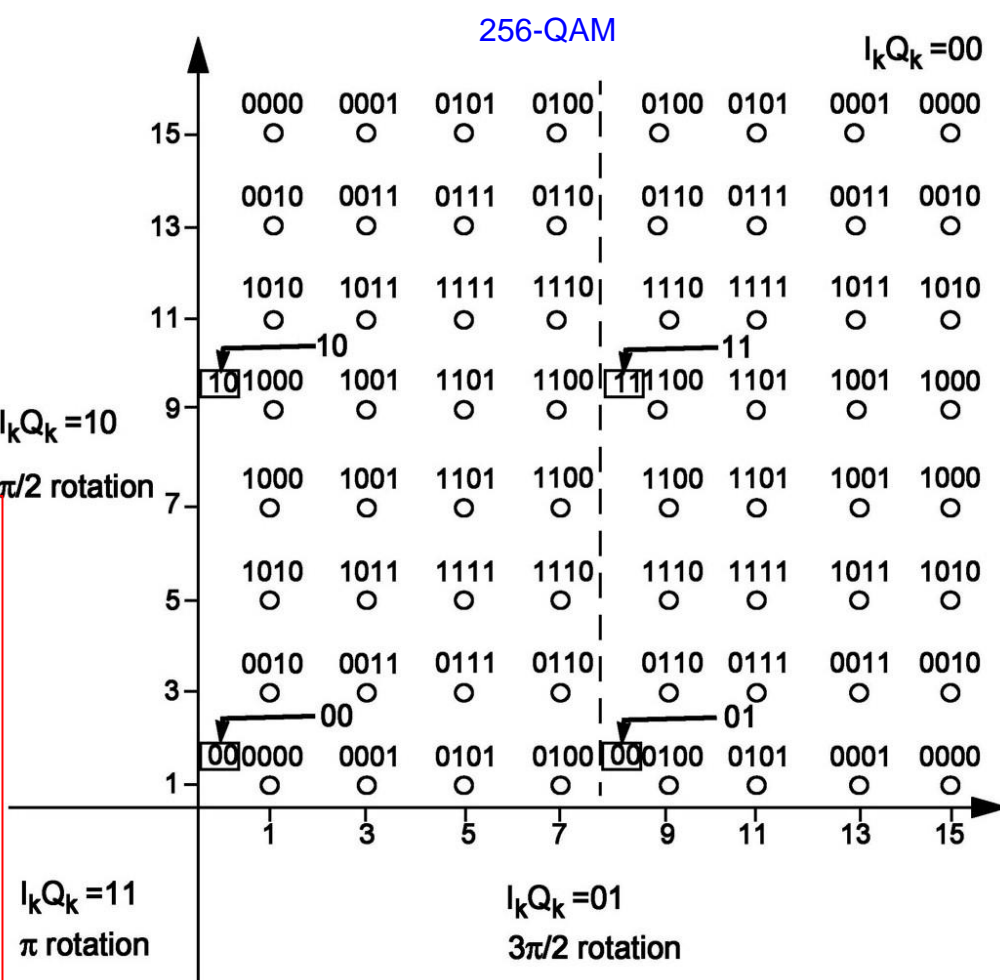
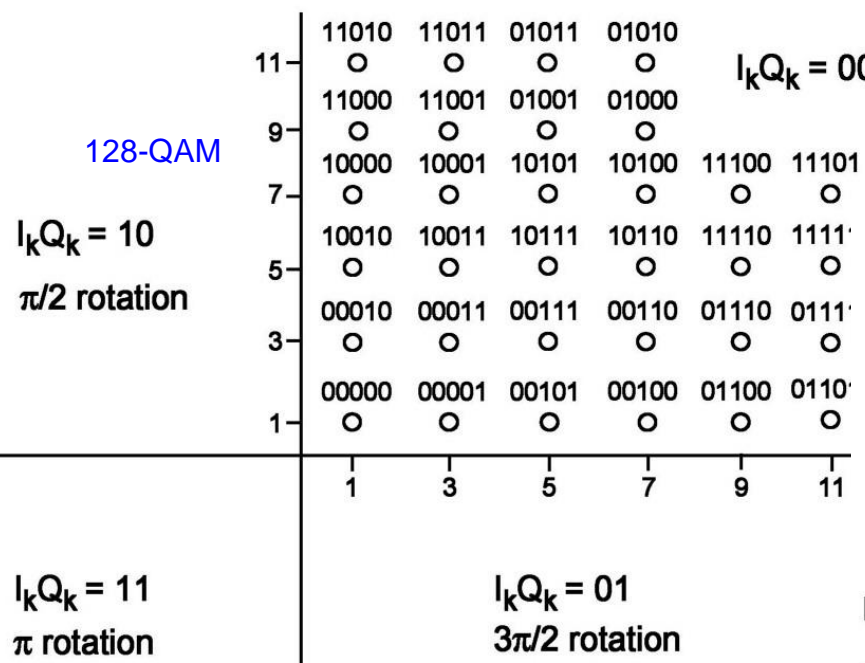
Nos mapas que seguem  $I_k Q_k$  são os 2 MSB (Most Significant Bit) em cada quadrante. Qualquer palavra binária associada a símbolos IQ no quadrante 1 da constelação é convertida para os quadrantes 2, 3 e 4 alterando os dois MSBs  $I_k Q_k$  conforme indicado em cada mapa e girando os  $N - 2$  LSB (Least Significant Bit) de acordo com a tabela abaixo.

**Conversion of Constellation Points**

Quadrant	Most Significant Bit	Least Significant Bit Rotation
1	00	
2	10	$\pi/2$
3	11	$\pi$
4	01	$3\pi/2$



Tipos básicos de modulação em função da posição dos símbolos  $I_{ref} + jQ_{ref}$  no mapeamento  $[b_{N-1} \dots b_1 b_0] \leftrightarrow I_{ref} + jQ_{ref}$ , sendo  $N = \log_2 M$  o número de bits transportados por cada símbolo IQ do conjunto de  $M$  símbolos  $I_{ref} + jQ_{ref}$  no mapa da constelação:

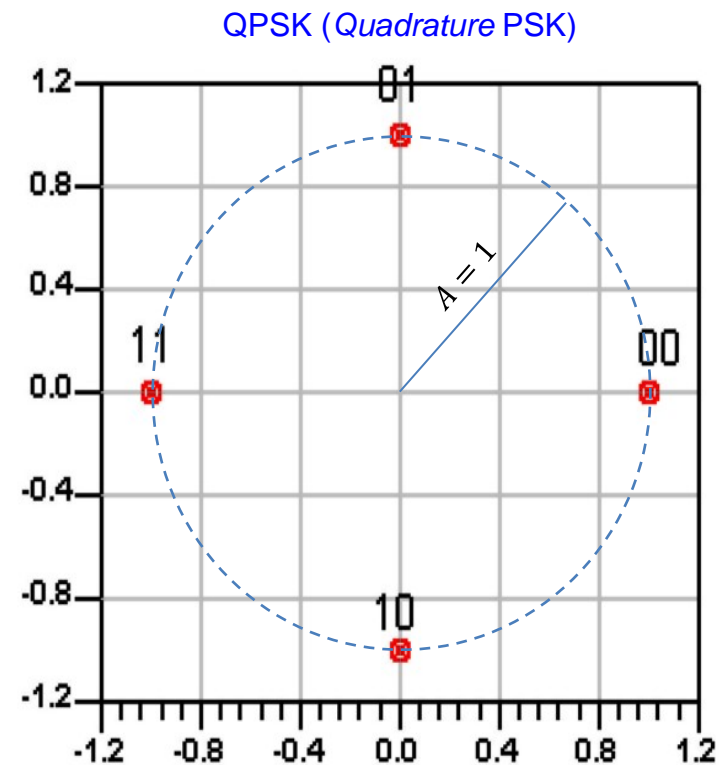
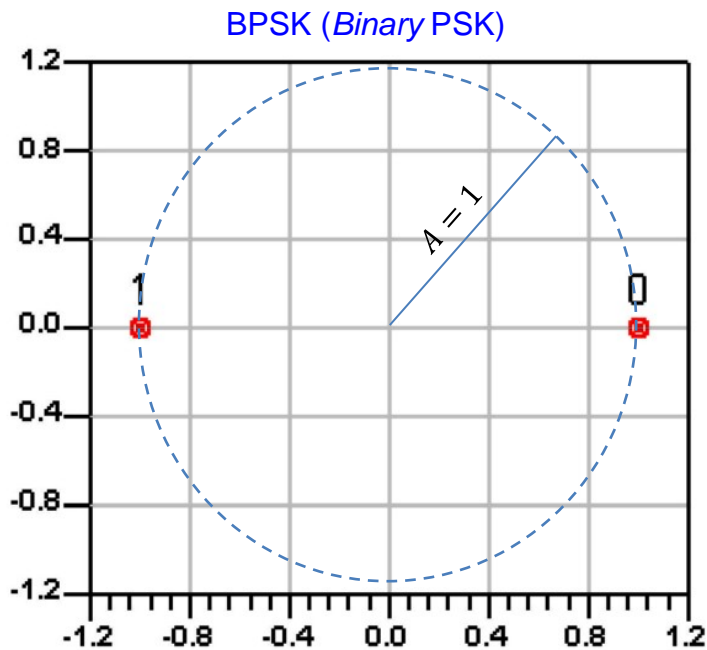


**Nota:** Dois simuladores 16-QAM, um c/ filtro Gaussiano e outro c/ filtro *Root Raised Cosine* (este 2º será estudado em Sistemas de Comunicação Digital II), implementados em *scripts* MathCad, encontram-se disponíveis no link abaixo:  
<http://www.fccdecastro.com.br/ZIP/Simulador16-QAM.zip>  
 Estes simuladores implementam as operações/processos descritas nos slides 9 a 20 p/ um modulador/demodulador 16-QAM. O processo de equalização (que veremos em Sistemas de Comunicação Digital II) e o processo de *demapping* não estão implementados nestes *scripts*. É instrutivo executar estes *scripts*, alterar os parâmetros e interpretar os resultados gráficos.

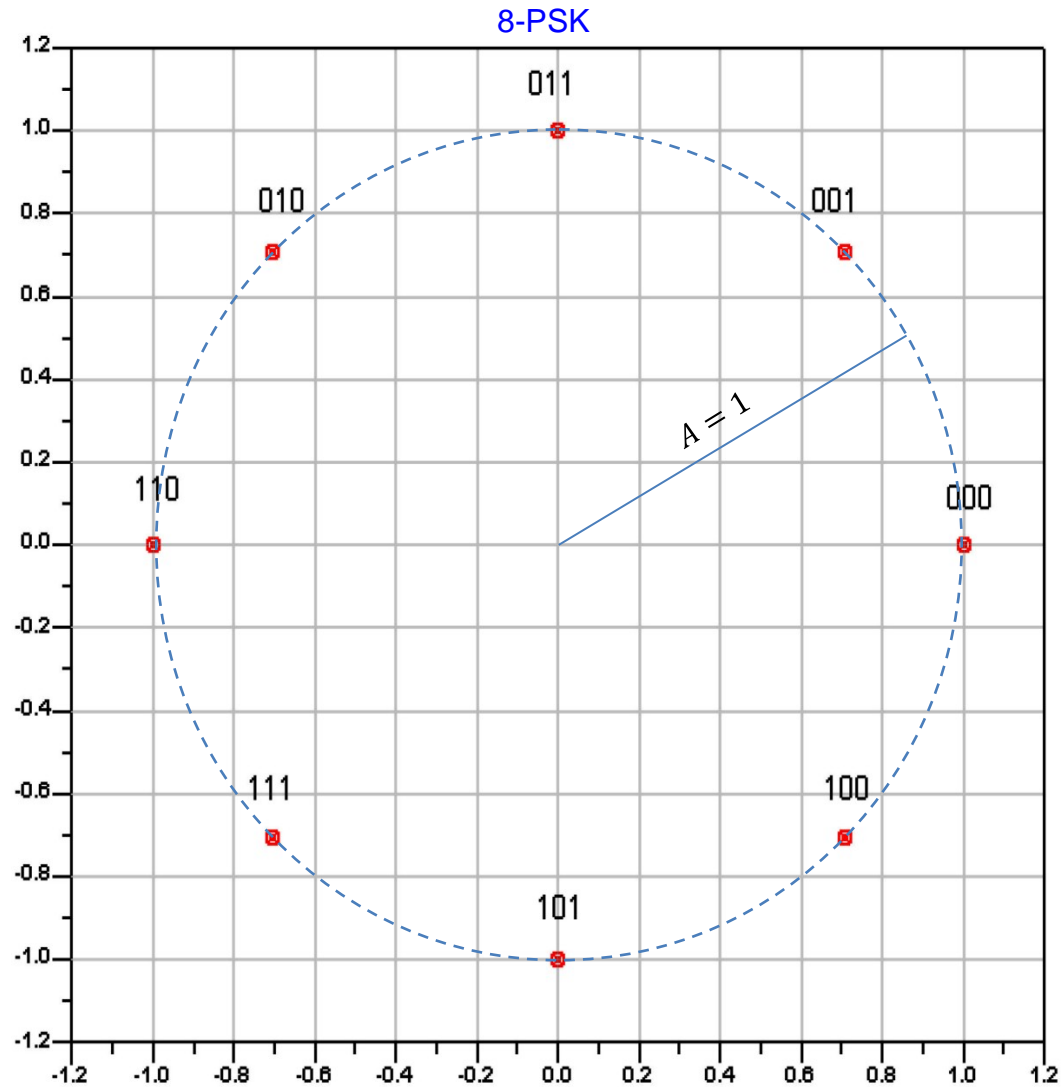
Tipos básicos de modulação em função da posição dos símbolos  $I_{\text{ref}} + jQ_{\text{ref}}$  no mapeamento  $[b_{N-1} \dots b_1 b_0] \Leftrightarrow I_{\text{ref}} + jQ_{\text{ref}}$ , sendo  $N = \log_2 M$  o número de bits transportados por cada símbolo IQ do conjunto de  $M$  símbolos  $I_{\text{ref}} + jQ_{\text{ref}}$  no mapa da constelação:

### M-PSK (Phase Shift Keying):

A constelação da modulação  $M$ -PSK tem seus  $M$  símbolos IQ de amplitude  $A$  uniformemente distribuídos ao longo de um círculo de raio  $A$ , conforme mostrado nos mapas que seguem.

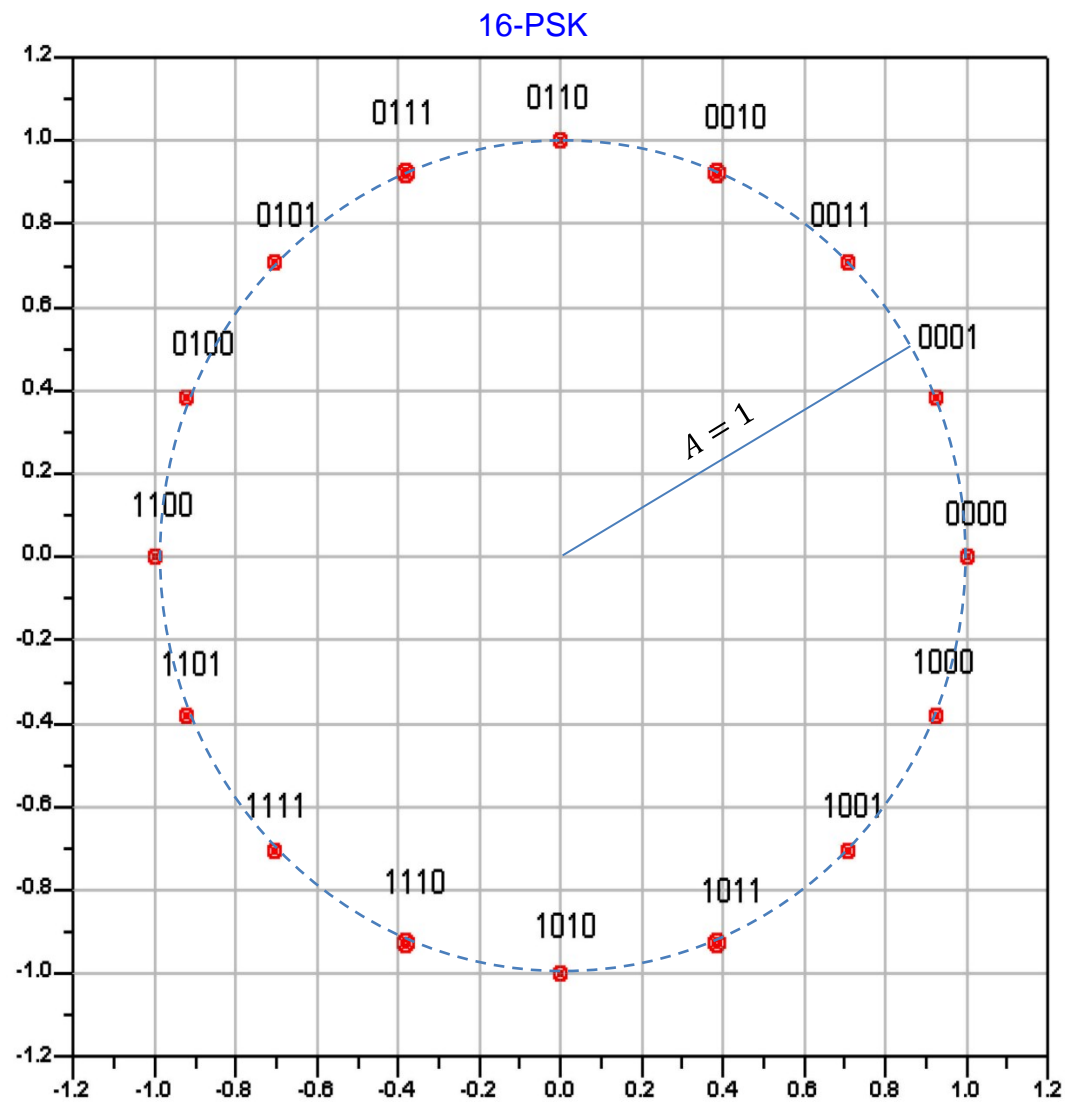


Tipos básicos de modulação em função da posição dos símbolos  $I_{ref} + jQ_{ref}$  no mapeamento  $[b_{N-1} \cdots b_1 b_0] \Leftrightarrow I_{ref} + jQ_{ref}$ , sendo  $N = \log_2 M$  o número de bits transportados por cada símbolo IQ do conjunto de  $M$  símbolos  $I_{ref} + jQ_{ref}$  no mapa da constelação:



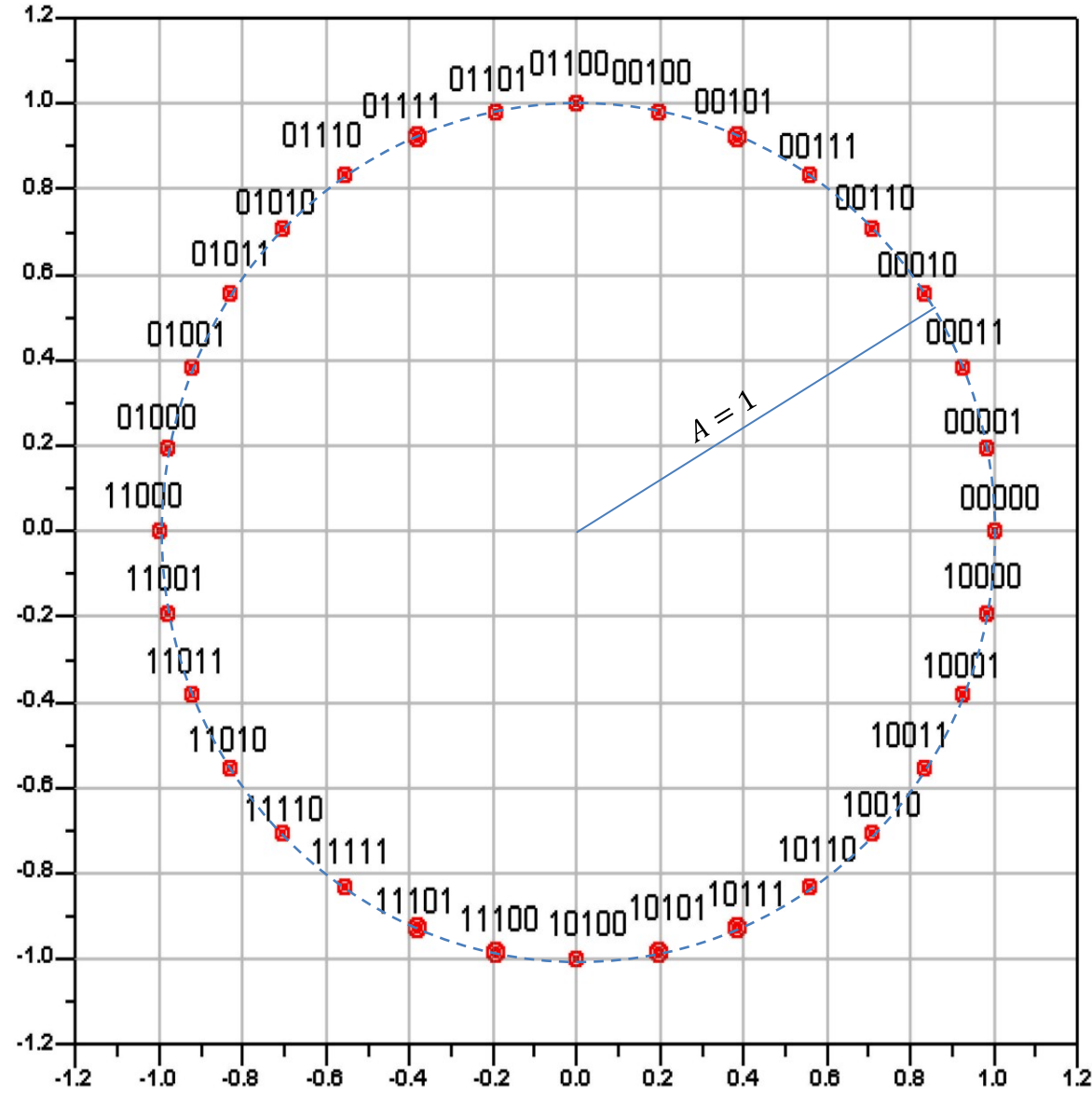


Tipos básicos de modulação em função da posição dos símbolos  $I_{ref} + jQ_{ref}$  no mapeamento  $[b_{N-1} \dots b_1 b_0] \Leftrightarrow I_{ref} + jQ_{ref}$ , sendo  $N = \log_2 M$  o número de bits transportados por cada símbolo IQ do conjunto de  $M$  símbolos  $I_{ref} + jQ_{ref}$  no mapa da constelação:



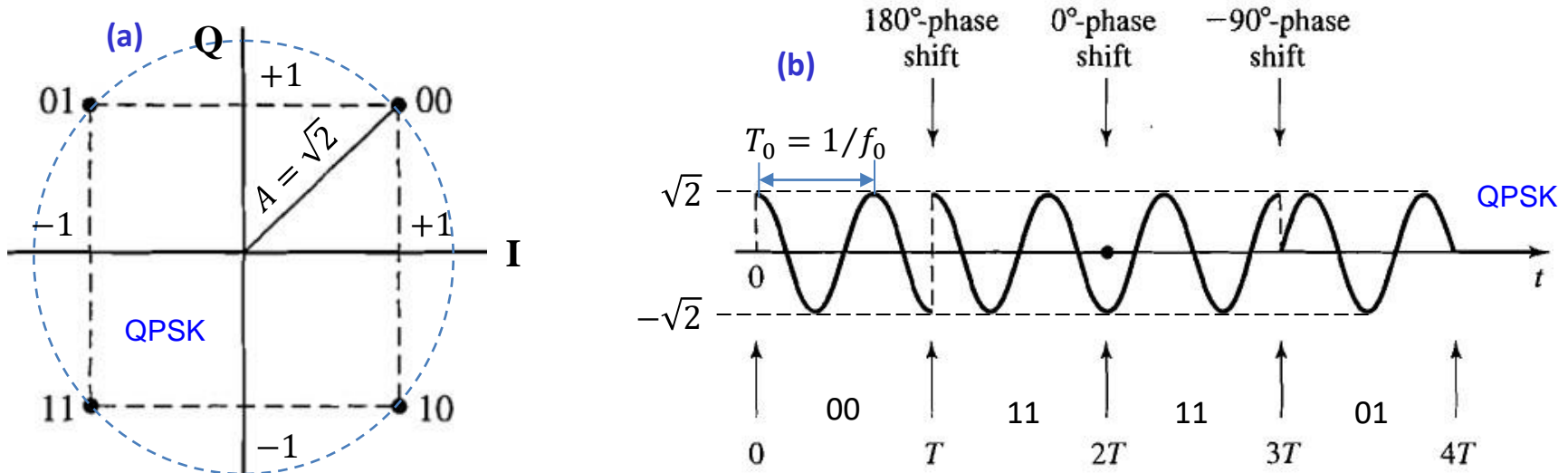
Tipos básicos de modulação em função da posição dos símbolos  $I_{ref} + jQ_{ref}$  no mapeamento  $[b_{N-1} \dots b_1 b_0] \Leftrightarrow I_{ref} + jQ_{ref}$ , sendo  $N = \log_2 M$  o número de bits transportados por cada símbolo IQ do conjunto de  $M$  símbolos  $I_{ref} + jQ_{ref}$  no mapa da constelação:

32-PSK



## Particularidades positivas e negativas da modulação M-PSK

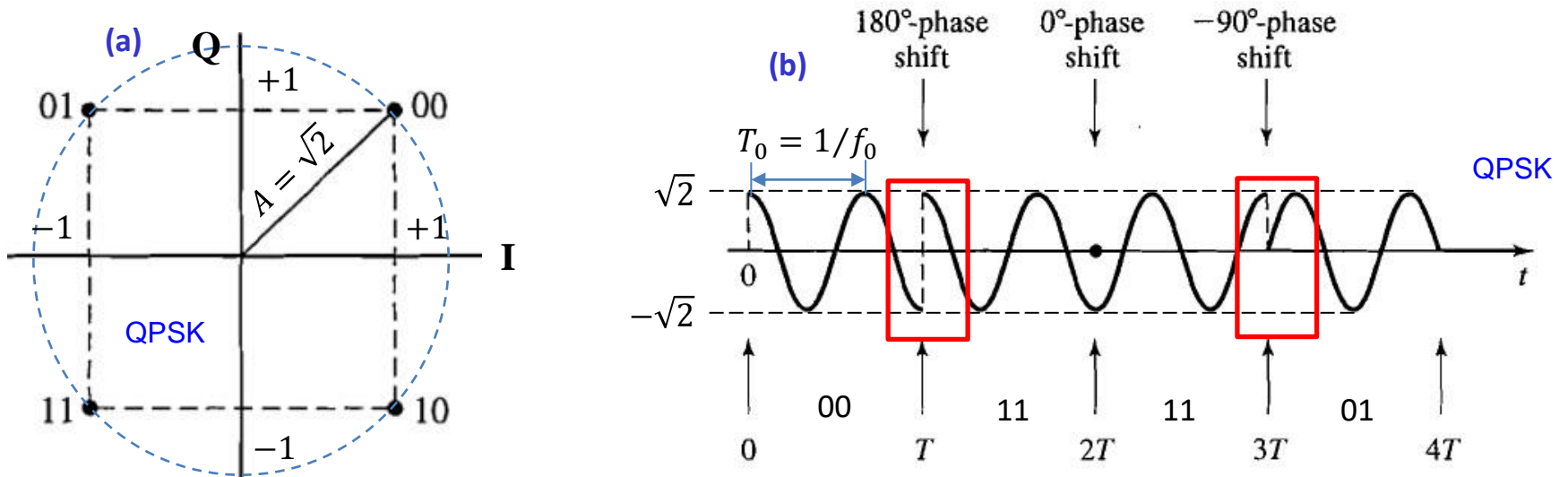
Consideremos a constelação QPSK mostrada abaixo em (a) e o sinal senoidal de frequência  $f_0$  resultante na saída do modulador mostrado no domínio tempo em (b). O sinal mostrado em (b) resulta da sequência de palavras binárias  $BitStream=\{00111101\}$  no *bit stream* na entrada do *mapper* QPSK na entrada do modulador (ver slide 3 p/ 16-QAM e considere QPSK como um “4-QAM”). O *symbol rate* do modulador é  $SR = 1/T$ , sendo T o período do símbolo IQ. No passado, alguns moduladores QPSK não incluíam *shaping filter* para contenção espectral, como era comum em *satcom links* para microssatélites LEO (*Low Earth Orbit*) de baixo custo, de modo que não havia suavização das bordas de transição entre dois símbolos IQ consecutivos, conforme mostrado em (b), gerando toda sorte de espúrios espectrais.



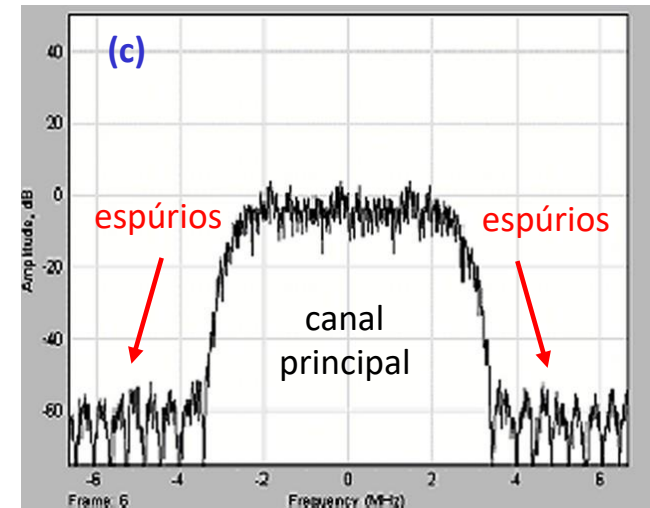
Note em (b) que a amplitude de pico  $A = \sqrt{2}$  da senoide de frequência  $f_0$  na saída do modulador é constante no tempo. Isto é uma grande vantagem das modulações M-PSK porque o HPA (*High Power Amplifier*) na saída do modulador (ver slide 3) pode relaxar a exigência de linearidade dado que o nível do sinal aplicado ao HPA é constante. Um sinal M-PSK pode excitar um amplificador classe C *narrowband* (não-linear mas de alta eficiência e de baixo custo – ver <https://www.electronics-tutorials.ws/amplifier/amplifier-classes.html>) sem que haja distorção de amplitude, porque a amplitude do sinal M-PSK é constante e o filtro LC sintonizado na saída do amplificador minimiza a distorção harmônica do sinal. Já as modulações M-QAM, com várias amplitudes de pico no sinal de saída no domínio tempo, demandam um amplificador linear, como os de classe A ou AB, de baixa eficiência e de alto custo resultante da exigência de linearidade (o ponto quiescente resultante da polarização dos transistores e a estabilidade do mesmo face à variações ambientais e variações de carga torna-se complexa).

## Particularidades positivas e negativas da modulação M-PSK

Em particular, note que as modulações M-PSK geram um amplo espectro de espúrios espectrais nos instantes em que ocorrem variações abruptas no sinal gerado no domínio tempo, conforme mostrado para QPSK realçado pelos retângulos vermelhos em (b) abaixo. Embora o *shaping filter* atenuate estes espúrios, ainda assim ocorre um aumento do nível de espúrios no espectro adjacente ao canal principal, conforme mostrado pelas setas vermelhas em (c) abaixo.



Estes espúrios espectrais são particularmente intensos quando ocorre a transição entre símbolos antipodais (símbolos angularmente distantes de 180°) na constelação da modulação M-PSK. Para o mapa QPSK mostrado em (a) ocorrem transições entre símbolos antipodais para as sequências de 4 bits no *bit stream* de entrada do *mapper* dadas por 0011, 1100, 0110, 1001, que resultam em transições abruptas de 180° e de máxima variação da amplitude no sinal no domínio tempo, conforme realçado pelo primeiro retângulo vermelho em (b) acima. É possível utilizar um codificador convolucional que gere uma sequência de bits que evite transições antipodais, minimizando assim a geração de espúrios espectrais.





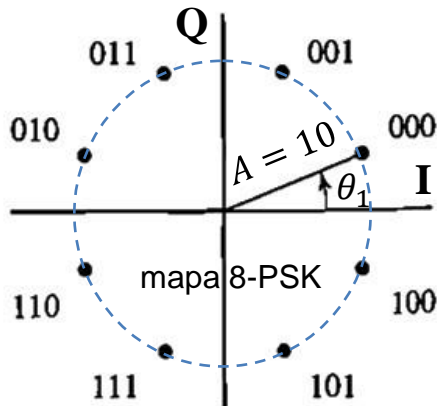
## Distância mínima $d_{\min}$ para a constelação M-PSK

Conforme discutido no slide 19 a robustez da modulação é proporcional à distância mínima  $d_{\min}$  entre os símbolos da constelação. Para uma modulação M-PSK com símbolos de amplitude  $A$ , a distância  $d(m_1, m_2)$  entre dois símbolos com índices de ocorrência  $m_1$  e  $m_2$  ao longo do círculo de raio  $A$  da constelação M-PSK é dada por:

$$d(m_1, m_2) = A\sqrt{2} \sqrt{1 - \cos\left(2\pi \frac{(m_1 - m_2)}{M}\right)} \quad (1)$$

**Exemplo:** Para o mapa 8-PSK abaixo, pede-se: **(a)** Determine os valores I e Q nas LUTs (ver slide 3) que geram os 8 símbolos da constelação. **(b)** Determine a  $d_{\min}$  da constelação através da equação (1) e verifique a consistência do resultado. **(c)** Determine a distância entre os símbolos associados às palavras binárias 000 e 011 através da equação (1) e verifique a consistência. **(d)** Suponha que a palavra 000 tenha sido transmitida e que a degradação imposta ao sinal pelo canal de transmissão seja apenas ruído (não há *multipath*). Estime a SNR instantânea em dB no canal que faz com que a palavra transmitida 000 possa ser interpretada erroneamente pelo *de-mapper* no receptor como se a palavra 011 tivesse sido transmitida. **(e)** Estime a SNR instantânea em dB no canal abaixo da qual o *de-mapper* no receptor começa a incorrer em erros de decisão.

**Solução:** **(a)** O mapa tem  $M = 8$  símbolos uniformemente distribuídos ao longo de um círculo de raio  $A = 10$ . A variação angular entre cada símbolo é  $\Delta\theta = 360^\circ/8 = 45^\circ$ . Portanto o ângulo  $\theta_1$  do símbolo  $s$  associado à palavra 000 é  $\theta_1 = 45^\circ/2 = 22.5^\circ$ . O ângulo dos demais símbolos dos quadrantes 1 e 2 é obtido somando-se progressivamente  $\Delta\theta$  à  $\theta_1$  e o ângulo dos símbolos dos quadrantes 3 e 4 são tais que os ângulos dos símbolos são simétricos aos do quadrante 1 e 2 em relação ao eixo I, conforme mostra a tabela abaixo. Convertendo o valor complexo de cada símbolo  $s$  no formato polar para o formato retangular obtemos os valores I e Q da LUT abaixo:



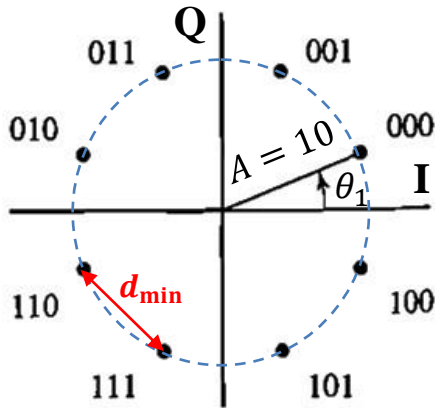
Palavra Binária	Símbolo $s$
000	$10e^{j22.5^\circ}$
001	$10e^{j67.5^\circ}$
011	$10e^{j112.5^\circ}$
010	$10e^{j157.5^\circ}$
110	$10e^{-j157.5^\circ}$
111	$10e^{-j112.5^\circ}$
101	$10e^{-j67.5^\circ}$
100	$10e^{-j22.5^\circ}$

LUT (Look Up Table)		
Palavra Binária	I = Re{s}	Q = Im{s}
000	9.239	3.827
001	3.827	9.239
011	-3.827	9.239
010	-9.239	3.827
110	-9.239	-3.827
111	-3.827	-9.239
101	3.827	-9.239
100	9.239	-3.827

**Nota:** Esta solução é conforme *script* Mathcad disponível em [http://www.fccdecastro.com.br/ZIP/SCD1\\_C4\\_ES29\\_8PSK.zip](http://www.fccdecastro.com.br/ZIP/SCD1_C4_ES29_8PSK.zip).

## Distância mínima $d_{\min}$ para a constelação $M$ -PSK

(b) A distância mínima  $d_{\min}$  da constelação é a distância entre dois símbolos adjacentes no mapa da constelação. Sejam estes símbolos, por exemplo, os símbolos com índices de ocorrência  $m_1 = 5$  e  $m_2 = 6$  ao longo do círculo de raio  $A = 10$  da constelação 8-PSK:



Palavra Binária	Símbolo $s$
110	$10e^{-j157.5^\circ}$
111	$10e^{-j112.5^\circ}$

De (1) temos

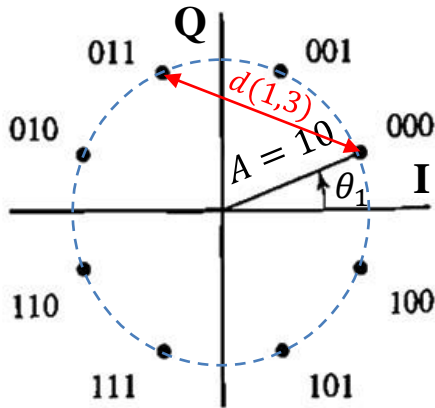
$$d_{\min} = d(5,6) = 10\sqrt{2} \sqrt{1 - \cos\left(2\pi \frac{(5-6)}{8}\right)} = 7.654$$

Verificando a consistência do resultado obtido de (1):

$$\left|10e^{-j157.5^\circ} - 10e^{-j112.5^\circ}\right| = 7.654$$

## Distância mínima $d_{\min}$ para a constelação $M$ -PSK

(c) A distância entre os símbolos com índices de ocorrência  $m_1 = 1$  e  $m_2 = 3$  ao longo do círculo de raio  $A = 10$  da constelação 8-PSK é:



Palavra Binária	Símbolo $s$
000	$10e^{j22.5^\circ}$
011	$10e^{j112.5^\circ}$

De (1) temos

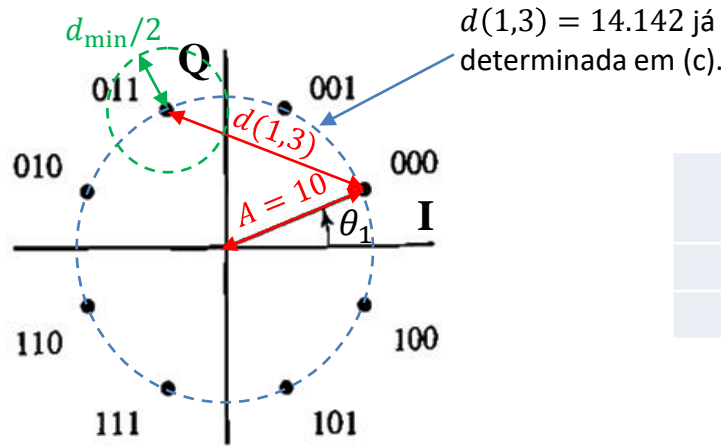
$$d(1,3) = 10\sqrt{2} \sqrt{1 - \cos\left(2\pi \frac{(1-3)}{8}\right)} = 14.142$$

Verificando a consistência do resultado obtido de (1):

$$|10e^{j22.5^\circ} - 10e^{j112.5^\circ}| = 14.142$$

## Distância mínima $d_{\min}$ para a constelação M-PSK

(d) Vamos considerar que a região de decisão do *de-mapper* em torno do símbolo  $10e^{j112.5^\circ}$  associado à palavra binária 011 seja o círculo verde de raio  $d_{\min}/2$  mostrado abaixo, sendo  $d_{\min} = 7.654$  já obtido em (b). Se a palavra 000 foi transmitida então a amplitude  $S$  do sinal transmitido é  $S = A = 10$ . Se a degradação imposta ao sinal pelo canal de transmissão é um ruído instantâneo que faz com que a palavra 000 transmitida seja interpretada erroneamente pelo *de-mapper* no receptor como se a palavra 011 tivesse sido transmitida então o fasor resultante da superposição do ruído com o sinal neste instante jaz dentro do círculo verde que define a região de decisão do *de-mapper*, conforme mostra a figura:



Palavra Binária	Símbolo $s$
000	$10e^{j22.5^\circ}$
011	$10e^{j112.5^\circ}$

Da figura acima temos então que a amplitude instantânea mínima  $N$  de ruído que faz o fasor resultante da superposição do ruído com o sinal neste instante fazer dentro do círculo verde é

$$N = d(1,3) - \frac{d_{\min}}{2} = 14.142 - \frac{7.654}{2} = 10.315$$

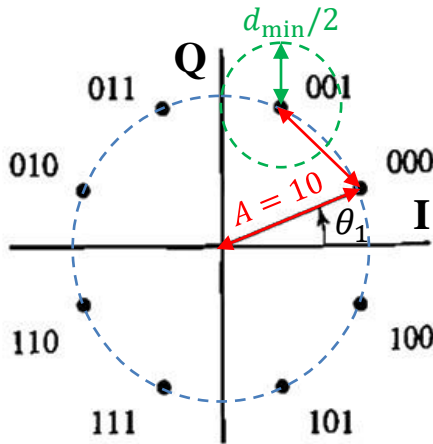
$$\text{SNR} = 20 \log\left(\frac{S}{N}\right) = 20 \log\left(\frac{A}{d(1,3) - \frac{d_{\min}}{2}}\right) = -0.27 \text{ dB}$$

Portanto, dependendo da fase do ruído (que também é aleatória como é a amplitude do ruído), uma SNR instantânea no canal abaixo de  $-0.27 \text{ dB}$  já é capaz de induzir o *de-mapper* à decisões errôneas de modo que a palavra 000 transmitida seja interpretada erroneamente pelo *de-mapper* no receptor como se a palavra 011 tivesse sido transmitida.



## Distância mínima $d_{\min}$ para a constelação M-PSK

(e) A SNR instantânea em dB no canal abaixo da qual o *de-mapper* no receptor começa a incorrer em erros de decisão refere-se a situações de erros de decisão entre símbolos adjacentes no mapa da constelação, conforme exemplifica a figura abaixo. Vamos considerar que a região de decisão do *de-mapper* em torno do símbolo  $10e^{j67.5^\circ}$  associado à palavra binária 001 seja o círculo verde de raio  $d_{\min}/2$  mostrado abaixo, sendo  $d_{\min} = 7.654$  já obtido em (b). Se a palavra 000 foi transmitida então a amplitude  $S$  do sinal transmitido é  $S = A = 10$ . Se a degradação imposta ao sinal pelo canal de transmissão é um ruído instantâneo que faz com que a palavra 000 transmitida seja interpretada erroneamente pelo *de-mapper* no receptor como se a palavra 001 tivesse sido transmitida então o fasor resultante da superposição do ruído com o sinal neste instante jaz dentro do círculo verde que define a região de decisão do *de-mapper*, conforme mostra a figura:



Palavra Binária	Símbolo $s$
000	$10e^{j22.5^\circ}$
001	$10e^{j67.5^\circ}$

Da figura acima temos então que a amplitude instantânea mínima  $N$  de ruído que faz o fasor resultante da superposição do ruído com o sinal neste instante jazer dentro do círculo verde é

$$N = d(1,2) - \frac{d_{\min}}{2} = 7.654 - \frac{7.654}{2} = 3.827$$

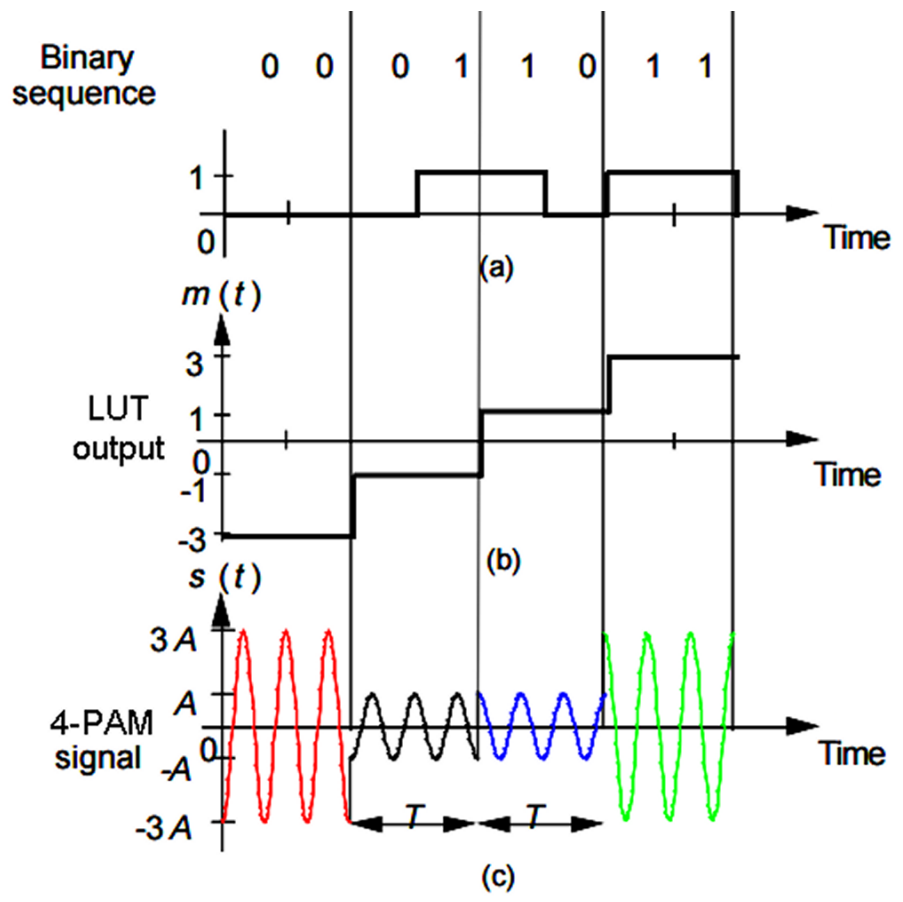
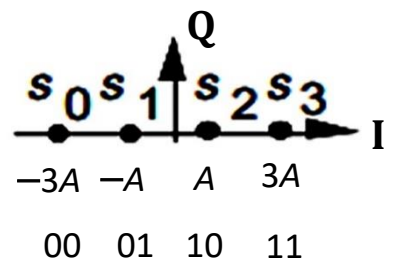
$$SNR = 20 \log\left(\frac{S}{N}\right) = 20 \log\left(\frac{A}{d(1,2) - \frac{d_{\min}}{2}}\right) = 8.343 \text{ dB}$$

Portanto, dependendo da fase do ruído (que também é aleatória como é a amplitude do ruído), uma SNR instantânea no canal abaixo de 8.343 dB já é capaz de induzir o *de-mapper* à decisões errôneas quanto a palavras binárias associadas a símbolos adjacentes no mapa da constelação 8-PSK. Se a SNR instantânea no canal é sempre acima de 8.343 dB ao longo de todo tempo de operação do demodulador, então, independentemente da fase do ruído, o *de-mapper* 8-PSK nunca comete erros de decisão em consequência do ruído no canal.

Tipos básicos de modulação em função da posição dos símbolos  $I_{ref} + jQ_{ref}$  no mapeamento  $[b_{N-1} \dots b_1 b_0] \Leftrightarrow I_{ref} + jQ_{ref}$ , sendo  $N = \log_2 M$  o número de bits transportados por cada símbolo IQ do conjunto de  $M$  símbolos  $I_{ref} + jQ_{ref}$  no mapa da constelação:

**M-PAM (Pulse Amplitude Modulation):**

A constelação da modulação M-PAM tem seus  $M$  símbolos IQ uniformemente distribuídos ao longo do do eixo I (não há símbolos IQ com valor Q diferente de zero). Em consequência podemos considerar um modulador PAM como um modulador QAM (ver slide 3) sem os blocos funcionais do ramo Q. Por exemplo, abaixo é mostrado o mapa da constelação e o conjunto de sinais para um modulador 4 PAM com *symbol rate*  $SR = 1/T$ :



## Modulação PAM - exemplo

**Exemplo:** O sistema de comunicações digital mostrado na Figura 1 abaixo utiliza um modulador 4-PAM conforme mostra a Figura 2.

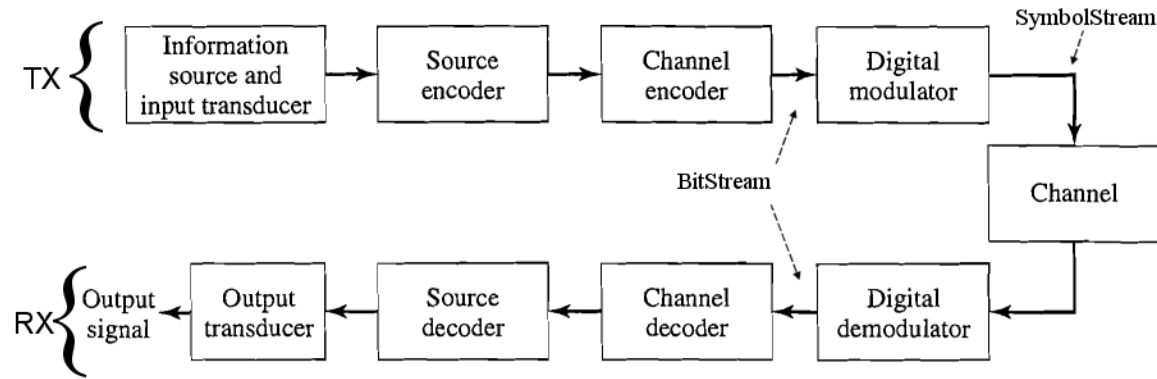
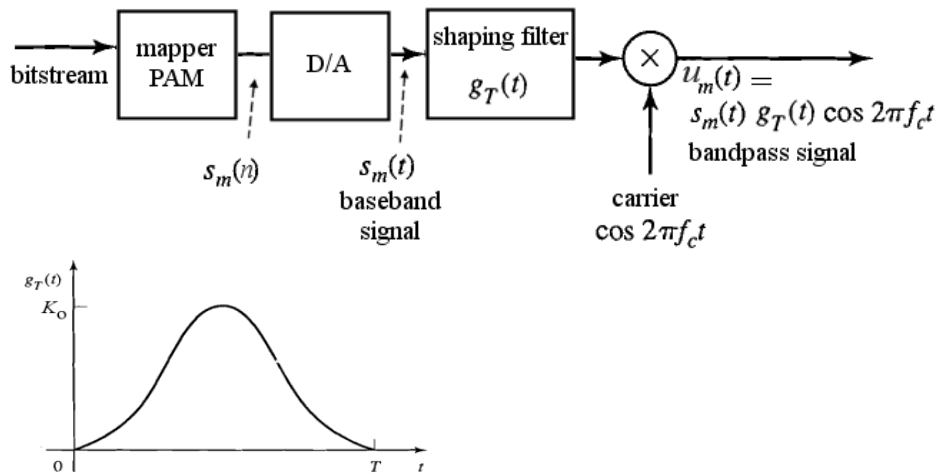
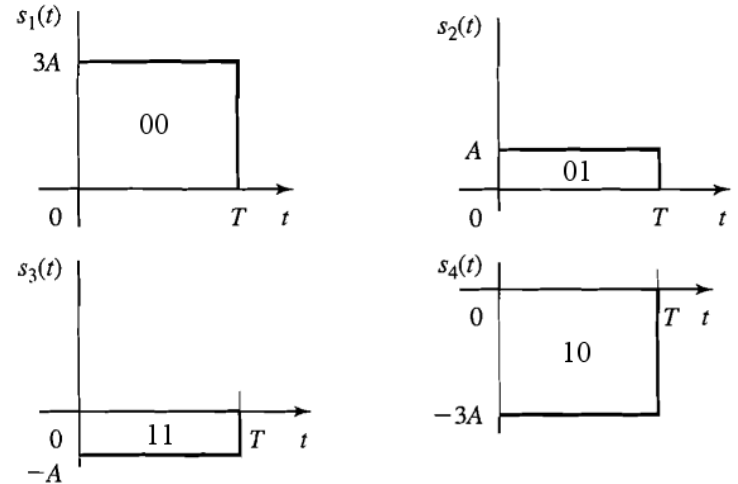


Figura 1: Diagrama geral de um sistema de comunicações digital.



(a) Modulador PAM (bloco *Digital modulator* na Figura 1) e gráfico da resposta  $g_T(t)$  do *shaping filter* a um pulso  $s_m(t)$  mostrado em (b).



(b) Relação entre a  $m$ -ésima palavra binária na entrada do *mapper* e o símbolo  $s_m(t)$  resultante na saída do D/A,  $m = 1, 2, \dots, 4$

Figura 2: Diagrama interno do bloco *Digital modulator* na Figura 1.

## Modulação PAM - exemplo

O *symbol rate* é 18 MHz e o *shaping filter* apresenta resposta  $g_T(t)$  ao pulso  $s_m(t)$  mostrado em (b) dada por

$$g_T(t) = K_0 e^{-\pi \left( \frac{t - \frac{T}{2}}{\tau} \right)^2}, \quad K_0 = 7 \times 10^6, \quad \tau = 0.014 \mu\text{s},$$

sendo  $T$  a duração de um símbolo PAM. O demodulador no RX

decide qual símbolo PAM é recebido com base em uma região de decisão definida pelo intervalo  $\left[ -\frac{d_{\min}}{2}, \frac{d_{\min}}{2} \right]$  em torno de cada ponto da constelação de referência, sendo  $d_{\min}$  a distância Euclidiana mínima entre os símbolos da constelação.

Sabendo que a frequência da portadora é  $f_c = 150\text{MHz}$  e que em um determinado instante a sequência de palavras binárias na entrada do *Digital modulator* na Figura 1 é dada por  $BitStream = \{0110000110111001\}$ , determine:

- A frequência do *clock* do *BitStream* na entrada do *Digital modulator* na Figura 1, sabendo que os bits são transmitidos serialmente.
- A sequência de símbolos da constelação 4-PAM gerados na saída do *Digital modulator* (*SymbolStream*).
- Qual a SNR (em dB) na entrada do demodulador do RX que faria palavra binária 00 originalmente transmitida ser interpretada como a palavra 01?
- Qual a SNR (em dB) na entrada do demodulador do RX que faria palavra binária 00 originalmente transmitida ser interpretada como a palavra 10?
- Plote o módulo do espectro do sinal na saída do *shaping filter* p/  $f \geq 0$  (o que seria mostrado na tela de um *spectrum analyzer*) – Dica: Vide Nota abaixo.
- Plote o módulo do espectro do sinal  $u_m(t)$  p/  $f \geq 0$  (o que seria mostrado na tela de um *spectrum analyzer*).

**Nota:**  $\mathcal{F} \left\{ K_0 e^{-\pi \left( \frac{t - \frac{T}{2}}{\tau} \right)^2} \right\} = K_0 \tau e^{-\pi f^2 \tau^2} e^{-j\pi f T}$  onde  $\mathcal{F}\{\cdot\}$  é o operador que denota a Transformada de Fourier do argumento.



## Solução:

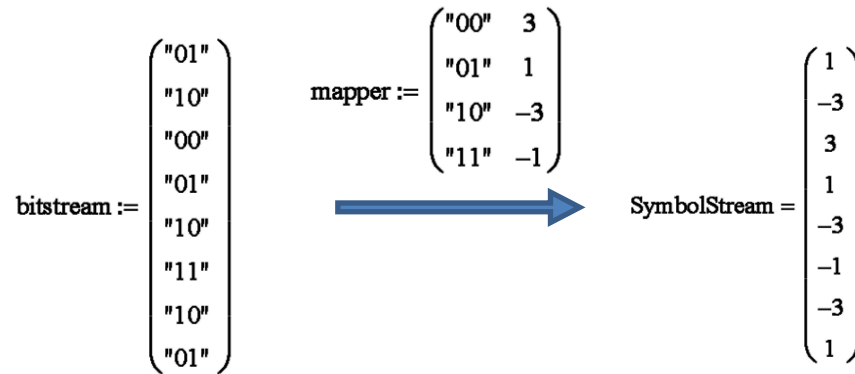
a)  $\text{SymbolRate} := 18 \cdot \text{MHz}$

$\text{NBitsPerSymbol} := 2$

$\text{FClock} := \text{SymbolRate} \cdot \text{NBitsPerSymbol}$

$\text{FClock} = 36 \cdot \text{MHz}$

b)



c)

Seja  $A_v := 1$

$d_{\min} := |(-3) - (-1)| \quad d_{\min} = 2$

Daí

$\text{BinWord1}_0 := "00" \xrightarrow{\text{mapper}} S1 = (3)$

$\text{BinWord2}_0 := "01" \xrightarrow{\text{mapper}} S2 = (1)$

$\text{SNR} := 20 \cdot \log \left( \frac{|S1|}{|S1 - S2| - \frac{d_{\min}}{2}} \right) \quad \text{SNR} = 9.542 \text{ dB}$

**Nota:** Esta solução é conforme *script* Mathcad disponível em [http://www.fccdecastro.com.br/ZIP/SCD1\\_C4\\_ES35\\_4PAM.zip](http://www.fccdecastro.com.br/ZIP/SCD1_C4_ES35_4PAM.zip).

d)

$$\text{BinWord1}_0 := "00" \xrightarrow{\text{mapper}} S1 = (3)$$

$$\text{BinWord2}_0 := "10" \xrightarrow{\text{mapper}} S2 = (-3)$$

$$\text{SNR} := 20 \cdot \log \left( \frac{|S1|}{|S1 - S2| - \frac{d_{\min}}{2}} \right) \quad \text{SNR} = -4.437 \quad \text{dB}$$

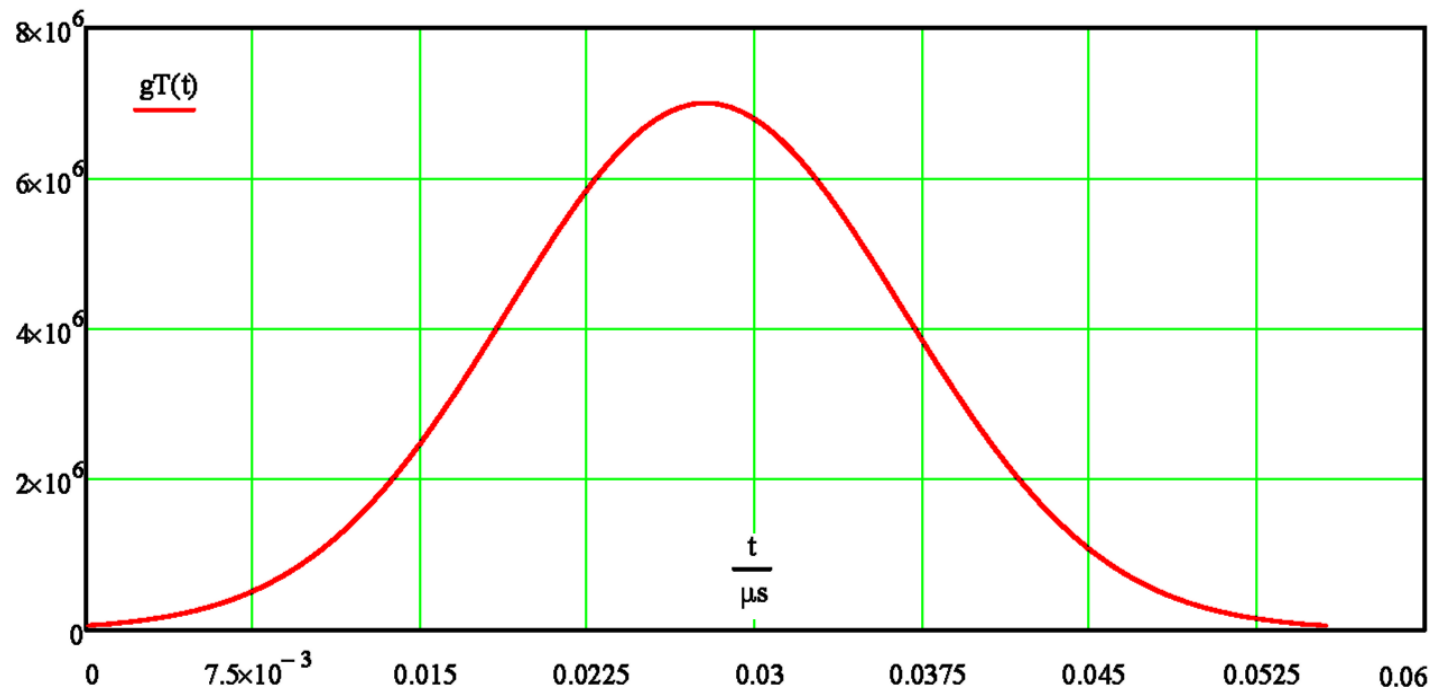
e)  $g_T(t)$  no dominio tempo tem a forma

$$T := \frac{1}{\text{SymbolRate}} = 0.056 \cdot \mu\text{s}$$

$$\tau = 0.022 \cdot \mu\text{s}$$

$$K_0 := 7 \cdot 10^6 \cdot \left( \frac{t - \frac{T}{2}}{\tau} \right)^2$$

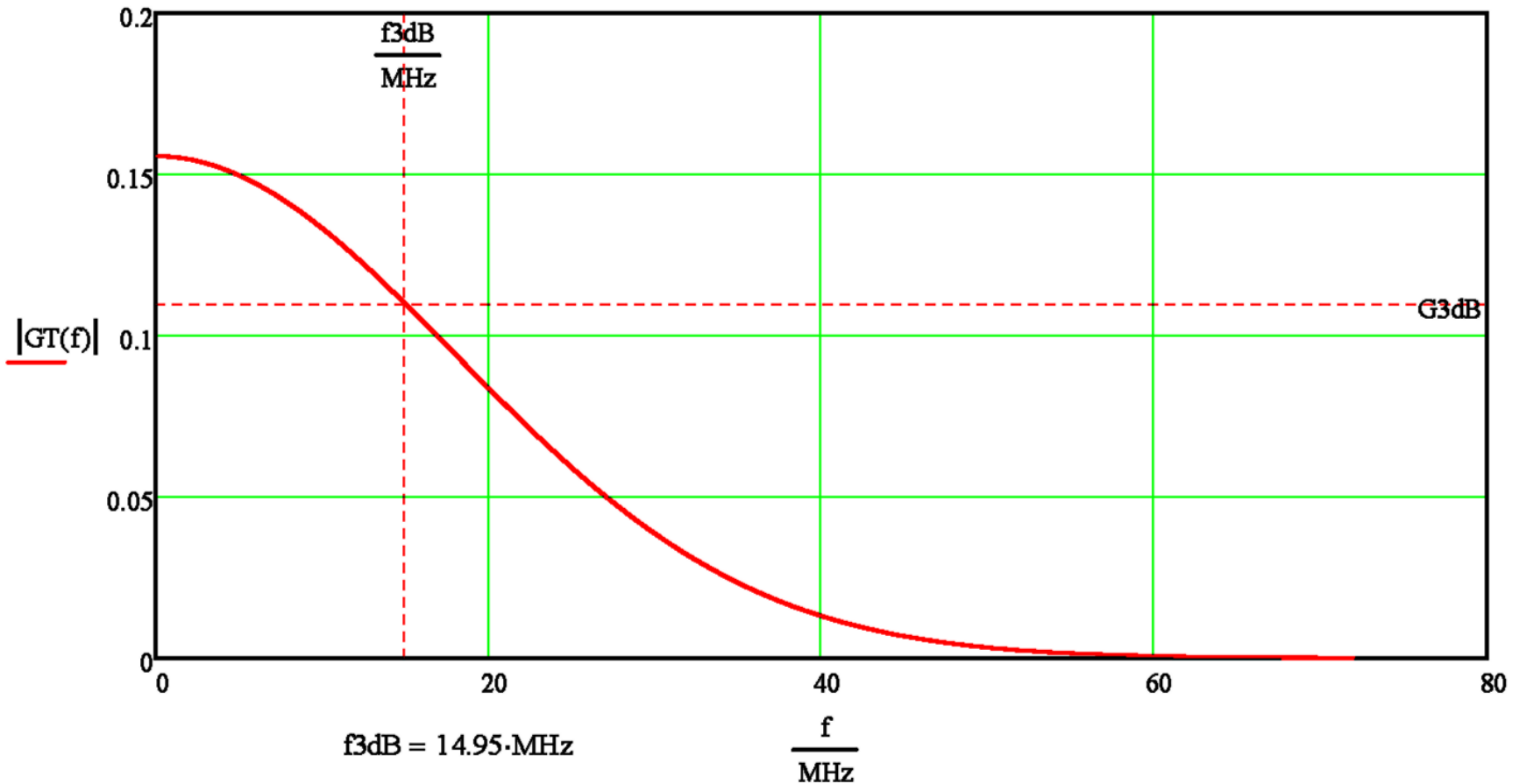
$$g_T(t) := K_0 \cdot e^{-\pi \cdot \left( \frac{t - \frac{T}{2}}{\tau} \right)^2}$$



## Modulação PAM - exemplo

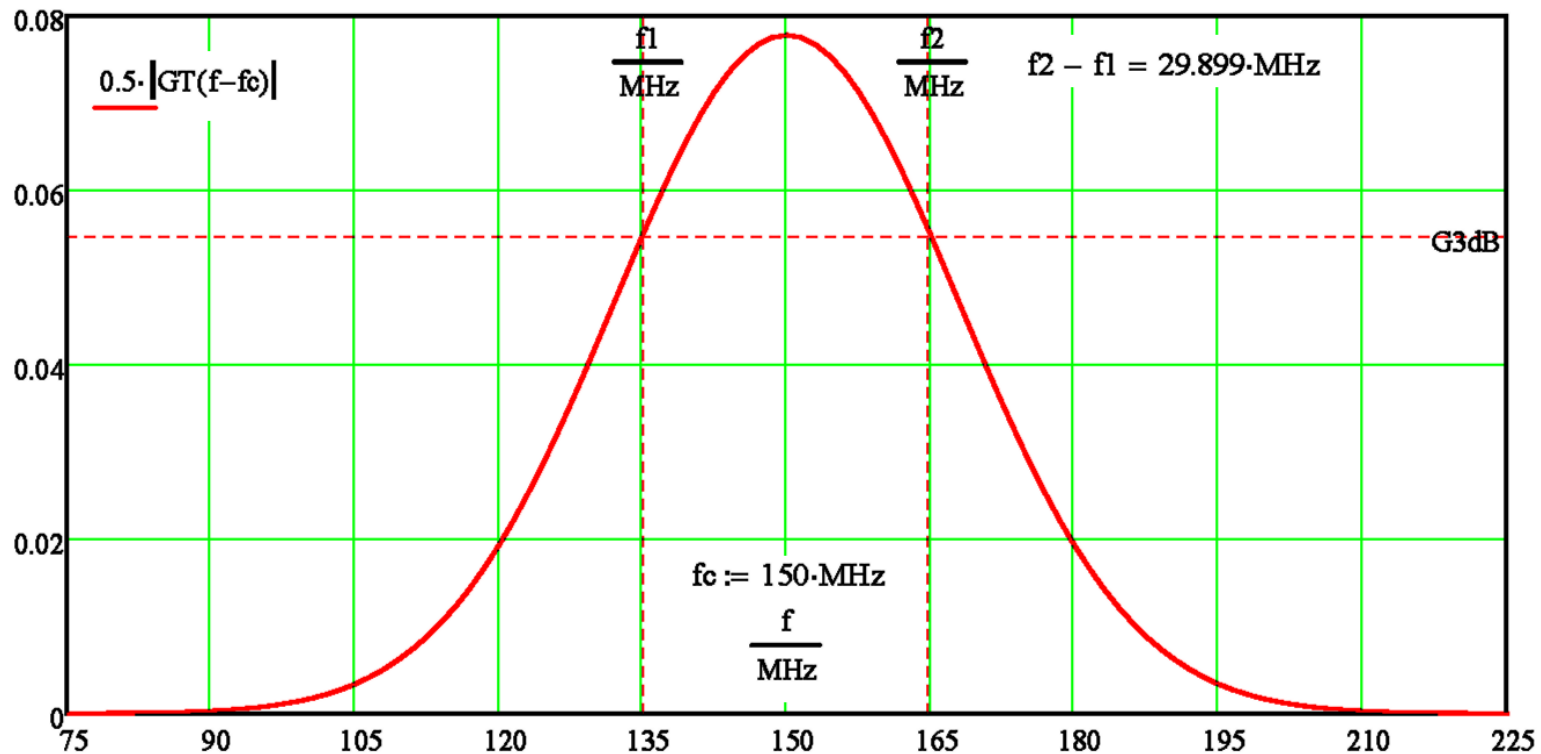
E o espectro de  $g_T(t)$  no domínio frequência  $f > 0$ , dado por  $G_T(f) = \mathcal{F}[g_T(t)]$ , tem a forma:

$$G_T(f) := K_0 \cdot \tau \cdot e^{-\pi \cdot f^2 \cdot \tau^2} \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot f \cdot T}$$



## Modulação PAM - exemplo

f) Conforme discutido no slide 7  $U_m(f) = \frac{A}{2} [G_T(f - f_c) + G_T(f + f_c)]$ , e para  $f > 0$  tem a forma:



**Nota 1:** Conforme discutido no slide 7 do Cap IV de "UFSM00261 Sistemas de Comunicação Digital I", o processo aqui efetuado é denominado de heterodinação do sinal *baseband*. Este processo transforma o sinal *baseband* em sinal *passband* elevando a frequência central do espectro do sinal *baseband* para a frequência  $f_c = 150 \cdot \text{MHz}$ , conforme mostra o gráfico de  $0.5 \cdot |GT(f - f_c)|$  acima. Note que o processo de heterodinação duplica a faixa de frequência (banda definida por  $f_2 - f_1$  no gráfico acima) necessária para transmitir o sinal *passband* através do canal de transmissão. Especificamente, compare a banda-passante  $f_2 - f_1 = 29.899 \cdot \text{MHz}$  no gráfico  $0.5 \cdot |GT(f - f_c)|$  acima com a banda-passante  $f_{3\text{dB}} = 14.95 \cdot \text{MHz}$  no gráfico do espectro  $|GT(f)|$  do sinal *baseband* (note o dobro do que o valor necessário para transmitir o sinal em banda-base ou *baseband*).

## Modulação QAM - exemplo

**Exemplo:** O diagrama abaixo mostra a etapa de modulação de um sistema de comunicação digital 16-QAM:

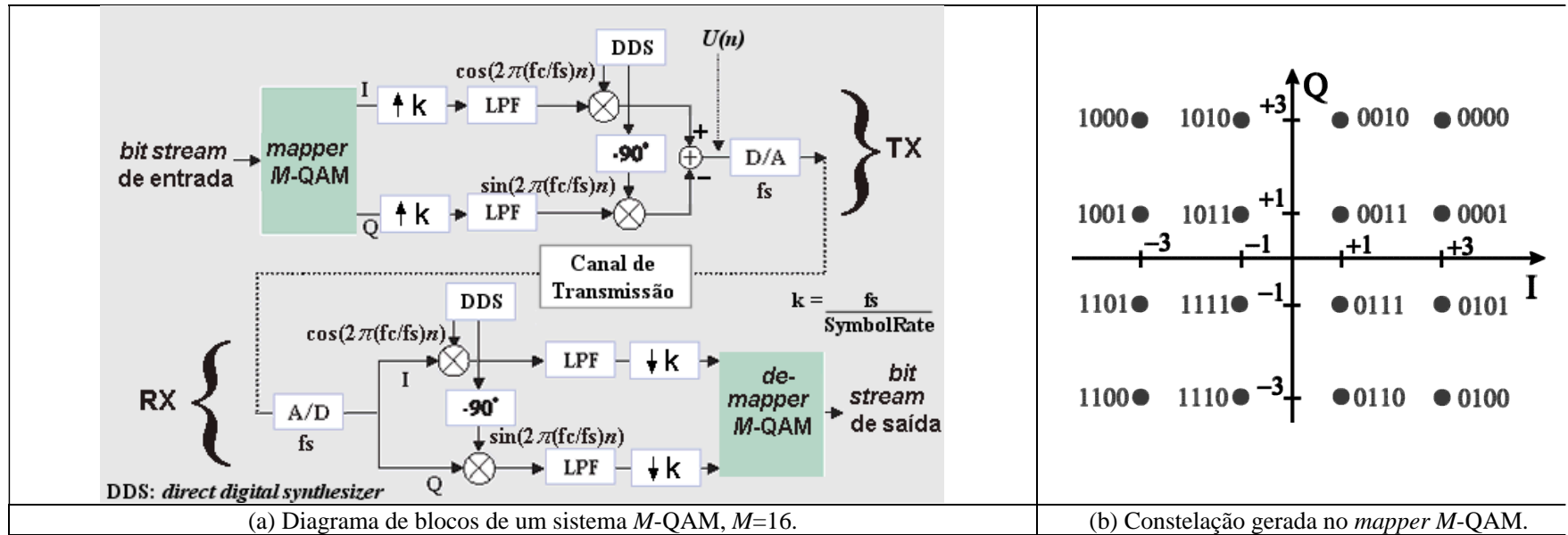


Figura 1: Etapa de modulação de um sistema de comunicação digital 16-QAM.

Sabe-se que a frequência de amostragem do D/A é  $f_s=128\text{MHz}$ , a frequência da portadora é  $f_c=16\text{MHz}$  e o *symbol rate* do sistema é  $8.0\text{ MHz}$ . A resposta  $h(n)$  do *shaping filter* do TX (LPF) a um impulso  $\delta(n)$  aplicado em sua entrada é caracterizada na Figura 2.

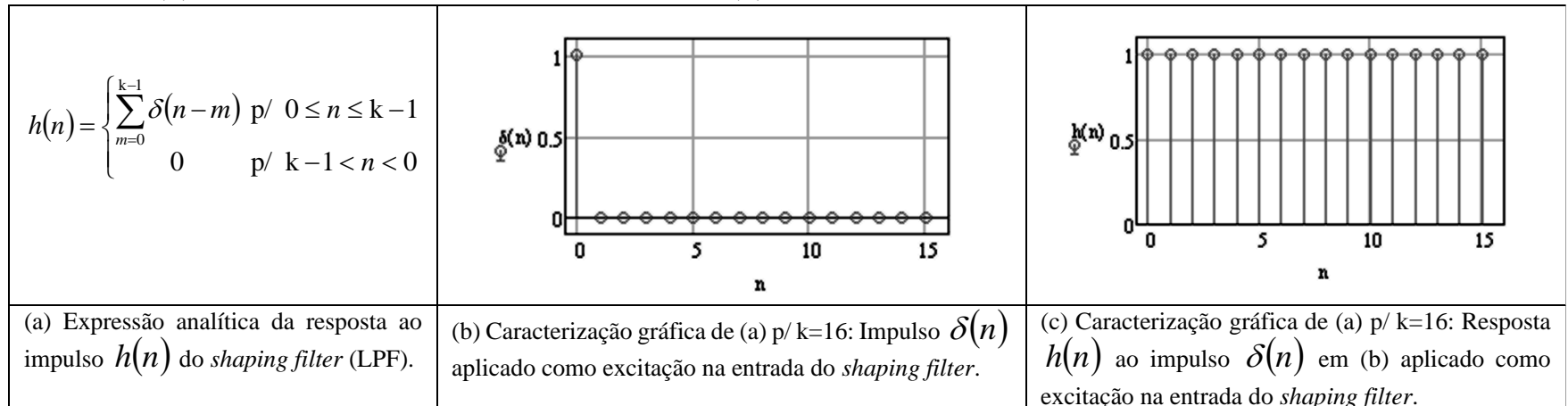


Figura 2: Caracterização da resposta ao impulso  $h(n)$  do *shaping filter* – LPF na Figura 1(a).



## Modulação QAM - exemplo

Conforme mostram as Figuras 1 e 2, a seqüência de amostras  $U(n)$  resultantes na entrada do D/A é dada por

$$U(n) = \operatorname{Re}\{S_n\} \cos\left(2\pi \frac{f_c}{f_s} n\right) - \operatorname{Im}\{S_n\} \sin\left(2\pi \frac{f_c}{f_s} n\right), \text{ sendo } S_n = I_n + jQ_n \text{ o símbolo gerado na saída do } \textit{mapper} \text{ na Figura 1(a) no instante } n.$$

Seja o *bit stream* na entrada do *mapper* em um determinado instante dado por  $B = \{\dots 1011010101110100\dots\}$ .

- Determine quantos ciclos da portadora formam um símbolo IQ.
- Determine quantas amostras na entrada do D/A formam um símbolo IQ.
- Determine a frequência do *clock* do *bit stream* na entrada do *mapper* na Figura 1(a). Assuma que os bits entrem em formato serial no *mapper*.
- A seqüência de símbolos  $I + jQ$  da constelação 16-QAM gerados na saída do *mapper* na Figura 1(a).
- Plote o gráfico de  $U(n)$  na entrada do D/A resultante do *bit stream* B. Dica:  $U(n)$  é também dado por  $U(n) = |S_n| \cos\left(2\pi \frac{f_c}{f_s} n + \angle S_n\right)$ .

### Solução:

**Nota:** Esta solução é conforme *script* Mathcad disponível em [http://www.fccdecastro.com.br/ZIP/SCD1\\_C4\\_ES41\\_16QAM.zip](http://www.fccdecastro.com.br/ZIP/SCD1_C4_ES41_16QAM.zip).

São dados:  $f_s := 128 \cdot \text{MHz}$      $f_c := 16 \cdot \text{MHz}$      $\text{SymbolRate} := 8 \cdot \text{MHz}$   
 $\text{BitStream} := ("1011" "0101" "0111" "0100")^T$

- $\text{NCyclesPerSymbol} := \frac{f_c}{\text{SymbolRate}} = 2 \rightarrow$  Número de ciclos da portadora por duração do símbolo IQ
- $\text{NSampPerSymbol} := \frac{f_s}{\text{SymbolRate}} = 16 \rightarrow$   $k =$  Número de amostras por duração de um símbolo IQ na saída do D/A
- $\text{NBitsPerSymbol} := 4$   
 $\text{FClock} := \text{SymbolRate} \cdot \text{NBitsPerSymbol} = 32 \text{MHz}$

## Modulação QAM - exemplo

d)

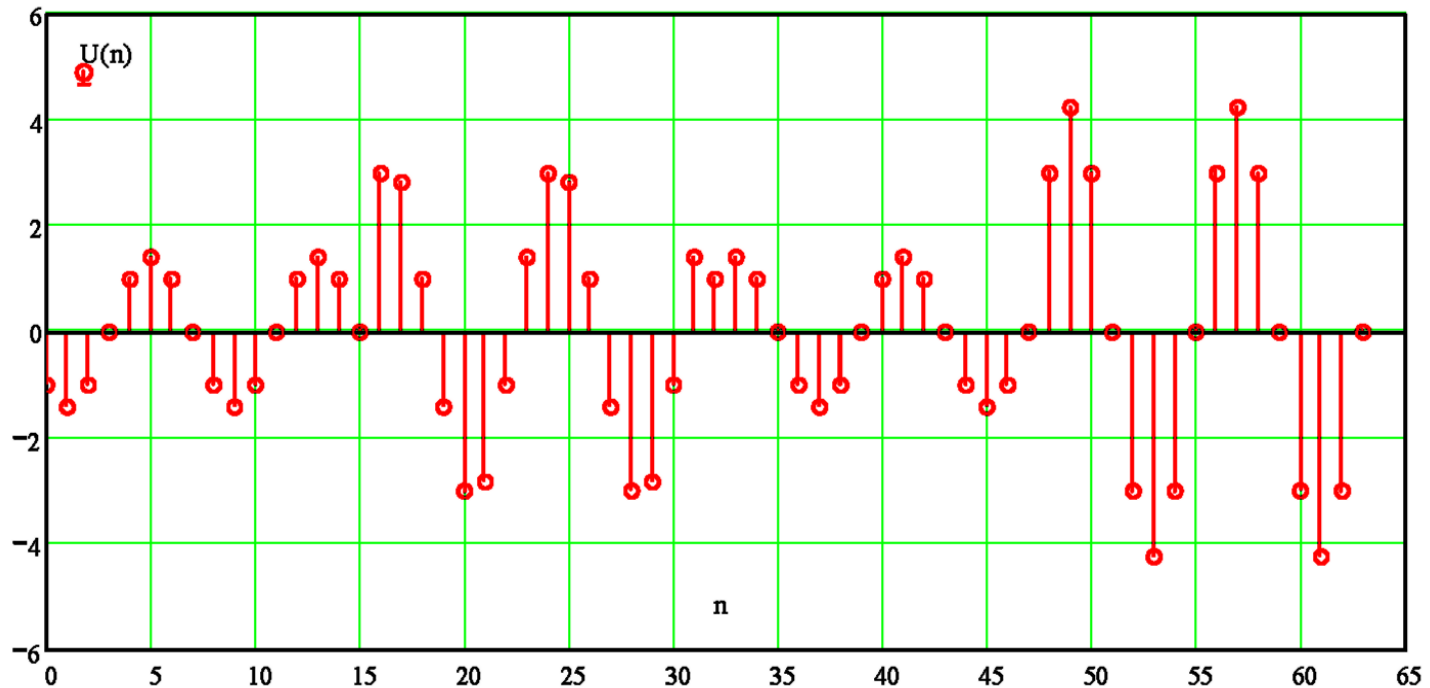
$$\text{BinWords} := \begin{pmatrix} "1000" & "1010" & "0010" & "0000" \\ "1001" & "1011" & "0011" & "0001" \\ "1101" & "1111" & "0111" & "0101" \\ "1100" & "1110" & "0110" & "0100" \end{pmatrix}$$

mapper  
→

$$\text{Symbols} = \begin{pmatrix} -3 + 3i & -1 + 3i & 1 + 3i & 3 + 3i \\ -3 + i & -1 + i & 1 + i & 3 + i \\ -3 - i & -1 - i & 1 - i & 3 - i \\ -3 - 3i & -1 - 3i & 1 - 3i & 3 - 3i \end{pmatrix}$$

$$\text{BitStream} := ("1011" \quad "0101" \quad "0111" \quad "0100")^T \xrightarrow{\text{mapper}} S = \begin{pmatrix} -1 + i \\ 3 - i \\ 1 - i \\ 3 - 3i \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} |S| = \begin{pmatrix} 1.414 \\ 3.162 \\ 1.414 \\ 4.243 \end{pmatrix} \\ \angle S = \begin{pmatrix} 135 \\ -18.435 \\ -45 \\ -45 \end{pmatrix}^\circ \end{array} \right.$$

e)  $U(n) = |S_n| \cos\left(2\pi \frac{f_c}{f_s} n + \angle S_n\right)$       $k := \frac{f_s}{\text{SymbolRate}} = 16 \rightarrow$  **Número de amostras por símbolo na saída do D/A**



## Desempenho de Uma Técnica de Modulação

O desempenho de uma técnica de modulação normalmente é medido em termos de:

**Eficiência de potência:** É uma medida da potência necessária no sinal modulado para que uma determinada BER (*Bit Error Rate*) na saída do *de-mapper* (usualmente,  $BER = 10^{-5}$ ) seja atingida em presença de ruído AWGN com densidade espectral de potência  $N_o$  na entrada do RX. Especificamente, este parâmetro é dado pela razão  $\eta_{BER}$  entre a energia do sinal por bit  $E_b$  e a densidade espectral de potência de ruído  $N_o$  na entrada do RX demandada para que uma  $BER = 10^{-5}$  seja atingida.

$$\eta_{BER} = \frac{E_b}{N_o} \Big|_{BER = 10^{-5}}$$

Quanto menor  $\eta_{BER}$  menor a potência necessária do sinal modulado para que os bits recebidos sejam recuperados no RX com fidelidade em relação aos bits transmitidos. Note que  $\eta_{BER}$  também pode ser interpretada como uma medida da SNR/bit necessária p/ que se obtenha uma determinada BER.

**Eficiência espectral (*bandwidth BW efficiency*):** Capacidade da modulação em transmitir informação dentro de uma largura de banda BW limitada. É medida pela razão entre a taxa de transmissão de informação  $R$  em bits por segundo e a largura de banda BW ocupada pelo sinal de RF modulado, em Hz:

$$\eta_{BW} = \frac{R}{BW} \text{ [bps/Hz]}$$

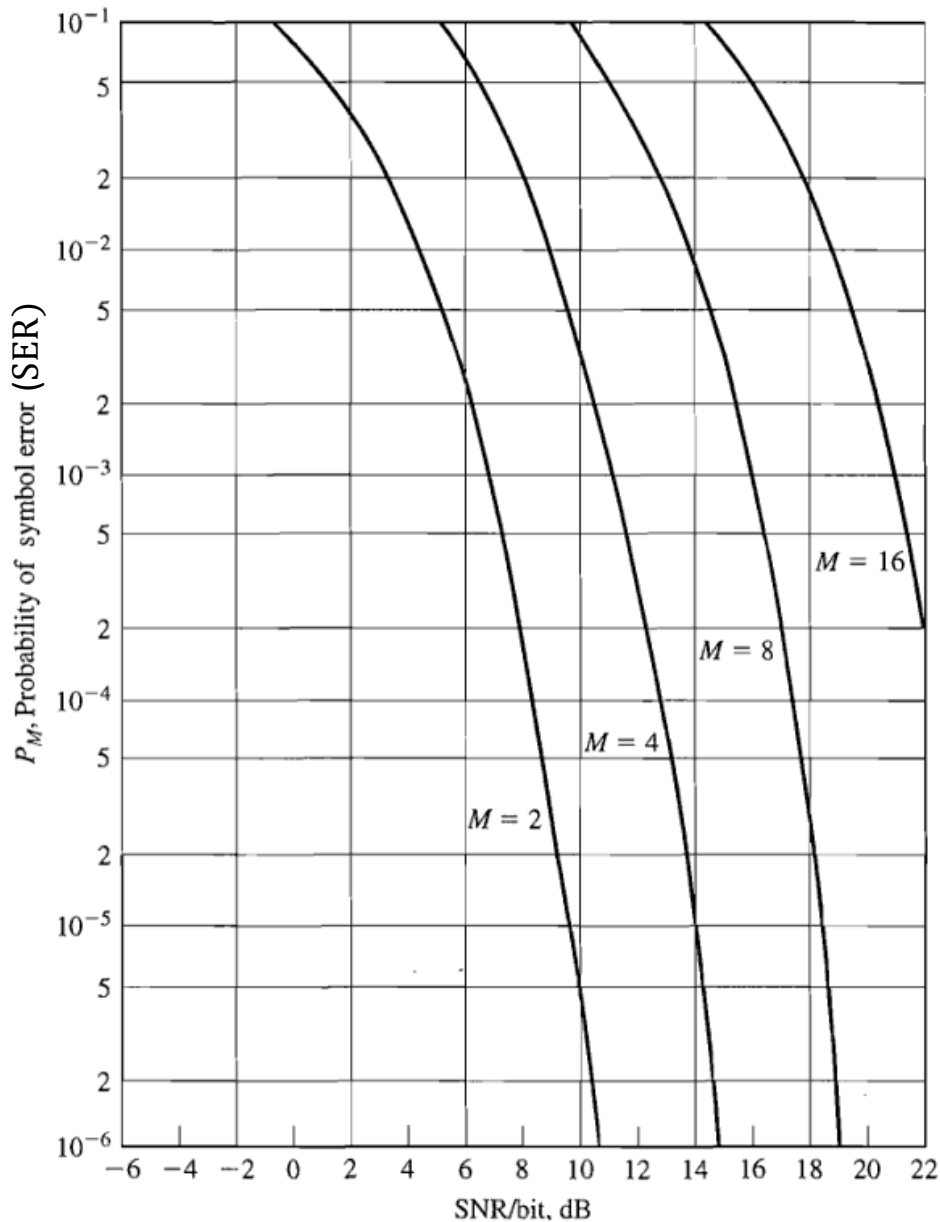
A capacidade de um sistema digital está diretamente relacionada ao  $\eta_{BW}$  do esquema de modulação adotado:

- Uma modulação com maior  $\eta_{BW}$  transmite mais dados dentro da banda BW de uma determinada alocação do espectro estabelecida pelo órgão regulador (ANATEL, FCC, etc...). O limite é dado pelo teorema de codificação de canal de Shannon.

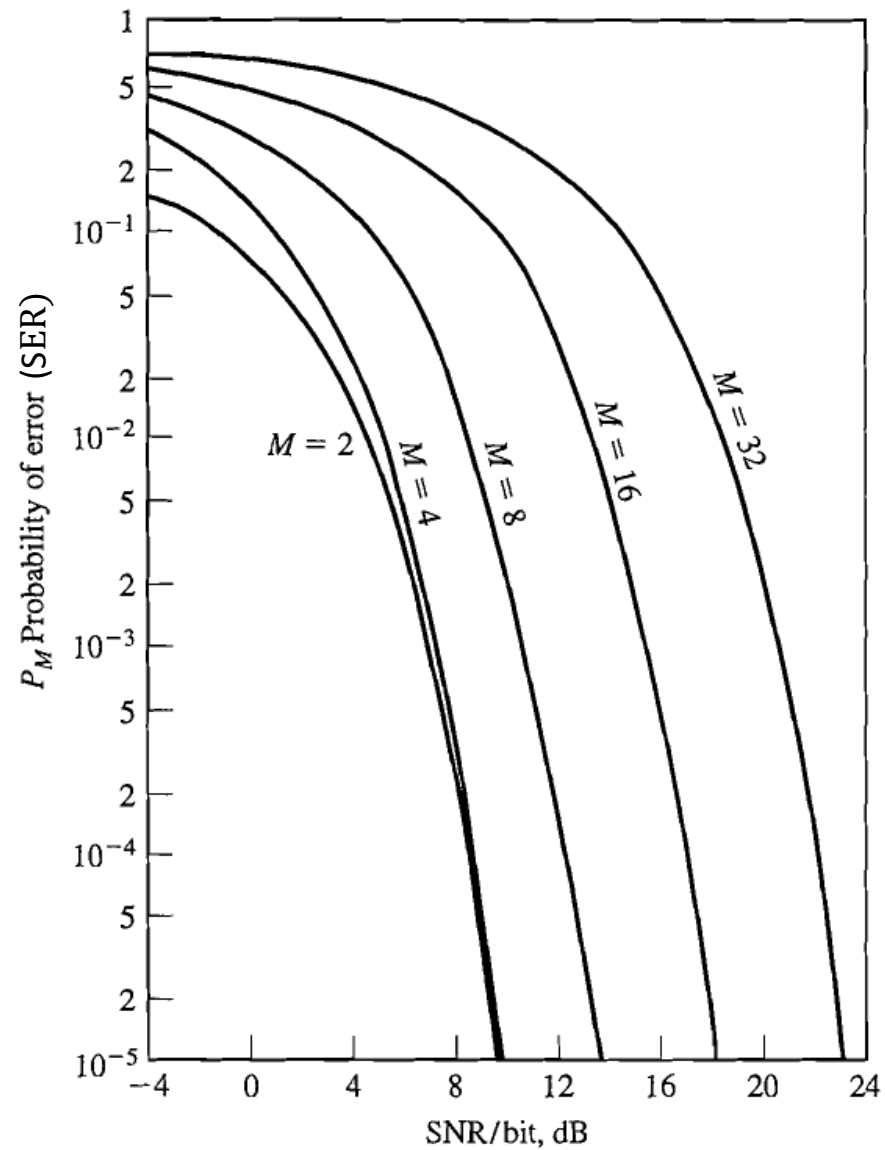
Frequentemente existe um compromisso entre eficiência espectral  $\eta_{BW}$  e eficiência de potência  $\eta_{BER}$

- A inclusão de **codificação p/ controle de erro** aumenta a ocupação de banda BW, mas reduz a potência do sinal modulado exigida para que determinada BER seja atingida (i.e. reduz  $\eta_{BER}$ ).
- Esquemas de **modulação com mais níveis** ( $M$ -ários) diminuem a ocupação da banda BW, porém aumentam a potência recebida necessária – portanto trocam eficiência de potência  $\eta_{BER}$  por eficiência espectral  $\eta_{BW}$ .

## Comparação de desempenho entre as modulações PAM, PSK e QAM



**Figure 7.55** Probability of a symbol error for PAM.



**Figure 7.57** Probability of a symbol error for PSK signals.

Nota: SER – Symbol Error Rate

## Comparação de desempenho entre as modulações PAM, PSK e QAM

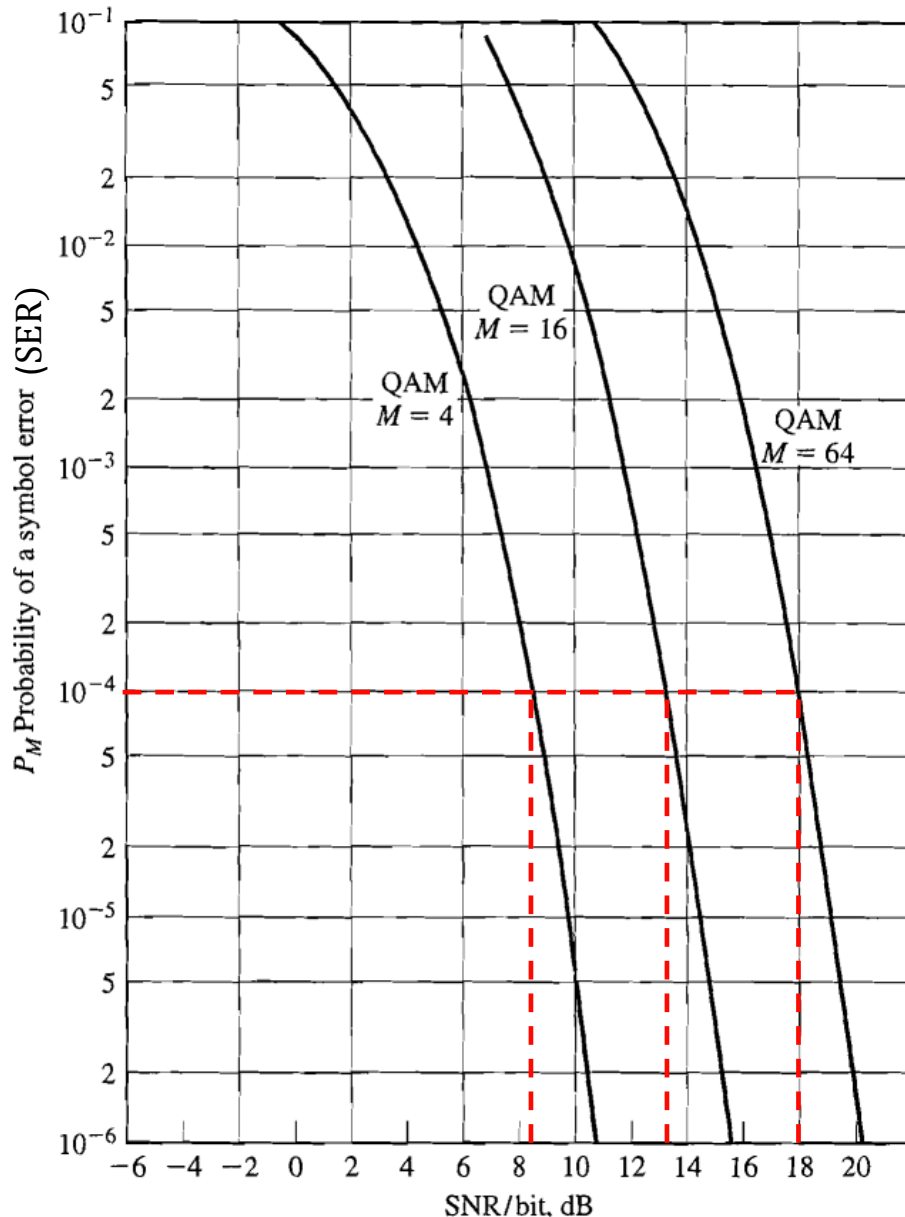
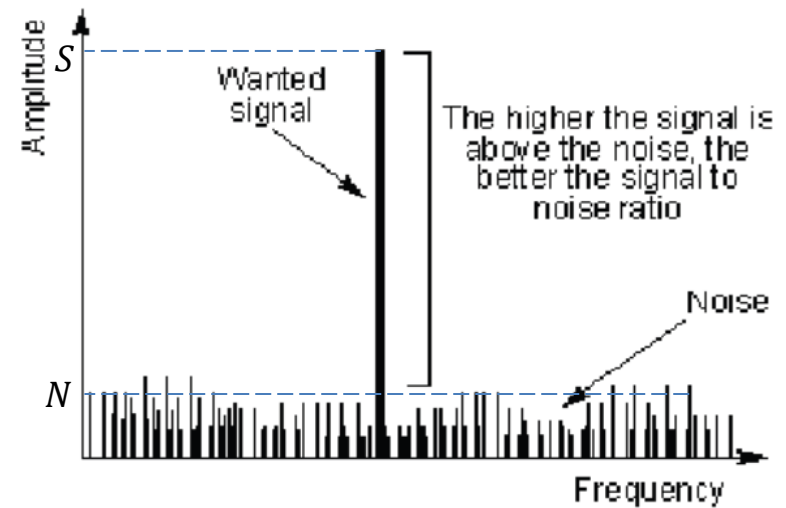


Figure 7.62 Probability of a symbol error for QAM.

Quanto maior for o número  $M$  de símbolos mais densa será a constelação, e maior deverá ser a SNR para evitar aumento na SER:

Para manter a SER em  $10^{-4}$  (1 símbolo errado a cada  $1 \times 10^4$  símbolos recebidos):

- 4-QAM necessita uma SNR/bit mínima de 8 dB
- 16-QAM necessita uma SNR/bit mínima de 13.5 dB
- 64-QAM necessita uma SNR/bit mínima de 18 dB



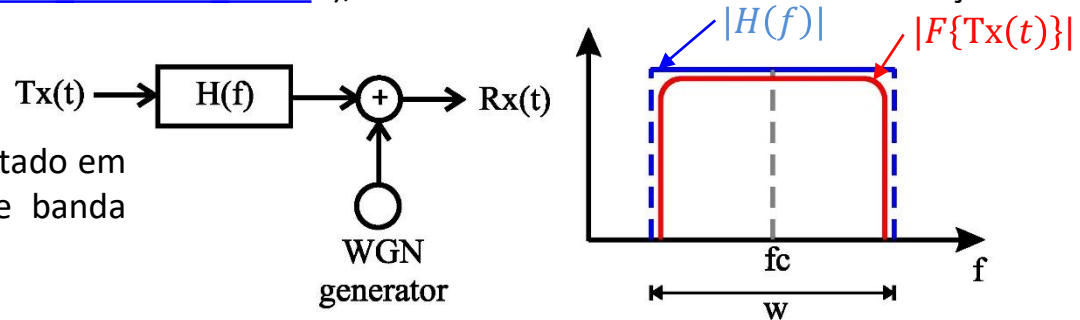
$$\text{SNR}_{\text{dB}} = 20 \log \left( \frac{S}{N} \right)$$

onde  $S$  é o valor RMS do sinal modulado e  $N$  é o valor RMS do ruído

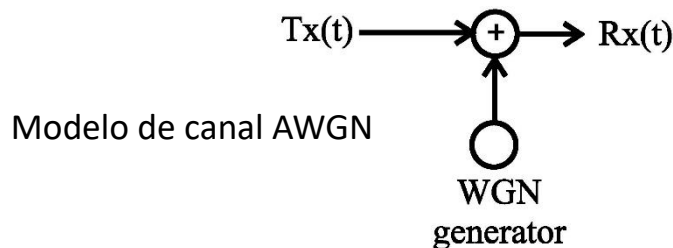
## Porque é necessário minimizar o ruído branco Gaussiano aditivo

Conforme discutido nos slides 27 e 28 do Cap I das notas de aula, o canal de transmissão do enlace entre TX e RX é modelado por um filtro passabanda com função de transferência  $H(f)$  que idealmente apresenta uma curva de magnitude  $|H(f)|$  plana ao longo de toda largura  $W$  do espectro  $F\{Tx(t)\}$  do sinal  $Tx(t)$  do transmissor, sendo  $F\{\cdot\}$  o operador que retorna a Transformada de Fourier do argumento  $\{\cdot\}$ . Na saída do filtro é acrescido um gerador de ruído branco (WGN – *White Gaussian Noise*), conforme mostra a figura abaixo, para efeito de modelar o conjunto de todas as fontes de ruído cujo ruído se somam ao sinal  $Tx(t)$  ao longo do canal de transmissão, e que, pelo teorema do limite central (ver [https://en.wikipedia.org/wiki/Additive\\_white\\_Gaussian\\_noise](https://en.wikipedia.org/wiki/Additive_white_Gaussian_noise)), resulta em um ruído com distribuição Gaussiana de amplitudes.

Modelo de canal ideal limitado em banda.  $W$  é a largura de banda (*bandwidth*) do canal.



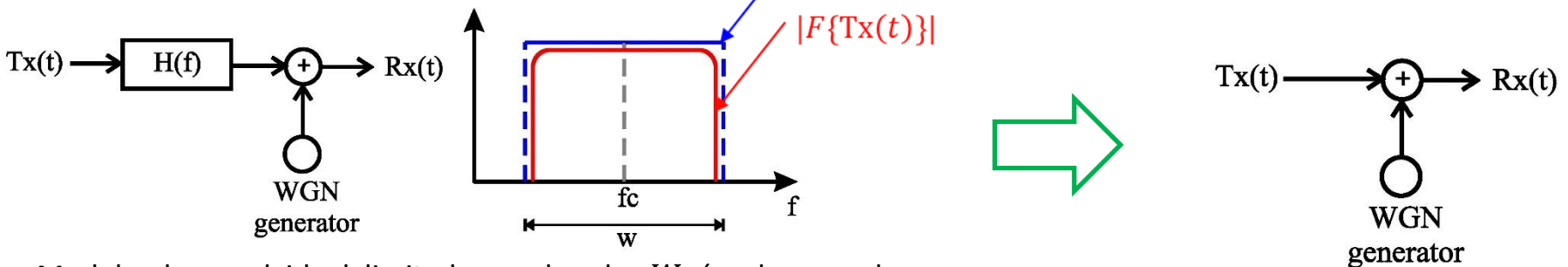
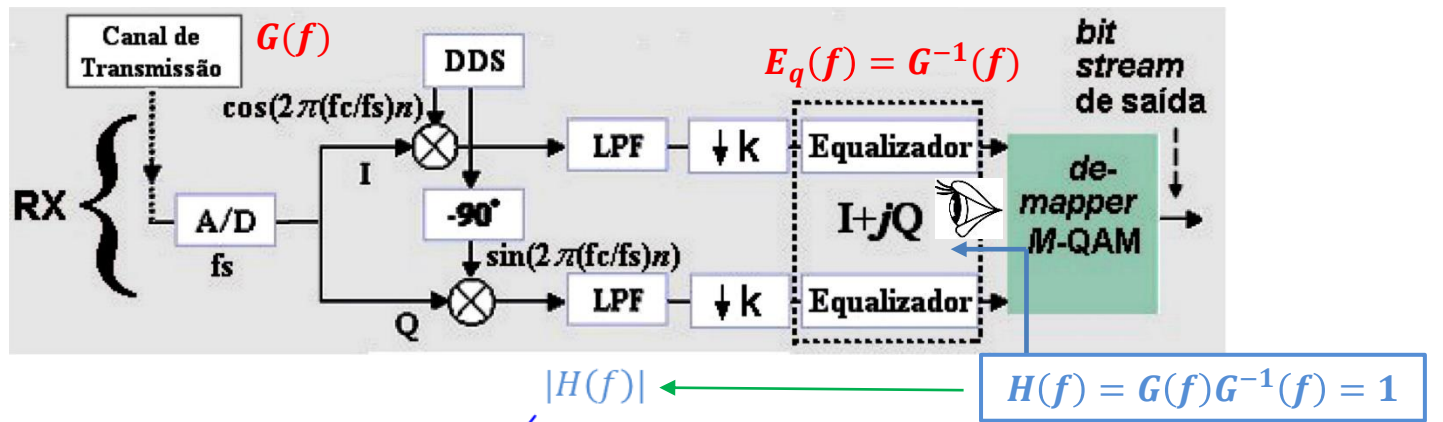
Dado que, idealmente, a curva de magnitude  $|H(f)|$  é plana ao longo de toda largura  $W$  da curva de magnitude  $|F\{Tx(t)\}|$  do espectro do sinal  $Tx(t)$ , então a função de transferência  $H(f)$  do filtro que representa o canal deixa passar sem qualquer alteração de magnitude ou fase a totalidade das componentes espectrais do sinal  $Tx(t)$ . Portanto a única degradação do sinal  $Tx(t)$  em um canal cuja  $H(f)$  do filtro deixa passar “intocáveis” (sem qualquer alteração de magnitude ou fase) a totalidade das componentes espectrais de  $Tx(t)$  é a degradação causada pela adição do ruído do gerador WGN. Assim, por não interagir com as componentes espectrais do sinal  $Tx(t)$ , o filtro com função de transferência  $H(f)$  pode ser retirado do modelo de canal acima, simplificando o modelo de canal ideal limitado em banda para o modelo de canal AWGN (*Additive White Gaussian Noise*), em que a única degradação imposta pelo canal é a adição de ruído branco Gaussiano:





## Porque é necessário minimizar o ruído branco Gaussiano aditivo

Conforme já discutido nos slides 27 e 28 do Cap I, o modelo de canal ideal limitado em banda só existe na prática por ação do equalizador do RX, conforme figura abaixo, cujo hardware implementa um filtro adaptativo com função de transferência  $E_q(f)$  que idealmente aproxima a função de transferência inversa  $G^{-1}(f)$  da função de transferência  $G(f)$  do canal (equalizadores serão estudados em Sistemas de Comunicação Digital II). Como o bloco do canal de transmissão está em série com o bloco do equalizador no diagrama do RX (vide abaixo), então a função de transferência conjunta dos dois blocos, que é o que o *de-mapper* “vê” na sua entrada, é  $H(f) = G(f)G^{-1}(f) = 1$ . Especificamente, o equalizador é um sistema adaptativo que busca identificar as frequências dos zeros da  $G(f)$  que são estabelecidos pelo cenário de *multipath* no canal, tentando fazer com que os pólos de sua função de transferência  $E_q(f) \cong G^{-1}(f)$  ocorra nas frequências dos zeros de  $G(f)$ , de modo que os polos do equalizador anulem os zeros do canal, e a função de transferência resultante  $H(f) = G(f)G^{-1}(f) = 1$  “vista” pelo *de-mapper* seja a função de transferência de um canal ideal limitado em banda, e, em consequência, o canal seja “visto” pelo RX como um canal AWGN:



Modelo de canal ideal limitado em banda.  $W$  é a largura de banda (*bandwidth*) do canal.

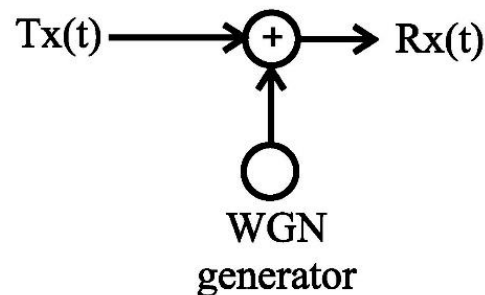
Modelo de canal AWGN

## Porque é necessário minimizar o ruído branco Gaussiano aditivo

Ao ruído gerado pelo gerador de ruído branco WGN na entrada do RX que modela a soma de todas as fontes de ruído no canal de transmissão é necessário acrescentar o ruído branco Gaussiano gerado pelo movimento aleatório dos elétrons nas estruturas condutoras de componentes do *front-end* de RF do RX. O *front-end* é constituído basicamente pelo LNA (*Low Noise Amplifier*) na entrada do RX, incluindo antena e cabo coaxial. Este movimento aleatório dos elétrons em estruturas condutoras (trilhas de PCB, junções de transistores, diodos, etc...) é causada por inúmeros tipos de fontes de radiação térmica.

A fonte de radiação térmica primordial é a radiação eletromagnética do *cosmic microwave background* (CMB) (ver <https://www.testandmeasurementtips.com/noise-floor-come/>). O pico do espectro do CMB ocorre em 150GHz, o que caracteriza o CMB como sendo uma radiação térmica porque ocorre na faixa da luz infra-vermelha, que é a faixa de frequências de radiação que causa calor. O CMB é a radiação que restou no universo desde a fase denominada *recombination* na cosmologia do Big Bang ([https://en.wikipedia.org/wiki/Recombination\\_\(cosmology\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Recombination_(cosmology))). O espectro da radiação CMB está situado principalmente na banda de microondas, e, uma vez que luz é uma radiação eletromagnética, o CMB é a luz mais antiga do universo. A radiação solar é outra fonte importante de radiação térmica que contribui de maneira significativa para elevar o *noise-floor* em enlaces wireless (<https://www.qsl.net/n1bwt/chap10.pdf>).

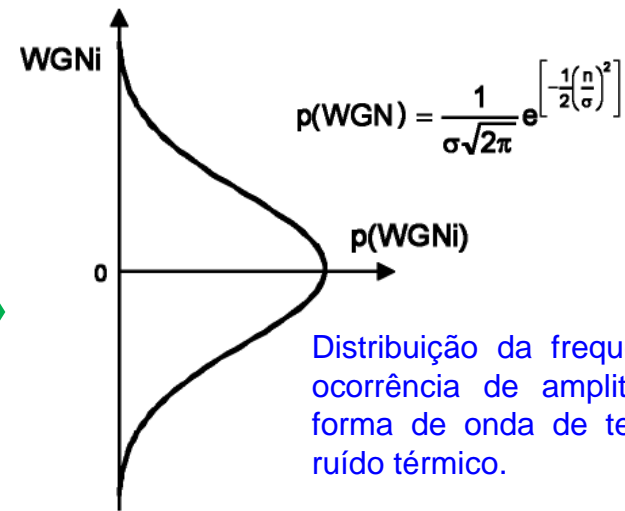
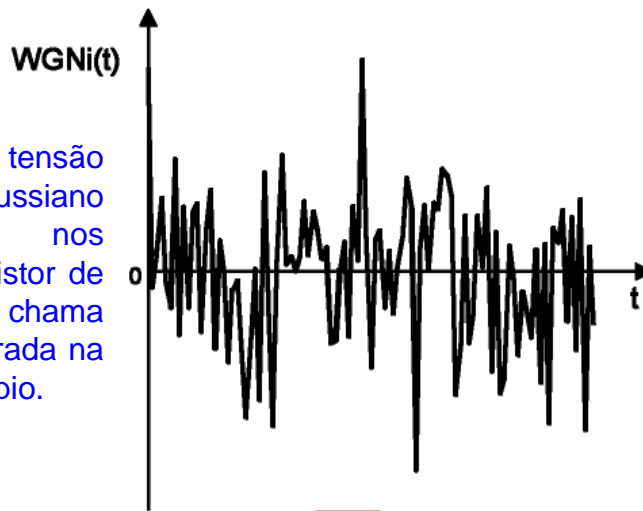
O movimento aleatório dos elétrons imersos no campo eletromagnético irradiado por uma fonte de radiação térmica é uma corrente elétrica aleatória que gera uma tensão de ruído térmico na impedância intrínseca de qualquer estrutura condutora, afetando a integridade do sinal em amplificadores e circuitos eletrônicos, e corrompendo o sinal de modo aditivo, da mesma forma que o ruído aditivo que ocorre no canal. O ruído térmico está presente em todos os sistemas de comunicação e é a fonte de ruído predominante para enlaces acima de 30 MHz.



## Porque é necessário minimizar o ruído branco Gaussiano aditivo

Uma tensão de ruído com distribuição Gaussiana de média zero se comporta de maneira tal que valores positivos e negativos de pequena amplitude ocorrem frequentemente ao longo do tempo. Picos de amplitude maior ocorrem raramente, conforme mostra a figura. A função de autocorrelação do ruído branco é impulsiva, significando que o ruído branco é descorrelacionado com qualquer função do domínio tempo exceto consigo mesmo. Em consequência, a densidade espectral de potência (a transformada de Fourier da função autocorrelação) é constante no domínio frequência, o que justifica o ruído ser chamado de branco em uma alusão ao fato de o espectro da luz branca apresentar magnitude constante na faixa de frequências do espectro da luz visível.

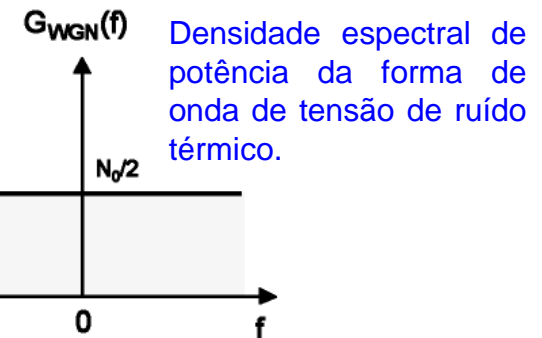
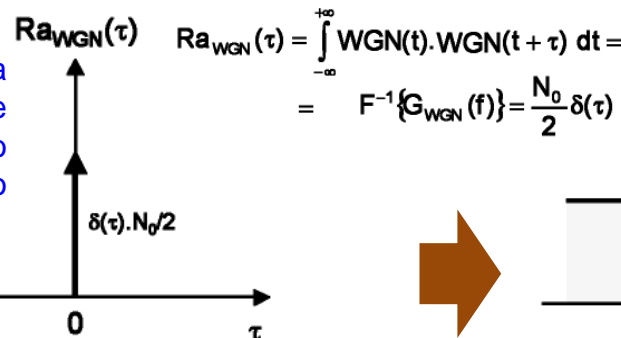
Forma de onda de tensão de ruído térmico Gaussiano branco medida nos terminais de um resistor de 10MΩ aquecido na chama de uma vela e mostrada na tela de um osciloscópio.



Distribuição da frequência de ocorrência de amplitudes da forma de onda de tensão de ruído térmico.



Autocorrelação da forma de onda de tensão de ruído térmico Gaussiano branco.



Densidade espectral de potência da forma de onda de tensão de ruído térmico.

**Nota:** “f(t) é correlacionada com g(t)” ⇒ “f(t) é semelhante a g(t) nos instantes de tempo em que a função de correlação entre f(t) e g(t) exibir picos máximos”. Correlação é idêntica à convolução (Sinais e Sistemas), apenas a 2ª função não é invertida no tempo.

# Porque é necessário minimizar o ruído branco Gaussiano aditivo

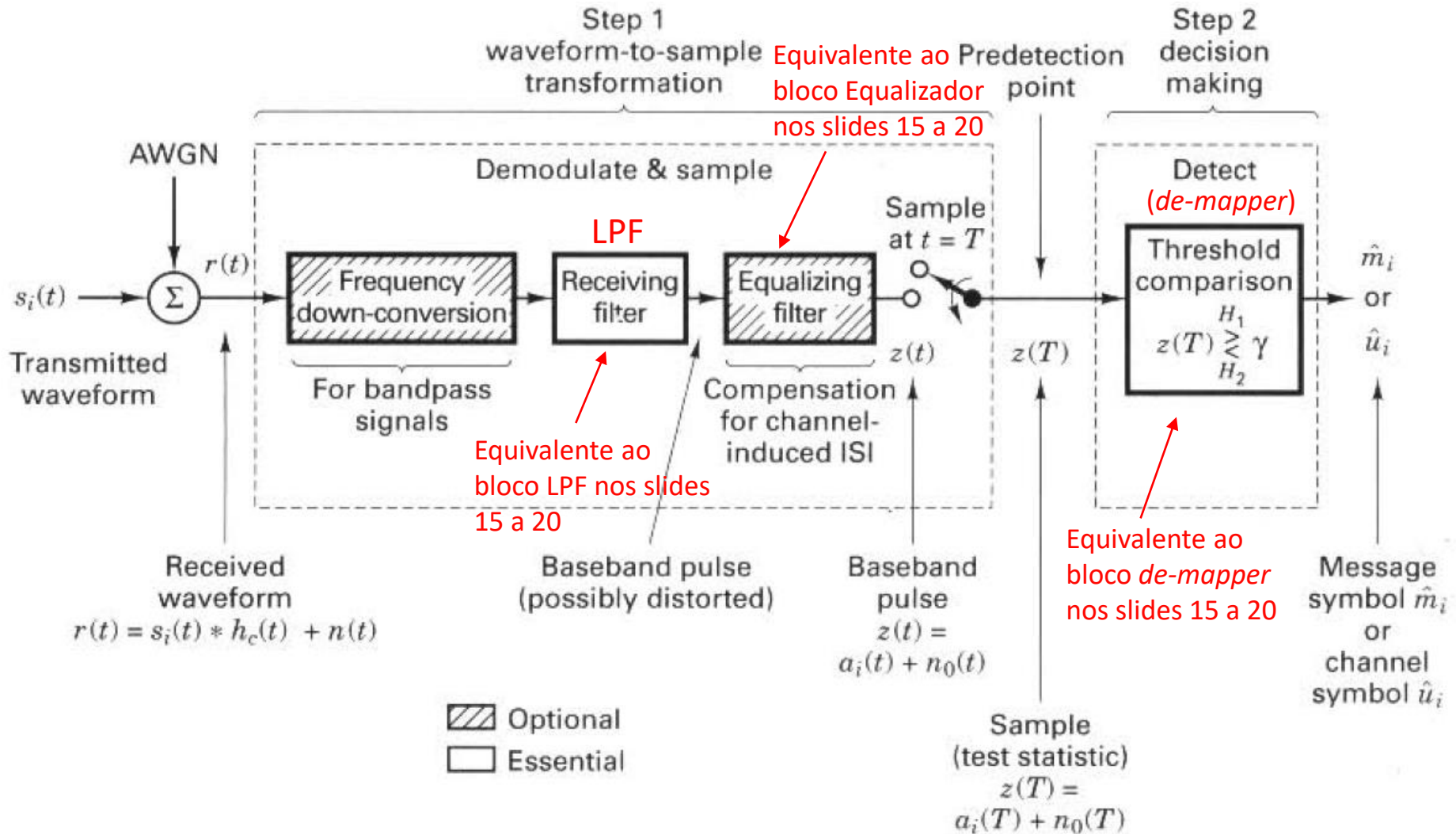


Figure 3.1 Two basic steps in the demodulation/detection of digital signals.

## Porque é necessário minimizar o ruído branco Gaussiano aditivo

Dois processos principais são efetuados no diagrama de blocos simplificado do RX do slide anterior para estimativa do símbolo (e palavra binária associada) originalmente transmitido:

- 1) Processo de demodulação que recupera a forma de onda do pulso bandabase originalmente transmitido, o qual é amostrado a intervalos de tempo de duração do símbolo  $T$ , gerando na saída a amostra  $z(T)$
- 2) Processo de decisão que converte a amostra  $z(T)$  na saída do processo de demodulação na palavra binária detectada na saída do processo de decisão.

**A transmitância do bloco *receiving filter* – filtro de recepção – é de importância crucial para a fidelidade da palavra binária detectada em presença de ruído, tendo como referência a palavra binária originalmente transmitida. O *receiving filter* é um filtro passa-baixa (LPF - *low pass filter*) cuja transmitância objetiva maximizar o sinal em relação ao ruído Gaussiano branco aditivo proveniente do canal de transmissão e do *front-end* de RF analógico (= maximizar a SNR). Nota: Transmitância é a operação realizada pelo bloco no domínio tempo – ver slide 21 de [http://www.fccdecastro.com.br/pdf/SS\\_Aula2\\_12032020.pdf](http://www.fccdecastro.com.br/pdf/SS_Aula2_12032020.pdf).**

Duas transmitâncias ótimas no sentido de maximizar a SNR em presença de ruído branco Gaussiano são usualmente adotadas para o *receiving filter*:

- **Filtro casado (*matched filter*)**
- **Correlator**

Para maximizar a SNR na entrada do processo de decisão e portanto minimizar a BER na sua saída, ambas as transmitâncias fazem uso do fato de que a função de autocorrelação do ruído branco é impulsiva, sendo decorrelacionada com o sinal (conforme discutido no slide 50, o ruído branco é decorrelacionado com qualquer função do domínio tempo exceto consigo mesmo).

Para efeito de simplificar a análise que segue, vamos considerar que a modulação adotada é BPSK (ver slide 23). Se um sinal BPSK é transmitido através de um canal AWGN, a saída do processo de demodulação referido em 1) acima pode ser definida por

$$z(T) = a_i(T) + n_0(T), \quad i = 1,2 \quad \text{onde } a_i(T) \text{ é a componente desejada do sinal e } n_0(T) \text{ é a componente de ruído.}$$

## Porque é necessário minimizar o ruído branco Gaussiano aditivo

A função densidade de probabilidade do ruído Gaussiano  $n_0$  é dada por

$$p(n_0) = \frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{n_0}{\sigma_0}\right)^2\right]$$

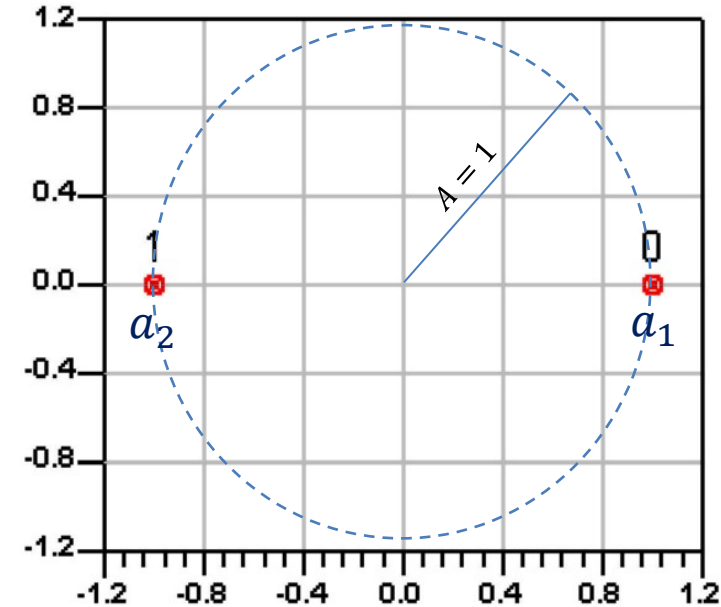
onde  $\sigma_0^2$  é a variância do ruído.

As **probabilidades condicionais** de detecção de símbolos são dadas por

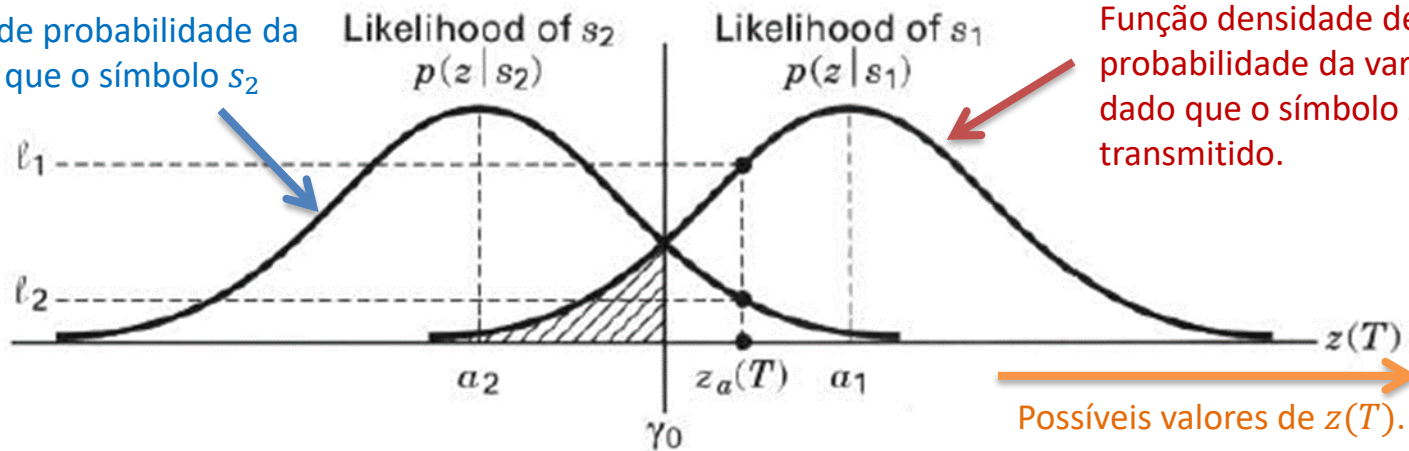
$$p(z|s_1) = \frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z - a_1}{\sigma_0}\right)^2\right]$$

$$p(z|s_2) = \frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z - a_2}{\sigma_0}\right)^2\right]$$

BPSK (Binary PSK)



Função densidade de probabilidade da variável  $z(T)$  dado que o símbolo  $s_2$  foi transmitido.



Função densidade de probabilidade da variável  $z(T)$  dado que o símbolo  $s_1$  foi transmitido.

Figure 3.2 Conditional probability density functions:  $p(z|s_1)$  and  $p(z|s_2)$ .



## Porque é necessário minimizar o ruído branco Gaussiano aditivo

Deste modo, o processo de decisão é baseado na **escolha entre duas**

**hipóteses:**

$$z(T) \begin{cases} \leq \gamma_0 & H_1 \\ > \gamma_0 & H_2 \end{cases}$$

onde  $H_1$  e  $H_2$  representam as duas hipóteses e  $\gamma_0$  o limiar de decisão.

Se a variância do ruído  $\sigma_0^2$  for muito alta (SNR muito baixa), de modo a causar dispersão excessiva dos símbolos  $\{s_2, s_1\}$  na entrada do bloco de decisão (*de-mapper* no slide 51) as palavras binárias {bit 1, bit 0} associadas aos respectivos símbolos originalmente transmitidos serão recuperadas com erro na saída do *de-mapper* para aqueles símbolos da “nuvem” de símbolos dispersos em torno dos símbolos de referência  $\{a_2, a_1\}$  que invadirem uma das regiões de decisão adjacentes, separadas pelo limiar de decisão  $\gamma_0$  (ver slide 20):

bit 1

$$z(T) \leq \gamma_0 \rightarrow H_2 \rightarrow s_2$$

bit 0

$$z(T) > \gamma_0 \rightarrow H_1 \rightarrow s_1$$

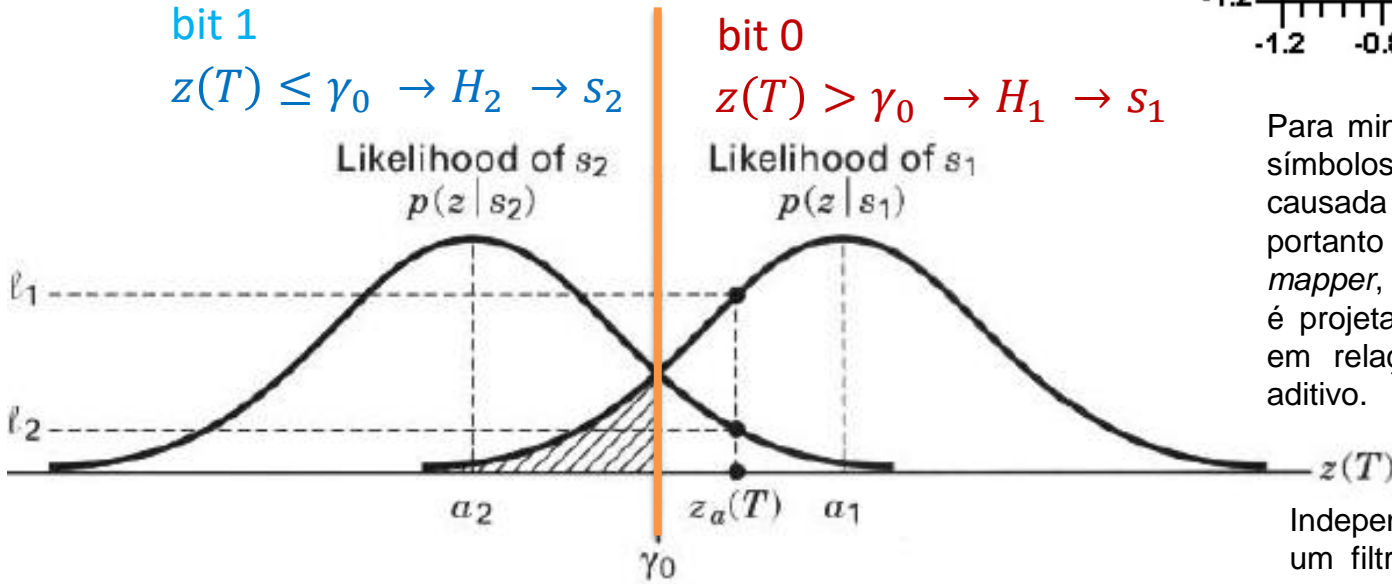
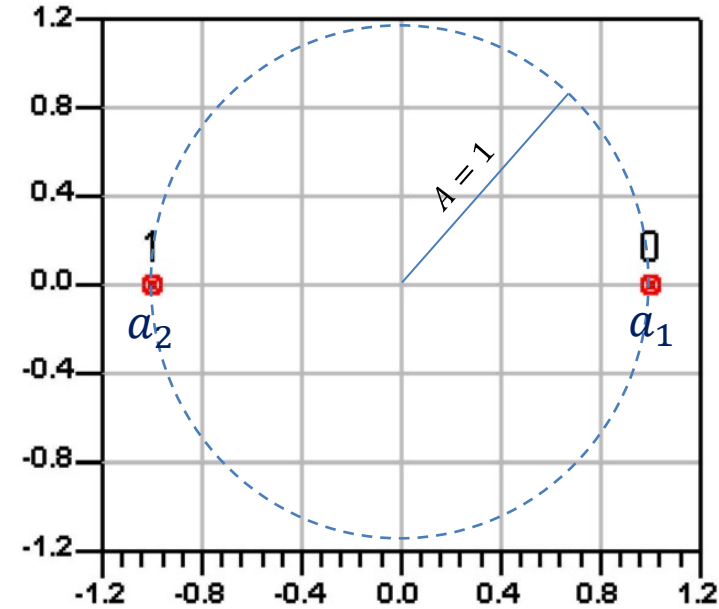


Figure 3.2 Conditional probability density functions:  $p(z|s_1)$  and  $p(z|s_2)$ .

BPSK (Binary PSK)

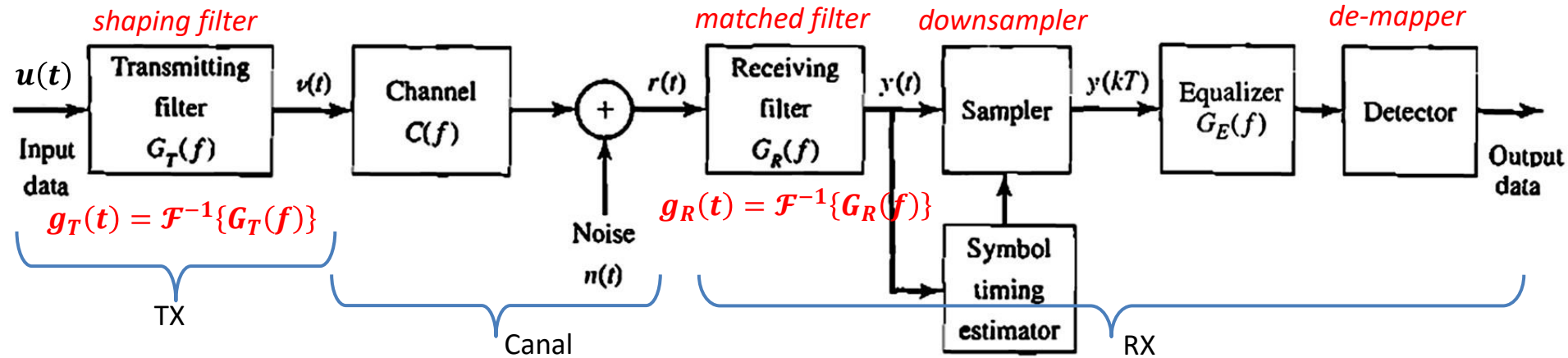


Para minimizar a dispersão excessiva dos símbolos na entrada do *de-mapper* causada por uma alta variância de ruído, e portanto minimizar a BER na saída do *de-mapper*, a transmitância do *receiving filter* é projetada de modo a maximizar o sinal em relação ao ruído Gaussiano branco aditivo.

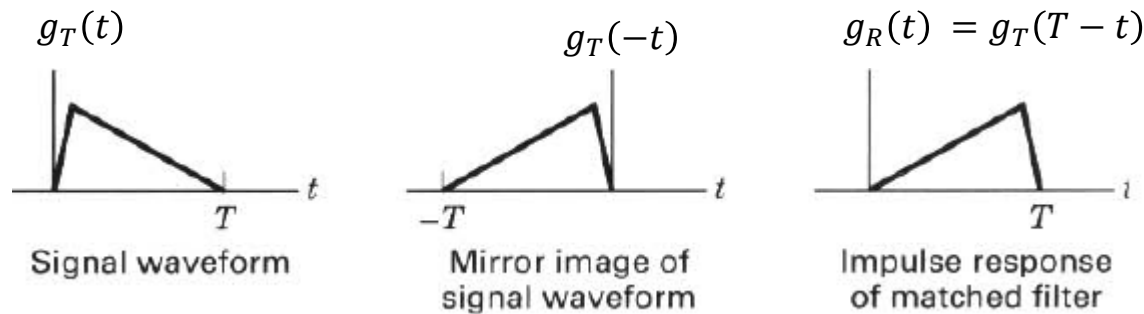
Independente desta transmitância ser a de um filtro casado ou a de um correlador, ambas se baseiam no fato de que o ruído é decorrelacionado com o sinal, conforme veremos a seguir.

## Filtro Casado (*matched filter*) – resposta ao impulso

Para efeito de simplificar a análise que segue, consideraremos um sistema c/ modulação  $M$ -PAM, com símbolos  $A_m \in \{A_0, A_1, \dots, A_{M-1}\}$  e c/ diagrama de blocos simplificado em bandabase mostrado na figura abaixo.



Seja a resposta ao impulso  $g_T(t)$  do *shaping filter* no TX uma forma de onda qualquer no domínio tempo limitada ao intervalo  $0 \leq t \leq T$ , sendo  $T = 1/\text{SymbolRate}$  o período do símbolo, conforme mostrado abaixo. Seja a resposta ao impulso  $g_R(t)$  do *receiving filter* no RX tal que ela resulte do espelhamento de  $g_T(t)$  seguido de um deslocamento  $T$  no tempo, resultando  $g_R(t) = g_T(T - t)$ , situação em que o *receiving filter* se torna um *matched filter*, i.e.,  $g_R(t)$  é *matched (casado)* à  $g_T(t)$ , conforme exemplificado abaixo:



Espelha  $g_T(t)$  em relação à origem do eixo  $t$  e desloca  $T$  segundos a direita (para tornar o filtro causal).

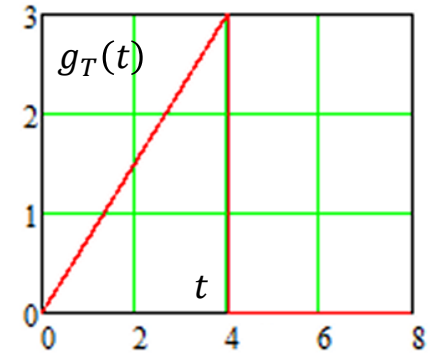
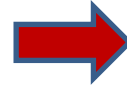
Vamos supor p/ efeito da análise que segue, que o processo adaptativo do equalizador convergiu, tal que  $G_E(f) = C^{-1}(f)$ , e, portanto  $G_E(f)$  e  $C(f)$  podem ser desconsideradas no diagrama de blocos. Assim, basicamente temos  $g_T(t)$  do *shaping filter* do TX em série com  $g_R(t)$  do *matched filter* do RX no fluxo de sinal entre TX e RX.

## Filtro Casado (*matched filter*) – resposta ao impulso

Vamos analisar a interação da resposta ao impulso  $g_T(t)$  do *shaping filter* no TX com a resposta ao impulso  $g_R(t)$  do *matched filter* no RX através de um exemplo.

**Exemplo:** Seja o sistema M-PAM mostrado na figura do slide anterior e seja a resposta ao impulso  $g_T(t)$  do *shaping filter* no TX dada conforme abaixo, sendo a amplitude  $A = 3$  e o período do símbolo  $T = 4[\mu\text{s}]$ .

$$g_T(t) = \begin{cases} \frac{A}{T}t & 0 \leq t \leq T \\ 0 & t < 0 \text{ ou } t > T \end{cases}$$



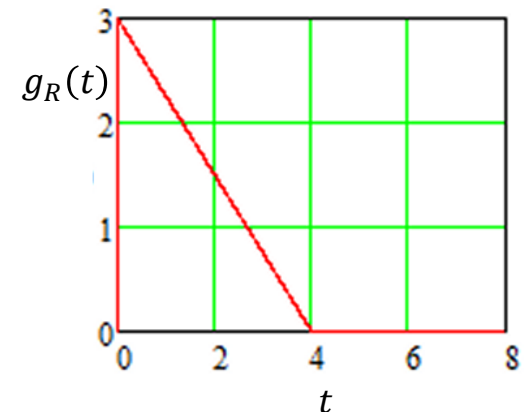
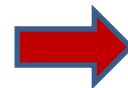
**Pede-se:**

- Determine e plote a resposta ao impulso  $g_R(t)$  do *matched filter* no RX.
- Determine e plote a resposta  $y(t)$  na saída do *matched filter* para um impulso aplicado na entrada  $u(t)$  do *shaping filter*.
- Determine e plote a função de auto-correlação  $Rg_T(t)$  de  $g_T(t)$  e compare com o resultado obtido em (b).

**Solução:**

(a) A resposta ao impulso  $g_R(t)$  de um *matched filter* sempre é dada por  $g_R(t) = g_T(T - t)$ . Portanto, da definição da resposta ao impulso  $g_T(t)$  do *shaping filter* dada no enunciado temos:

$$g_R(t) = g_T(T - t) = \begin{cases} \frac{-A}{T}t + A & 0 \leq t \leq T \\ 0 & t < 0 \text{ ou } t > T \end{cases}$$

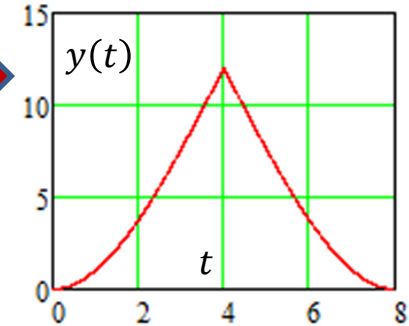


**Nota:** Esta solução é conforme *script* Mathcad disponível em [http://www.fccdecastro.com.br/ZIP/SCD1\\_C4\\_ES56\\_MFILT.zip](http://www.fccdecastro.com.br/ZIP/SCD1_C4_ES56_MFILT.zip).

## Filtro Casado (*matched filter*) – resposta ao impulso

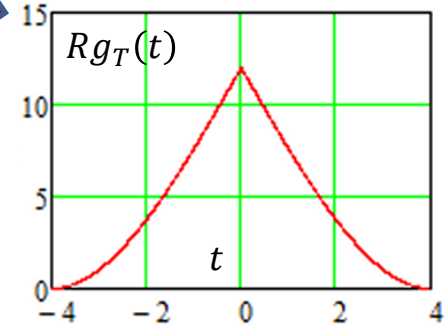
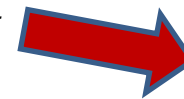
(b) A resposta  $y(t)$  na saída do *matched filter* para um impulso aplicado na entrada  $u(t)$  do *shaping filter* é dada pela resposta ao impulso do bloco equivalente formado pelo bloco *shaping filter* do TX seguido pelo bloco *matched filter* no RX (ver slide 55). A resposta ao impulso do bloco equivalente *shaping filter+matched filter* é dada pela convolução entre  $g_T(t)$  e  $g_R(t)$ :

$$y(t) = g_T(t) * g_R(t) = \int_0^t g_T(\tau) g_R(t - \tau) d\tau$$



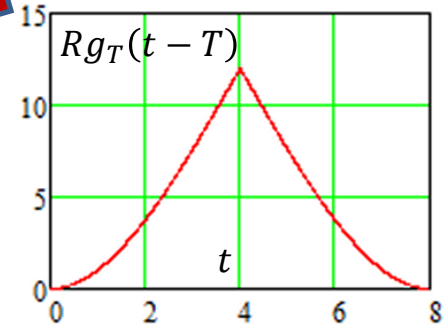
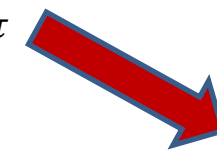
(c) A função de auto-correlação  $Rg_T(t)$  de  $g_T(t)$  é dada por

$$Rg_T(t) = \int_0^T g_T(\tau) g_T(\tau + t) d\tau$$



Atrasando de  $T$  a função de auto-correlação  $Rg_T(t)$  para efeito de comparação com a resposta  $y(t)$  na saída do *matched filter*:

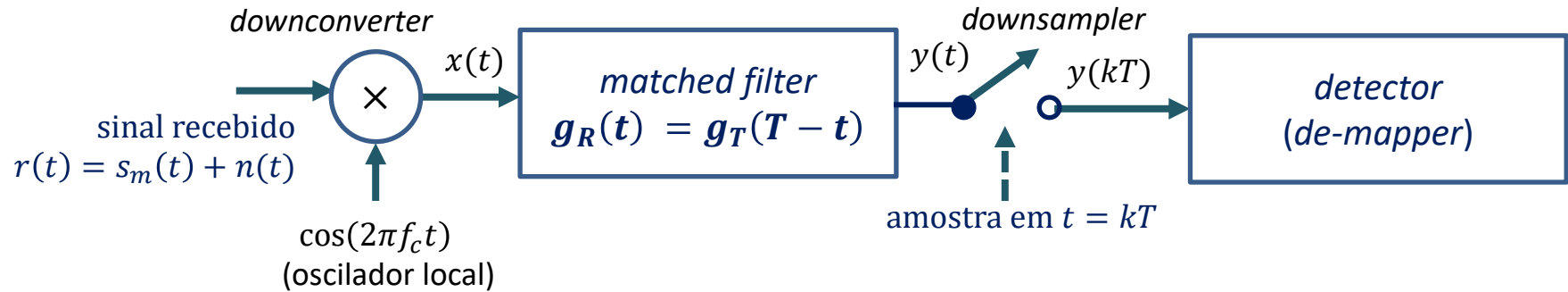
$$Rg_T(t - T) = \int_0^T g_T(\tau) g_T(\tau + t - T) d\tau$$



Note que a resposta  $y(t)$  na saída do *matched filter* do RX à uma excitação  $\delta(t)$  aplicada na entrada  $u(t)$  do *shaping filter* do TX (ver slide 55) é idêntica à função de auto-correlação  $Rg_T(t - T)$  de  $g_T(t)$ . Isto evidencia que cada pulso de duração  $T$  transmitido pelo *shaping filter* é correlacionado com uma réplica dele mesmo ao chegar no *matched filter* do RX, após ter trafegado através do canal de transmissão. **Portanto, o ruído branco Gaussiano adicionado ao sinal no canal será minimizado no processo de correlação efetuado pelo *matched filter* porque o ruído branco é descorrelacionado com qualquer função do domínio tempo exceto consigo mesmo (ver slide 50), conforme veremos a seguir.**

## Filtro Casado (*matched filter*) – minimização do ruído branco e maximização do sinal

Consideremos agora um sistema c/ modulação  $M$ -PAM, com símbolos  $A_m \in \{A_0, A_1, \dots, A_{M-1}\}$ , frequência central do canal  $f_c$  e c/ diagrama de blocos simplificado do RX mostrado na figura abaixo.



Seja o sinal  $M$ -PAM transmitido no canal com frequência central  $f_c$  dado por

$$s_m(t) = A_m g_T(t) \cos(2\pi f_c t) \quad , 0 \leq t \leq T \quad (1)$$

De modo que o sinal recebido na entrada do RX é

$$r(t) = s_m(t) + n(t) = A_m g_T(t) \cos(2\pi f_c t) + n(t) \quad , 0 \leq t \leq T \quad (2)$$

E na entrada do *matched filter* temos:

$$x(t) = r(t) \cos(2\pi f_c t) = A_m g_T(t) \cos^2(2\pi f_c t) + n(t) \cos(2\pi f_c t) \quad (3)$$

## Filtro Casado (*matched filter*) – minimização do ruído branco e maximização do sinal

O *matched filter* efetua a convolução de  $x(t)$  com a sua resposta ao impulso  $g_R(t) = g_T(T - t)$  :

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * g_R(t) = \int_0^t x(\tau) g_R(t - \tau) d\tau = \int_0^t x(\tau) g_T(\tau - t + T) d\tau = \\ &= \int_0^t [A_m g_T(\tau) \cos^2(2\pi f_c \tau) + n(\tau) \cos(2\pi f_c \tau)] g_T(\tau - t + T) d\tau = \\ &= \int_0^t A_m \cos^2(2\pi f_c \tau) g_T(\tau) g_T(\tau - t + T) d\tau + \int_0^t n(\tau) \cos(2\pi f_c \tau) g_T(\tau - t + T) d\tau \end{aligned} \quad (4)$$

O ruído branco  $n(\tau)$  é descorrelacionado com qualquer função do domínio tempo exceto consigo mesmo (ver slide 50) – portanto o ruído resulta significativamente minimizado por ação desta integral.

Dado que o *downsampler* (vide figura no slide anterior) amostra  $y(t)$  ao final do período  $T$  de cada símbolo, podemos fazer  $t = T$  em (4), resultando:

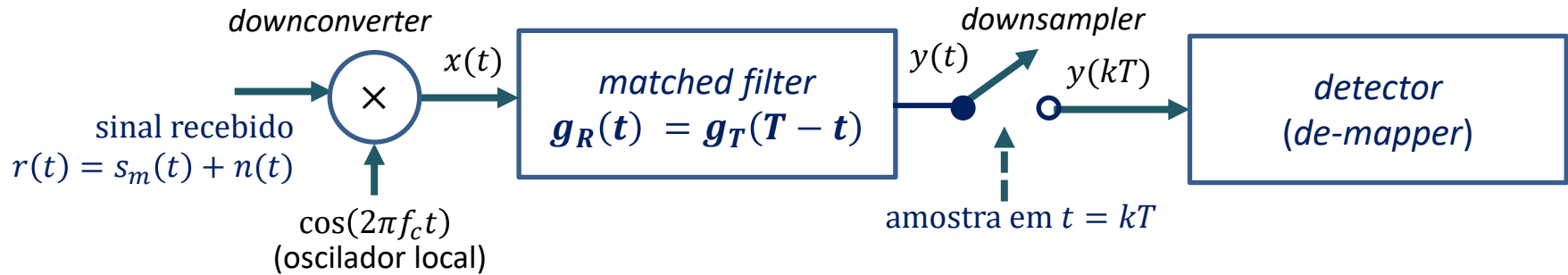
$$y(T) = \int_0^T A_m \cos^2(2\pi f_c \tau) g_T(\tau) g_T(\tau) d\tau = A_m \int_0^T \underbrace{g_T^2(\tau) \cos^2(2\pi f_c \tau)}_{> 0} d\tau \quad (5)$$

Note que o integrando em (5) é sempre um número positivo, de modo que ao final do período  $T$  de integração o sinal terá sido significativamente maximizado, assim como simultaneamente o ruído foi significativamente minimizado conforme equação (4). Este efeito maximiza a SNR, minimizando a dispersão dos símbolos na entrada do *de-mapper* causada pelo ruído branco Gaussiano, e portanto minimiza a BER na saída do *de-mapper*.



## Filtro Casado (*matched filter*) – Exemplo

**Exemplo:** Considere o RX de um sistema  $M$ -PAM com frequência central do canal  $f_c = 40\text{MHz}$ ,  $\text{SymbolRate} = 10\text{MHz}$  e com símbolos  $A_m \in \{A_0, A_1, \dots, A_{M-1}\}$ , cujo diagrama de blocos simplificado é mostrado na figura abaixo.

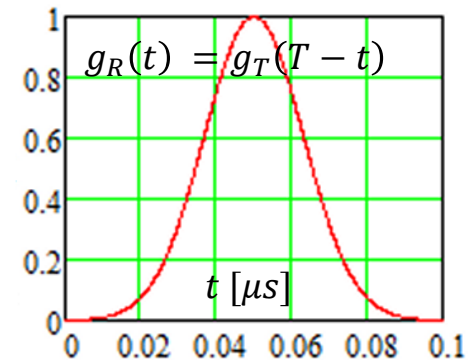
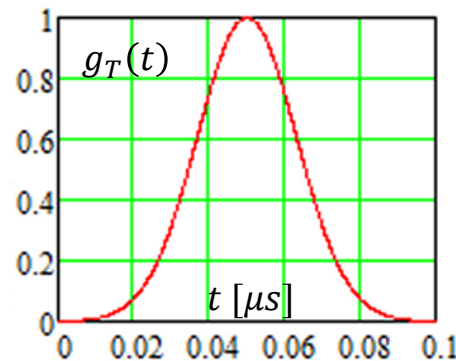


A resposta ao impulso  $g_T(t)$  do *shaping filter* no TX e a resposta ao impulso  $g_R(t)$  do *matched filter* no RX é conforme abaixo:

$$g_T(t) = K_0 e^{-\pi \left( \frac{t - \frac{T}{2}}{\tau} \right)^2}$$

$$K_0 = 1 \quad \tau = 0.033 \mu\text{s}$$

$$T = 1/\text{SymbolRate} = 0.1 \mu\text{s}$$

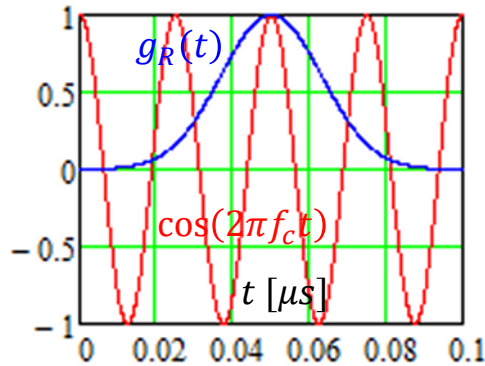


A SNR medida na entrada do RX é maior do que 60 dB, de modo que o ruído  $n(t)$  na entrada pode ser desprezado.

**Pede-se:** (a) Plote em um mesmo gráfico o sinal do oscilador local e a resposta ao impulso  $g_R(t)$  do *matched filter*. (b) Assumindo que o símbolo transmitido seja  $A_m = 1$ , plote  $p/ 0 < t < 2T$  a resposta  $y(t)$  ao símbolo transmitido  $A_m = 1$ .

## Filtro Casado (*matched filter*) – Exemplo

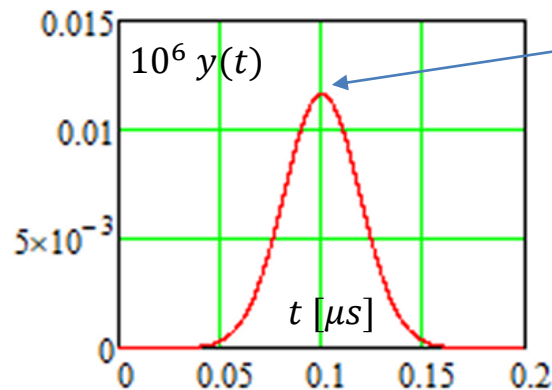
**Solução: (a)** Gráfico do sinal do oscilador local e da resposta ao impulso  $g_R(t)$  do *matched filter*:



**(b)** Para obter a resposta  $y(t)$  ao símbolo transmitido  $A_m = 1$  e plotar a resposta no intervalo  $0 < t < 2T$ , vamos utilizar a equação (4) do slide 59 com  $n(t) = 0$ :

$$y(t) = \int_0^t A_m \cos^2(2\pi f_c \tau) g_T(\tau) g_T(\tau - t + T) d\tau \quad (6)$$

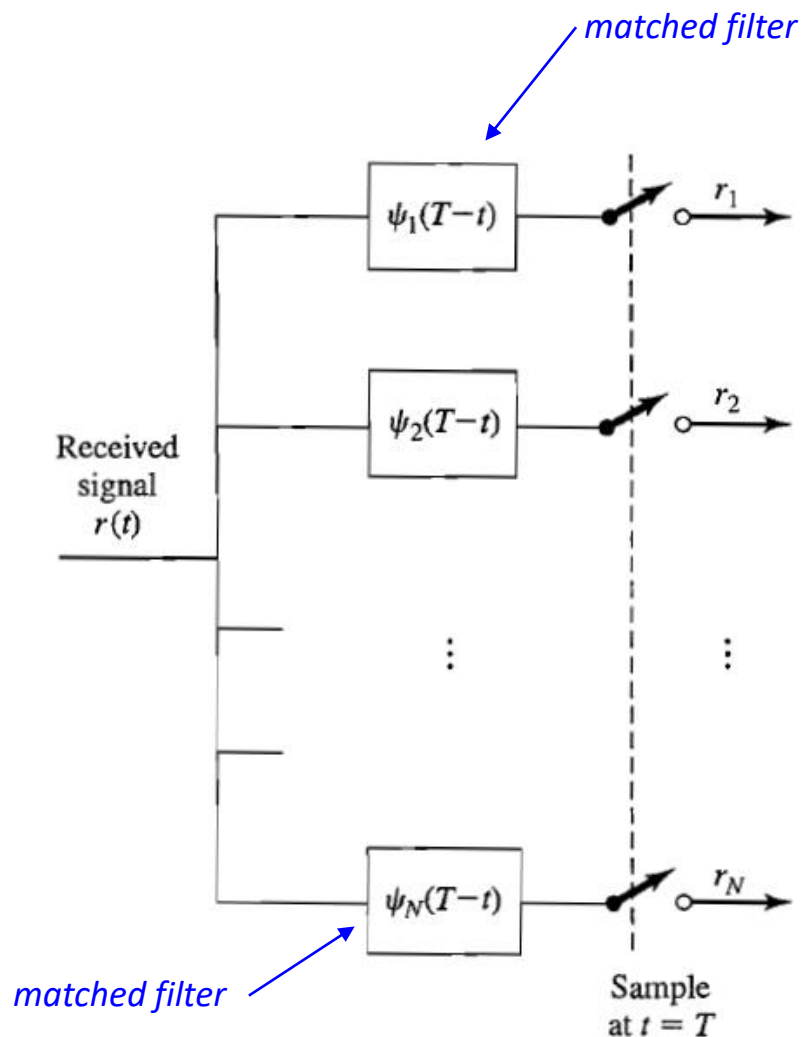
Resolvendo numericamente (6) para o intervalo  $0 < t < 2T$  obtemos a resposta  $y(t)$  ao símbolo transmitido  $A_m = 1$ :



O *downsampler* na figura do enunciado amostra  $y(t)$  em  $t = kT$  e portanto “capta” o valor máximo de  $y(t)$ , amplificando o sinal e atenuando o *noise-floor* de ruído. Em operação real o período de integração se encerra no instante de amostragem em  $t = T = 0.1 \mu s$ , quando o filtro é resetado e é iniciado um novo período de integração para o próximo símbolo recebido.

**Nota:** Esta solução é conforme *script* Mathcad disponível em [http://www.fccdecastro.com.br/ZIP/SCD1\\_C4\\_ES60\\_MFILTRF.zip](http://www.fccdecastro.com.br/ZIP/SCD1_C4_ES60_MFILTRF.zip).

## Filtro Casado (*matched filter*) – número $N$ de filtros em função do tipo de modulação adotada



Para um espaço de sinal multidimensional, de dimensão  $N$ , a demodulação por filtro casado deve implementar um banco de  $N$  filtros, um para cada dimensão do espaço de sinal:

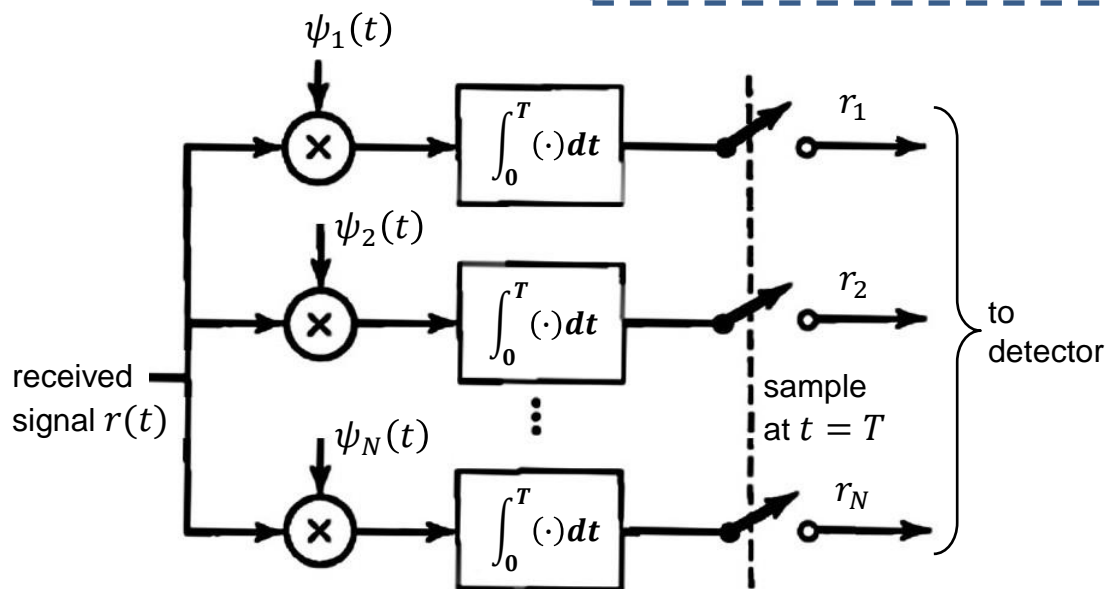
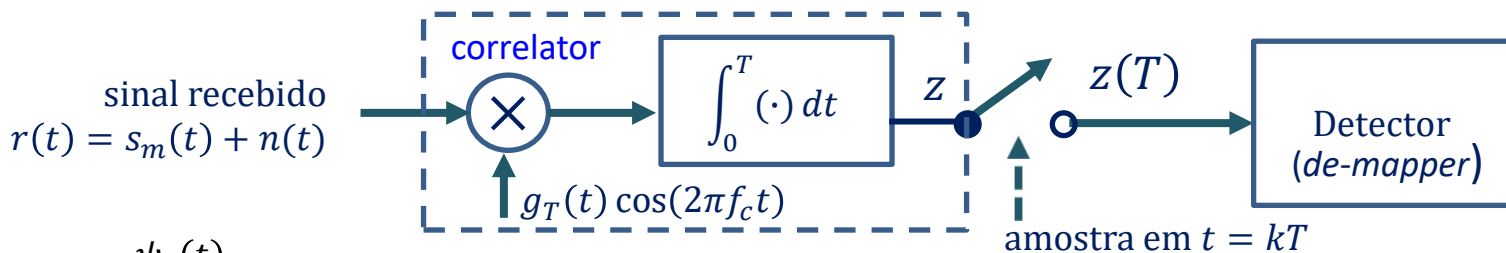
- Para modulações  $M$ -PAM,  $N = 1$ .
- Para modulações  $M$ -QAM e  $M$ -PSK (modulações IQ),  $N = 2$  (sub-canal I e sub-canal Q).
- Para modulações  $M$ -FSK,  $N = M$  é o número de tons ortogonais (FSK será estudada adiante).

## Demodulação por Correlador

Um correlador tem finalidade idêntica à de um *matched filter* no processo de demodulação visto nos slides anteriores. Conforme mostra a figura abaixo, um correlador efetua a integração do produto do sinal recebido  $r(t)$  (ver equação (2) no slide 58) por um template (uma réplica armazenada em memória no hardware do RX) da resposta ao impulso  $g_T(t)$  do *shaping filter* do TX, realizando, portanto, o mesmo processo de correlação efetuado por um *matched filter*. A integração é efetuada ao longo do intervalo de duração  $T$  de um símbolo, sendo  $f_c$  a frequência central do canal de transmissão.

$$z(T) = \int_0^T r(t) g_T(t) \cos(2\pi f_c t) dt = \int_0^T [A_m g_T(t) \cos(2\pi f_c t) + n(t)] g_T(t) \cos(2\pi f_c t) dt \quad (7)$$

Note a semelhança de (7) com as equações (4) e (5) obtidas para o *matched filter*. Ao final do intervalo de integração  $T$  a saída  $z$  do correlador é amostrada e o valor  $z(T)$  é enviado ao detector (de-mapper), que converte este valor na palavra binária correspondente à amplitude do pulso  $g_T(t)$  transmitido:



De forma similar à demodulação por *matched filter*, para um espaço de sinal multidimensional, de dimensão  $N$ , a demodulação por correlação deve implementar um banco de  $N$  correladores, um para cada dimensão do espaço de sinal.

## Demodulação por *Matched Filter* e Correlator - Exemplo

**Exemplo:** O diagrama abaixo mostra a etapa de modulação de um sistema de comunicação digital 16-QAM:

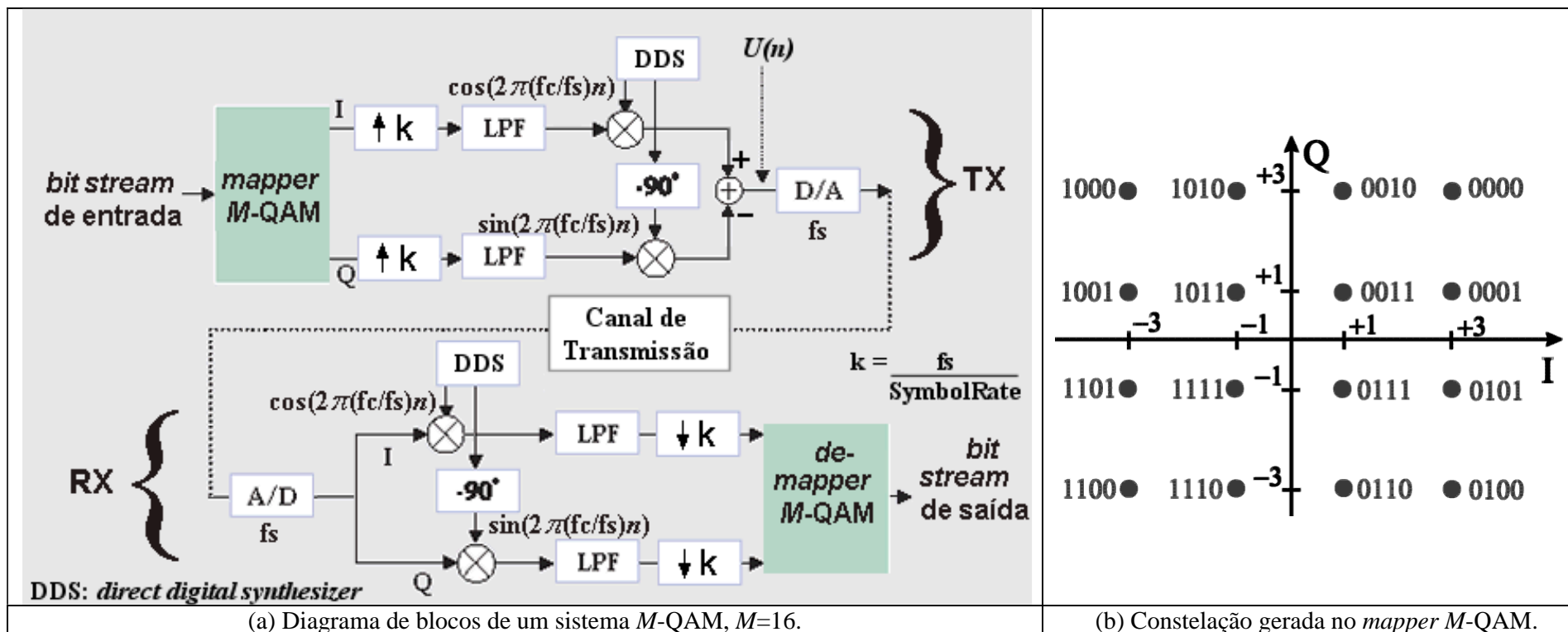


Figura 1: Etapa de modulação de um sistema de comunicação digital 16-QAM.

A taxa do *bitstream* na entrada do *mapper* é 24Mbps. Sabe-se que a frequência de amostragem do D/A é  $f_s=30\text{MHz}$  e que a frequência da portadora é  $f_c$ . Cada símbolo IQ tem uma duração  $T = 1 / \text{symbol rate}$ , onde *symbol rate* é a taxa de símbolos na saída do *mapper*.

## Demodulação por *Matched Filter* e Correlador - Exemplo

A Figura 2 mostra a resposta  $h_u[n]$  do *upsampler*  $\uparrow k$  a um pulso de amplitude 1 e de largura  $T$ . Conforme mostra a Figura 1(a), o *upsampler* recebe em sua entrada os pulsos de saída do *mapper*. Note que para 16-QAM, a cada palavra binária de 4 bits do *bitstream*, a saída I (e Q) do *mapper* gera um pulso de largura  $T$  cujas possíveis amplitudes são  $\{-3, -1, +1, +3\}$ .

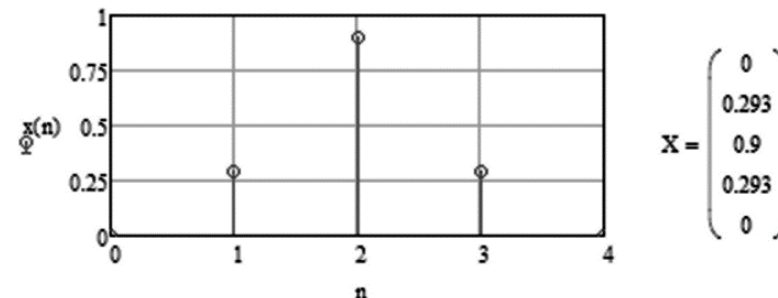
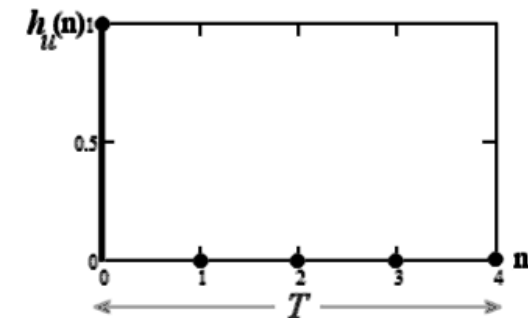


Figura 2: Resposta ao impulso  $h_u[n]$  do *upsampler*  $\uparrow k$  no TX.

Figura 3: Resposta ao impulso  $g_T[n]$  do *shaping filter* (TX) e do *matched filter* (RX) – LPF (*low pass filter*) na Figura 1(a). Os elementos do vetor  $X$  são os valores numéricos de  $x[n] = g_T[n]$ .

O *downsampler*  $\downarrow k$  no RX efetua o processo inverso: Para cada seqüência de duração total  $T$  composta por  $k$  amostras consecutivas na entrada do *downsampler*, a primeira amostra é mantida e as  $k - 1$  amostras subseqüentes são retiradas (decimadas) da seqüência de modo a resultar uma seqüência de duração total  $T$  com 1 única amostra após o *downsampler*.

O *shaping filter* do TX (LPF na Figura 1) e o *matched filter* do RX (LPF na Figura 1) apresentam resposta ao impulso  $g_T[n]$ , conforme  $x[n]$  mostrado na Figura 3, sendo  $T$  a duração total de  $g_T[n] = x[n]$ .



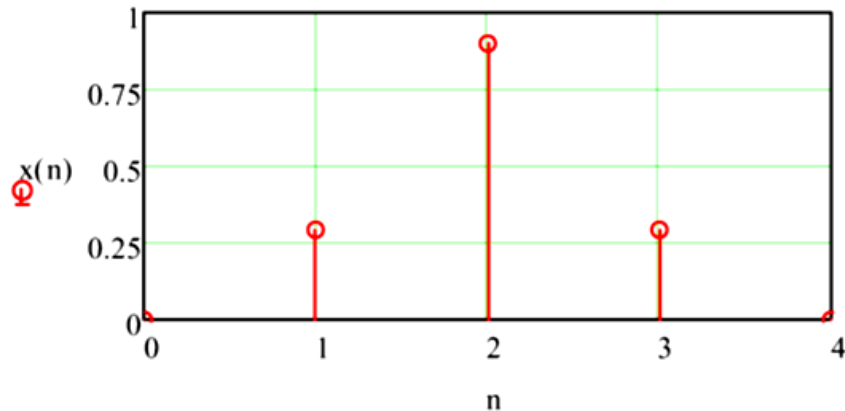
Para as condições operacionais especificadas nos slides anteriores, pede-se:

- a) O gráfico da seqüência de amostras  $z[n]$  na saída do *matched filter* do sub-canal I do RX que resulta da palavra binária **0101** aplicada na entrada do *mapper* 16-QAM do TX. Assuma que a SNR no canal de transmissão é maior que 120dB e que o CAG e o equalizador no RX eliminam totalmente os efeitos de multipercurso, tornando unitária a transmitância do canal de transmissão (i.e., não ocorre atenuação nem degradação do sinal entre TX e RX). **Nota:** Conforme visto na disciplina de Sinais e Sistemas, o resultado  $z[n]$  da convolução discreta entre duas seqüências  $x[n]$  e  $y[n]$ , isto é,  $z[n] = x[n] * y[n]$ , é dado por  $z[n] = \sum_{m=m_1}^{m_2} x[m]y[n - m]$  onde  $m_1$  e  $m_2$  são tais que o produto de todas as amostras não nulas das seqüências  $x[n]$  e  $y[n]$  sejam contempladas no somatório.
- b) Repita a) assumindo que o RX utilize um correlator analógico ao invés de um *matched filter* digital.
- c) Assumindo que o canal seja AWGN, qual amostra deve ser mantida na saída  $z[n]$  do *matched filter* do RX, após a operação de decimação efetuada pelo *downsampler*, para que seja maximizada a SNR na entrada do *de-mapper* (i.e., seja minimizada a BER na saída do mesmo)?
- d) Repita c) assumindo que o RX utilize um correlator analógico ao invés de um *matched filter* digital.

**Nota:** A solução a seguir é conforme *script* Mathcad disponível em [http://www.fccdecastro.com.br/ZIP/SCD1\\_C4\\_ES64\\_MFCORR.zip](http://www.fccdecastro.com.br/ZIP/SCD1_C4_ES64_MFCORR.zip).

### Solução:

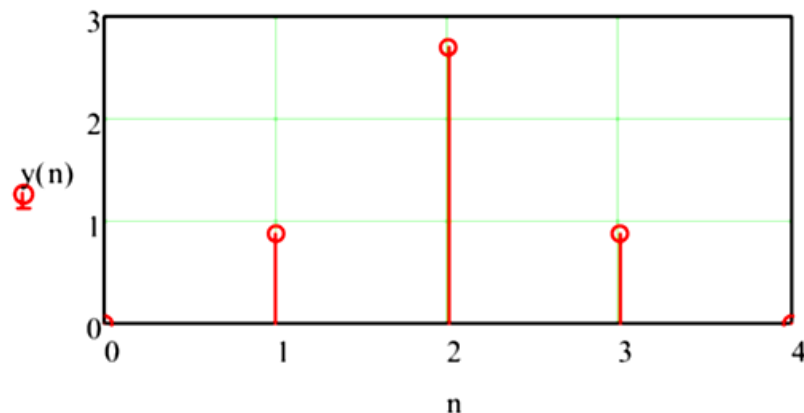
a)  $g_T(n) = x(n)$  é a resposta ao impulso do *shaping filter* (LPF) no TX que é idêntica à resposta ao impulso do *matched filter* (LPF) no RX:



$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.293 \\ 0.9 \\ 0.293 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$N = 5 \rightarrow$  número de amostras em  $x(n)$  obtido por  $N = k + 1 = f_s / \text{symbolrate}$ .  $f_s = 30 \text{ MHz}$  é dado no enunciado e o symbolrate é obtido de  $\text{symbolrate} = \text{bitrate} / \text{numbitspersymbol} = 24 \text{ Mbps} / 4 \text{ bpsymb} = 6 \text{ MHz}$

O *upsampler*  $\uparrow k$  do sub-canal I do TX mantém o valor I de entrada na amostra inicial e insere  $k-1$  amostras adicionais nulas, sendo todas as amostras uniformemente espaçadas no intervalo  $T$  de um símbolo IQ. Para a palavra binária **0101**, o *mapper* do TX gerará um valor  $I = 3$  em sua saída (vide Figura 1 do enunciado). Portanto, a saída  $y(n)$  do *shaping filter* (LPF) do sub-canal I do TX para esta palavra binária será a dado por  $I * g_T(n)$ :



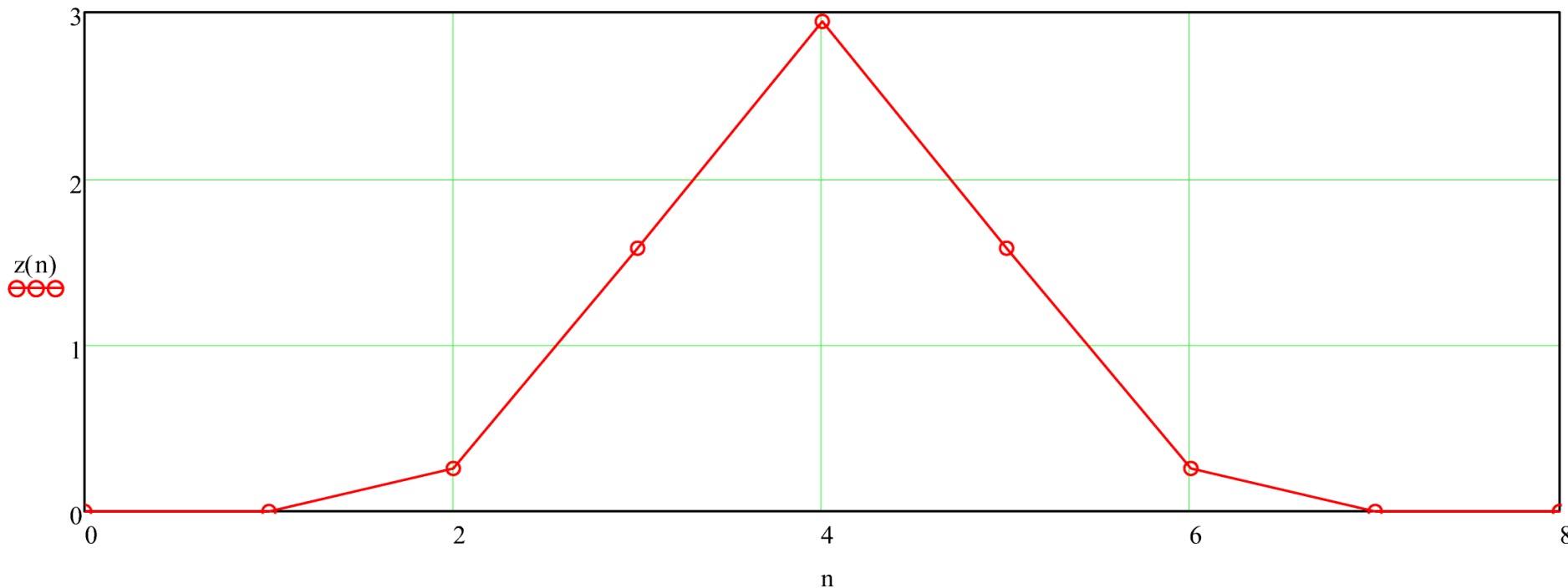
$$Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.88 \\ 2.7 \\ 0.88 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## Demodulação por *Matched Filter* e Correlator - Exemplo

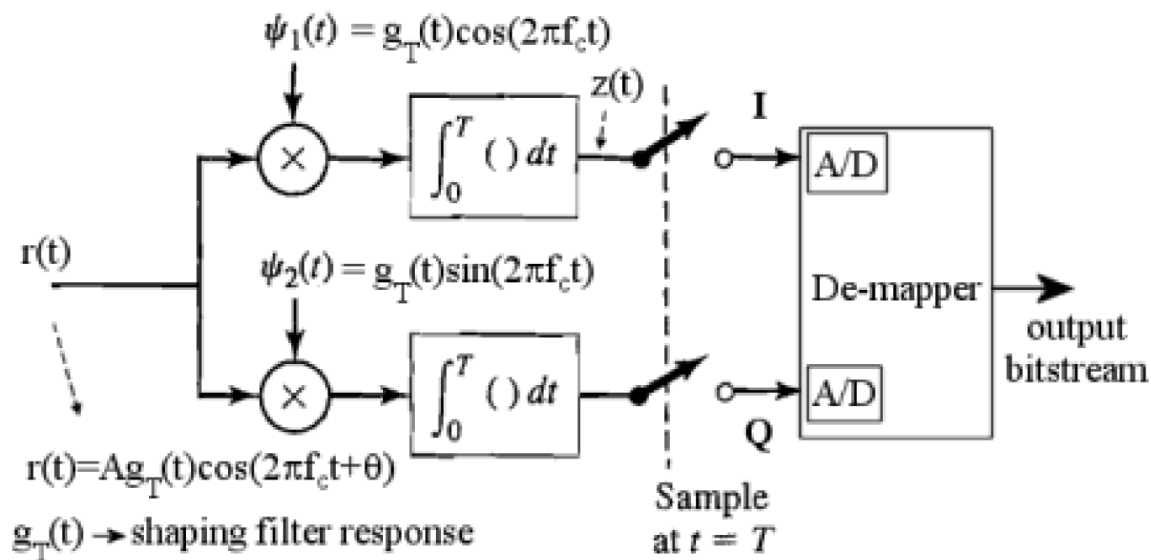
Do enunciado, não há atenuação nem degradação do sinal transmitido no canal de transmissão, sendo unitária a transmitância entre TX e RX. Portanto, o sinal na entrada do *matched filter* do sub-canal I do RX é o próprio sinal  $y(n)$ . A saída  $z(n)$  do *matched filter* será a convolução de  $y(n)$  com a resposta ao impulso  $x(n)$  do *matched filter*:

$$m1 := 0 \quad m2 := N - 1 \quad n := 0, 1 \dots 2 \cdot N - 2$$

$$z(n) := \left[ \sum_{m=m1}^{m2} (x(m) \cdot y(n - m)) \right]$$



b) Para o caso em que o RX utiliza detecção por correlator, o demodulador é caracterizado pelo diagrama de blocos abaixo:



Na figura acima, a operação de correlação utiliza um circuito RC integrador analógico ( $RC \gg T$ ):

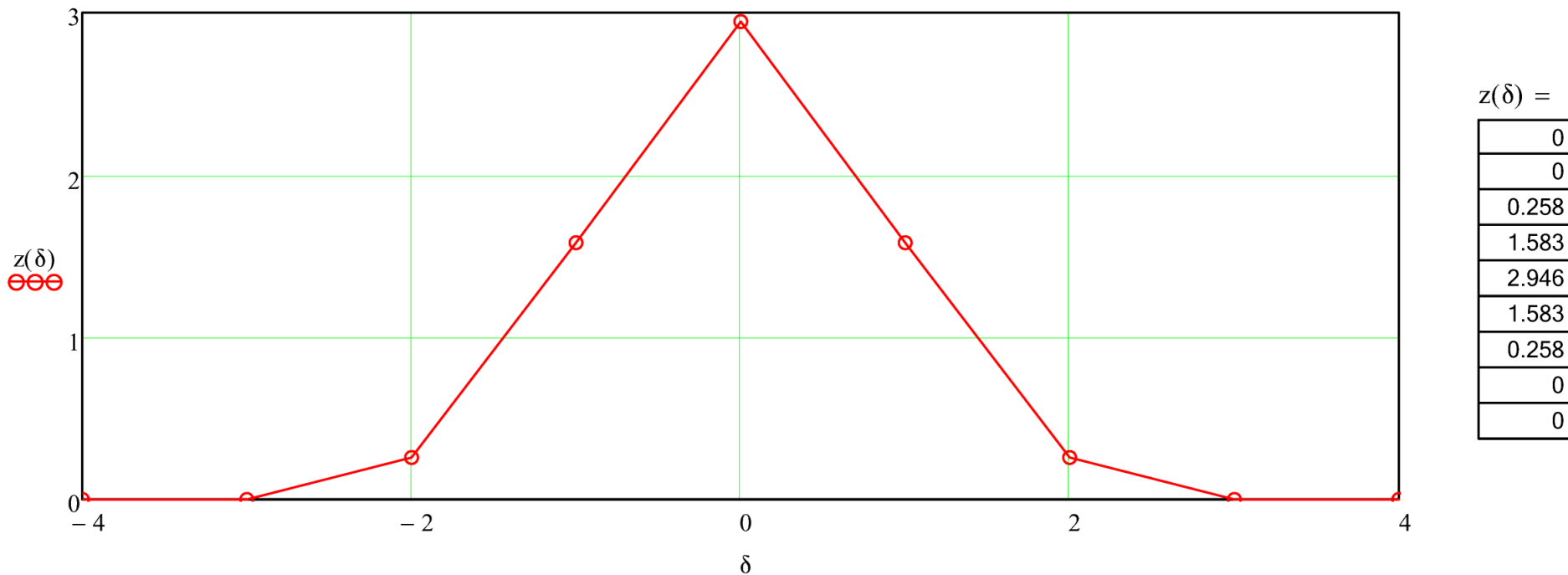
$$z(\tau) = \int_0^T \psi_1(t) \cdot r(t + \tau) dt \quad , \quad \tau = t$$

## Demodulação por *Matched Filter* e Correlator - Exemplo

Na versão totalmente digital, os dois A/D são substituídos por um único A/D na entrada do demodulador. Neste caso, a operação de correlação, antes baseada em integração analógica, passa a ser efetuada através de um somatório discreto realizado por operações aritméticas implementadas em um processador p/ DSP ou em uma FPGA:

$$z(\delta) := \sum_{n=0}^{N-1} (x(n) \cdot y(n + \delta)) \quad , \quad \delta = n \quad \delta := -(N-1), -(N-2) \dots N-1$$

onde  $x(n)$  é a versão discreta em bandabase de  $\Psi_1(t)$  e é gravado em uma LUT (*look up table*) no RX. Nesta abordagem puramente digital, a saída  $z$  resulta em:



Portanto, a seqüência  $z$  na saída do correlator resultou na mesma forma de onda que a seqüência  $z$  na saída do *matched filter* obtida por convolução no item a).

**c)** Se o canal é AWGN a seqüência  $z$  na saída do *matched filter* ainda estará corrompida por um certo nível de ruído aditivo residual, dado que a operação de correlação implícita efetuada pelo *matched filter* não é uma operação absolutamente ideal sob o ponto de vista da redução de ruído. Ainda assim, a atenuação do ruído será significativa pelo fato do ruído aditivo ser descorrelacionado (branco). Dado a ocorrência inevitável deste ruído aditivo residual, a amostra que o *downsampler* deve "capturar" é aquela de maior amplitude absoluta na seqüência  $z$ , pois quanto maior for a amplitude da amostra "capturada" mais desprezível será o efeito do ruído a ela adicionado, maximizando assim a SNR.

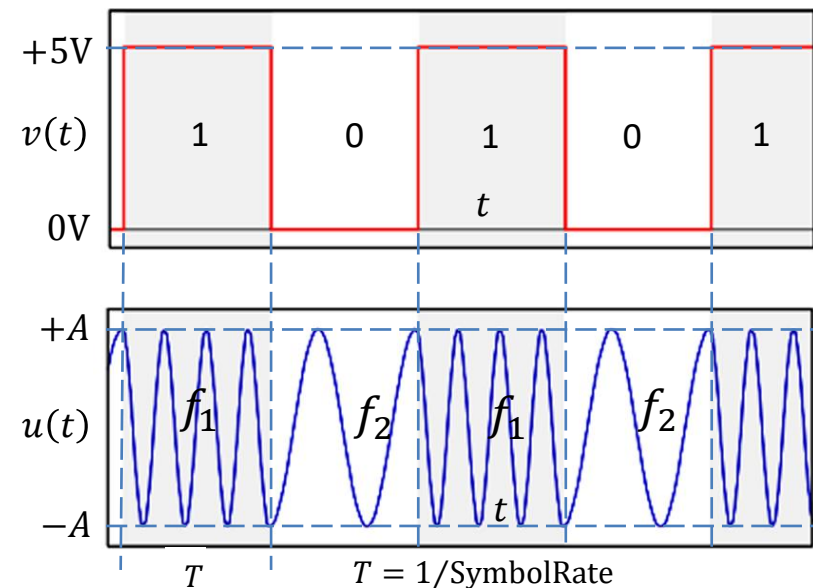
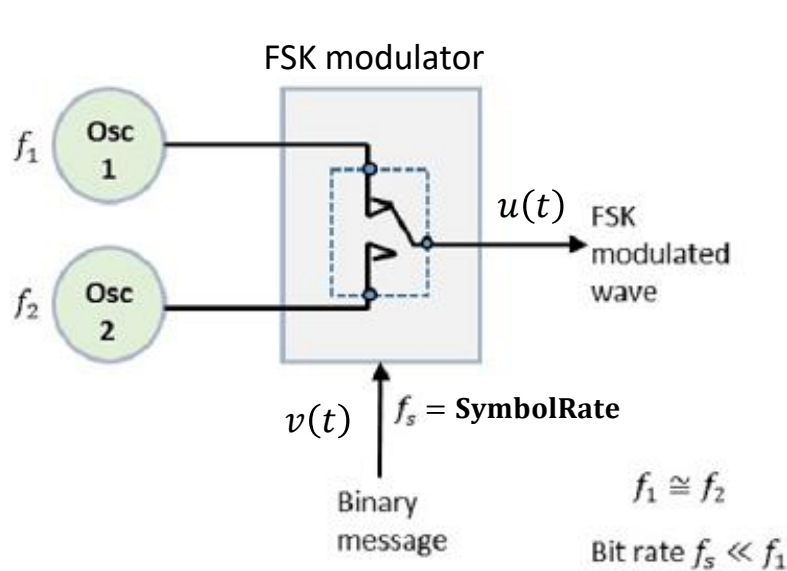
**d)** Tanto para o correlator digital como para o analógico, vale exatamente o mesmo arrazoado do item c. Para o caso específico do correlator analógico (vide diagrama do detetor por correlação analógica na figura do item b) acima). Portanto, o instante em que o amostrador amostra a saída  $z(t)$  (vide figura acima) deve ser tal que corresponda à maior amplitude do sinal  $z$ , pois quanto maior for a amplitude absoluta do sinal no instante de amostragem mais desprezível será o efeito do ruído adicionado ao sinal naquele instante, maximizando assim a SNR.



## Modulação M-FSK

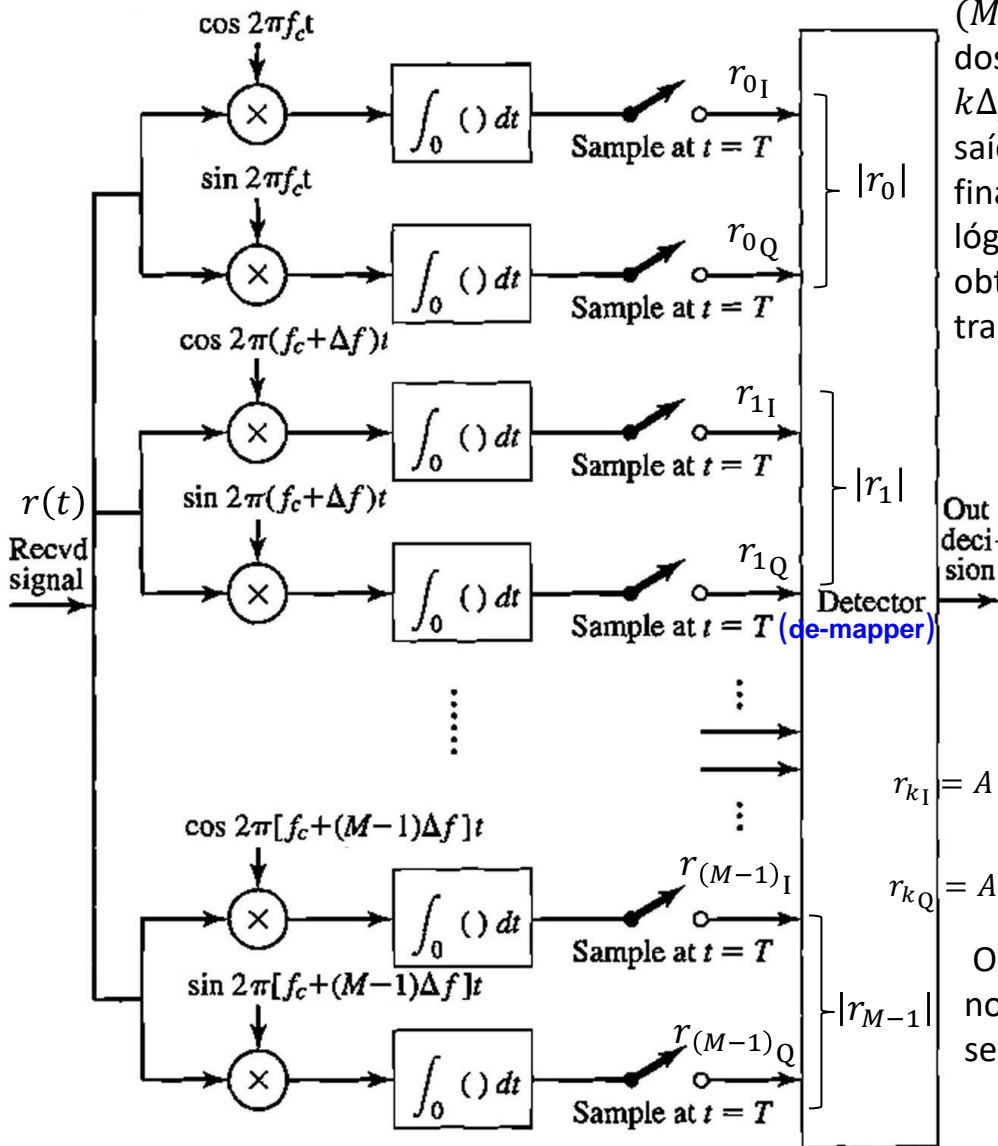
Nos slides 21 a 43 estudamos as modulações  $M$ -QAM,  $M$ -PSK e  $M$ -PAM, sendo  $M$  o número de símbolos IQ da modulação. Para estas modulações a cossenóide  $u(t)$  na saída do modulador tinha sua amplitude  $A$  e/ou fase  $\theta$  variadas em correspondência ao símbolo IQ de duração  $T$  (e palavra binária associada) a ser transmitido, mas a frequência  $f$  da cossenóide era mantida constante, sendo  $f$  a frequência central do canal de transmissão (ver slide 3).

No caso da modulação  $M$ -FSK (*frequency shift keying*) a cossenóide  $u(t)$  na saída do modulador tem sua amplitude  $A$  e fase  $\theta$  constantes, mas  $f$  varia em correspondência a cada uma das  $M$  palavras binárias de duração  $T$  a serem transmitidas. Especificamente, a frequência da cossenóide é tal que  $f \in \{f_1, f_2, \dots, f_M\}$ , sendo gerada durante um período de símbolo  $T$  em correspondência à palavra binária. A separação entre duas frequências adjacentes  $f_n$  e  $f_{n+1}$  no conjunto  $\{f_1, f_2, \dots, f_M\}$  é  $f_n - f_{n+1} = \Delta f$ , separação que idealmente seria a menor possível para efeito de eficiência espectral, mas que deve obedecer a condição  $\Delta f = 1/T$  para manter a ortogonalidade entre as cossenóides geradas, conforme veremos no slide 75. A cada frequência do conjunto  $\{f_1, f_2, \dots, f_M\}$  é associada uma palavra binária de tamanho  $N = \log_2(M)$  bits, portanto cada tom transmitido do conjunto  $\{f_1, f_2, \dots, f_M\}$  representa uma palavra binária de  $N$  bits. Por exemplo, a figura abaixo representa um sistema FSK binário (2-FSK ou BFSK), que transmite palavras binárias de  $N = \log_2(2) = 1$  bit de tamanho. Especificamente, quando o modulador transmite  $v_1(t) = A \cos(2\pi f_1 t)$  o bit "1" é transmitido e quando o modulador transmite  $v_2(t) = A \cos(2\pi f_2 t)$  o bit "0" é transmitido.



## Demodulação M-FSK

Para um sistema  $M$ -FSK transmitindo um conjunto de tons  $\{f_1, f_2, \dots, f_M\}$  separados de  $\Delta f = f_n - f_{n+1}$ , a demodulação é feita conforme mostra a figura.



Note que são necessários 2 correlatores p/ identificar cada tom do conjunto  $\{f_1, f_2, \dots, f_M\}$ , sendo  $f_1 = f_c$  e  $f_M = f_c + (M - 1)\Delta f$ . O sinal recebido é correlacionado com cada um dos  $2M$  osciladores locais em quadratura  $\cos(2\pi[f_c + k\Delta f]t)$  e  $\sin(2\pi[f_c + k\Delta f]t)$ , sendo  $k = 0, 1, \dots, M - 1$ . A saída de cada um dos  $2M$  correlatores são amostrados ao final do intervalo de símbolo  $T$  e o resultado é entregue à lógica combinacional do *de-mapper* de forma a que se obtenha em sua saída a estimativa da palavra binária transmitida.

Desta maneira, se o  $m$ -ésimo tom  $f_c + m\Delta f$  é transmitido,  $m = 0, 1, \dots, M - 1$ , então o sinal recebido é  $r(t) = A \cos(2\pi f_c t + 2\pi m \Delta f t + \phi)$ , sendo  $A$  e  $\phi$  a amplitude e a fase com que o sinal é recebido do canal.

Nesta situação, no instante de amostragem  $T$ , as  $k$ -ésimas saídas  $r_{kI}$  e  $r_{kQ}$  dos respectivos  $2M$  *samplers* **após a integração** efetuada pelos respectivos  $2M$  correlatores, com  $k = 0, 1, \dots, M - 1$ , resultam em:

$$r_{kI} = A \left[ \frac{\sin(2\pi(k-m)\Delta f T)}{2\pi(k-m)\Delta f T} \cos \phi - \frac{\cos(2\pi(k-m)\Delta f T) - 1}{2\pi(k-m)\Delta f T} \sin \phi \right] \quad (1)$$

$$r_{kQ} = A \left[ \frac{\cos(2\pi(k-m)\Delta f T) - 1}{2\pi(k-m)\Delta f T} \cos \phi + \frac{\sin(2\pi(k-m)\Delta f T)}{2\pi(k-m)\Delta f T} \sin \phi \right] \quad (2)$$

O *de-mapper* estima a palavra binária transmitida com base no maior valor dentre os valores  $|r_k|$ ,  $k = 0, 1, \dots, M - 1$ , sendo  $r_k$  dado por:

$$r_k = r_{kI} + jr_{kQ} \quad (3)$$

## Demodulação M-FSK

$$r_{kI} = A \left[ \frac{\sin(2\pi(k-m)\Delta f T)}{2\pi(k-m)\Delta f T} \cos \phi - \frac{\cos(2\pi(k-m)\Delta f T) - 1}{2\pi(k-m)\Delta f T} \sin \phi \right] \quad (1)$$

$$r_{kQ} = A \left[ \frac{\cos(2\pi(k-m)\Delta f T) - 1}{2\pi(k-m)\Delta f T} \cos \phi + \frac{\sin(2\pi(k-m)\Delta f T)}{2\pi(k-m)\Delta f T} \sin \phi \right] \quad (2)$$

$$r_k = r_{kI} + jr_{kQ} \quad (3)$$

$$|r_k| = \sqrt{(r_{kI})^2 + (r_{kQ})^2} \quad (3A)$$

Note de (1) e (2) que o  $m$ -ésimo tom  $f_c + m\Delta f$  transmitido (e portanto, recebido) resulta um valor máximo nas saídas  $r_{kI}$  e  $r_{kQ}$  para  $k = m$  :

$$r_{mI} = A \left[ \frac{\sin(2\pi(m-m)\Delta f T)}{2\pi(m-m)\Delta f T} \cos \phi - \frac{\cos(2\pi(m-m)\Delta f T) - 1}{2\pi(m-m)\Delta f T} \sin \phi \right] = A \cos \phi$$

$$r_{mQ} = A \left[ \frac{\cos(2\pi(m-m)\Delta f T) - 1}{2\pi(m-m)\Delta f T} \cos \phi + \frac{\sin(2\pi(m-m)\Delta f T)}{2\pi(m-m)\Delta f T} \sin \phi \right] = A \sin \phi$$

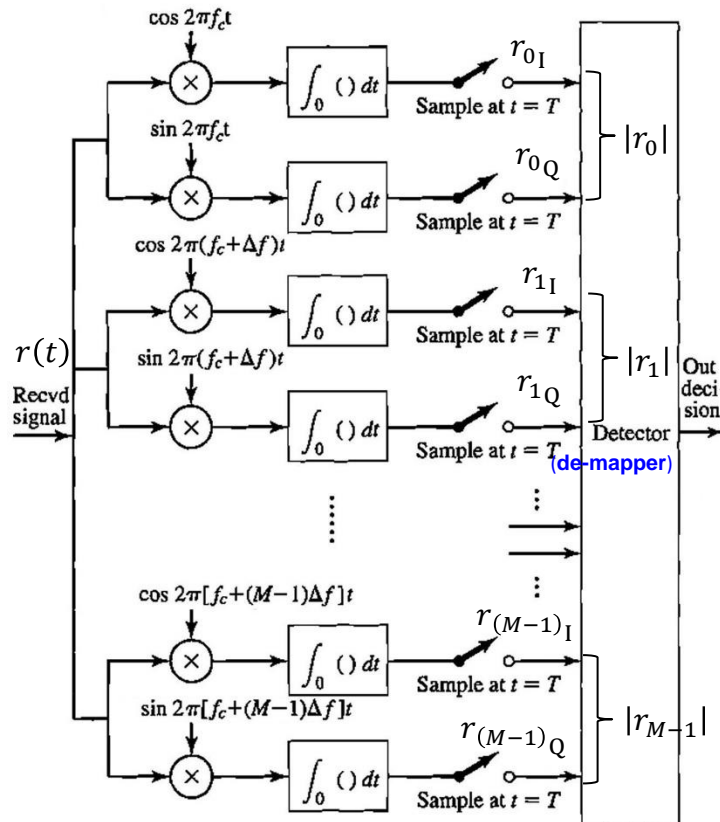
Daí, o *de-mapper* calcula de (3) o módulo de  $r_m = r_{mI} + jr_{mQ}$  resultando em  $|r_m| = \sqrt{(r_{mI})^2 + (r_{mQ})^2} = \sqrt{(A \cos \phi)^2 + (A \sin \phi)^2} = A$ . (4)

Note ainda de (1) e (2) que se a condição  $\Delta f = 1/T$  é obedecida os tons do conjunto  $\{f_1, f_2, \dots, f_M\}$  tornam-se ortogonais entre si para  $k \neq m$ :

$$r_{kI} = A \left[ \frac{\sin(2\pi(k-m))}{2\pi(k-m)} \cos \phi - \frac{\cos(2\pi(k-m)) - 1}{2\pi(k-m)} \sin \phi \right] = 0$$

$$r_{kQ} = A \left[ \frac{\cos(2\pi(k-m)) - 1}{2\pi(k-m)} \cos \phi + \frac{\sin(2\pi(k-m))}{2\pi(k-m)} \sin \phi \right] = 0$$

$$|r_k| = \sqrt{(r_{kI})^2 + (r_{kQ})^2} = \sqrt{(0)^2 + (0)^2} = 0 \quad \text{p/ } k \neq m \text{ e } \Delta f = 1/T. \quad (5)$$



## Demodulação M-FSK

$$r_{kI} = A \left[ \frac{\sin(2\pi(k-m)\Delta f T)}{2\pi(k-m)\Delta f T} \cos \phi - \frac{\cos(2\pi(k-m)\Delta f T) - 1}{2\pi(k-m)\Delta f T} \sin \phi \right] \quad (1)$$

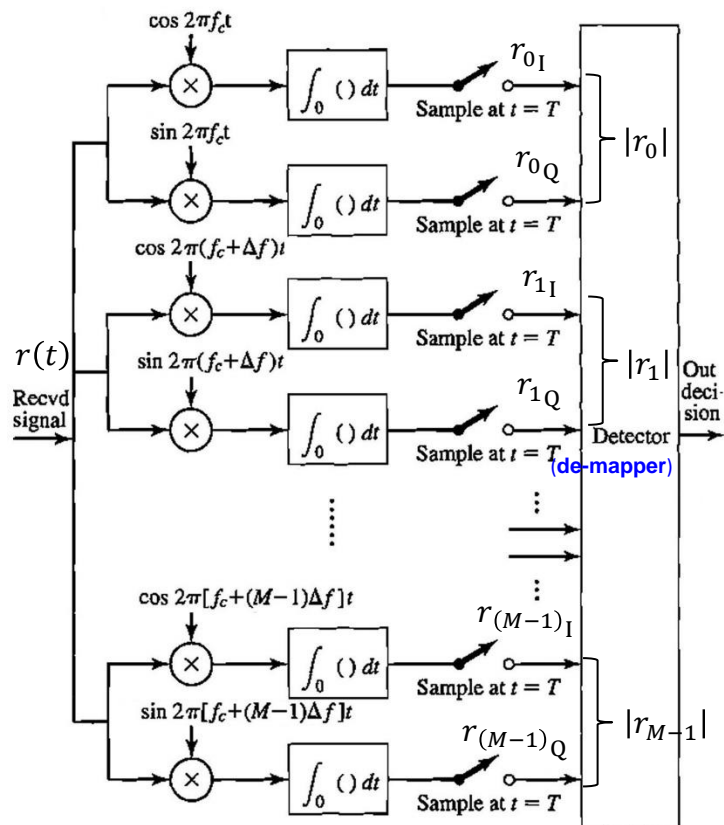
$$r_{kQ} = A \left[ \frac{\cos(2\pi(k-m)\Delta f T) - 1}{2\pi(k-m)\Delta f T} \cos \phi + \frac{\sin(2\pi(k-m)\Delta f T)}{2\pi(k-m)\Delta f T} \sin \phi \right] \quad (2)$$

$$r_k = r_{kI} + jr_{kQ} \quad (3)$$

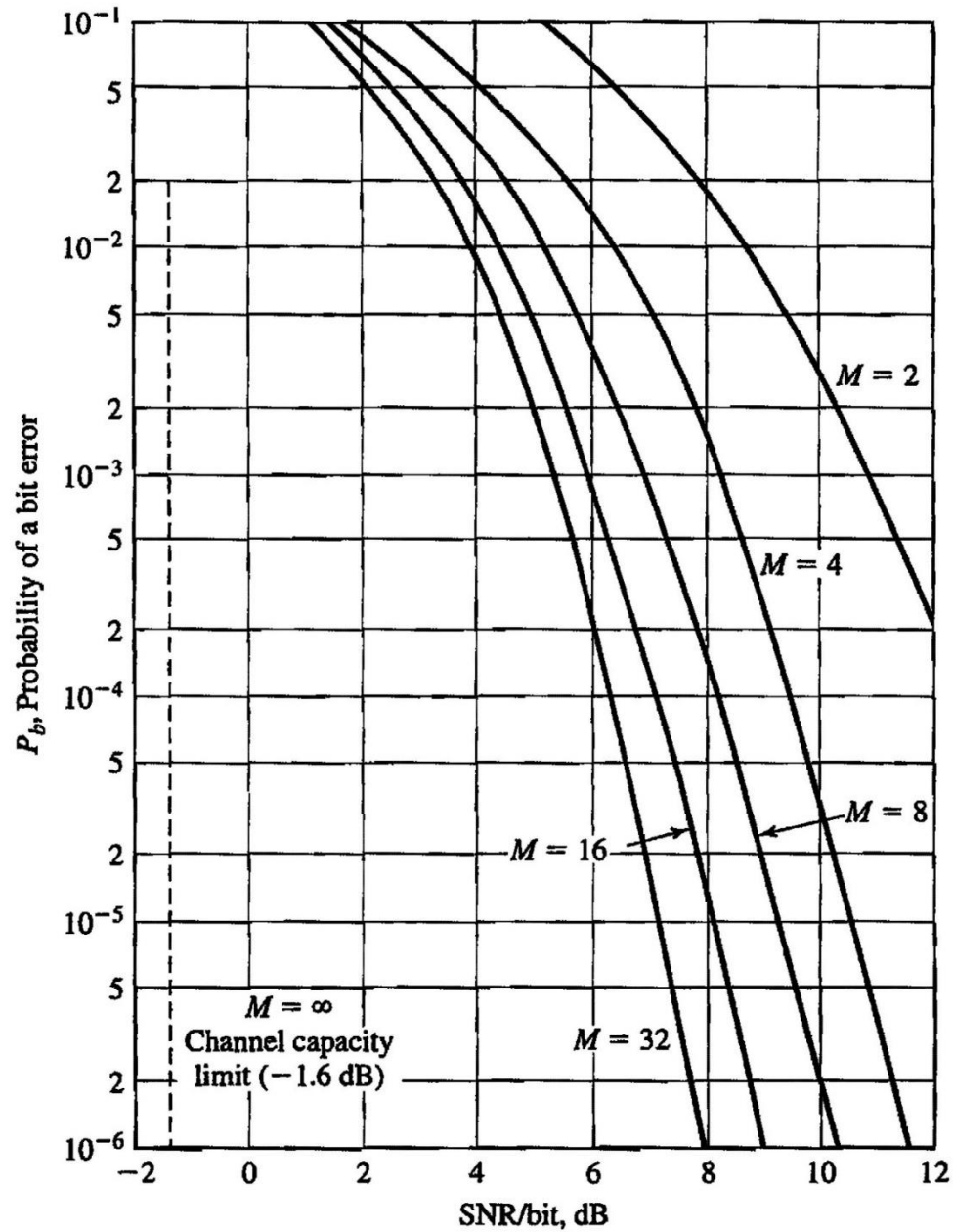
$$|r_k| = \sqrt{(r_{kI})^2 + (r_{kQ})^2} \quad (3A)$$

Portanto, de acordo com o discutido nos slides anteriores, para o sinal recebido  $r(t) = A \cos(2\pi f_c t + 2\pi m \Delta f t + \phi)$  a saída  $|r_k|$  resulta  $A$  para  $k = m$  e todas as demais saídas  $|r_k|$  resultam 0 para  $k \neq m$  desde que a condição  $\Delta f = 1/T = \text{SymbolRate}$  seja obedecida (fazendo os tons do conjunto  $\{f_1, f_2, \dots, f_M\}$  ortogonais entre si para  $k \neq m$ ):

$$|r_k| = \sqrt{(r_{kI})^2 + (r_{kQ})^2} = \begin{cases} A & k = m \\ 0 & k \neq m \end{cases} \quad \rho / \Delta f = 1/T \text{ e } \forall \phi \quad (6)$$

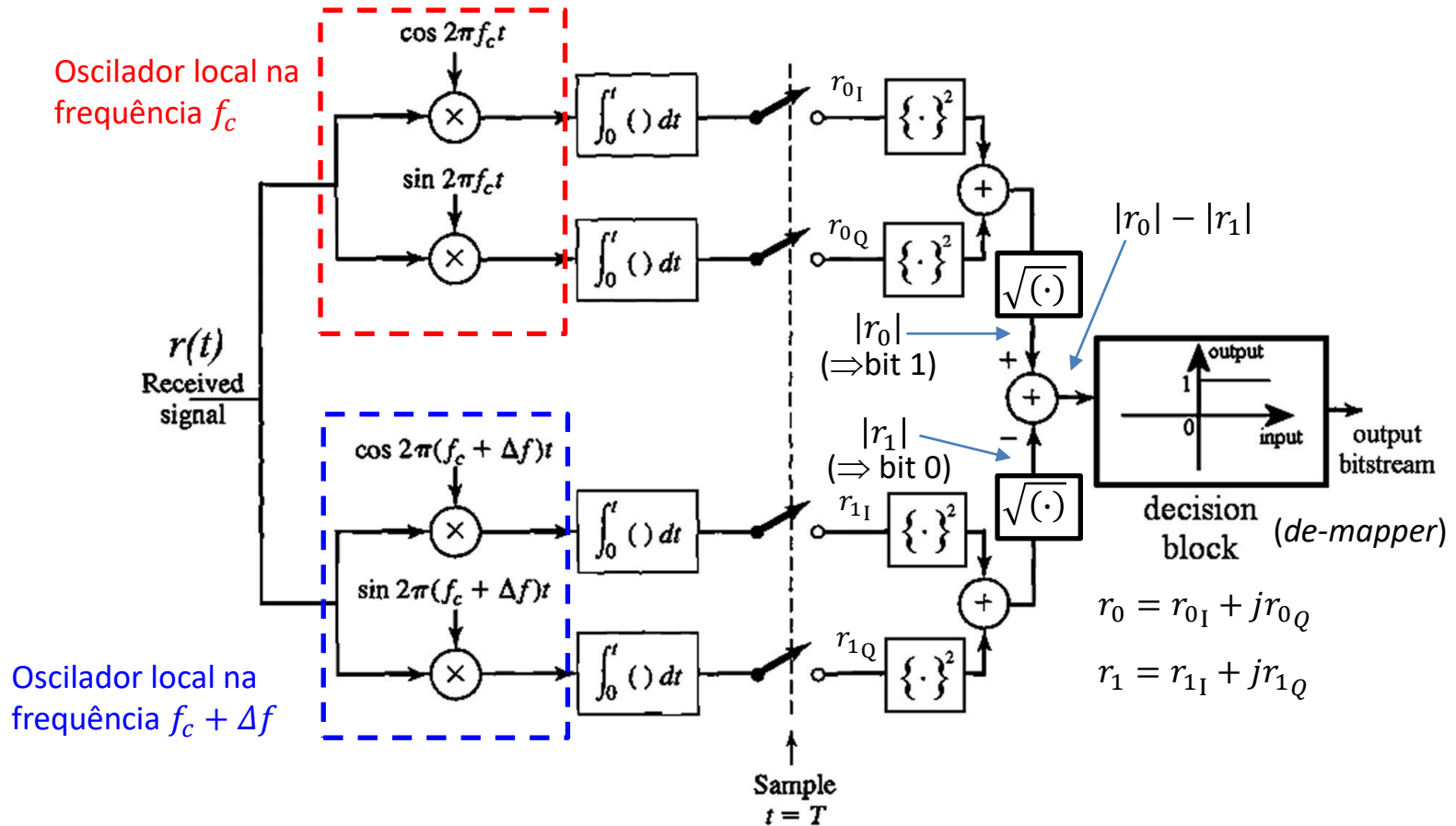


# Desempenho da modulação M-FSK $p/\Delta f = 1/T$



## Demodulação M-FSK - exemplo

**Exemplo:** Um satélite LEO (*Low Earth Orbit* – ver [https://en.wikipedia.org/wiki/Low\\_Earth\\_orbit](https://en.wikipedia.org/wiki/Low_Earth_orbit)) orbita a uma altitude de 340Km e sua velocidade orbital é de 28000 km/h. O satélite utiliza um *link* de telemetria em modulação FSK binária (BFSK) operando em  $f_c = 137.000$  MHz. O diagrama abaixo mostra o demodulador do RX na estação terrena do referido *link*.



O sinal recebido na entrada do demodulador BFSK é da forma  $r(t) = 0.1 \cos(2\pi f_r t + \phi)$ , onde  $f_r \in \{f_c, f_c + \Delta f\}$  assume um dos dois valores de frequência  $f_c$  ou  $f_c + \Delta f$  de acordo com a respectiva transmissão do “bit 1” ou do “bit 0” pelo TX. Ou seja, para transmissão do “bit 1” o TX transmite um sinal de frequência  $f_c$ , e para transmissão do “bit 0” o TX transmite um sinal de frequência  $f_c + \Delta f$ . O *bitrate* (taxa de bits) no *output bitstream* é 5.0 Kbps. O ângulo  $\phi = 85^\circ$  representa a fase com que a onda EM é recebida na antena do RX em função da distância percorrida ao longo do percurso de propagação.



### Pede-se:

(a) Utilizando as equações (1), (2) e (3) do slide 75, plote  $|r_0(\Delta f)| \times \Delta f$  e  $|r_1(\Delta f)| \times \Delta f$  em um mesmo gráfico no intervalo  $0 < \Delta f < 4\text{SymbolRate}$  para a situação em que o “bit 0” é transmitido, isto é, para a situação em que o sinal recebido é  $r(t) = 0.1 \cos(2\pi(f_c + \Delta f)t + \phi)$ . Quais valores de  $\Delta f$  maximizam a capacidade do *decision block* discriminar entre o “bit 0” e o “bit 1? Dentre estes valores de  $\Delta f$ , qual o que minimiza a banda passante ocupada no canal de transmissão?

(b) Assuma que o satélite esteja despontando na linha do horizonte e com linha de visada com a estação RX em terra (se aproximando da estação RX), de modo que a velocidade  $v$  relativa entre RX e TX pode ser aproximada pela velocidade orbital  $v = 28000$  Km/h. Nesta situação operacional determine quais frequências  $f_c'$  e  $f_c' + \Delta f$  os dois respectivos osciladores locais do RX devem sintonizar em função do desvio de frequência  $f_{\text{doppler}} = v \frac{f_c}{c}$  presente na portadora  $f_c' = f_c + f_{\text{doppler}}$  do sinal recebido pelo RX, sendo  $c = 2.997925 \times 10^8$  m/s a velocidade de propagação da onda entre as antenas TX e RX. Adote o  $\Delta f$  obtido em (a) que minimiza a banda passante BW ocupada no canal de transmissão pelo espectro do sinal transmitido.

(c) Analise qual é o efeito na operação deste demodulador BPSK que resulta do ângulo de fase  $\phi$  com que a onda EM é recebida na antena do RX em função da distância percorrida ao longo do percurso de propagação. Nota: Conforme visto na disciplina “Ondas e Linhas de Transmissão”, qualquer onda EM exhibe um giro de fase de  $2\pi$  radianos toda vez que a onda se propagar uma distância de um comprimento de onda  $\lambda$  ao longo do caminho de propagação.

Nota: Para o caso em que o satélite esteja na linha do horizonte, com linha de visada com a estação RX terrestre, e se afastando do RX da estação terrestre, o desvio de frequência Doppler é dado por  $f_{\text{doppler}} = -v \frac{f_c}{c}$ .

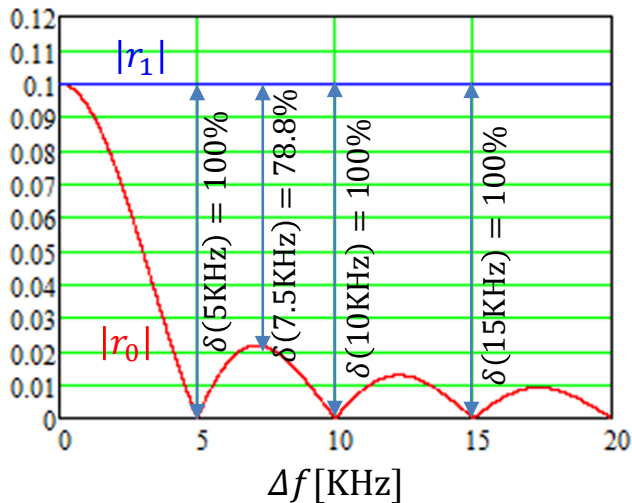
## Demodulação M-FSK - exemplo

### Solução:

(a) Dado que o FSK é binário (1 bit/símbolo) o *bitrate* do *bitstream* na saída do demodulador define o valor do SymbolRate – portanto SymbolRate = 5000 symbols/s. Daí o intervalo de símbolo é  $T = 1/\text{SymbolRate} = 0.2$  ms. Ainda, do enunciado, é dado que  $A = 0.1$ .

Para plotar  $|r_0(\Delta f)| \times \Delta f$ ,  $0 < \Delta f < 20\text{KHz}$ , na situação em que o “bit 0” é transmitido, i.e,  $r(t) = 0.1 \cos(2\pi(f_c + \Delta f)t + \phi)$ , vamos usar as equações (1), (2) e (3) com  $k = 0$  (representando a saída  $r_0$  do correlator que detecta o tom  $f_c$ ) e com  $m = 1$  (representando que a frequência do tom  $r(t)$  recebido é  $f_c + \Delta f$ ).

Para plotar  $|r_1(\Delta f)| \times \Delta f$ ,  $0 < \Delta f < 20\text{KHz}$ , na situação em que o “bit 0” é transmitido, i.e,  $r(t) = 0.1 \cos(2\pi(f_c + \Delta f)t + \phi)$ , vamos usar as equações (1), (2) e (3) com  $k = 1$  (representando a saída  $r_1$  do correlator que detecta o tom  $f_c + \Delta f$ ) e com  $m = 1$  (representando que a frequência do tom  $r(t)$  recebido é  $f_c + \Delta f$ ).



A capacidade de discriminação do *decision block* (em %) para uma determinada separação  $\Delta f$  entre tons adjacentes é dada por  $\delta(\Delta f) = 100 \frac{|r_1(\Delta f)| - |r_0(\Delta f)|}{A}$ . Note no gráfico ao lado que a capacidade de discriminação  $\delta$  é máxima (=100%) quando  $\Delta f$  é um múltiplo inteiro do SymbolRate, situação que ortogonaliza os tons transmitidos. Para efeito de minimizar a banda passante BW ocupada no canal de transmissão pelo espectro do sinal transmitido é usual adotar a menor separação dada por  $\Delta f = 1/T = \text{SymbolRate}$ , que, no caso, é  $\Delta f = 5.0$  KHz.

**Nota:** Esta solução é conforme *script* Mathcad disponível em [http://www.fccdecastro.com.br/ZIP/SCD1\\_C4\\_ES77\\_BFSK.zip](http://www.fccdecastro.com.br/ZIP/SCD1_C4_ES77_BFSK.zip).

## Demodulação M-FSK - exemplo

(b) Dado que o enlace de telemetria opera em  $f_c = 137$  MHz, que a velocidade orbital é  $v = 28000$  Km/h e que o satélite está despontando na linha do horizonte e se aproximando do RX, então os tons de frequência  $f_c$  e  $f_c + \Delta f$  emitidos pelo TX incidem na antena do RX acrescidos de um desvio de frequência  $f_{\text{doppler}} = v \frac{f_c}{c} = 3.554$  KHz, tornando necessário que os osciladores locais do RX sejam re-sintonizados respectivamente para as frequências  $f'_c = 137.004$  MHz e  $f'_c + \Delta f = 137.009$  MHz, sendo  $f'_c = f_c + f_{\text{doppler}}$ .

(c) Da equação (6) (abaixo reproduzida), desde que a condição  $\Delta f = 1/T = \text{SymbolRate}$  seja obedecida, temos que:

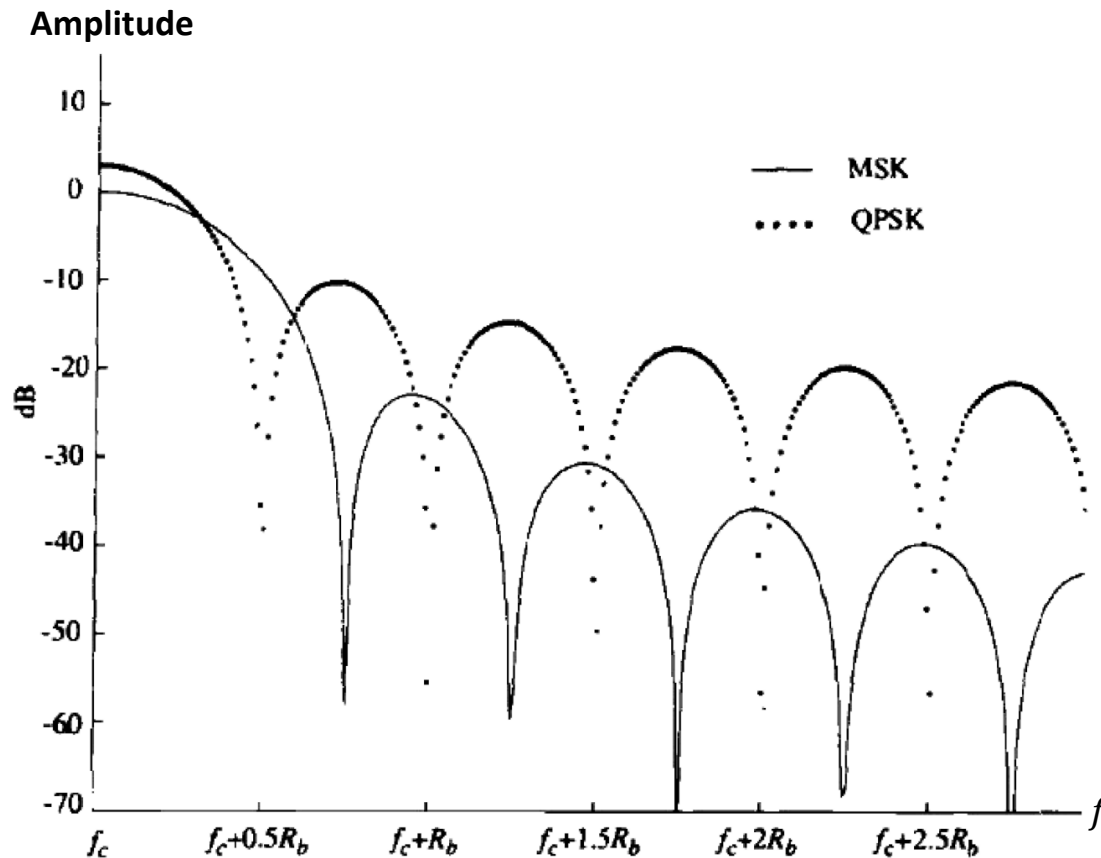
$$|r_k| = \sqrt{(r_{kI})^2 + (r_{kQ})^2} = \begin{cases} A & k = m \\ 0 & k \neq m \end{cases} \quad \text{p/ } \Delta f = 1/T \text{ e } \forall \phi \quad (6)$$

Portanto, dado que (6) é válida para todo  $\phi$  (i.e.,  $\forall \phi$ ), a operação deste demodulador BPSK é **não-síncrona**, i.e., é independente do valor do ângulo de fase  $\phi$  com que a onda EM é recebida na antena do RX. Isto dispensa a necessidade de sincronização de fase da portadora.

## MSK – Minimum Shift Keying

*Minimum Shift Keying* (MSK) é uma técnica de modulação que resulta em uma alta eficiência espectral com pequena amplitude nos lobos secundários do espectro do sinal modulado. Devido ao seu envelope de amplitude constante, MSK não exige amplificadores de potência de RF lineares, como é o caso da modulação QAM. MSK é a técnica de modulação adotada no padrão de telefonia celular GSM (ver <https://en.wikipedia.org/wiki/GSM> ).

O gráfico abaixo compara o espectro de um sinal MSK com o espectro de um sinal QPSK (ver também “Power spectral density of MSK, BPSK, and QPSK” em [https://en.wikipedia.org/wiki/Minimum-shift\\_keying](https://en.wikipedia.org/wiki/Minimum-shift_keying) ). No gráfico abaixo  $f_c$  é a frequência central do canal de transmissão e  $R_b = 1/T_b$  é a taxa de transmissão em [bps], sendo  $T_b$  a duração [s] de cada bit transmitido através do canal de transmissão. Note que o espectro do sinal MSK tem lobos secundários de amplitude aproximadamente 10 dB abaixo dos lobos secundários do sinal QPSK.

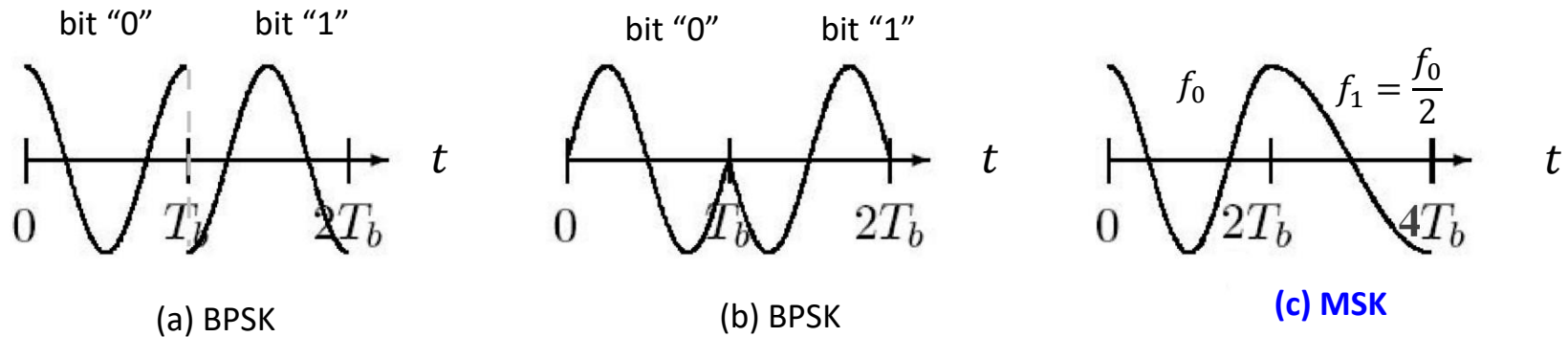


## MSK – Minimum Shift Keying

A pequena amplitude nos lobos secundários do espectro do sinal MSK modulado é consequência da inexistência de transições abruptas (descontinuidades) no sinal MSK no domínio tempo. Por exemplo, em (a) e (b) abaixo são mostradas transições de fase de  $180^\circ$  em um sinal BPSK no domínio tempo  $t$ , sendo a transição mostrada em (a) a que gera lobos secundários de maior amplitude no espectro, bem como um espectro mais amplo, por ser a transição mais abrupta no tempo.  $T_b$  é a duração [s] de cada bit transmitido através do canal de transmissão.

Em (c) é mostrado como exemplo a transição de um sinal MSK no domínio tempo. Note neste exemplo que a transição é absolutamente suave e é uma transição de uma senoide de frequência  $f_0$  para uma senoide de frequência  $f_1 = f_0/2$ : No intervalo  $0 \leq t \leq 2T_b$  é transmitido um ciclo inteiro de uma senoide de frequência  $f_0$  e no intervalo  $2T_b \leq t \leq 4T_b$  é transmitido meio ciclo de uma senoide de frequência  $f_1 = f_0/2$ .

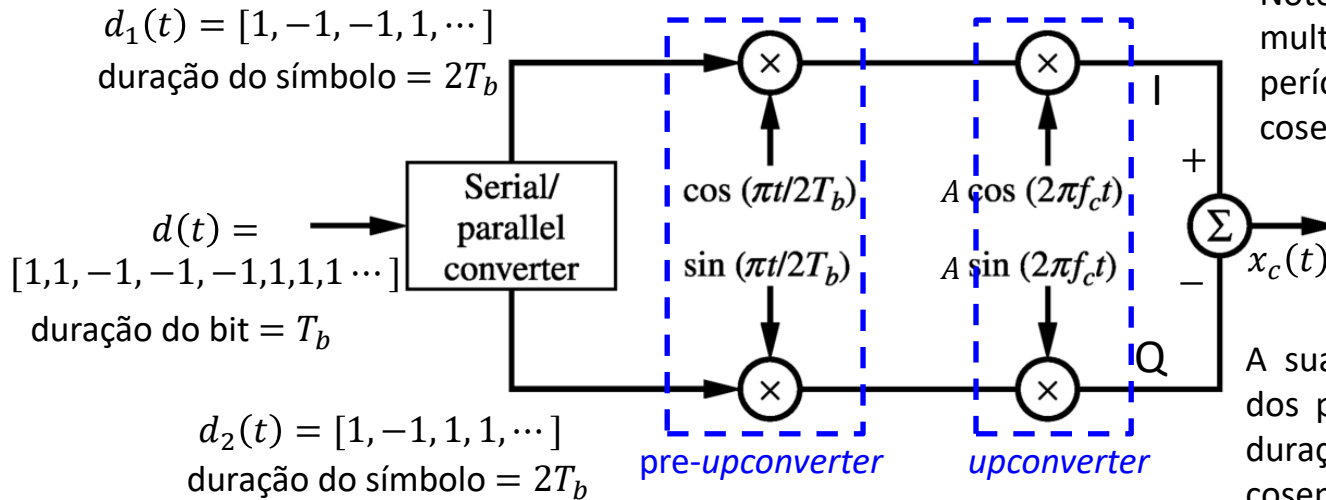
Como os bits de informação são transmitidos através da comutação entre duas frequências  $f_0$  e  $f_1$  da onda EM que se propaga no canal de transmissão, a modulação MSK é considerada uma forma alternativa de BFSK.



Diferentemente da modulação BPSK mostrada em (a) e (b), note em (c) que não há uma correspondência um-para-um entre os bits de dados do *stream* de bits de informação e a frequência instantânea do sinal transmitido. A razão para tanto decorre da arquitetura do modulador MSK mostrada no próximo slide.

## MSK – Minimum Shift Keying

A figura abaixo mostra o diagrama de um modulador MSK. A sequência de bits a serem transmitidos é a sequência  $d(t)$ , onde os bits “0” e “1” foram convertidos para os respectivos valores  $-1$  e  $+1$ . A duração de cada bit na sequência  $d(t)$  é  $T_b$  [s]. O “Serial/parallel converter” envia os bits de índice par na sequência  $d(t)$  para a sequência  $d_1(t)$  e envia os bits de índice ímpar na sequência  $d(t)$  para a sequência  $d_2(t)$ , conforme exemplificado na figura abaixo:



Note que cada símbolo no sinal  $d_1(t)$  é multiplicado ou ponderado por  $\frac{1}{2}$  período de  $\cos(\pi t/2T_b)$ , i.e., um cosseno de frequência  $1/4T_b$ .

Cada símbolo no sinal  $d_2(t)$  é ponderado por  $\frac{1}{2}$  período de  $\sin(\pi t/2T_b)$ , i.e., um seno de frequência  $1/4T_b$ .

A suavização resultante da multiplicação dos pulsos retangulares dos símbolos de duração  $2T_b$  por  $\frac{1}{2}$  período do seno e cosseno de período  $4T_b$  reduz significativamente os espúrios espectrais.

O sinal modulado  $x_c(t)$  na saída do modulador é dado por: 
$$x_c(t) = A \cos \left[ 2\pi \left( f_c \pm \frac{1}{4T_b} \right) t + u_k \right] \quad (7)$$

onde, para o  $k$ -ésimo símbolo,  $u_k$  é dado por 
$$u_k = \begin{cases} 0 & \text{se } d_2/d_1 = +1 \\ \text{mod}(k\pi, 2\pi) & \text{se } d_2/d_1 = -1 \end{cases}$$
 sendo  $\text{mod}(x, y)$  o operador que retorna o resto da divisão de  $x$  por  $y$  ( $x$  modulo  $y$ ).

Ver seção 9.1.3 "MSK Systems" em <http://www.fccdecastro.com.br/pdf/PCSMN.pdf>.

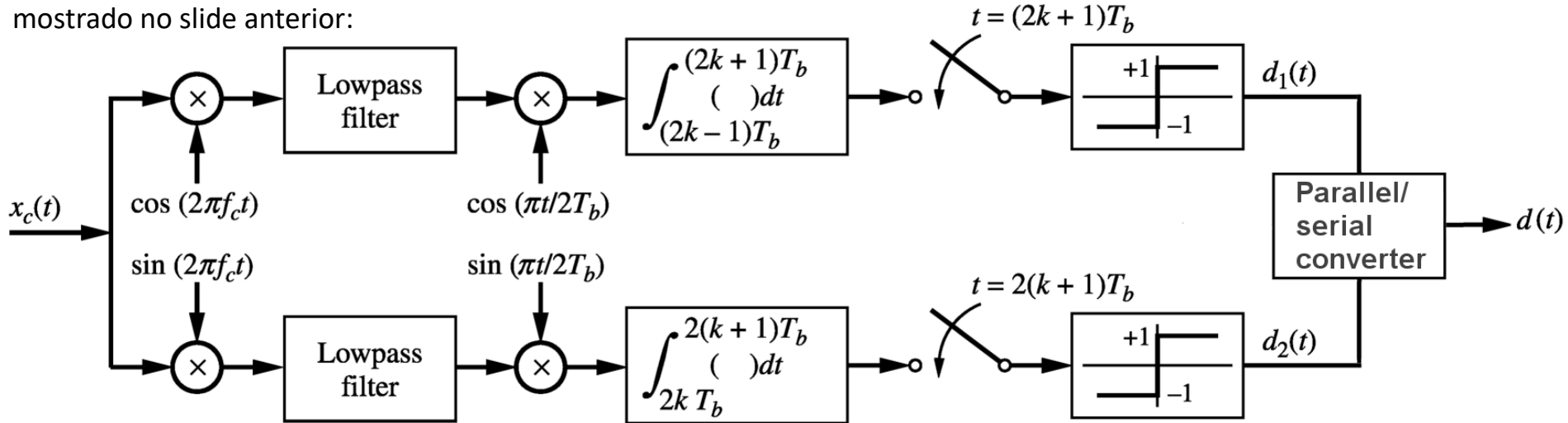
Note em (7) que as duas frequências transmitidas são  $f_0 = f_c - \frac{1}{4T_b}$  e  $f_1 = f_c + \frac{1}{4T_b}$ , e, portanto, a separação  $\Delta f$  entre as duas frequências (tons) do sinal MSK é:

$$\Delta f = f_1 - f_0 = \frac{1}{2T_b} \quad (8)$$



## MSK – Minimum Shift Keying

A figura abaixo mostra o diagrama de um demodulador MSK que recupera a sequência  $d(t)$  na entrada do modulador mostrado no slide anterior:



Para o caso do RX adotar um demodulador MSK síncrono, i.e., para o caso em que o valor do ângulo de fase  $\phi$  com que a onda EM é recebida na antena do RX é determinado pelo subsistema de sincronismo de portadora (que será estudado em Sistemas de Comunicação Digital II), a função de correlação cruzada  $\gamma(\Delta f)$  entre as duas senoides de frequências  $f_0 = f_c + m\Delta f$  e  $f_1 = f_c + n\Delta f$ , com  $m$  e  $n$  inteiros, é dada por (ver seção “Frequency-Shift Keying (FSK)” nas páginas 109 e 110 de <http://www.fccdecastro.com.br/pdf/DCOMM5.pdf>):

$$\gamma(\Delta f) = \frac{\sin[2\pi(m-n)\Delta f T]}{2\pi(m-n)\Delta f T} \quad (9)$$

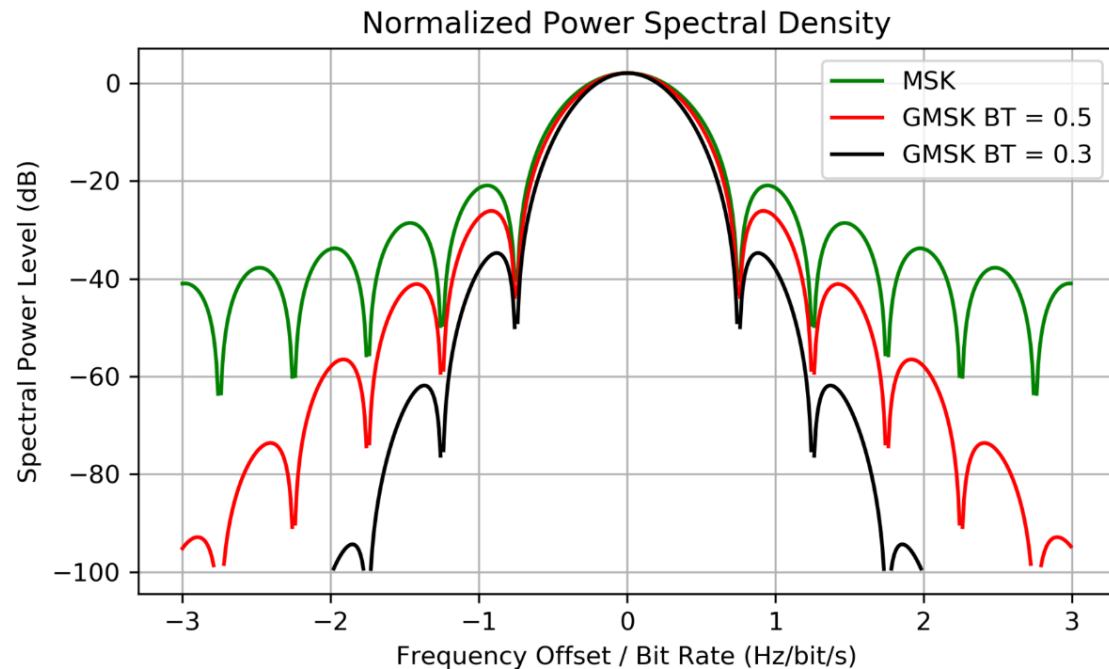
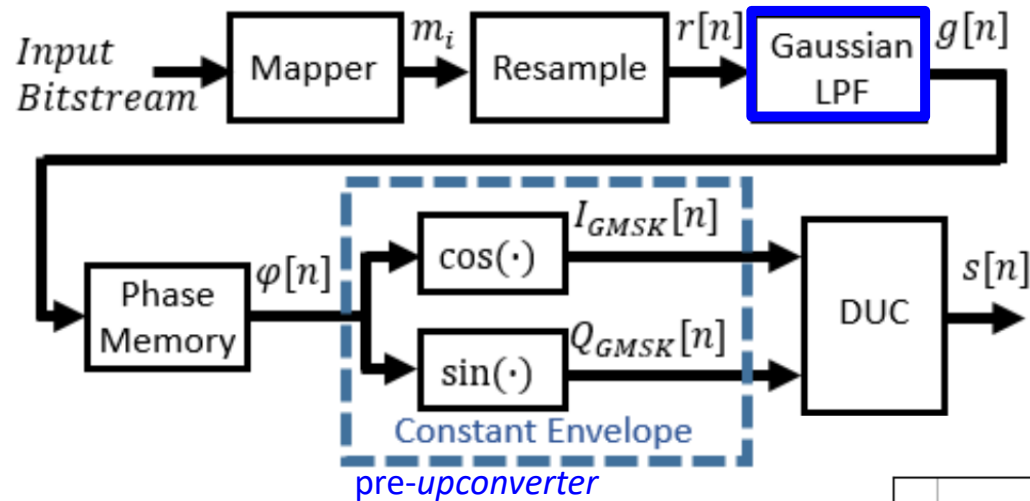
onde  $T = 2T_b$  é a duração do símbolo para o modulador MSK do slide anterior. De (8), substituindo  $\Delta f = \frac{1}{2T_b}$  em (9) obtemos:

$$\gamma(\Delta f) = \frac{\sin\left[2\pi(m-n)\frac{1}{2T_b}2T_b\right]}{2\pi(m-n)\frac{1}{2T_b}2T_b} = \begin{cases} 0 & p/ m \neq n \\ 1 & p/ m = n \end{cases} \quad (10)$$

o que demonstra que as senoides de frequências  $f_0 = f_c - \frac{1}{4T_b}$  e  $f_1 = f_c + \frac{1}{4T_b}$  no sinal MSK transmitido são ortogonais entre si – ver equação (6) no slide 75 e discussão nos slides 73 e 74.

## MSK – Minimum Shift Keying

Para reduzir ainda mais a amplitude da densidade espectral nas bandas adjacentes é usual modificar o modulador MSK inserindo um filtro Gaussiano antes do *pre-upconverter* (ver slide 83), modificação que define a técnica de modulação denominada GMSK (Gaussian MSK – ver <http://www.fccdecastro.com.br/pdf/BEGMFSK.pdf> e [https://en.wikipedia.org/wiki/Minimum-shift\\_keying](https://en.wikipedia.org/wiki/Minimum-shift_keying)):



## Apêndice A:

<b>Operation</b>	<b>Formula</b>
Rectangular to Polar Conversion	$z = x + jy = re^{j\theta}$ where $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ and $\theta = \arctan(y/x)$
Polar to Rectangular Conversion	$z = re^{j\theta} = r [\cos(\theta) + j\sin(\theta)] = x + jy$ where $x = r \cos(\theta)$ and $y = r \sin(\theta)$
Add: $z_3 = z_1 + z_2$	$(x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$
Subtract: $z_3 = z_1 - z_2$	$(x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$
Multiply: $z_3 = z_1 z_2$ (polar form)	$(x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + y_1 x_2)$ $r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$
Divide: $z_3 = z_1 / z_2$  (polar form)	$\frac{(x_1 x_2 - y_1 y_2) - j(x_1 y_2 - y_1 x_2)}{x_2^2 + y_2^2}$ $\frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$

## Apêndice B:

Sejam  $u = 2\pi f_1 t$  e  $v = 2\pi f_2 t$ . Valem as seguintes relações (*relationships*) trigonométricas:

<i>Relationship</i>	<i>Relationship</i>
$\sin u = \cos(u - \pi/2)$	$\cos u = \sin(u + \pi/2)$
$\cos(-u) = \cos u$	$\sin(-u) = -\sin(u)$
$\sin^2 u + \cos^2 u = 1$	$\cos^2 u = \frac{1}{2}(1 + \cos 2u)$
$\sin^2 u = \frac{1}{2}(1 - \cos 2u)$	$\cos(u \pm v) = \cos u \cos v \mp \sin u \sin v$
$\sin(u \pm v) = \sin u \cos v \pm \cos u \sin v$	$\cos u \cos v = \frac{1}{2}[\cos(u - v) + \cos(u + v)]$
$\sin u \sin v = \frac{1}{2}[\cos(u - v) - \cos(u + v)]$	$\sin u \cos v = \frac{1}{2}[\sin(u - v) + \sin(u + v)]$
$\cos u = \frac{1}{2}[e^{ju} + e^{-ju}]$	$\sin u = \frac{1}{2j}[e^{ju} - e^{-ju}]$
$e^{ju} = \cos u + j \sin u$	

→ **heterodinação**  
das frequências  $f_1$  e  $f_2$