Universidade Federal de Santa Maria

SEDES SAPIENTIÆ

1960

Introdução, *matched filter* do tipo *root raised cosine*, sincronismo de símbolo e portadora, simuladores 16-QAM.

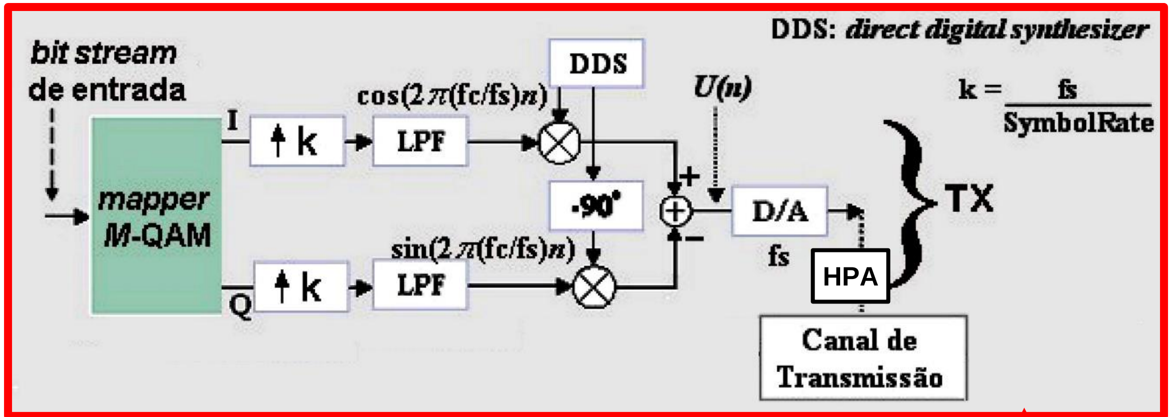
Centro de Tecnologia – Departamento de Eletrônica e Computação

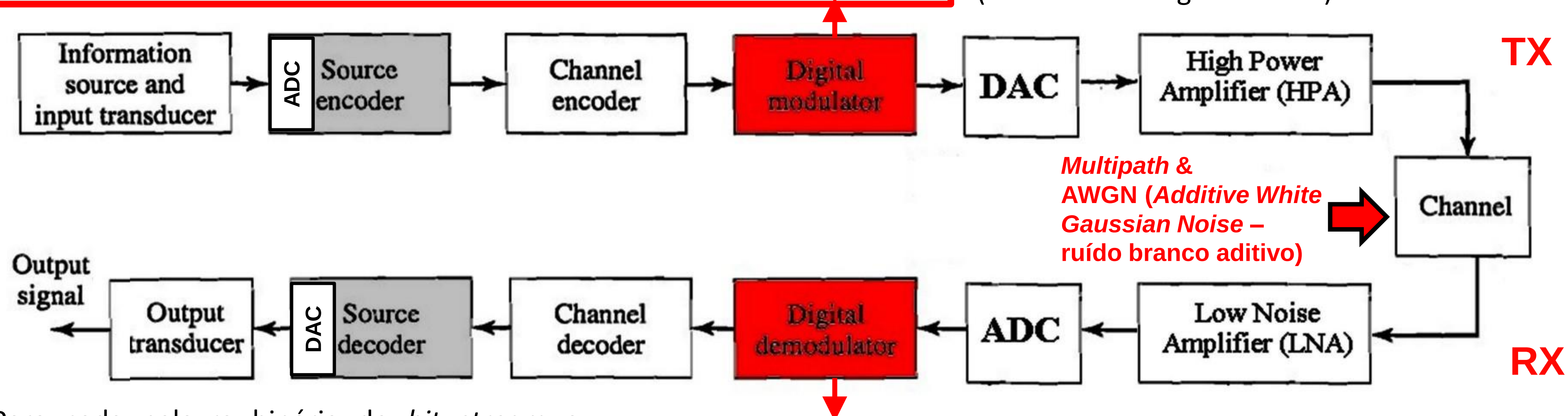
UFSM00265 – SISTEMAS DE COMUNICAÇÃO DIGITAL II

Prof. Fernando DeCastro

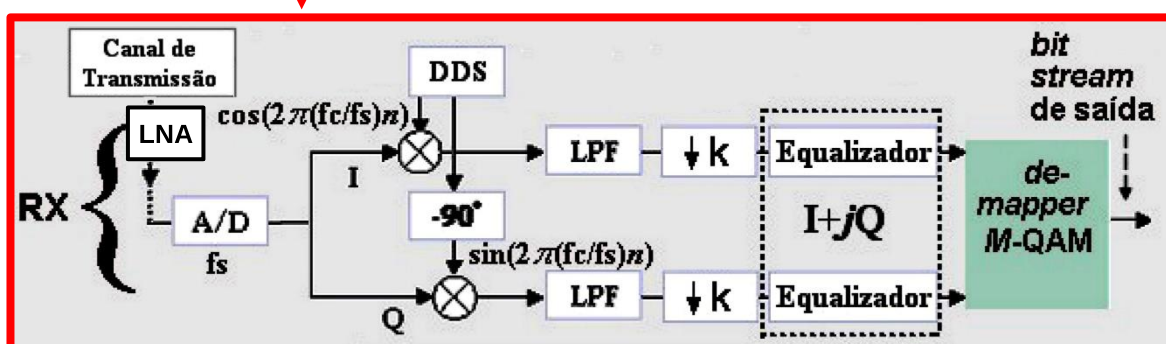
Introdução

Conforme já visto no Cap IV de UFSM00261 – SISTEMAS DE COMUNICAÇÃO DIGITAL I (ver https://www.fccdecastro.com.br/pdf/SCD1_CapIV.pdf), a partir do *bit stream* na saída do Codificador de Canal ("Channel encoder" na figura abaixo), o modulador no TX converte cada palavra binária deste *bit stream* que chega na sua entrada em "*wavepackets*" que se propagam no canal de transmissão ("Channel" na figura abaixo).

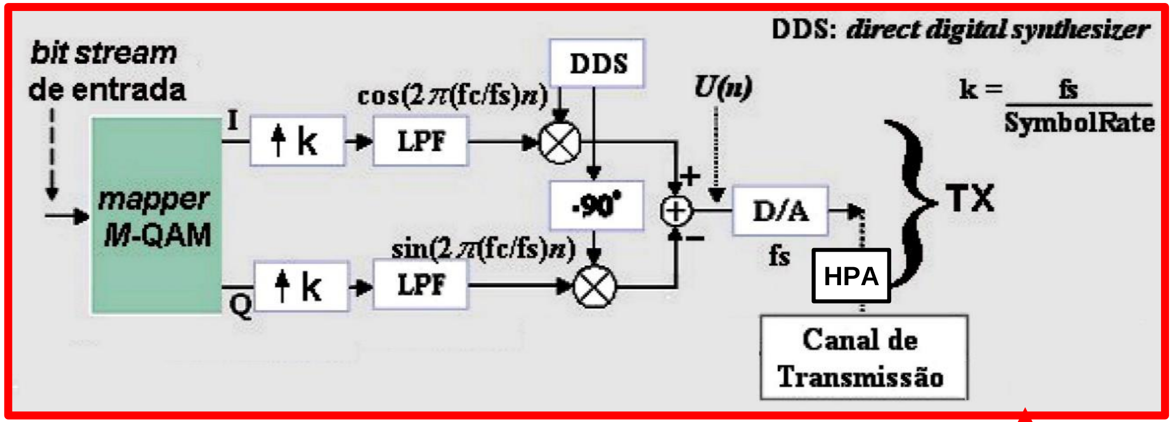




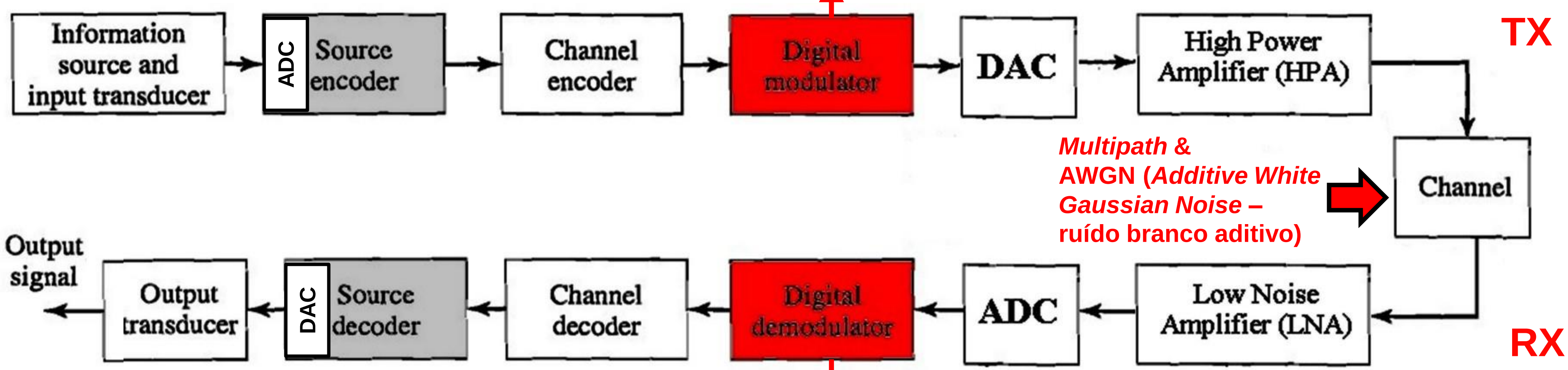
Para cada palavra binária do *bit stream* o correspondente *wavepacket* no canal representa uma onda EM (EM = eletromagnética) de amplitude A e/ou fase φ e/ou frequência f distintos. O parâmetro variado na onda (A e/ou φ e/ou f) depende do tipo de modulação adotado (QAM, PAM, PSK, FSK), conforme vimos no Cap IV de UFSM00261.



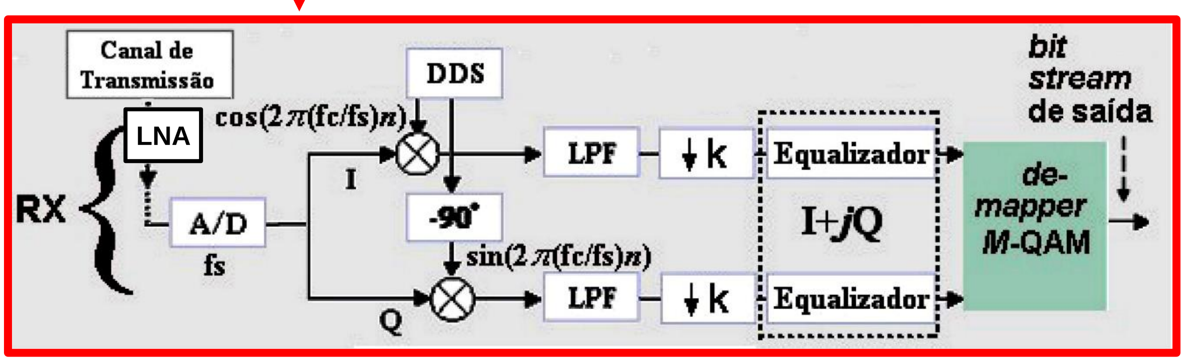
Introdução



O demodulador no RX reconverte cada *wavepacket* recebido do canal na palavra binária correspondente *no bit stream* de entrada do modulador no TX e que a ele deu origem.

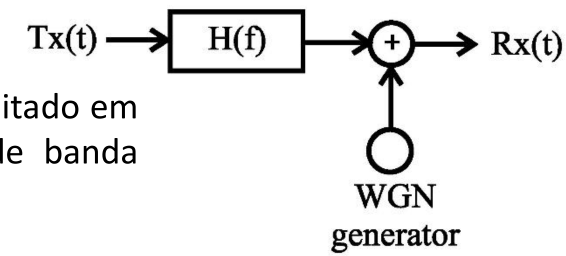


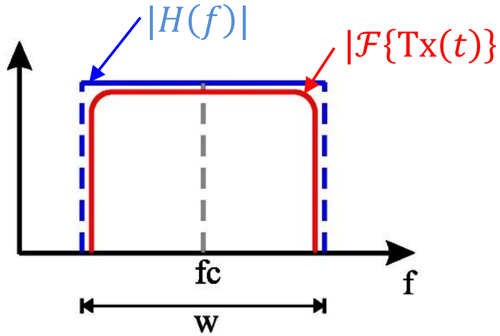
A fidelidade da palavra binária no *bit stream* na saída do demodulador do RX em relação à palavra binária correspondente no *bit stream* na entrada do modulador do TX depende do quanto a onda EM transmitida pelo TX tenha sido degradada por ruído e *multipath* no canal de transmissão, conforme discussão no próximo slide.



Introdução

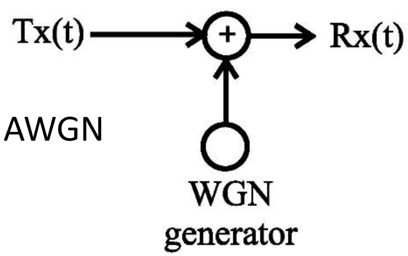
O canal de transmissão do enlace entre TX e RX é modelado por um filtro passabanda com função de transferência $H(f)$ que idealmente apresenta uma curva de magnitude $|H(f)|$ plana ao longo de toda largura W do espectro $\mathcal{F}\{\mathrm{Tx}(t)\}$ do sinal $\mathrm{Tx}(t)$ do transmissor, sendo $\mathcal{F}\{\cdot\}$ o operador que retorna a Transformada de Fourier do argumento $\{\cdot\}$. Na saída do filtro é acrescido um gerador de ruído branco (WGN – *White Gaussian Noise*), conforme mostra a figura abaixo, para efeito de modelar o conjunto de todas as fontes de ruído cujo ruído se somam ao sinal $\mathrm{Tx}(t)$ ao longo do canal de transmissão, e que, pelo teorema do limite central (ver https://en.wikipedia.org/wiki/Additive_white_Gaussian_noise), resulta em um ruído com distribuição Gaussiana de amplitudes.





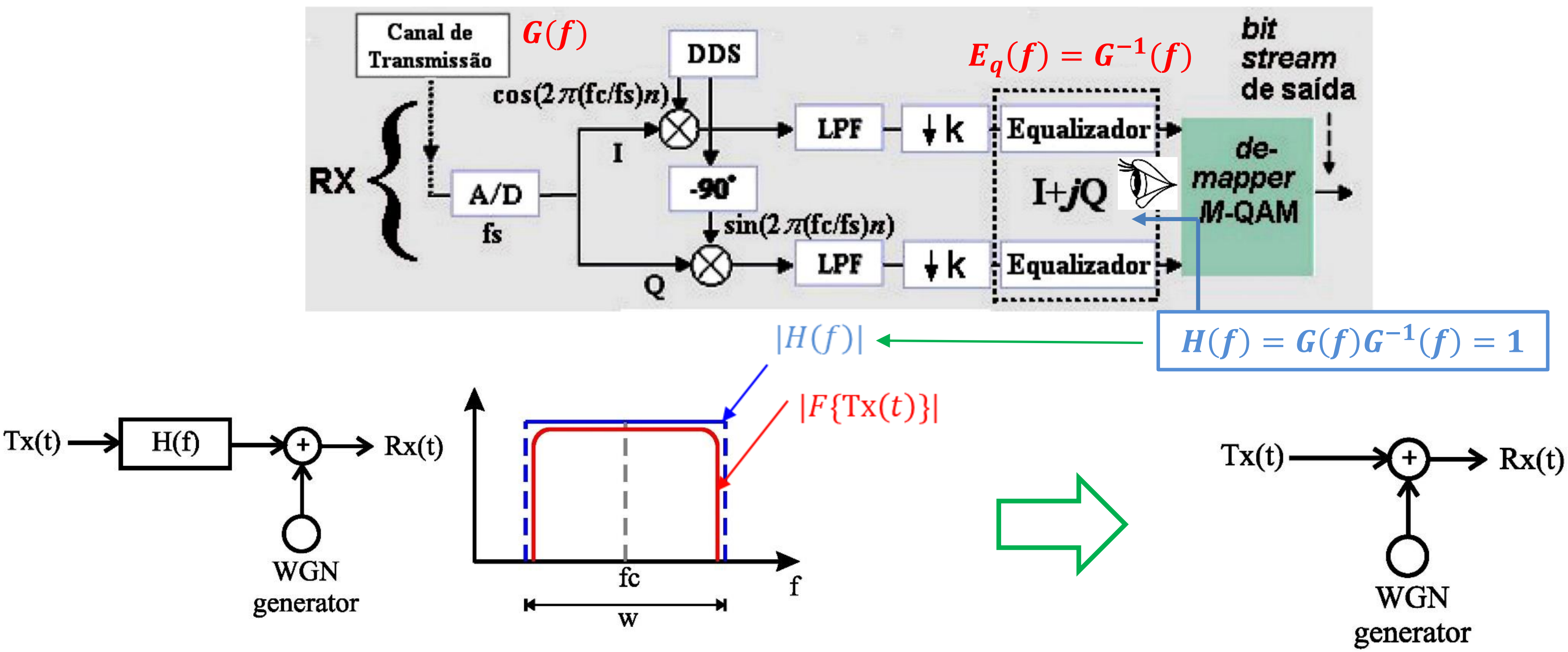
Modelo de canal ideal limitado em banda. W é a largura de banda (*bandwidth*) do canal.

Dado que, idealmente, a curva de magnitude $|H(f)|$ é plana ao longo de toda largura W da curva de magnitude $|\mathcal{F}\{\mathrm{Tx}(t)\}|$ do espectro do sinal $\mathrm{Tx}(t)$, então a função de transferência $H(f)$ do filtro que representa o canal deixa passar sem qualquer alteração de magnitude ou fase a totalidade das componentes espectrais do sinal $\mathrm{Tx}(t)$. Portanto, a única degradação do sinal $\mathrm{Tx}(t)$ em um canal cuja $H(f)$ do filtro deixa passar "intocáveis" (sem qualquer alteração de magnitude ou fase) a totalidade das componentes espectrais de $\mathrm{Tx}(t)$ é a degradação causada pela adição do ruído do gerador WGN. Assim, por não interagir com as componentes espectrais do sinal $\mathrm{Tx}(t)$, o filtro com função de transferência $H(f)$ pode ser retirado do modelo de canal acima, simplificando o modelo de canal ideal limitado em banda para o modelo de canal AWGN (*Additive White Gaussian Noise*), em que a única degradação imposta pelo canal é a adição de ruído branco Gaussiano:



Modelo de canal AWGN

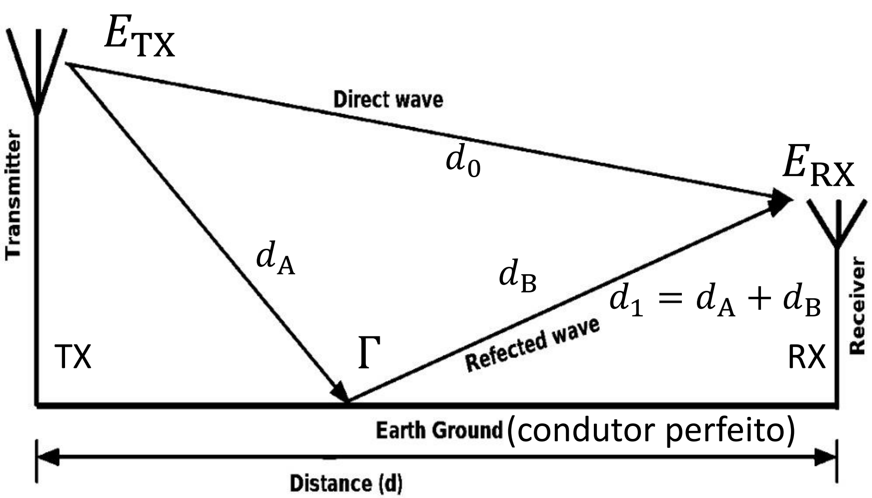
Ocorre que o modelo de canal ideal limitado em banda só existe na prática por ação do equalizador do RX, cujo hardware implementa um filtro adaptativo com função de transferência $E_q(f)$ que idealmente aproxima a função de transferência inversa $G^{-1}(f)$ da função de transferência $G(f)$ do canal (equalizadores serão estudados adiante nesta disciplina). Como o bloco do canal de transmissão está em série com o bloco do equalizador no diagrama do RX (vide abaixo), então a função de transferência conjunta dos dois blocos, que é o que o *de-mapper* "vê" na sua entrada, é $H(f) = G(f)G^{-1}(f) = 1$. Especificamente, o equalizador é um sistema adaptativo que busca identificar as frequências dos zeros da $G(f)$ que são estabelecidos pelo cenário de *multipath* no canal, tentando fazer com que os pólos de sua função de transferência $E_q(f) \cong G^{-1}(f)$ ocorra nas frequências dos zeros de $G(f)$, de modo que os polos do equalizador anulem os zeros do canal, e a função de transferência resultante $H(f) = G(f)G^{-1}(f) = 1$ "vista" pelo *de-mapper* seja a função de transferência de um canal ideal limitado em banda, e, em consequência, o canal seja "visto" pelo RX como um canal AWGN:



Modelo de canal ideal limitado em banda. W é a largura de banda (*bandwidth*) do canal.

Modelo de canal AWGN

O motivo pelo qual o cenário de *multipath* estabelece zeros na função de transferência $G(f)$ do canal decorre da interferência destrutiva que ocorre no RX entre as diversas frente de onda que nele incidem, e que dependendo da fase e amplitude relativa entre elas, podem apenas se atenuarem mutuamente em determinadas frequências e em outras frequências podem totalmente se cancelar com resultante nula. Por exemplo, consideremos um caso simples de multipercurso (*multipath*) em que a onda do campo elétrico E_{TX} irradiado pela antena transmissora se propaga apenas em dois percursos (percurso = raio de propagação): uma onda direta que se propaga em um percurso direto cujo comprimento é d_0 e uma onda refletida que se propaga em um percurso com reflexão em condutor perfeito (coeficiente de reflexão $\Gamma = 1.0e^{-j180°} = -1$) e cujo comprimento é $d_1 = d_{\text{A}} + d_{\text{B}}$. As duas ondas, direta e refletida, incidem e se superpõe na antena do RX, distante d da antena TX, de modo a formar o campo E_{RX}, conforme figura abaixo.



O campo elétrico $E(r)$ de uma onda EM de frequência f que se propaga no espaço livre na direção $\underline{\hat{r}}$ do raio de propagação, com valor $E(r_0)$ medido na posição $r = r_0$, resultará em um campo elétrico $E(r_0 + d) = E(r_0)\left(\frac{r_0}{r_0+d}\right)e^{j\frac{2\pi d}{\lambda}}$ medido na posição $\text{r} = r_0 + d$, onde $\lambda = \frac{c}{f}$ é o comprimento de onda e $c = 2.998 \times 10^8$ m/s é a velocidade da luz. Ou seja, a amplitude do campo E de uma onda EM que se propaga no espaço livre varia inversamente com a distância d percorrida e sua fase gira 360° ($= 2\pi$ rad) a cada distância d percorrida equivalente a um comprimento de onda λ.

Portanto, sendo r_0 a posição em que se mede o campo E_{TX} , a superposição das duas ondas, direta e refletida, que incidem na antena do RX, resultam em um campo elétrico E_{RX} dado por:

$$E_{\text{RX}} = E_{\text{TX}}\frac{r_0}{(r_0+d_0)}e^{j\frac{2\pi d_0}{\lambda}} + E_{\text{TX}}\Gamma\frac{r_0}{(r_0+d_1)}e^{j\frac{2\pi d_1}{\lambda}} = E_{\text{TX}}\left(\overbrace{\frac{r_0}{(r_0+d_0)}e^{j\frac{2\pi f d_0}{c}} - \frac{r_0}{(r_0+d_1)}e^{j\frac{2\pi f d_1}{c}}}^{\boldsymbol{G(f)}\ \textbf{do canal}}\right)$$

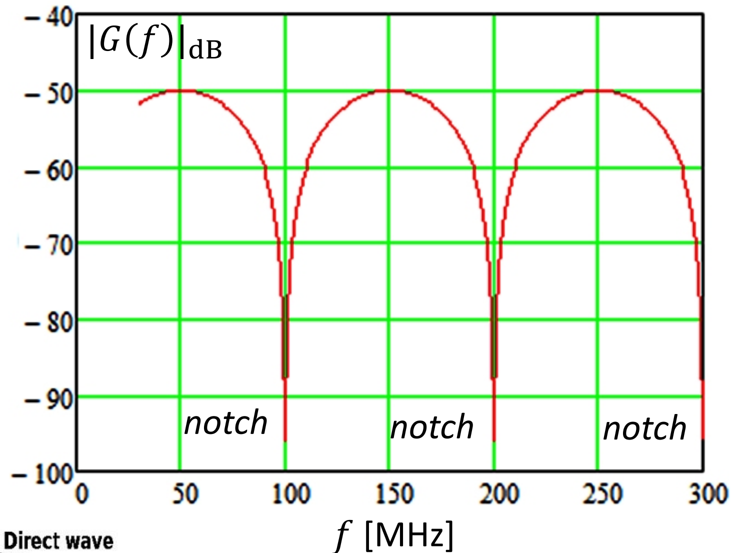
Ocorre Interferência destrutiva entre as ondas direta e refletida quando $\left(\frac{r_0}{(r_0+d_0)}e^{j\frac{2\pi f d_0}{c}} - \frac{r_0}{(r_0+d_1)}e^{j\frac{2\pi f d_1}{c}}\right) \cong 0$, que é equivalente à condição $\frac{(r_0+d_0)}{(r_0+d_1)}e^{j\frac{2\pi f(d_1-d_0)}{c}} \cong 1$.

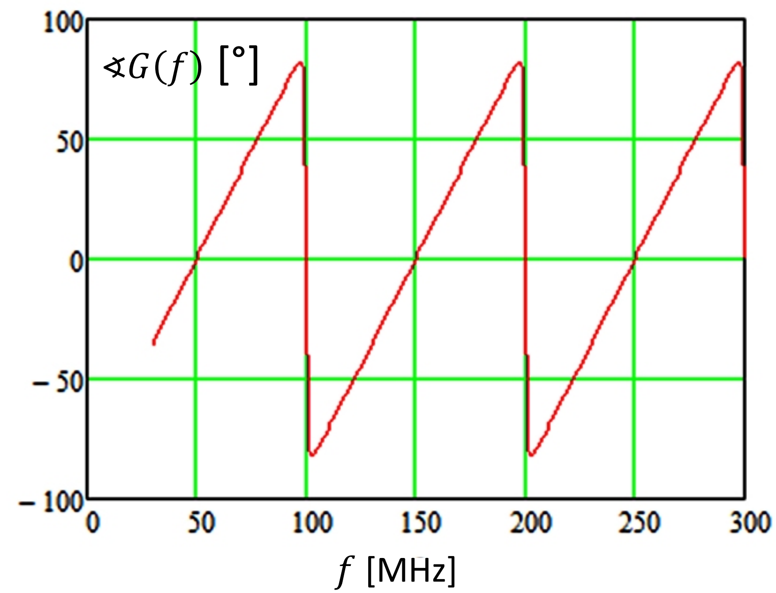
Introdução

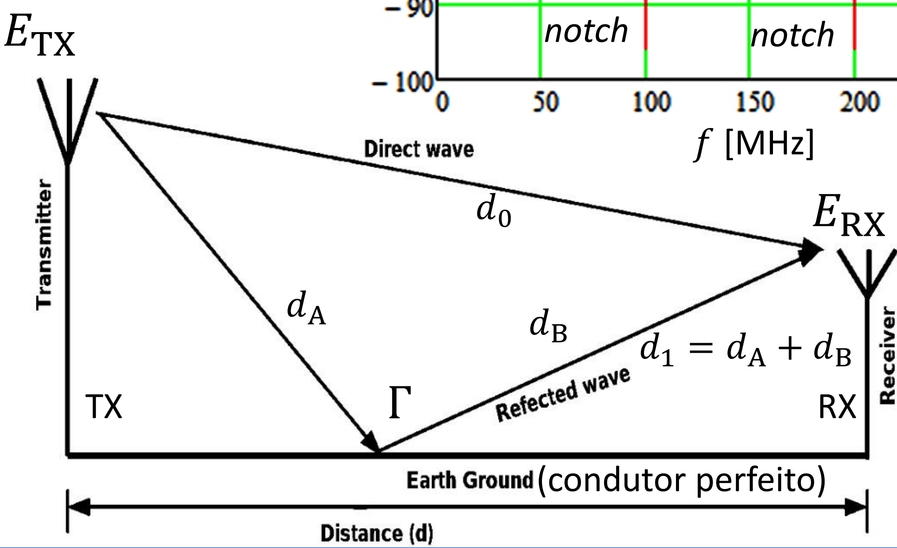
Por exemplo, consideremos o enlace abaixo com um percurso direto e um percurso com reflexão em condutor perfeito perfeito (coeficiente de reflexão $\Gamma = 1.0e^{-j180^\circ} = -1$) , operando em $f_c = 100$ MHz ($\lambda = \frac{c}{f_c} = 2.998$ m), com $r_0 = \lambda/2\pi = 47.713$ cm, $d_0 = 100\lambda = 299.792$ m , $d_1 = 101\lambda = 302.790$ m. Os gráficos de magnitude (em dB) e fase (em graus) de $G(f)$ na faixa 30MHz < f < 300 MHz e as frequências dos zeros de $G(f)$ na faixa especificada são:

$$G(f) = \left(\frac{r_0}{(r_0+d_0)}e^{j\frac{2\pi f d_0}{c}} - \frac{r_0}{(r_0+d_1)}e^{j\frac{2\pi f d_1}{c}}\right) \longrightarrow |G(f)|_{\mathrm{dB}} = 20\log(|G(f)|) \quad \measuredangle G(f) = \mathrm{atan2}\left(\frac{\mathrm{Im}\{G(f)\}}{\mathrm{Re}\{G(f)\}}\right)$$

Nota: A função atan2() delimita a faixa de variação angular da fase no intervalo [–180°, +180°] (ver https://en.wikipedia.org/wiki/Atan2).



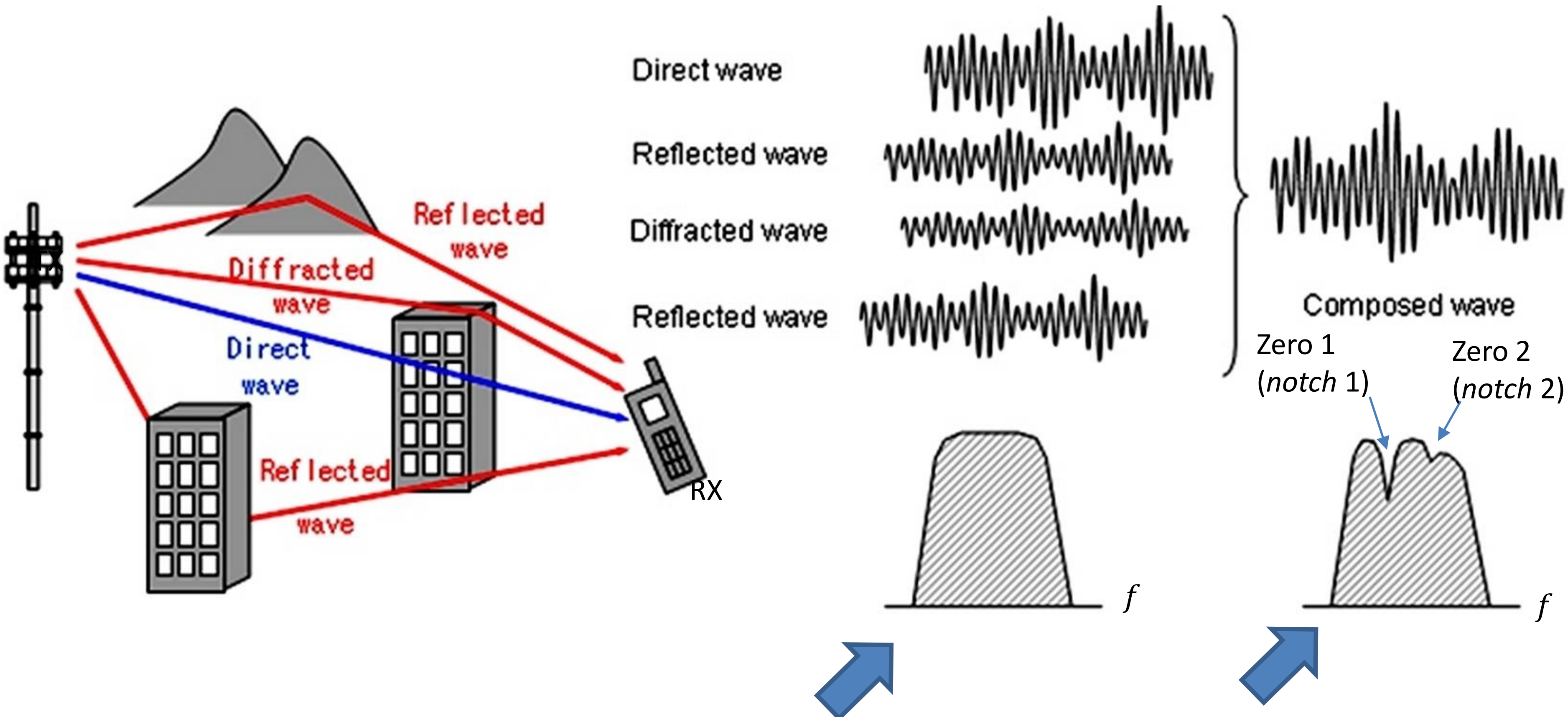




Frequências dos zeros de $G(f)$: 100 MHz, 200MHz e 300MHz, respectivamente correspondendo aos 3 *notches* na curva de $|G(f)|_{\mathrm{dB}}$. Note que o sinal é transmitido em $f_c = 100$ MHz, portanto o zero de $G(f)$ em $f = 100$ MHz anula o sinal recebido.

Introdução

A figura abaixo mostra um cenário de *multipath* com um percurso direto, dois percursos com reflexão e um percurso com difração. Este cenário de multipercurso estabelece múltiplos zeros na função de transferência $G(f)$ do canal decorrentes da interferência destrutiva que ocorre no RX entre as diversas frentes de onda que nele incidem, interferência que depende da fase e amplitude relativa entre as frentes de onda.

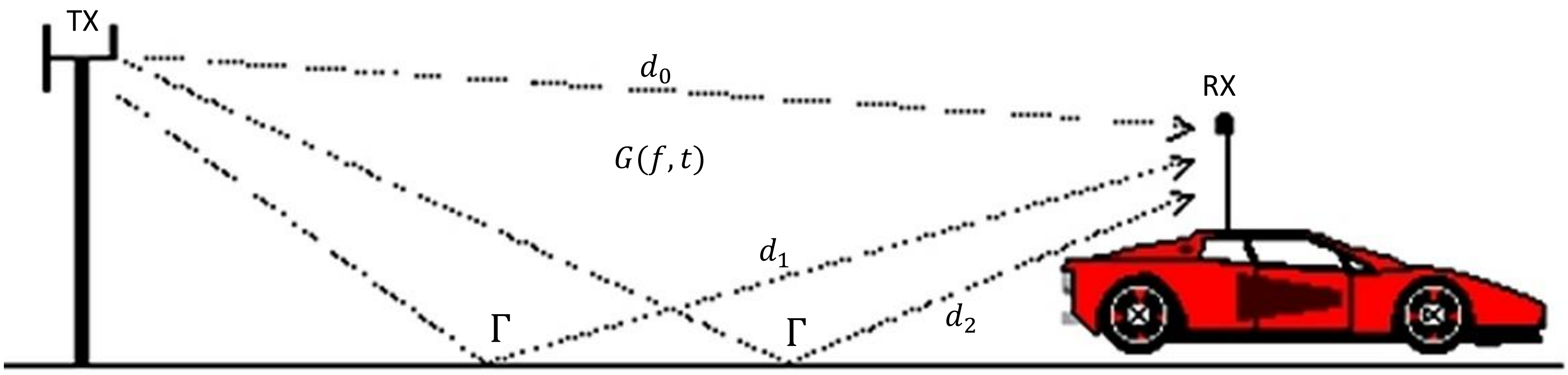


Curva de magnitude do espectro do sinal recebido no RX caso houvesse somente o caminho direto (não há reflexão nem difração).

Curva de magnitude do espectro do sinal recebido no RX degradada pelos *notches* de $G(f)$ resultantes da interferência destrutiva que ocorre em consequência do cenário de multipercurso do canal.

Introdução

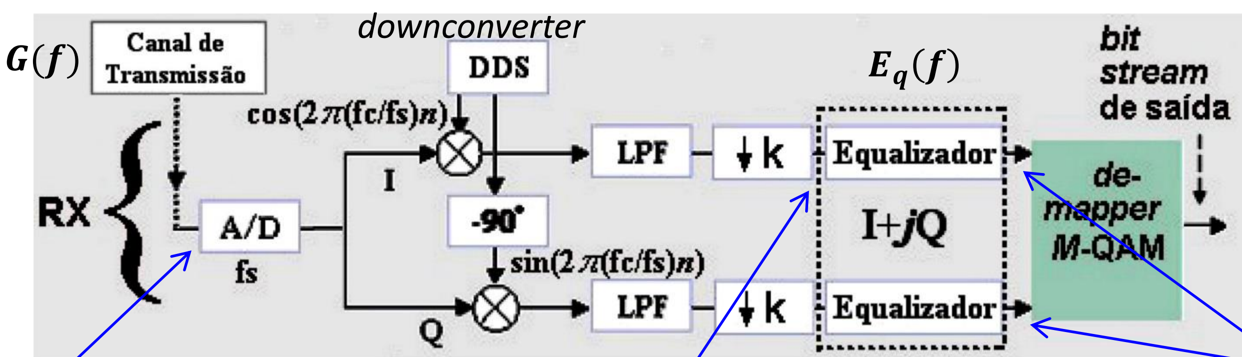
A figura abaixo mostra um cenário dinâmico de *multipath* com um percurso direto e dois percursos com reflexão em solo condutor perfeito (coeficiente de reflexão $\Gamma = 1.0e^{-j180^\circ} = -1$). Os zeros da função de transferência $G(f)$ do canal (decorrentes da interferência destrutiva que ocorre entre as ondas que incidem no RX) variam sua frequência de acordo com a posição do RX que está em movimento. Os zeros variam sua frequência porque, conforme visto no slide 6, ocorre interferência destrutiva entre as ondas direta e refletidas quando $\left(\frac{r_0}{(r_0+d_0)}e^{j\frac{2\pi f d_0}{c}} - \frac{r_0}{(r_0+d_1)}e^{j\frac{2\pi f d_1}{c}} - \frac{r_0}{(r_0+d_2)}e^{j\frac{2\pi f d_2}{c}}\right) \cong 0$, condição que depende não somente da frequência f como também depende das distâncias d_0, d_1 e d_2, as quais são função da posição momentânea do RX em movimento:



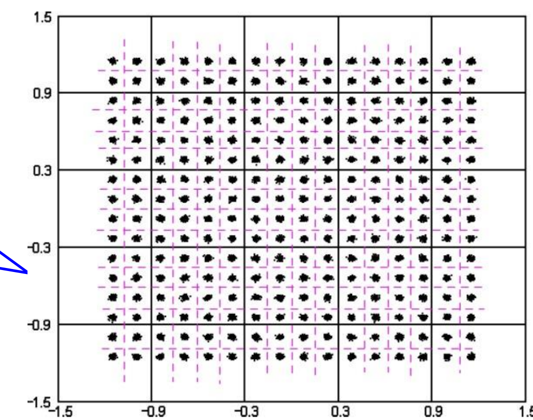
Como os zeros da $G(f)$ do canal variam sua frequência de acordo com a posição do RX em movimento, então a função de transferência $G(f,t)$ do canal será variante no tempo t , o que impõe um custo computacional elevado ao hardware que executa o algoritmo adaptativo do equalizador, dado que o algoritmo necessita não somente implementar a função de transferência inversa $G^{-1}(f,t)$ do canal como também deve ser capaz de se adaptar às variações no tempo de $G(f,t)$. Se o RX se movimenta em uma velocidade muito alta, o algoritmo adaptativo do equalizador pode falhar na tentativa de se adaptar às variações rápidas no tempo de $G(f,t)$, o que inviabiliza a determinação precisa de $G^{-1}(f,t)$.

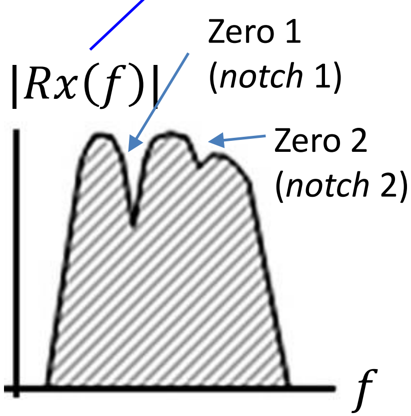
Introdução

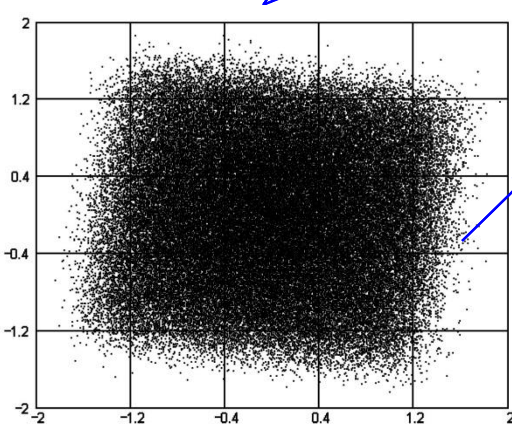
A figura abaixo mostra a degradação da magnitude $|Rx(f)|$ de espectro do sinal recebido (que é uma degradação no domínio frequência f causada pelos zeros na função de transferência $G(f)$ do canal estabelecidos pela superposição de ondas no cenário de *multipath* no canal, causando *notches* em $G(f)$) resulta simultaneamente em uma degradação no domínio tempo do sinal em banda-base após o *downconverter* do RX, dado que a superposição de ondas no canal implica simultaneamente na superposição de símbolos IQ na entrada do equalizador, gerando ISI (*Inter Symbol Interference* – interferência intersimbólica) conforme mostra a figura. Caso o processo adaptativo do equalizador seja apto a ajustar a função de transferência $E_q(f)$ do equalizador de modo a que a mesma implemente a função de transferência $G^{-1}(f)$ do canal , i.e., caso os polos de $E_q(f)$ cancelem os zeros de $G(f)$, então o RX "vê" o canal como um canal AWGN conforme discutido no slide 5:



Símbolos IQ com ISI minimizada por ação de $E_q(f) = G^{-1}(f)$:



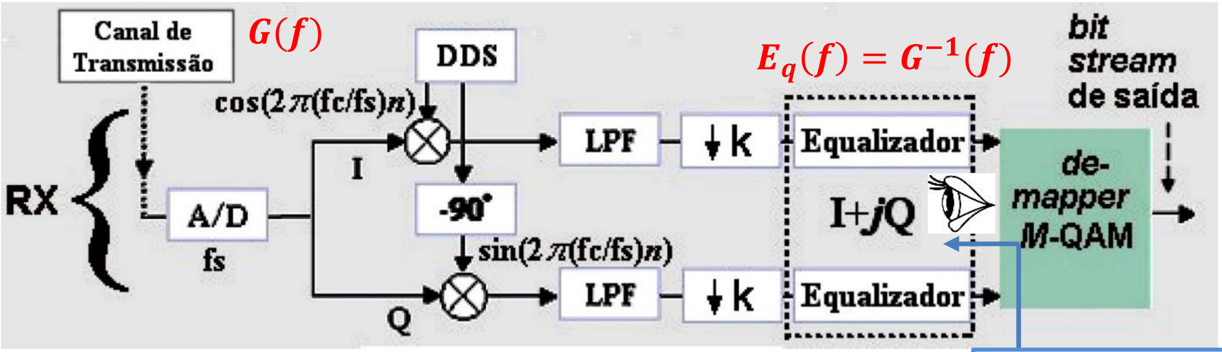




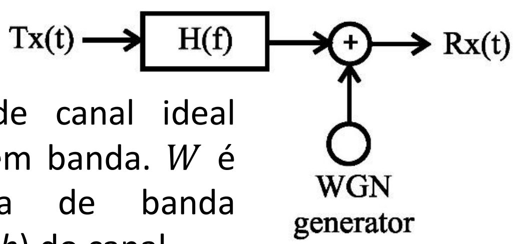
Símbolos IQ recebidos com ISI causada pelo *multipath* no canal. A ISI causa alta BER (*Bit Error Rate*) na saída do *de-mapper* caso o filtro adaptativo do equalizador falhe na tentativa de ajustar a sua função de transferência $E_q(f)$ de modo a que a mesma implemente a função de transferência $G^{-1}(f)$ do canal.

Introdução

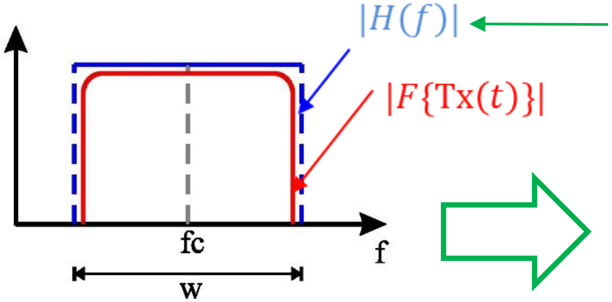
Conforme discutido no slide anterior, quando o filtro adaptativo do equalizador é apto a ajustar a sua função de transferência $E_q(f)$ de modo a que a mesma implemente a função de transferência $G^{-1}(f)$ do canal , i.e., quando os polos de $E_q(f)$ cancelam os zeros de $G(f)$, então o RX "vê" o canal como um canal AWGN. A operação sob canal AWGN é a situação de operação considerada normal para um receptor digital, em que a BER (*Bit Error Rate*) na saída do *de-mapper* é minimizada pelo fato da ISI na entrada do *de-mapper* ter sido minimizada pelo equalizador.

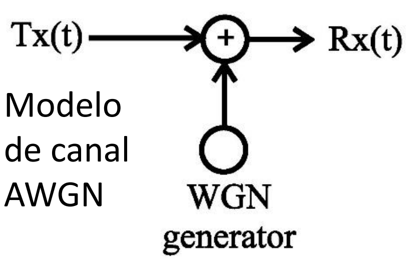


$H(f) = G(f)G^{-1}(f) = 1$



Modelo de canal ideal limitado em banda. W é a largura de banda (*bandwidth*) do canal.

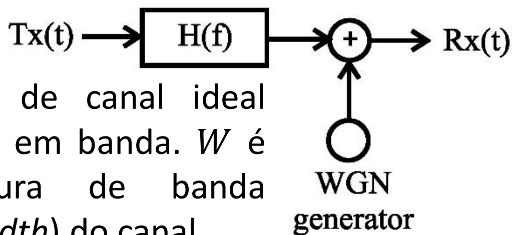




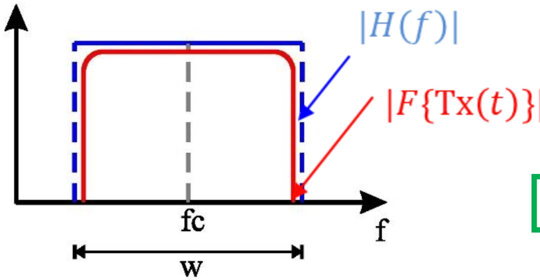
Modelo de canal AWGN

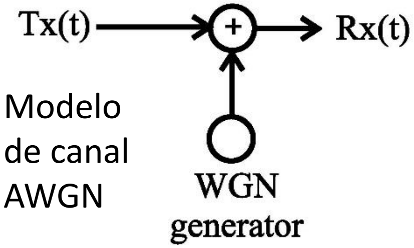
Introdução

Para um canal AWGN, a única degradação do sinal $\text{Tx}(t)$ é a degradação causada pela adição do ruído do gerador WGN, porque um canal AWGN é um canal ideal limitado em banda cuja curva de magnitude $|H(f)|$ da sua função de transferência $H(f)$ é plana ao longo de toda largura W da curva de magnitude $|F\{\text{Tx}(t)\}|$ do espectro do sinal $\text{Tx}(t)$,conforme mostra a figura abaixo. Nesta situação, $|H(f)|$ deixa passar "intocáveis" (sem qualquer alteração de magnitude ou fase) a totalidade das componentes espectrais de $\text{Tx}(t)$. Por não interagir com as componentes espectrais do sinal $\text{Tx}(t)$, o filtro com função de transferência $H(f)$ pode ser retirado do modelo de canal limitado em banda, simplificando para o modelo de canal AWGN, em que a única degradação imposta pelo canal é a adição de ruído branco Gaussiano:



Modelo de canal ideal limitado em banda. W é a largura de banda (*bandwidth*) do canal.





Modelo de canal AWGN

Note que se a curva de magnitude $|F\{\text{Tx}(t)\}|$ do espectro do sinal $\text{Tx}(t)$ não "couber" em banda dentro do retângulo da curva de magnitude $|H(f)|$ ao longo de toda largura W na figura acima, então $|H(f)|$ não deixa passar de modo "intocável" a totalidade das componentes espectrais de $\text{Tx}(t)$, alterando a magnitude e fase das componentes espectrais de $\text{Tx}(t)$ que estão fora da banda de largura W , o que gera ISI e degrada a BER na saída do *de-mapper.*

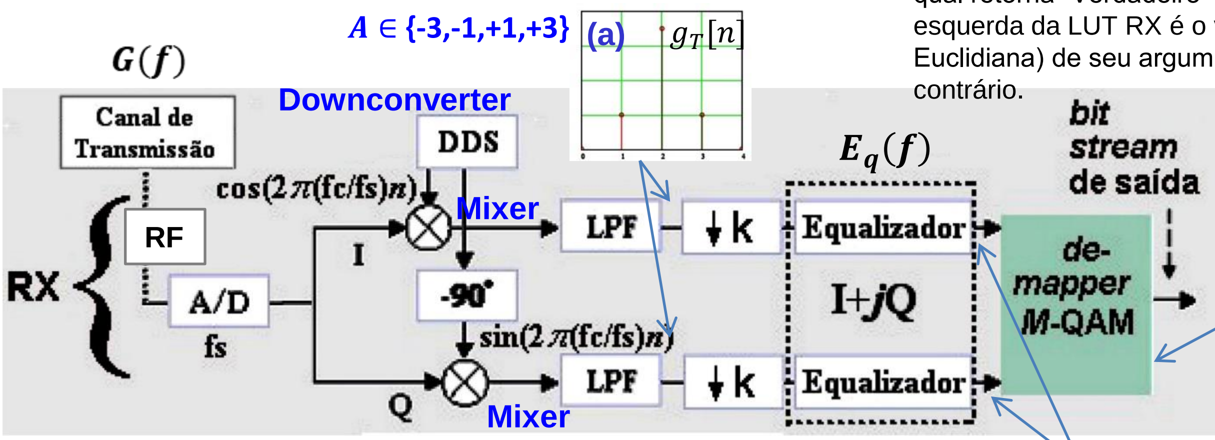
Quando o sistema opera sob um canal AWGN de largura de banda W, em que o espectro do sinal cabe em banda dentro do retângulo da curva de magnitude da resposta em frequência do canal ao longo de toda largura de banda W, conforme mostra a figura acima, considera-se que esta é a situação de operação normal para um receptor digital, i.e., o equalizador implementa com sucesso a função de transferência inversa do canal, conforme discutido no slide anterior. Nesta situação, a Capacidade do Canal é dada pelo Teorema de Shannon-Hartley, já discutido nos slides 35 a 38 de https://www.fccdecastro.com.br/pdf/SCD1_CapI.pdf , cujo resultado final é expresso por:

$$C = W\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right) = \frac{W}{\ln(2)}\ln\left(1+\frac{S}{N}\right) \quad \text{[bps]}$$

onde C é a capacidade de transmissão em [bps] do canal AWGN de largura de banda W em [Hz],S é a potência [W] do sinal medido **na entrada do RX** e P é a potência [W] do ruído do canal medido **na entrada do RX**.

Introdução

$NN\{\cdot\}$ é o operador *Nearest Neighbour* (vizinho mais próximo), o qual retorna "Verdadeiro" quando o valor de entrada na coluna esquerda da LUT RX é o vizinho mais próximo (menor distância Euclidiana) de seu argumento {.}, e retorna "Falso" em caso contrário.

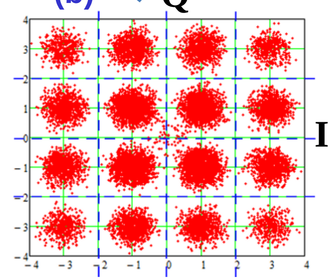


(e)

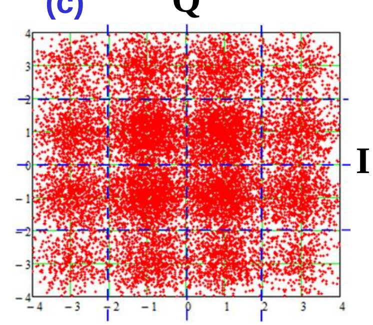
I: $[b_3b_1]$		Q: $[b_2b_0]$	
$NN\{+3\}$	00	$NN\{+3\}$	00
$NN\{+1\}$	01	$NN\{+1\}$	01
$NN\{-1\}$	11	$NN\{-1\}$	11
$NN\{-3\}$	10	$NN\{-3\}$	10

Caso o processo adaptativo do equalizador falhe em ajustar a função de transferência $E_q(f)$ do equalizador de modo que a mesma não consiga implementar a função de transferência $G^{-1}(f)$ do canal, então ocorrerá ISI residual (cuja origem é o *multipath* no canal) e a dispersão de símbolos em torno dos símbolos IQ de referência $\mathrm{Iref} + \mathrm{jQref}$ da constelação 16-QAM será significativa na entrada do *de-mapper*, conforme mostrado em (b). Uma dispersão residual de símbolos significativa também pode decorrer em consequência de uma baixa SNR no canal.

(b)

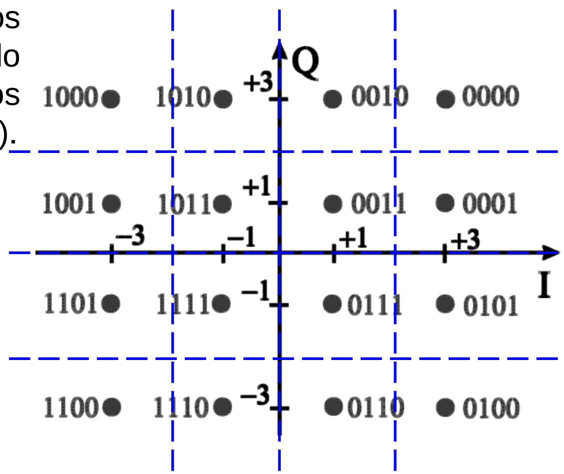


(c)



Se a causa da dispersão dos símbolos IQ na entrada do *de-mapper* for excessiva (SNR muito baixa e/ou excessiva ISI residual) as palavras binárias $[\mathrm{b}_3\,\mathrm{b}_2\,\mathrm{b}_1\,\mathrm{b}_0]$ associadas aos respectivos símbolos IQ originalmente transmitidos serão recuperadas com erro na saída do *de-mapper* para aqueles símbolos da "nuvem" de símbolos dispersos em torno dos símbolos $\mathrm{Iref} + \mathrm{jQref}$ que invadirem uma das regiões de decisão adjacentes, conforme mostrado em (c).

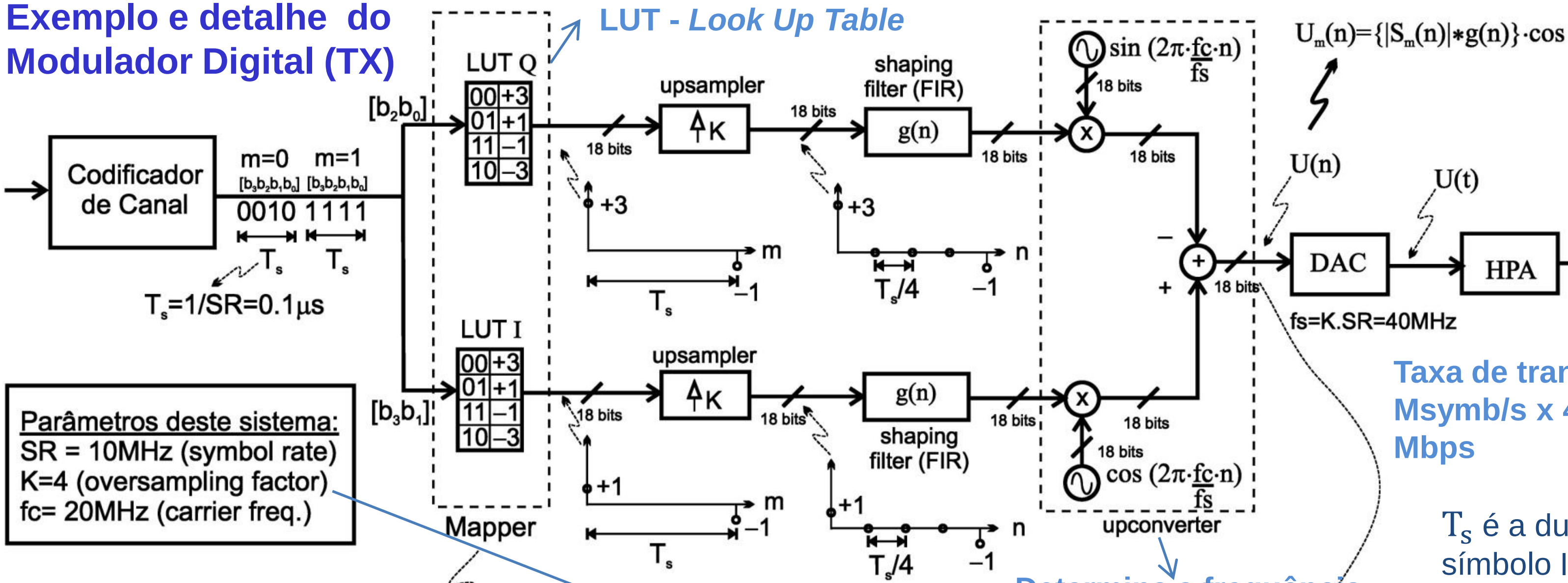
(d) $[\mathbf{b}_3\ \mathbf{b}_2\ \mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_0] \Leftrightarrow \mathbf{Iref} + j\mathbf{Qref}$



Em consequência da dispersão excessiva referida em (c) o mapeamento $[\mathrm{b}_3\ \mathrm{b}_2\ \mathrm{b}_1\ \mathrm{b}_0] \Leftrightarrow \mathrm{Iref} + j\mathrm{Qref}$ mostrado em (d) é feito de tal maneira que palavras binárias $[\mathrm{b}_3\ \mathrm{b}_2\ \mathrm{b}_1\ \mathrm{b}_0]$ associadas à regiões de decisão adjacentes mantenham entre si uma distância de Hamming unitária (distância de Hamming unitária = somente um bit de diferença entre as palavras – ver https://en.wikipedia.org/wiki/Gray_code). Este mapeamento faz com que, caso a "nuvem" de símbolos dispersos em torno dos símbolos $\mathrm{Iref} + \mathrm{jQref}$ invada uma das regiões de decisão adjacentes, os consequentes erros de decisão do *de-mapper* seja apenas de 1 bit, o que facilita o trabalho do código corretor de erro no Decodificador de Canal.

Exemplo e detalhe do Modulador Digital (TX)

LUT - *Look Up Table*



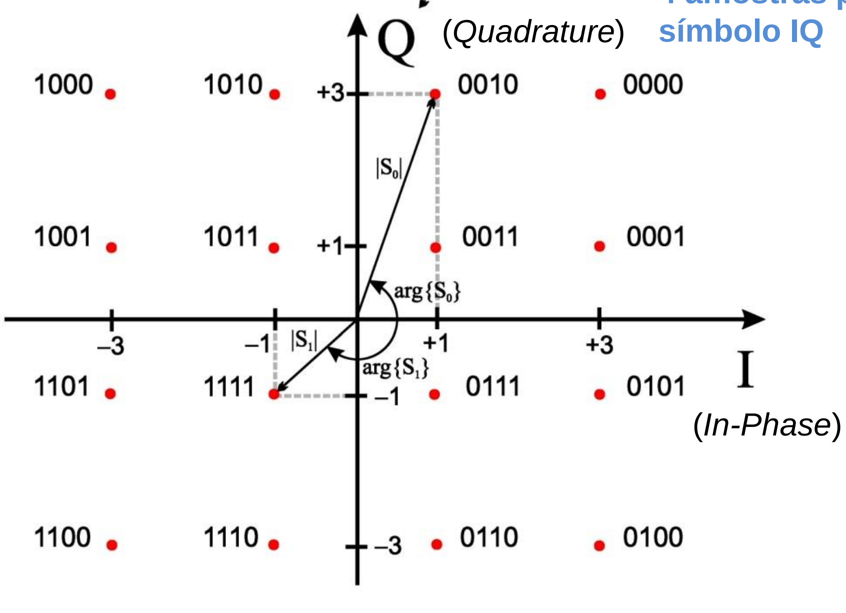
Parâmetros deste sistema:
SR = 10MHz (symbol rate)
K=4 (oversampling factor)
fc= 20MHz (carrier freq.)

4 amostras por símbolo IQ

Determina a frequência central fc do canal

Taxa de transmissão: 10 Msymb/s x 4 bits/symb = 40 Mbps

T_S é a duração de cada símbolo IQ



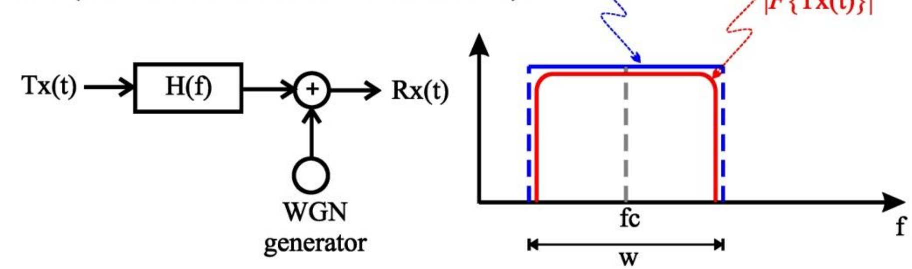
Identificação dos bits das palavras binárias: $[b_3b_2b_1b_0]$

$U_m(n)$ p/ m=0 e m=1 neste exemplo:

$$U_0(n)=\{\mathrm{sqrt}[3^2+1^2]*g(n)\}\cdot\cos\left(2\pi\cdot\frac{20}{40}\cdot n+\mathrm{atan}(3/1)\right)$$

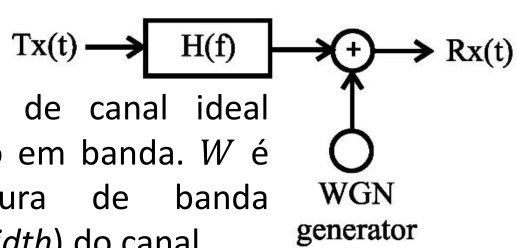
$$U_1(n)=\{\mathrm{sqrt}[(-1)^2+(-1)^2]*g(n)\}\cdot\cos\left(2\pi\cdot\frac{20}{40}\cdot n-\mathrm{atan}(-1/-1)\right)$$

Modelo do enlace entre TX e RX (modelo do canal de transmissão):

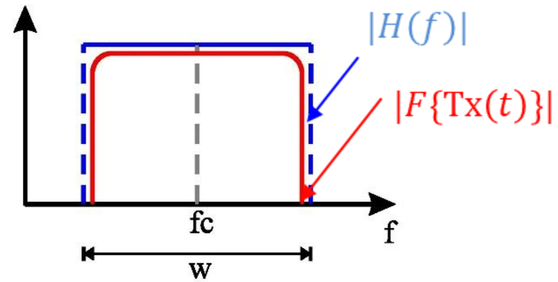


Introdução

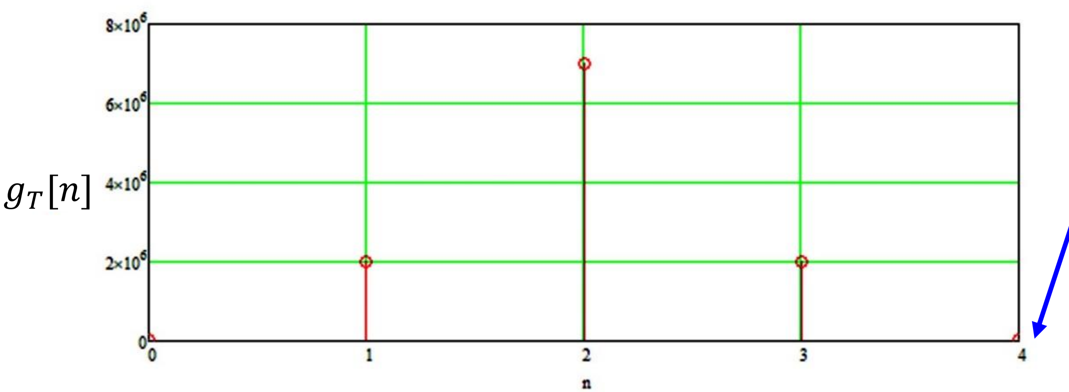
No diagrama do modulador digital 16-QAM mostrado no slide anterior, a **contenção espectral** do sinal da onda EM que se propaga no canal de transmissão é efetuada em banda-base por dois *shaping-filters*, um para o ramo I e outro para o ramo Q. Usualmente o *shaping-filter* é um filtro digital passa-baixa FIR (*finite impulse response*). Entende-se por **contenção espectral** o procedimento de filtragem digital que condiciona a curva de magnitude $|F\{\mathrm{Tx}(t)\}|$ do espectro do sinal $\mathrm{Tx}(t)$ a caber em banda dentro do retângulo da curva de magnitude $|H(f)|$ ao longo de toda largura W na figura abaixo:



Modelo de canal ideal limitado em banda. W é a largura de banda (*bandwidth*) do canal.



Conforme vimos nos slides 4 a 6 do Cap IV de UFSM00261 – SISTEMAS DE COMUNICAÇÃO DIGITAL I (ver https://www.fccdecastro.com.br/pdf/SCD1_CapIV.pdf), a contenção espectral lá estudada era obtida através de um filtro Gaussiano. Por exemplo, o gráfico abaixo mostra a resposta ao impulso $g_T[n] = K_0 e^{-\pi\left(\frac{n\frac{T}{K_S}-\frac{T}{2}}{\tau}\right)^2}$ de um *shaping filter* Gaussiano com $K_0 = 7\times 10^6$, $\tau = 0.022\mu\mathrm{s}$ e $K_s = 4$ (4 amostras por símbolo IQ $\Rightarrow$ *oversampling factor*) onde o parâmetro T é igual à duração $\mathrm{T_s}$ de cada símbolo IQ, sendo $\mathrm{T_s} = 1/SR$ e SR é o ***symbol rate*** adotado na modulação digital (ver slide anterior).



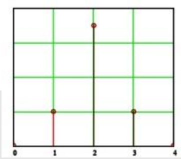
Esta amostra pertence ao próximo símbolo IQ.

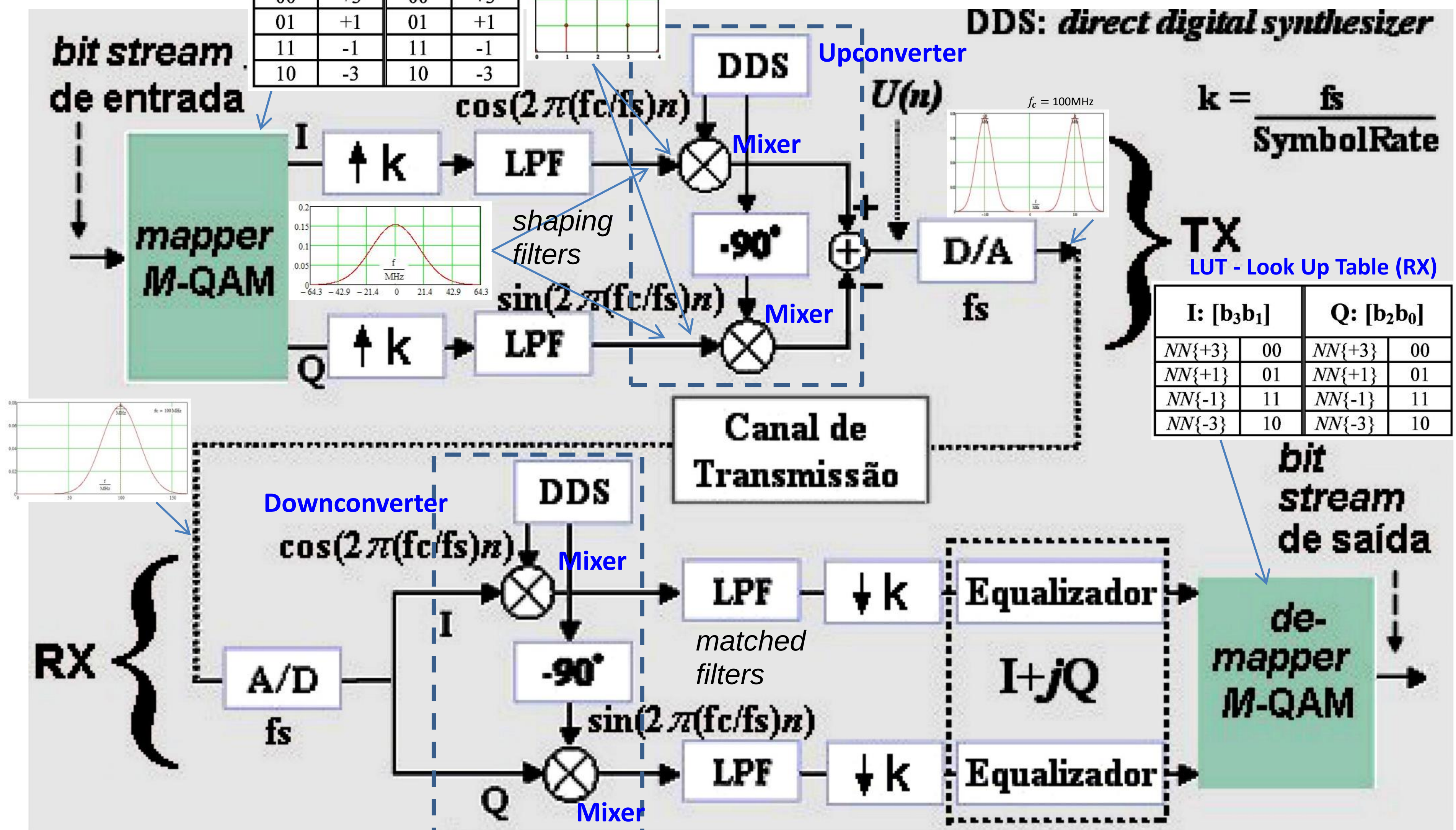
Nota: Importante notar que **a duração da resposta ao impulso discreta do filtro Gaussiano não deve ultrapassar a duração $\mathbf{T_s}$ de um símbolo IQ**, caso contrário será gerado ISI (interferência intersimbólica) no hardware do modulador, além da ISI gerada pelo inevitável multipercurso que sempre ocorre no canal de transmissão.

O RX adota um par (I & Q) de filtros LPF casados (*matched filters*) com o par de filtros LPF usados como *shaping filter* no TX para contenção espectral, conforme mostra o diagrama abaixo. A finalidade do *matched filter* do RX é estabelecer um **<u>processo de correlação</u>** entre a resposta ao impulso do *matched filter* e o sinal dos pulsos do *shaping filter* recebidos do TX através do canal de transmissão. Este processo de correlação **minimiza o ruído e maximiza o sinal**, conforme slides 55 a 63 de https://www.fccdecastro.com.br/pdf/SCD1_CapIV.pdf .

LUT – Look Up Table (TX)

I: $[b_3b_1]$		Q: $[b_2b_0]$	
00	+3	00	+3
01	+1	01	+1
11	-1	11	-1
10	-3	10	-3





LUT - Look Up Table (RX)

I: $[b_3b_1]$		Q: $[b_2b_0]$	
$NN\{+3\}$	00	$NN\{+3\}$	00
$NN\{+1\}$	01	$NN\{+1\}$	01
$NN\{-1\}$	11	$NN\{-1\}$	11
$NN\{-3\}$	10	$NN\{-3\}$	10

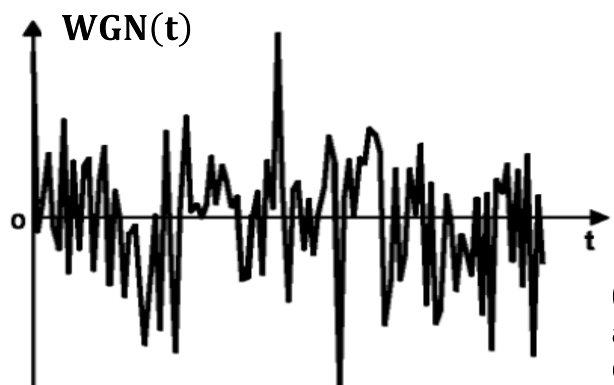
Introdução

Conforme vimos no slide 15, a duração da resposta ao impulso discreta do filtro Gaussiano não deve ultrapassar a duração T_S de um símbolo IQ, caso contrário será gerado ISI (interferência intersimbólica) no hardware do modulador. Isto impõe uma limitação ao intervalo de tempo em que é efetuado o processo de correlação entre a resposta ao impulso do *matched filter* no RX e o sinal dos pulsos do *shaping filter* recebidos do TX através do canal de transmissão. Esta limitação ao intervalo de tempo em que é efetuado o processo de correlação limita a minimização do ruído e limita a maximização do sinal.

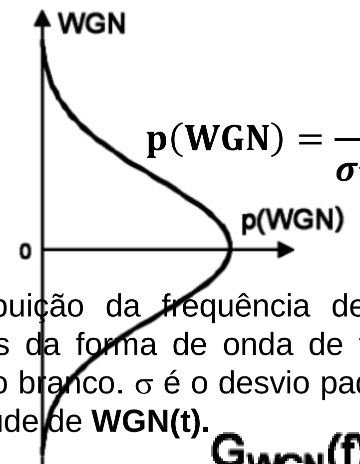
Para remover esta limitação ao intervalo de tempo em que é efetuado o processo de correlação é necessário utilizar como *shaping filter* e *matched filter* um filtro passa baixa cuja resposta ao impulso perdure mais do que a duração T_S de um símbolo IQ mas que simultaneamente não gere ISI. Conforme veremos no Cap I.2, este filtro cuja resposta ao impulso perdura mais do que a duração T_S de um símbolo IQ mas que simultaneamente não gera ISI é denominado filtro ***raised cosine***. O filtro ***raised cosine*** é implementado através da ação conjunta de um *shaping filter* no TX do tipo **root raised cosine** e de um *matched filter* no RX também do tipo **root raised cosine**, conforme veremos nos próximos slides.

O efeito do intervalo de integração no processo de correlação efetuado no *matched filter*

Em (a) abaixo é mostrado um sinal de ruído térmico WGN(t), observado na tela de um osciloscópio digital e medido, por exemplo, nos terminais de um resistor de 10MΩ aquecido na chama de uma vela. O ruído térmico é o ruído típico na entrada de qualquer RX de comunicações. O ruído térmico sempre apresenta **distribuição Gaussiana de amplitudes**, c/ média zero, e se comporta de maneira tal que valores positivos e negativos de pequena amplitude ocorrem frequentemente ao longo do tempo. Picos de amplitude maior ocorrem raramente, conforme mostrado em (b) abaixo, no histograma da frequência de ocorrência (probabilidade de ocorrência p(WGN)) dos valores de amplitude do sinal WGN(t). Um sinal conforme mostrado em (a) é dito ser **descorrelacionado** (i.e., a função de auto-correlação do sinal é um impulso), significando que o sinal é interferido somente por ele mesmo e por mais nenhum outro sinal. Em (c) é mostrado a função de autocorrelação $Ra_{WGN}(\tau)$ do sinal WGN(t), e que resulta em um impulso $\delta(t)$. Em (d) é mostrado a densidade espectral de potência $G_{WGN}(f)$ do sinal WGN(t), notando que ela resulta em um valor constante $N_o/2$ no domínio frequência f, indicando que WGN(t) é um ruído branco. Branco no sentido da cor da luz solar cujo espectro também apresenta densidade espectral constante indicando que a luz solar é formada por componentes espectrais de todas as frequências (i.e., cores) do espectro da luz visível.

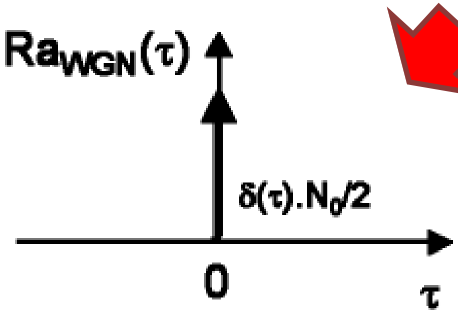


(a) Forma de onda de tensão **WGN(t)** de um ruído Gaussiano branco gravada na memória de um osciloscópio digital e mostrada na sua tela,



$$\mathbf{p(WGN)} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\sigma}\sqrt{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}} \boldsymbol{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathbf{WGN}}{\boldsymbol{\sigma}}\right)^2}$$

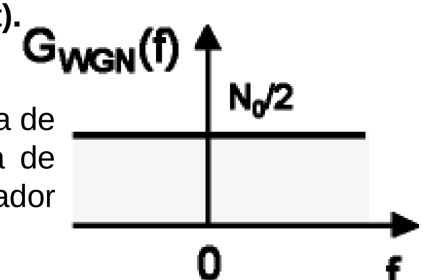
(b) Distribuição da frequência de ocorrência de amplitudes da forma de onda de tensão de ruído Gaussiano branco. σ é o desvio padrão dos valores de amplitude de **WGN(t).**



$$\mathbf{Ra_{WGN}}(\boldsymbol{\tau}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{WGN(t)WGN(t}+\boldsymbol{\tau}\mathbf{)dt}$$

(c) Autocorrelação $\mathbf{Ra_{WGN}(\tau)}$ da forma de onda de tensão de ruído Gaussiano branco **WGN(t)**.

(d) Densidade espectral de potência $\mathbf{G_{WGN}(f)}$ da forma de onda de tensão de ruído Gaussiano branco, obtida de $\mathbf{G_{WGN}(f)} = \mathcal{F}\{\mathbf{Ra_{WGN}(\tau)}\}$, onde $\mathcal{F}\{\cdot\}$, é o operador Transformada de Fourier.

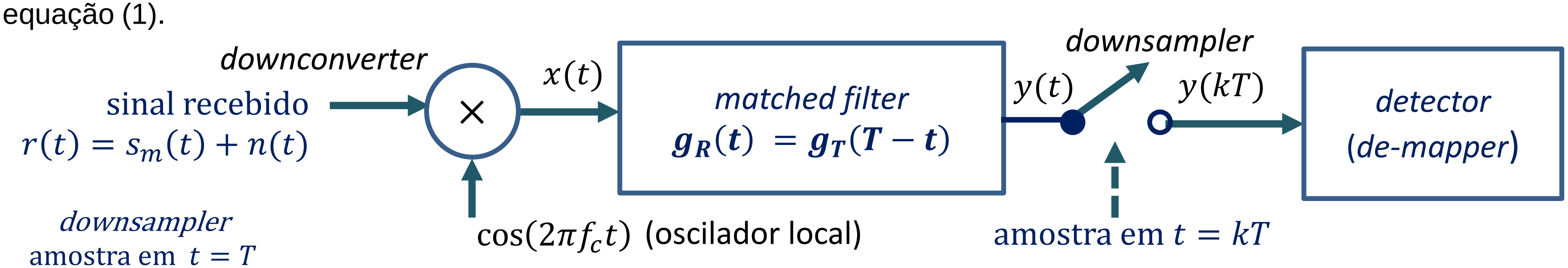


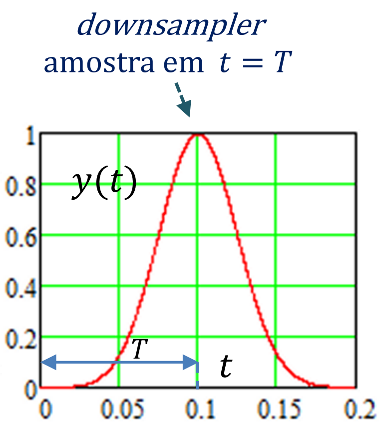
Nota:"f(t) é correlacionada c/ g(t)" ⇒ "f(t) é semelhante a g(t) nos instantes de tempo em que a função de correlação entre f(t) e g(t) exibir picos máximos". Correlação é semelhante à convolução (Sinais e Sistemas), apenas a 2ª função não é invertida no tempo.

O efeito do intervalo de integração no processo de correlação efetuado no *matched filter*

Dado que as amplitudes de ruído ao longo do tempo se comportam de maneira tal que valores positivos e negativos de menor amplitude ocorrem frequentemente no transcorrer do tempo enquanto valores de maior amplitude ocorrem com menor frequência, conforme mostra a distribuição Gaussiana de amplitudes em (b) no slide anterior, então qualquer processo que efetue a média no tempo no qual os valores de ruído sejam somados ao longo de um intervalo de tempo T resultará ao final do processo um valor de ruído tanto menor quanto maior for o intervalo T em que a soma intrínseca ao processo de média for efetuada.

Conforme veremos a seguir, isto impacta diretamente na saída $y(t)$ do *matched filter* – equação (4) no slide 59 do Cap IV de UFSM00261 – SISTEMAS DE COMUNICAÇÃO DIGITAL I (ver https://www.fccdecastro.com.br/pdf/SCD1_CapIV.pdf) – abaixo reproduzida na equação (1).





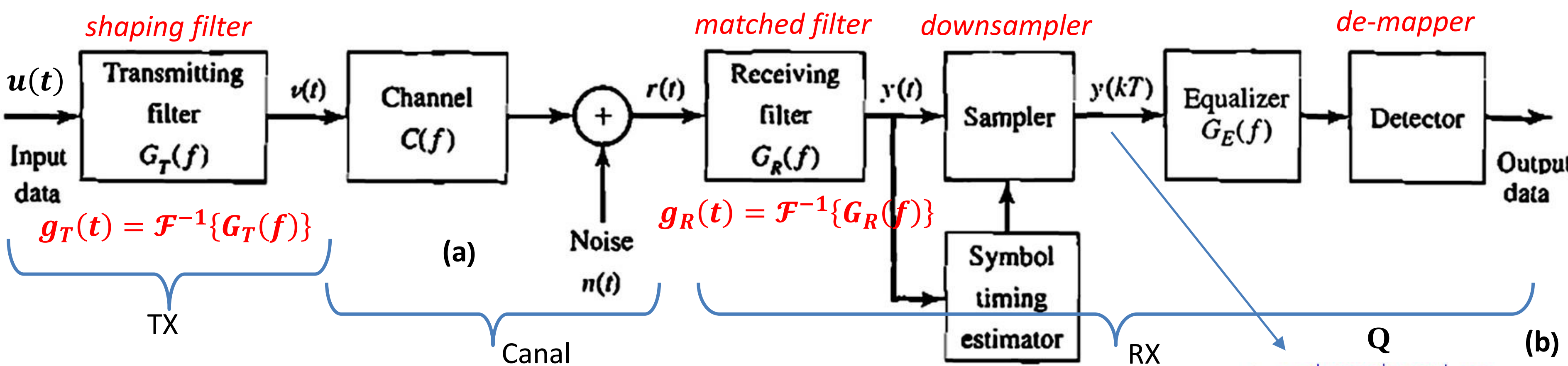
$$y(t) = \int_0^{t=T} A_m \cos^2(2\pi f_c \tau) g_T(\tau) g_T(\tau - t + T)\, d\tau + \int_0^{t=T} n(\tau) \cos(2\pi f_c \tau)\, g_T(\tau - t + T)\, d\tau \quad (1)$$

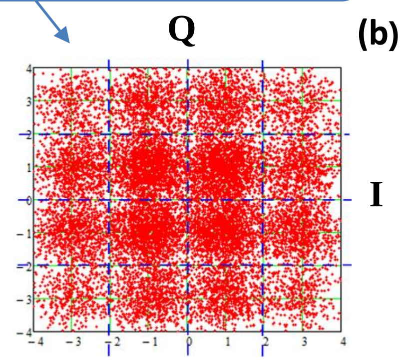
O *downsampler* na figura acima amostra $y(t)$ em $t = T$ e "capta" o valor máximo de $y(t)$ resultante do 1º termo de (1), amplificando o sinal (vide gráfico de $y(t)$ ao lado). Isto acontece porque o integrando do 1º termo de (1) é um valor sempre positivo. Ao mesmo tempo o 2º termo de (1) atenua o ruído $n(\tau)$ porque o ruído branco é descorrelacionado com o sinal. O período de integração em (1) se encerra no instante de amostragem $t = T$ quando o filtro é resetado e é iniciado um novo período de integração para o próximo símbolo recebido.

Note que o intervalo de integração T impacta no resultado de (1) em consequência do processo de soma no tempo do ruído $n(\tau)$ implementado pelo 2º termo de (1), porque o resultado da soma (resultado da integral) efetuada no 2º termo de (1) será um valor tanto menor quanto maior for o intervalo T. Isto ocorre porque $\cos(2\pi f_c \tau)\, g_T(\tau - t + T)$ é descorrelacionado com $n(\tau)$ e atua como se fosse uma constante no integrando da integral do 2º termo de (1), e portanto, ao longo do intervalo T a integral somará então mais valores de $n(\tau)$ positivos e negativos de menor amplitude que ocorrem mais frequentemente no transcorrer do tempo do que valores de $n(\tau)$ de maior amplitude que ocorrem menos frequentemente, atenuando assim o ruído. E este efeito é realçado a medida que T aumenta.

O filtro *root-raised-cosine* como *shaping filter & matched filter*

De acordo com a discussão no slide anterior, o ruído branco será mais atenuado na saída $y(t)$ do *matched filter* se aumentarmos o intervalo de integração da equação (1) para além do período de símbolo T. No entanto, isto faria ocorrer a superposição dos pulsos $g_T(t) * g_R(t)$ na saída $y(t)$ do *matched filter* e isto faria ocorrer ISI (*Inter Symbol Iterference*) no instante de amostragem $t = T$, causando um efeito similar ao *multipath* no canal, conforme já discutido no slide 15 do Cap I.1. A ISI causa então dispersão de símbolos em torno dos símbolos IQ de referência da constelação na saída $y(kT)$ do *downsampler*, conforme mostrado em (b) abaixo. Se a dispersão for significativa, de modo que símbolos da "nuvem" de símbolos dispersos em torno dos símbolos de referência invadam uma das regiões de decisão adjacentes, a BER (*Bit Error Rate*) não será nula na saída do *de-mapper*.

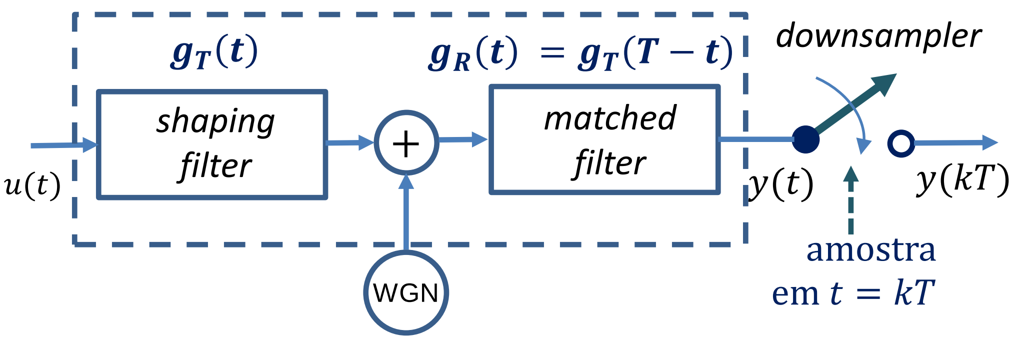




Para uma maior atenuação do ruído branco na saída $y(t) = u(t) * g_T(t) * g_R(t)$ do *matched filter* é necessário, portanto, um *shaping filter* e um *matched filter* com respostas ao impulso $g_T(t)$ e $g_R(t)$ de duração maior que o período de símbolo T mas que simultaneamente evite a superposição dos pulsos $h(t) = g_T(t) * g_R(t)$ na saída $y(kT)$ do *downsampler*, de modo a evitar a ocorrência de ISI (*Inter Symbol Iterference)* no instante de amostragem $t = T$.

O filtro *root-raised-cosine* como *shaping filter* & *matched filter*

Uma resposta ao impulso combinada $h(t) = g_T(t) * g_R(t)$ que atende a condição de ter uma duração maior que o período de símbolo T mas que simultaneamente evita a superposição dos pulsos na saída $y(kT)$ do *downsampler* no instante de amostragem $t = T$ é a resposta ao impulso do filtro denominado ***raised-cosine***, conforme equação (2) abaixo, denominação que resulta de sua função de transferência $H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\}$ ser definida por um cosseno adicionado de um valor constante e unitário no domínio frequência que eleva os valores do cosseno, conforme equação (3) (ver https://en.wikipedia.org/wiki/Raised-cosine_filter):



$$h(t) = \frac{\sin \pi t/T}{\pi t/T}\frac{\cos(\pi \alpha t/T)}{1-4\alpha^2t^2/T^2} = \mathrm{sinc}(\pi t/T)\frac{\cos(\pi \alpha t/T)}{1-4\alpha^2t^2/T^2} \qquad (2)$$

A Transformada de Fourier da resposta ao impulso $h(t)$ resulta na função de transferência $H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\}$:

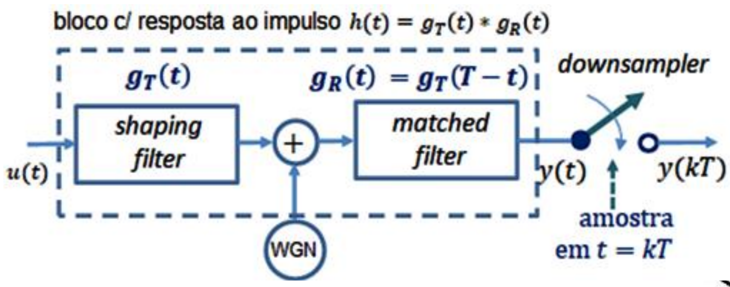
valor constante e unitário que eleva os valores do cosseno – daí a denominação *raised cosine*

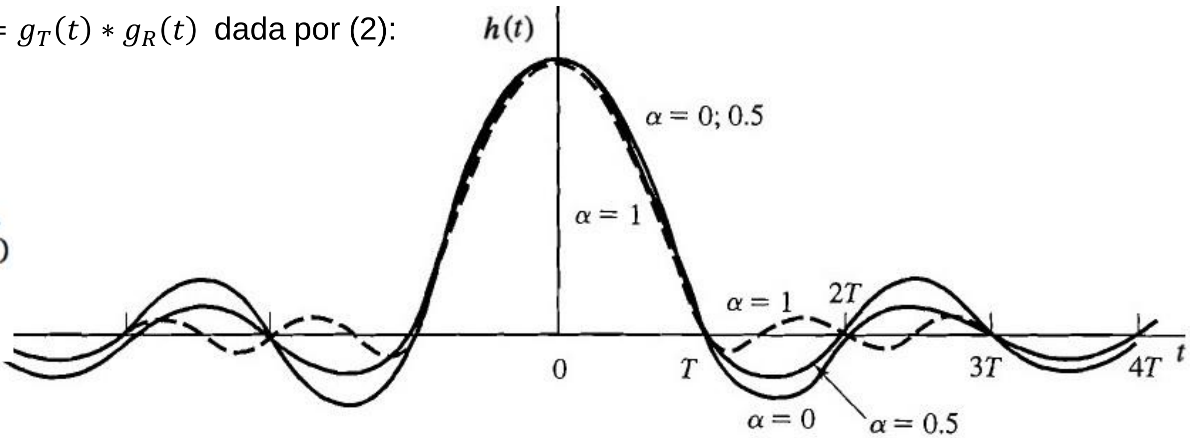
$$H(f) = \begin{cases} T, & 0 \le |f| \le (1-\alpha)/2T \\ \frac{T}{2}\left[1 + \cos\frac{\pi T}{\alpha}\left(|f| - \frac{1-\alpha}{2T}\right)\right], & \frac{1-\alpha}{2T} \le |f| \le \frac{1+\alpha}{2T} \\ 0, & |f| > \frac{1+\alpha}{2T} \end{cases} \qquad (3)$$

sendo $0 \le \alpha \le 1$ o *roll-off* do filtro, que é o parâmetro que controla a declividade da curva $|H(f)|$ na banda de transição, que é a banda situada entre a banda de passagem e a banda de rejeição do filtro *raised cosine* no domínio frequência f. Quanto menor for α mais abrupta é a declividade da curva $|H(f)|$ da banda de transição e mais longa é a duração de $h(t)$.

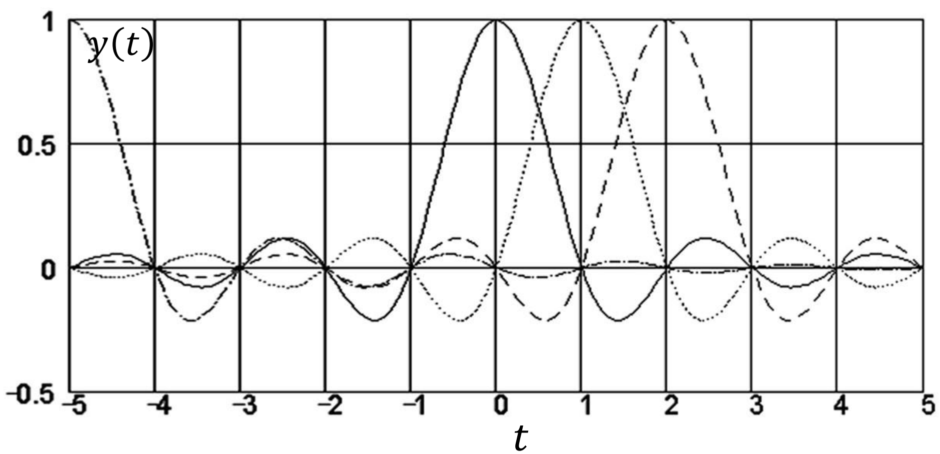
O filtro *root-raised-cosine* como *shaping filter & matched filter*

Plotando a resposta ao impulso combinada $h(t) = g_T(t) * g_R(t)$ dada por (2):



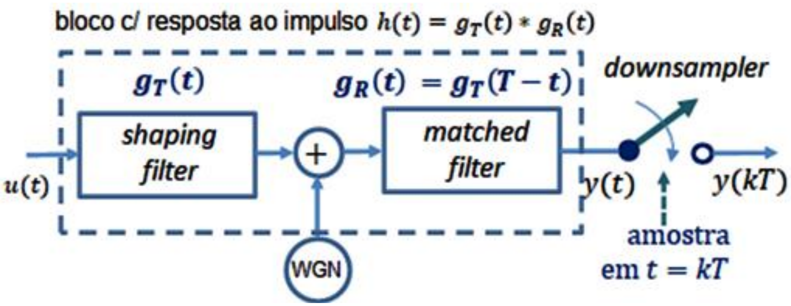


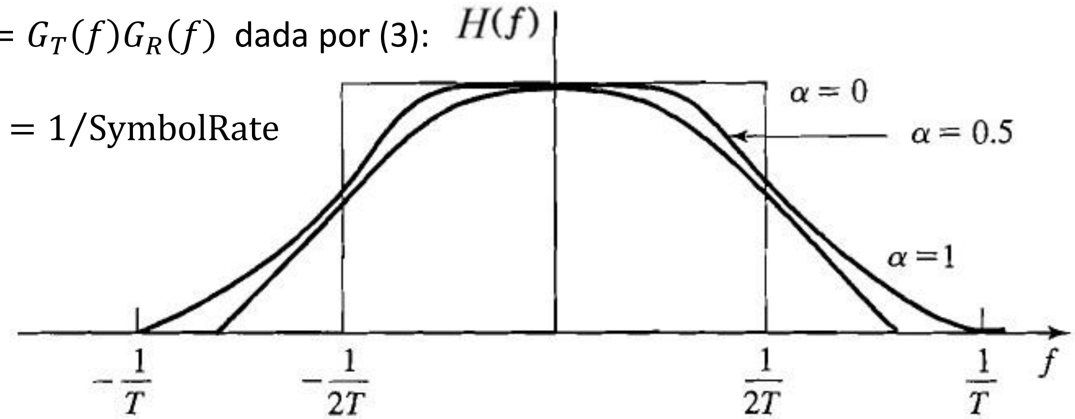
Note no gráfico acima que a resposta ao impulso combinada $h(t) = g_T(t) * g_R(t)$ dada por (2) tem uma duração de vários períodos de símbolo T , o que é desejado para efeito de aumentar o intervalo em que a correlação é efetuada, minimizando o ruído branco, conforme discutido no slide 20. Note também que $h(t)$ cruza por zero a cada $t = kT$, com k inteiro. **Na prática, adota-se uma duração total para $h(t)$ tal que a curva de $h(t)$ contemple pelo menos 12 cruzamentos por zero ao longo do eixo do tempo t.** Note também que o comportamento da curva de $h(t)$ cruzar por zero a cada $t = kT$ é o motivo de não haver ISI gerada no instante de amostragem $t = kT$ do *downsampler*. Por exemplo, se aplicarmos na entrada $u(t)$ do *shaping filter* a sequência de impulsos $u(t) = \delta(t+5T) + \delta(t) + \delta(t-T) + \delta(t-2T)$ a resposta na saída $y(t)$ será conforme o gráfico abaixo.



Observe no gráfico que a resposta $y(t)$ aos 4 impulsos é tal que as respectivas 4 respostas se superpõe ao longo do tempo t , gerando ISI em todos estes instantes em que ocorre superposição. No entanto, **em todos os instantes de amostragem $t = kT$ do *downsampler* a amplitude instantânea de todas as respostas são nulas exceto a amplitude da resposta respectiva ao impulso aplicado naquele instante kT . Portanto a saída $y(kT)$ do *downsampler* não será corrompida por ISI.**

Plotando a resposta em frequência combinada $H(f) = G_T(f)G_R(f)$ dada por (3):





$G_R(f) = \mathcal{F}\{g_R(t)\} \quad G_T(f) = \mathcal{F}\{g_T(t)\}$

Note no gráfico de $H(f)$ que o pulso *raised cosine* $h(t)$ dado por (2) ocupa uma banda espectral $BW_{\text{RC}} = 0.5\ \text{SymbolRate}\ (1+\alpha)$ para um canal de transmissão *baseband* e ocupa o dobro desta banda espectral para um canal *passband*. Note também que $BW_{\text{RC}} = 0.5\ \text{SymbolRate}\ (1+\alpha)$ resulta aproximadamente $\sqrt{2}$ vezes maior que a banda passante $-3dB$ da $H(f)$ do filtro *raised cosine,* mas que, pela simplicidade e praticidade da equação, acaba sendo utilizada como uma primeira aproximação.

Para todas as aplicações práticas do mundo real $g_T(t)$ é um pulso simétrico, de modo que $g_R(t) = g_T(T-t) = g_T(t)$ (ver exemplo no slide 60 de https://www.fccdecastro.com.br/pdf/SCD1_CapIV.pdf). Desta maneira $G_R(f) = G_T(f)$ e a função de transferência do filtro *raised cosine* é dada por $H(f) = G_T(f)G_T(f)$. Isto permite determinar a função de transferência $G_T(f)$ do *shaping filter* no TX e do *matched filter* no RX:

$$\sqrt{G_T(f)G_T(f)} = G_T(f) = \sqrt{H(f)} \tag{4}$$

Substituindo (3) em (4) obtemos a função de transferência $G_{\text{RRC}}(f)$ individual dos dois **filtros *root-raised-cosine* (raiz do cosseno levantado) que operam respectivamente como *shaping filter* no TX e como *matched filter* no RX** (ver https://en.wikipedia.org/wiki/Root-raised-cosine_filter):

$$\boldsymbol{G_{\text{RRC}}(f) = \sqrt{H(f)}} = \begin{cases} \sqrt{T}, & 0 \le |f| \le (1-\alpha)/2T \\ \sqrt{\frac{T}{2}\left[1 + \cos\frac{\pi T}{\alpha}\left(|f| - \frac{1-\alpha}{2T}\right)\right]}, & \frac{1-\alpha}{2T} \le |f| \le \frac{1+\alpha}{2T} \\ 0, & |f| > \frac{1+\alpha}{2T} \end{cases} \tag{5}$$

Aplicando a Transformada de Fourier Inversa em (5) obtemos a resposta ao impulso $g_{\text{RRC}}(t) = \mathcal{F}^{-1}\{G_{\text{RRC}}(f)\}$ individual dos dois filtros *root-raised-cosine* (raiz do cosseno levantado) que operam respectivamente como *shaping filter* no TX e como *matched filter* no RX:

$$\boldsymbol{g}_{\mathbf{RRC}}(\boldsymbol{t}) = \frac{2\alpha}{\pi\sqrt{T}} \frac{\cos[(1+\alpha)\pi t/T] + \dfrac{\sin[(1-\alpha)\pi t/T]}{4\alpha t/T}}{1-(4\alpha t/T)^2} \qquad (6)$$

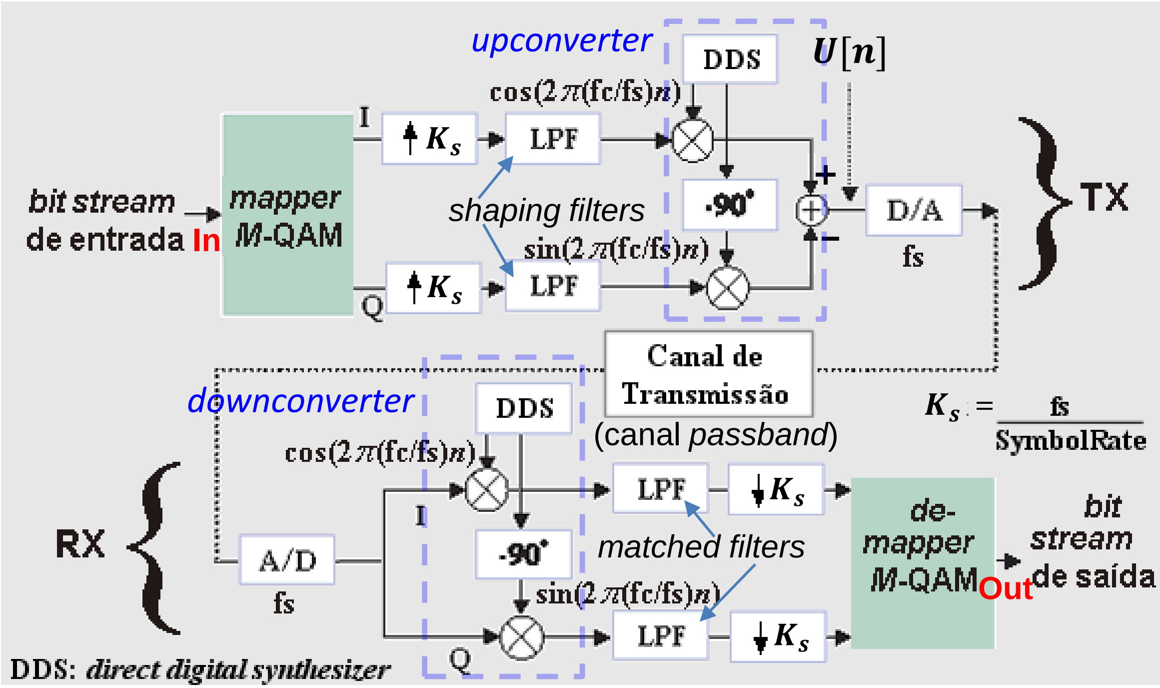
A versão discreta de (6), utilizada para gerar a resposta ao impulso $g_{\text{RRC}}[n]$ de um filtro FIR *root raised cosine* com *roll-off* α e N coeficientes (lembre da disciplina de DSP: Os coeficientes de um filtro FIR representam a própria resposta ao impulso do filtro), é obtida fazendo $t = n\frac{T}{K_s}$ em (6) (ver slides 16 e 17 de https://www.fccdecastro.com.br/pdf/SCD1_CapI.pdf). Adicionalmente é necessário atrasar a resposta discreta de $(N-1)/2$ amostras para torná-la uma resposta causal realizável, sendo $n = 0,1,\cdots,N-1$ e sendo K_s o *oversampling factor* do *upsampler* no modulador (número de amostras por símbolo IQ), resultando em:

$$g_{\text{RRC}}[n] = \frac{4\cdot\alpha}{\pi\cdot\text{Ks}}\cdot\left[\frac{\cos\left[\dfrac{n-\dfrac{N-1}{2}}{\text{Ks}}\cdot\pi\cdot(1+\alpha)\right] + \dfrac{\pi\cdot(1-\alpha)}{4\cdot\alpha}\cdot\text{sinc}\left[\dfrac{n-\dfrac{N-1}{2}}{\text{Ks}}\cdot\pi\cdot(1-\alpha)\right]}{1-\left(\dfrac{n-\dfrac{N-1}{2}}{\text{Ks}}\cdot 4\cdot\alpha\right)^2}\right] \qquad (7)$$

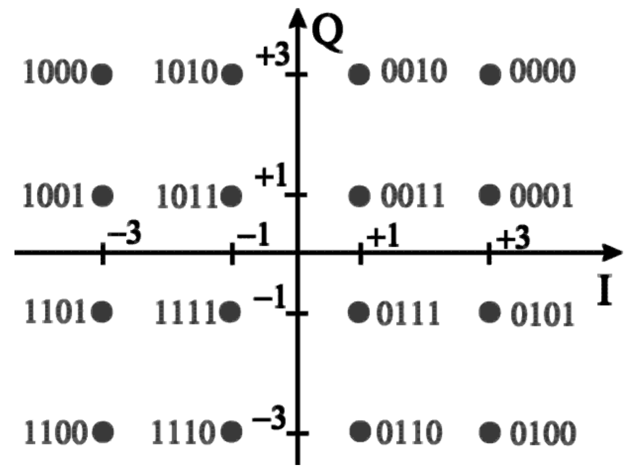
onde $\quad \text{sinc}(u) = \sin(u)/u$

O filtro *root-raised-cosine* como *shaping filter* & *matched filter*

Exemplo 1: O diagrama abaixo mostra a etapa de modulação/demodulação de um sistema 16-QAM com frequência central do canal de transmissão dada por fc [MHz].



(a) Diagrama de blocos de um sistema M-QAM, M=16.



(b) Constelação gerada no *mapper* M-QAM.

Figura 1: Etapa de modulação de um sistema de comunicação digital 16-QAM.

Cada símbolo IQ tem uma duração $T = 1/$*symbol rate*, onde *symbol rate* = 16 MHz para este sistema. Os blocos "LPF" na Figura 1(a) representam o *shaping filter* do TX e o *matched filter* do RX, e são filtros FIR tipo *root raised cosine* (RRC) cuja resposta ao impulso $g_{\text{RRC}}[n]$ é dada pela equação (7) do slide 24 com os seguintes parâmetros: O filtro FIR é implementado com $N = 128$ coeficientes, *roll-off* $\alpha = 0.115$ e fator de super amostragem (número de amostras por símbolo IQ) $K_s = 8$.

Pede-se:

(a) Determine a frequência de amostragem fs [MHz] do D/A.

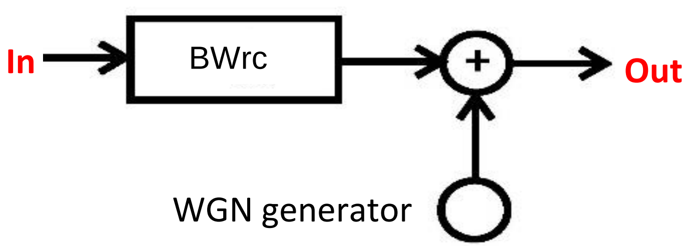
(b) Plote a resposta ao impulso $g\mathrm{RRC}[n]$ do filtro RRC (*root raised cosine*) usado como *shaping filter* no TX e como *matched filter* no RX.

(c) Salve as $N = 128$ amostras de $g\mathrm{RRC}[n]$ em um vetor $\mathrm{VRRC}[n]$ e grave as amostras armazenadas no vetor em um arquivo texto denominado "grrc.txt". Abra "grrc.txt" com o aplicativo Bloco de Notas (notepad.exe) compare com o gráfico de $g\mathrm{RRC}[n]$ e verifique a consistência numérica dos valores (número de amostras salvas no arquivo, índice da amostra do valor máximo, valor máximo, valores mínimos, etc ...).

(d) Determine a banda passante BWch ($-3\mathrm{dB}$) mínima necessária no bloco "Canal de Transmissão" da Figura 1(a) (canal *passband*) p/ que o mesmo não distorça o espectro do sinal $U[n]$ com frequência central fc gerado na saída do TX.

(e) Considere que a entrada **In** do *mapper* e a saída **Out** do *demapper* no diagrama de blocos da Figura 1(a) no *slide* anterior correspondem respectivamente à entrada e à saída de um canal de transmissão *baseband,* conforme mostra a figura abaixo. Quando não há *multipercurso*, a banda passante BWrc deste canal *baseband* é determinada pelo filtro *raised-cosine* (RC) formado pelo filtro RRC do *shaping filter* no TX em série com o filtro RRC do *matched filter* no RX.

Suponha que o ruído gaussiano aditivo com SNR= 30dB no canal de transmissão *passband* seja aplicado na saída deste canal de transmissão *baseband* conforme representado pelo "WGN generator" na figura abaixo (o que constitui uma suposição do pior caso, porque desconsidera a minimização do ruído efetuada pelo *matched filter* do RX). Considerando a referida suposição, determine a capacidade de canal Cbb[Mbps] deste canal de transmissão *baseband* (ver slide 36 de https://www.fccdecastro.com.br/pdf/SCD1_CapI.pdf) para a situação em que não há *multipercurso*. Compare com a capacidade de canal Cpb[Mbps] do canal *passband* cuja banda passante BWch foi determinada em (d). Os referidos canais *baseband* e *passband* operam acima ou abaixo de suas respectivas capacidades de canal? Justifique analiticamente sua resposta.



Dica: Para determinar a resposta ao impulso $g\mathrm{RC}[n]$ do filtro *raised-cosine* (RC) formado pelo filtro RRC do *shaping filter* no TX em série com o filtro RRC do *matched filter* no RX, efetue $g\mathrm{RC}[n] = g\mathrm{RRC}[n] * g\mathrm{RRC}[n]$. Para efetuar a convolução $g\mathrm{RRC}[n] * g\mathrm{RRC}[n]$ utilize o pseudocódigo no slide 55 do Apêndice C no Cap I.5.

Solução:

Para a solução deste exemplo vamos usar o *script* Mathcad Exemplo1.xmcd disponível em https://www.fccdecastro.com.br/ZIP/SCD2_C1_E1S25.zip .

Do enunciado, um sistema TX-RX digital 16-QAM utiliza um filtro *root raised cosine* (RRC) como *shaping filter* no TX e como *matched filter* no RX conforme especificado abaixo:

$N := 128 \qquad \alpha := 0.115$ → N é o número de coeficientes do filtro RRC e α é o *roll-off* do filtro.

$\text{SymbolRate} := 16\cdot\text{MHz} \qquad T := \dfrac{1}{\text{SymbolRate}} = 0.063\cdot\mu\text{s}$ → T= Duração de cada símbolo IQ

$Ks := 8$ → Fator de superamostragem (= número de amostras por intervalo de duração T de cada símbolo IQ).

$SNR := 30$ dB → Relação sinal-ruído no canal de transmissão.

Solução:

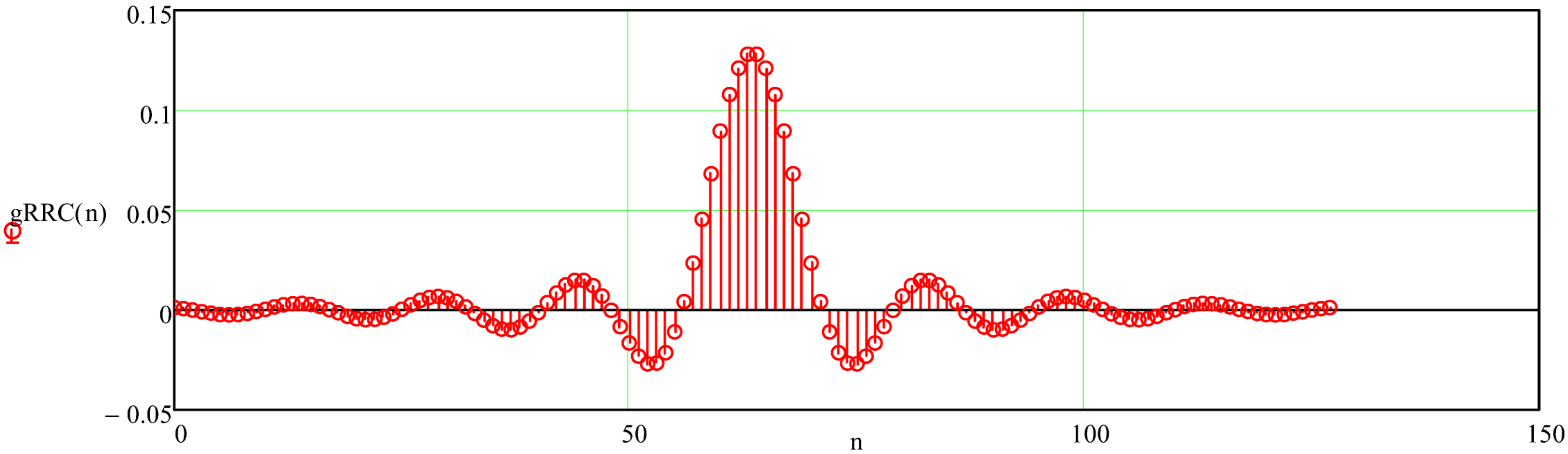
(a) $fs := Ks\cdot\text{SymbolRate} = 128\cdot\text{MHz}$ → Freqüência de amostragem do D/A no TX e/ou A/D no RX.

(b) A expressão analítica da resposta ao impulso gRRC[n] de um filtro RRC discreto no tempo é dada pela equação (7) do slide 24 do Cap I.2:

$$gRRC(n) := \frac{4\cdot\alpha}{\pi\cdot Ks}\cdot\left[\frac{\cos\left[\dfrac{n-\dfrac{N-1}{2}}{Ks}\cdot\pi\cdot(1+\alpha)\right]+\dfrac{\pi\cdot(1-\alpha)}{4\cdot\alpha}\cdot\text{sinc}\left[\dfrac{n-\dfrac{N-1}{2}}{Ks}\cdot\pi\cdot(1-\alpha)\right]}{1-\left(\dfrac{n-\dfrac{N-1}{2}}{Ks}\cdot 4\cdot\alpha\right)^2}\right] \qquad n := 0, 1 .. N-1$$

O filtro *root-raised-cosine* como *shaping filter & matched filter*

Plotando o pulso *root raised cosine* correspondente à resposta ao impulso gRRC[n] do filtro RRC especificado no enunciado:



Note que a amplitude do pulso na saída do filtro RRC é dada pela amplitude do símbolo I (e/ou Q) que ele representa.

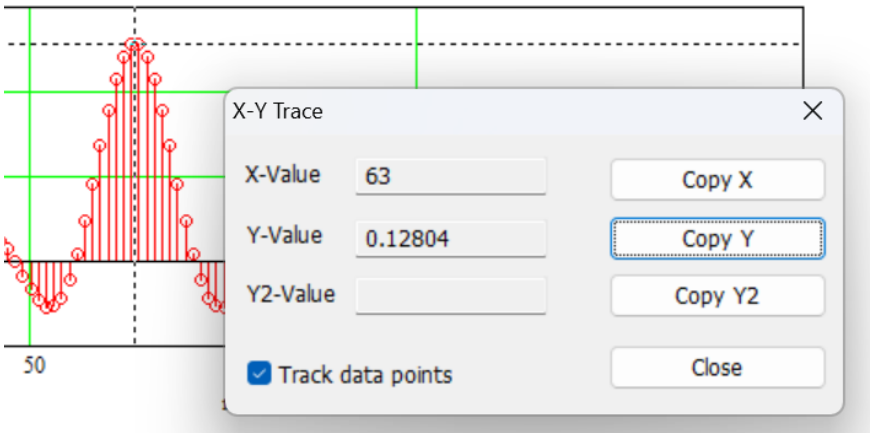
(c) Registrando em um vetor VRRC[n] os valores numéricos de gRRC[n] e salvando o vetor no arquivo "grrc.txt":

$$VRRC_n := gRRC(n)$$

$$WRITEPRN(\text{"grrc.txt"}) := VRRC$$

O filtro *root-raised-cosine* como *shaping filter & matched filter*

Verificando a consistência numérica dos valores salvos no arquivo grrc.txt:



n=0 **0.001355**	-0.00848	-0.02304	0.003262
0.0008311	-0.005496	-0.01641	0.002645
9.417e-005	-0.001227	-0.008287	0.00165
-0.0007382	0.00374	-4.567e-005	0.0004724
-0.001519	0.008637	0.007099	-0.0006764
-0.002098	0.01262	0.01224	-0.001608
-0.002346	0.0149	0.01487	-0.002186
-0.002186	0.01487	0.0149	-0.002346
-0.001608	0.01224	0.01262	-0.002098
-0.0006764	0.007099	0.008637	-0.001519
0.0004724	-4.567e-005	0.00374	-0.0007382
0.00165	-0.008287	-0.001227	9.417e-005
0.002645	-0.01641	-0.005496	0.0008311
0.003262	-0.02304	-0.00848	**0.001355** n=127
0.003352	-0.02679	-0.009845	
0.00285	-0.02649	-0.009535	
0.00179	-0.02131	-0.007757	
0.0003087	-0.01094	-0.004925	
-0.00137	0.004327	-0.001577	
-0.002966	0.02361	0.001715	
-0.004189	0.0455	0.004439	
-0.00479	0.06818	0.006217	
-0.004603	0.08962	0.006853	
-0.00359	0.1078	0.006344	
-0.001851	0.1211	0.004872	
0.0003775	n=63 **0.128**	0.002752	
0.002752	n=64 **0.128**	0.0003775	
0.004872	0.1211	-0.001851	
0.006344	0.1078	-0.00359	
0.006853	0.08962	-0.004603	
0.006217	0.06818	-0.00479	
0.004439	0.0455	-0.004189	
0.001715	0.02361	-0.002966	
-0.001577	0.004327	-0.00137	
-0.004925	-0.01094	0.0003087	
-0.007757	-0.02131	0.00179	
-0.009535	-0.02649	0.00285	
-0.009845	-0.02679	0.003352	

O filtro *root-raised-cosine* como *shaping filter & matched filter*

(d) A banda passante *passband* mínima necessária no bloco "Canal de Transmissão" p/ que o mesmo não altere o espectro do sinal U[n] equivale à banda passante mínima BWch necessária no"Canal de Transmissão" p/ que o mesmo não altere o espectro dos pulsos *root raised cosine* que constituem o *stream* de símbolos IQ gerados na saída U[n] do TX.

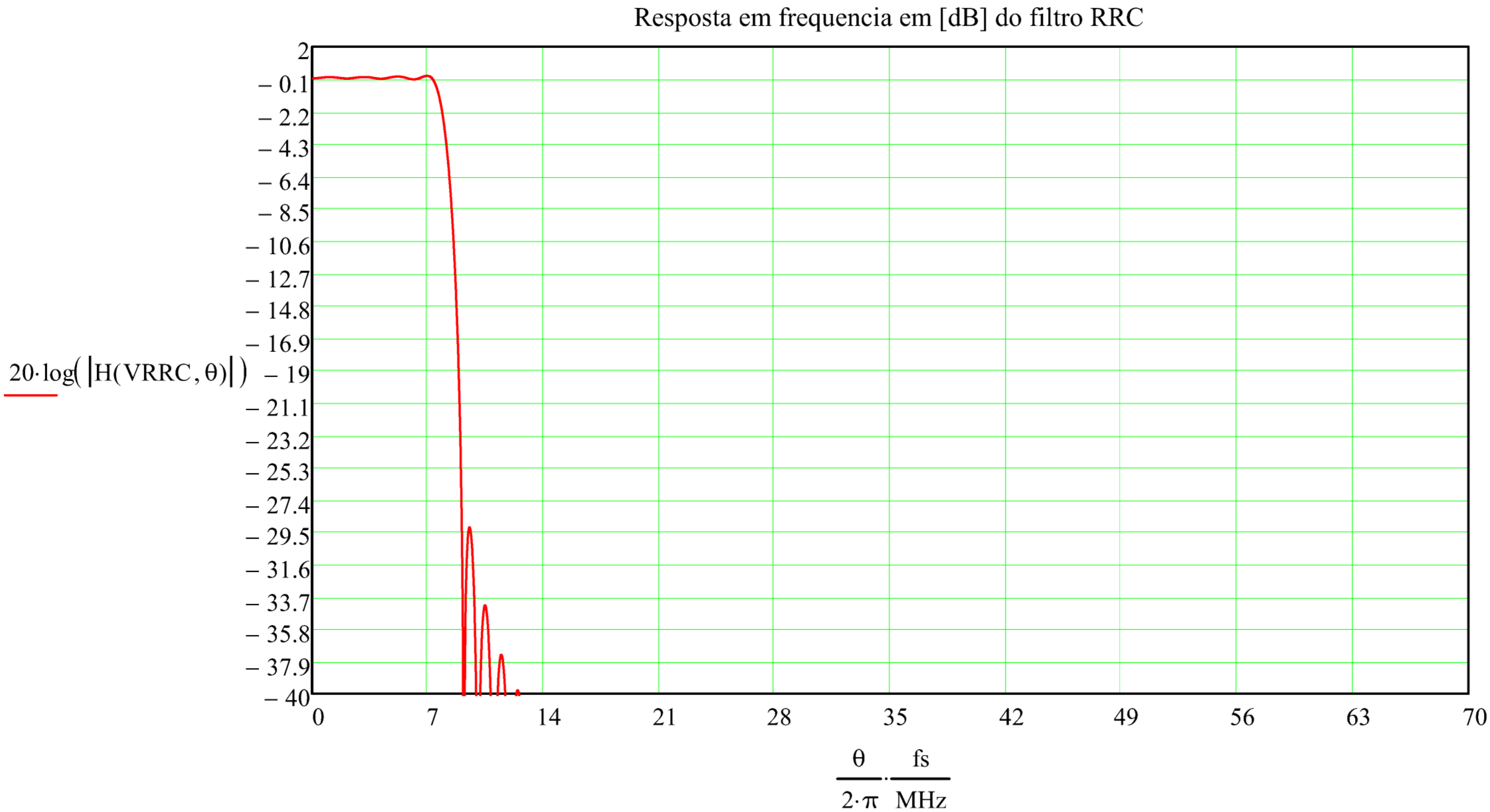
BWch é determinada a partir da banda passante *baseband* BWbb obtida da curva de resposta em freqüência $H(e^{j\theta})$ do *shaping filter* RRC no TX, sendo a faixa de variação permissível da freqüência digital θ situada no intervalo $0<\theta<\pi$, e que é correspondente no domínio frequência f analógica ao intervalo $0<f<fs/2$ (conforme disciplina de Sinais e Sistemas - ver slides 51 a 63 de **http://www.fccdecastro.com.br/pdf/SS_aula23a26_25062020.pdf**). Para obtermos o $H(e^{j\theta})$ do filtro RRC é necessário aplicar a Transformada Z à resposta ao impulso do filtro RRC e fazer $z=e^{j\theta}$.

A Transformada Z para $z=e^{j\theta}$ de uma sequencia discreta h[n] com length (h) amostras é dada pela equação (1):

$$H(h,\theta) := \sum_{n=0}^{\text{length}(h)-1} \left[h_n \cdot \left(e^{j\cdot\theta}\right)^{-n} \right] \qquad \theta := 0, \frac{\pi}{10000} .. \pi \qquad (1)$$

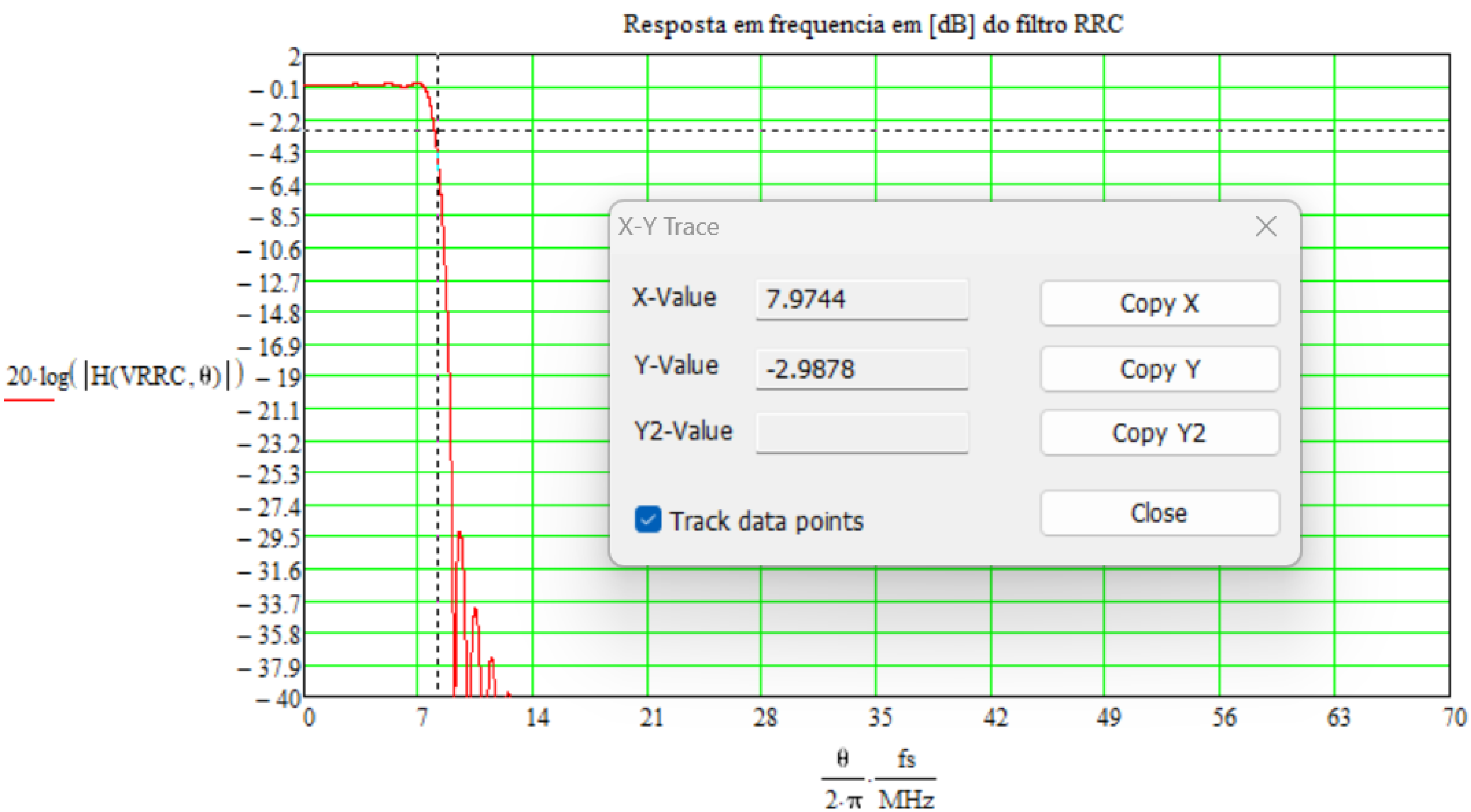
O filtro *root-raised-cosine* como *shaping filter & matched filter*

Aplicando a equação (1) ao vetor VRRC obtido em (c) , determinando o módulo e convertendo para dB obtemos a curva de resposta em freqüência $H(e^{j\theta})$ do *shaping filter* RRC no TX:



O filtro *root-raised-cosine* como *shaping filter & matched filter*

Utilizando a função **trace** (*right-click* no gráfico acima $\rightarrow$ *left-click* em **trace** $\rightarrow$ *left-click no gráfico acima* -> posicionar c/ o mouse ou c/ as setas horizontais do teclado o cruzamento das retas tracejadas em Y-Value = -2.99 dB $\rightarrow$ ler o valor de X-Value = 7.97 MHz) obtemos $\mathrm{BWbb} := 7.97\mathrm{MHz}$. Note que esta $\mathrm{BWbb} = 7.97\cdot\mathrm{MHz}$ é a BW mínima ***em baseband*** necessária p/ transmitir o pulso RRC. Após a heterodinação c/ a frequência fc do DDS do *upconverter* (vide Figura 1(a) no enunciado no slide 25 do Cap I.2), o espectro dos pulsos RRC resultará centrado na frequência fc e apresentará duas bandas laterais não idênticas (o que é característico da modulação QAM), definindo assim o sinal ***passband*** $U[n]$. Desta maneira, após o *upconverter*, a BW *passband* mínima no canal de transmissão p/ transportar sem distorção o sinal $U[n]$ é $\mathrm{BWch} := 2\mathrm{BWbb} = 15.94\,\mathrm{MHz}$.



O filtro *root-raised-cosine* como *shaping filter & matched filter*

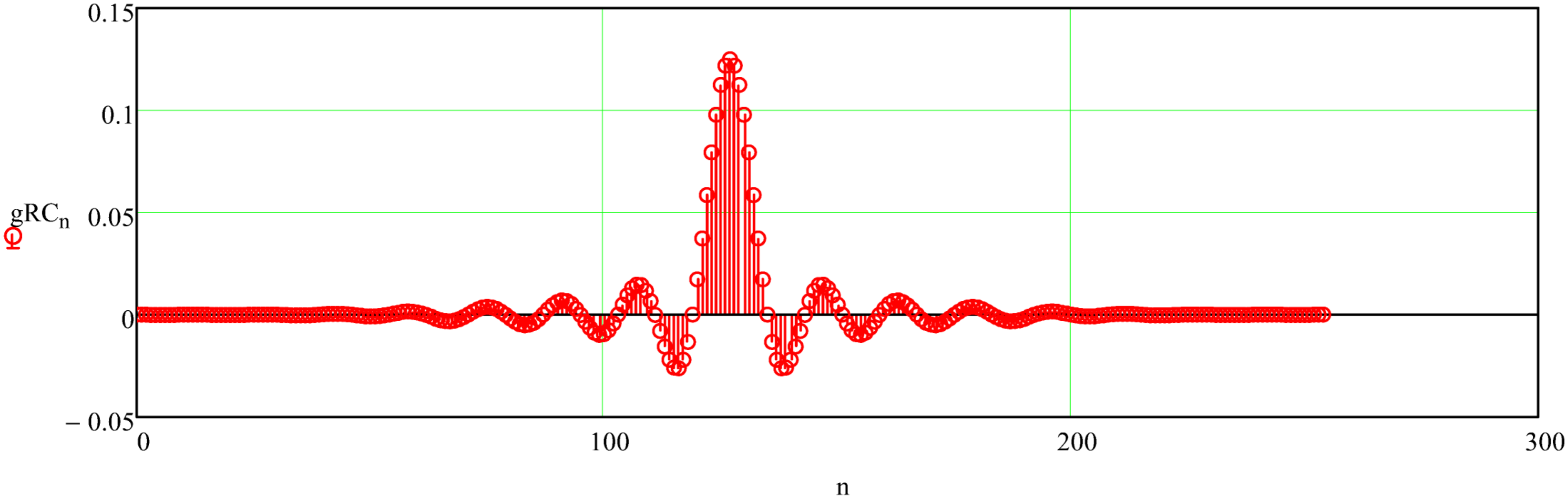
(e) Para determinar a resposta ao impulso gRC[n] do filtro *raised-cosine* (RC) formado pelo filtro RRC do *shaping filter* no TX em série com o filtro RRC do *matched filter* no RX é necessário efetuar gRC[n]=gRRC[n]*gRRC[n]. Para efetuar a convolução gRRC[n]*gRRC[n] vamos utilizar o pseudocódigo no Apêndice C.

Efetuando gRC[n]=gRRC[n]*gRRC[n] :

$$gRC := \mathrm{Conv}(VRRC, VRRC) \qquad (2)$$

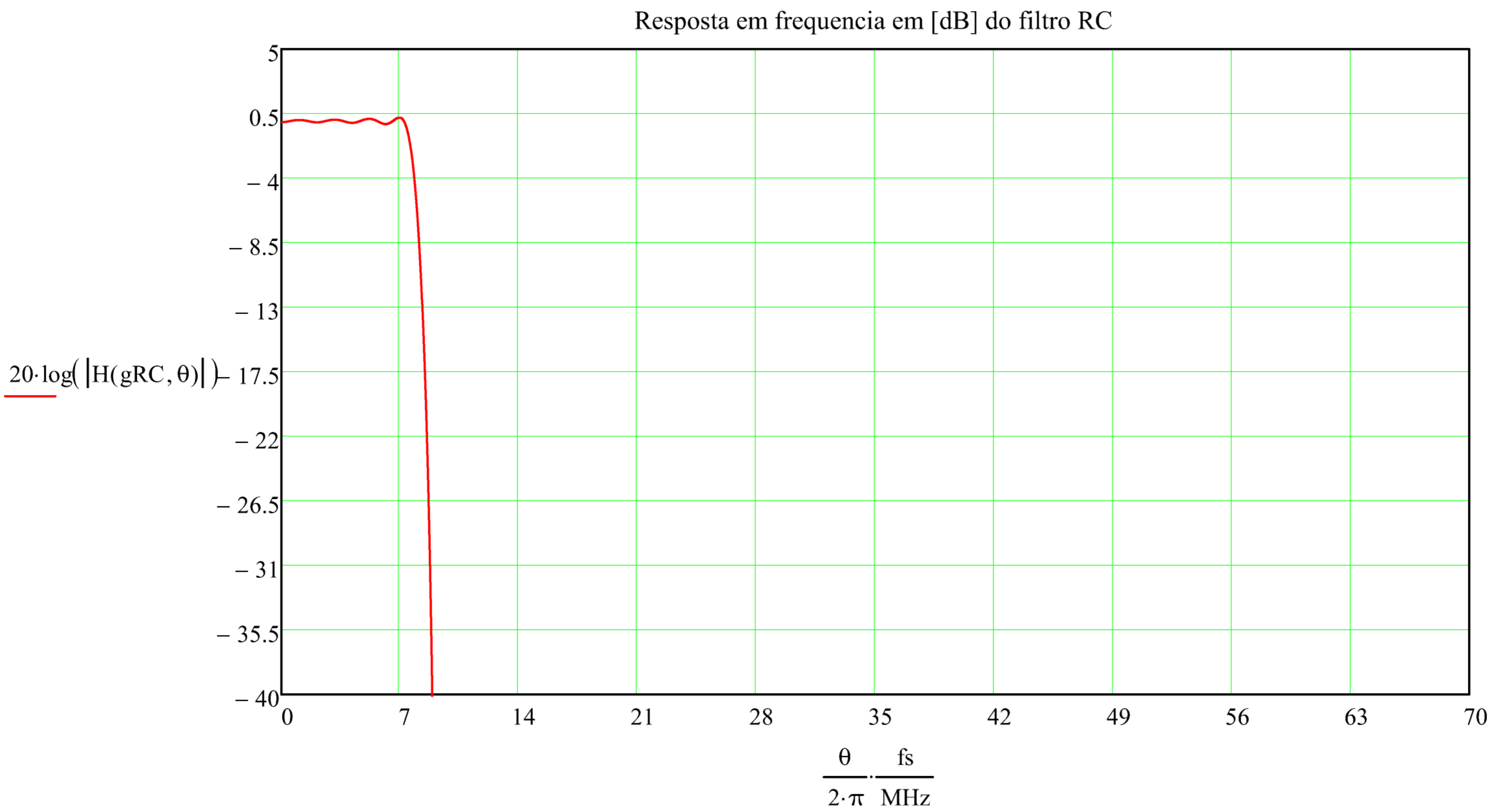
Plotando a esposta ao impulso gRC[n] do filtro RC (*raised-cosine*) formado pelo filtro RRC (*root raised cosine*) do *shaping filter* no TX em série com o filtro RRC do *matched filter* no RX:

$$n := 0, 1 .. \mathrm{length}(gRC) - 1$$



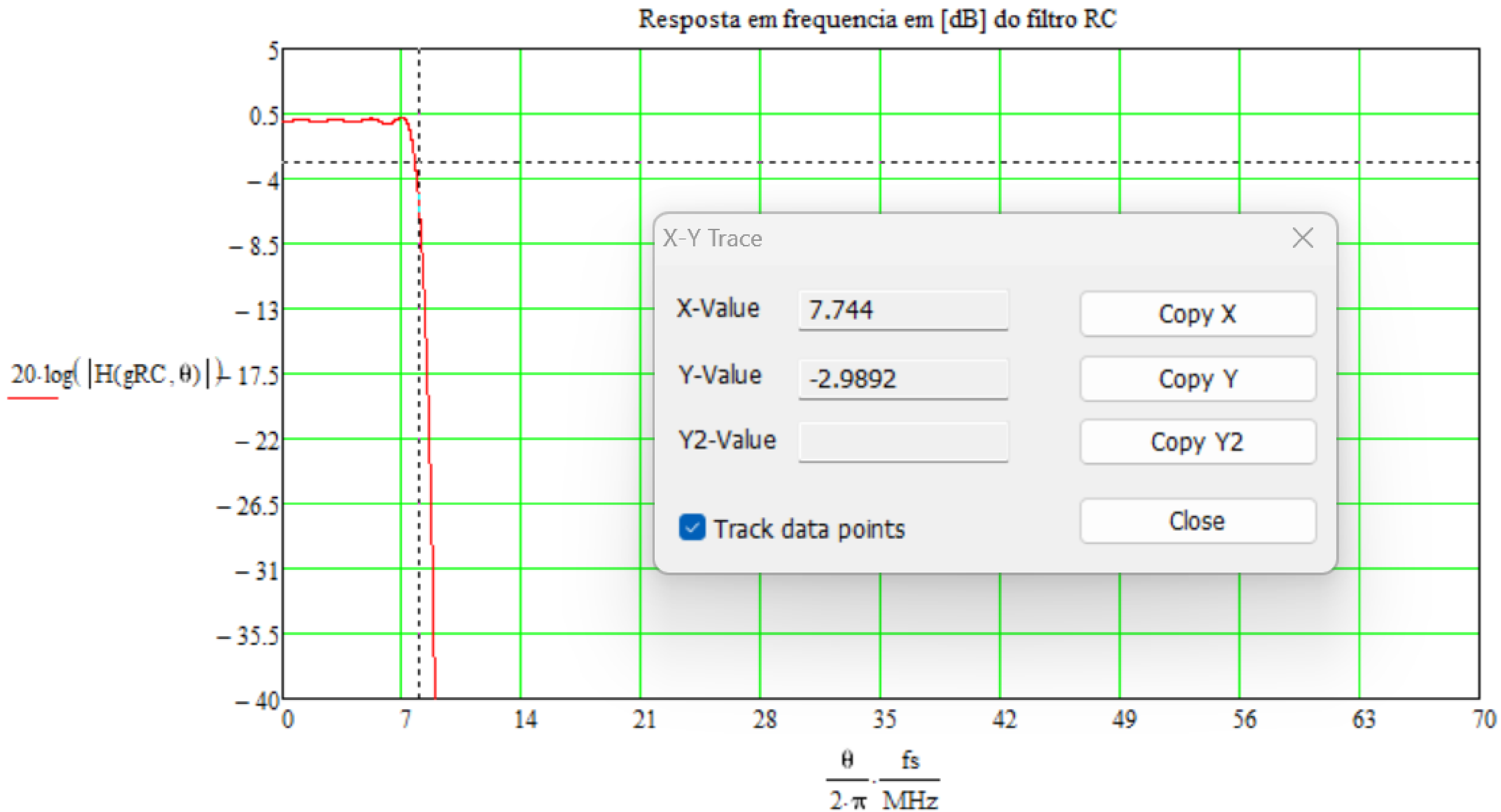
O filtro *root-raised-cosine* como *shaping filter & matched filter*

Aplicando a Transformada Z para $z=e^{j\theta}$ dada pela equação (1) na sequencia discreta gRC[n] dada pela equação (2), determinando o módulo do resultado e convertendo para dB obtemos a curva de resposta em freqüência $H(e^{j\theta})$ do filtro RC (*raised-cosine*) formado pelo filtro RRC (*root raised cosine*) do *shaping filter* no TX em série com o filtro RRC do *matched filter* no RX:



O filtro *root-raised-cosine* como *shaping filter & matched filter*

Utilizando a função **trace** (*right-click* no gráfico acima → *left-click* em **trace** → *left-click no gráfico acima* → posicionar c/ o mouse ou c/ as setas horizontais do teclado o cruzamento das retas tracejadas em Y-Value = -2.99 dB → ler o valor de X-Value = 7.74 MHz) obtemos $BWrc := 7.74MHz$.



O filtro *root-raised-cosine* como *shaping filter & matched filter*

Bitrate do sistema:

16-QAM $\rightarrow$ $M := 16$

$$\text{NumBitsPorSimbolo} := \frac{\ln(M)}{\ln(2)} = 4$$

$\text{SystemBitRate} := \text{SymbolRate} \cdot \text{NumBitsPorSimbolo} = 64 \cdot \text{MHz}$ [Mbps]

Capacidade de canal Cbb[Mbps] do canal *baseband* cuja banda passante $\text{BWrc} = 7.74\,\text{MHz}$ foi determinada acima:

O fator 2 é necessário devido haver dois subcanais em paralelo: o subcanal I e o subcanal Q.

$$\text{Cbb} := \frac{2}{\ln(2)} \cdot \text{BWrc} \cdot \ln\left(1 + 10^{\frac{\text{SNR}}{10}}\right) = 154.293 \cdot \text{MHz}$$ [Mbps]

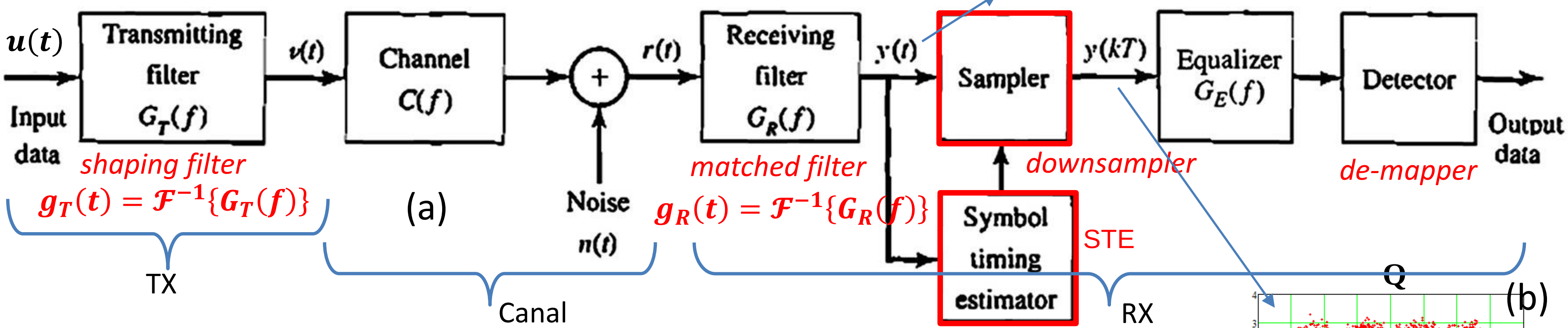
Capacidade de canal Cpb[Mbps] do canal *passband* cuja banda passante $\text{BWch} = 15.94\,\text{MHz}$ foi determinada em (d):

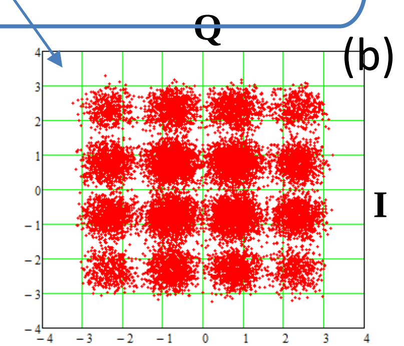
$$\text{Cpb} := \frac{1}{\ln(2)} \cdot \text{BWch} \cdot \ln\left(1 + 10^{\frac{\text{SNR}}{10}}\right) = 158.878 \cdot \text{MHz}$$ [Mbps]

Visto que $\text{SystemBitRate} < \text{Cbb}$ então o canal *baseband* opera abaixo da sua capacidade de canal.

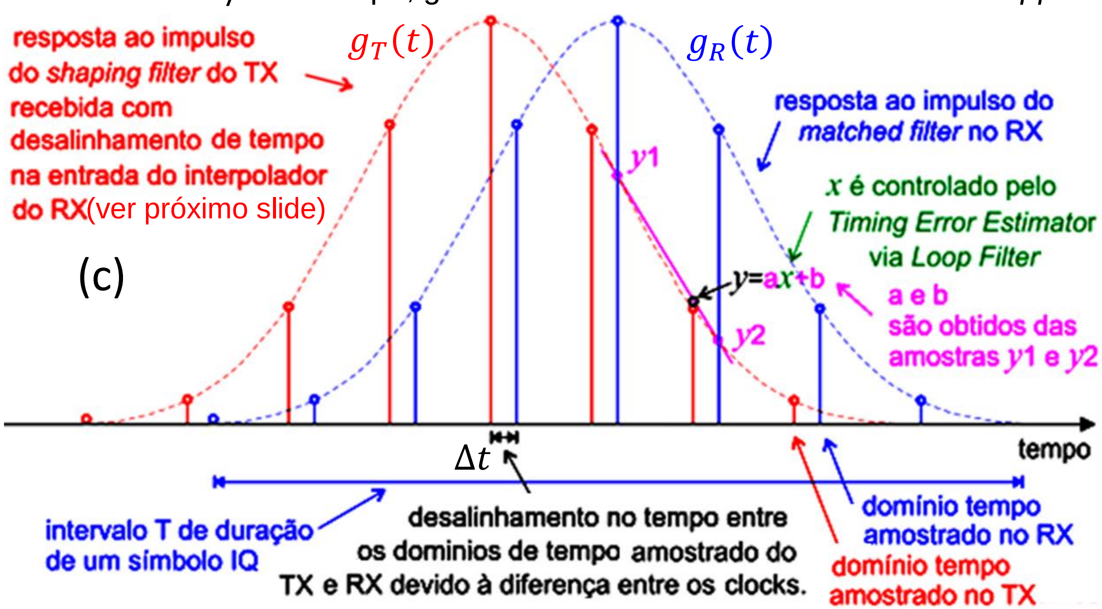
Visto que $\text{SystemBitRate} < \text{Cpb}$ então o canal *passband* opera abaixo da sua capacidade de canal.

Sincronismo de Símbolo





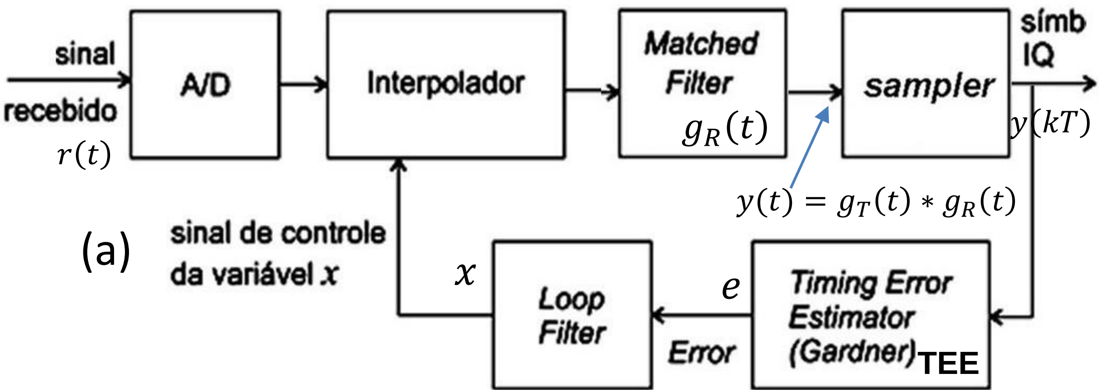
A figura (a) acima mostra o diagrama simplificado em *baseband* de um sistema 16-QAM em que $g_T(t)$ e $g_R(t)$ representam a resposta ao impulso de um filtro FIR *root-raised-cosine* de 127 coeficientes, *roll-off* α =0.15 e com $K_s = 8$ amostras por intervalo de símbolo T. Não há multipercurso nem ruído no canal de transmissão. O gráfico em (b) mostra a significativa dispersão de símbolos resultante na saída $y(kT)$ do *downsampler* quando o bloco *symbol timing estimator* (STE) em (a) está inoperante e quando o *clock* do *hardware* do RX resulta desalinhado do *clock* do *hardware* do TX de um atraso de $T/8$ no tempo, gerando BER não nula na saída do *de-mapper*.



A figura em (c) mostra a causa da dispersão dos símbolos mostrada em (b), por inoperância do bloco STE. Em qualquer situação de operação prática do TX e RX, os *clocks* dos seus respectivos *hardwares* nunca estarão em sincronismo (alinhados no tempo), porque o oscilador a cristal do *clock* no *hardware* do TX nunca terá a exata frequência do oscilador a cristal do *clock* do RX devido à diferença de temperatura nos locais de operação do TX e RX como também devido à própria imprecisão intrínseca na frequência do cristal no processo de fabricação. Em operação normal o bloco STE ajusta o instante de amostragem do *sampler*, de modo a compensar o desalinhamento Δt entre $g_T(t)$ e $g_R(t)$, evitando assim o problema da dispersão dos símbolos observada em (b).

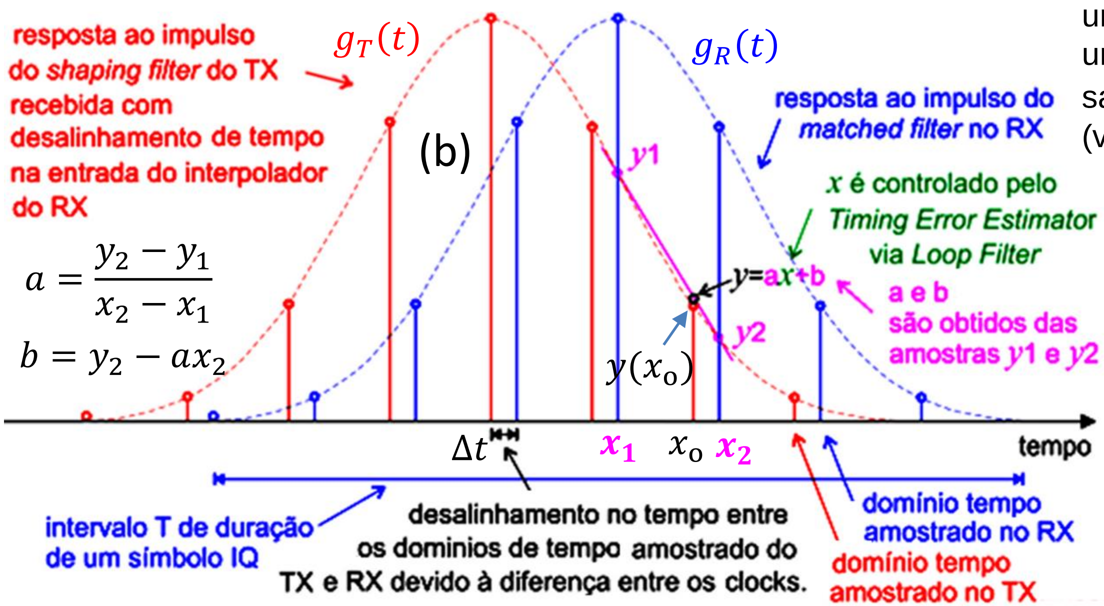
Sincronismo de Símbolo

Ocorre que a abordagem referida no slide anterior em que o bloco STE ajusta o instante de amostragem do *sampler* pode causar inúmeros problemas de temporização do *hardware*, em particular para sistemas implementados em lógica programável (FPGA). Uma solução alternativa largamente adotada para minimizar, conforme discutido no slide anterior, o sempre presente problema de o *clock* do *hardware* do RX estar desalinhado do *clock* do *hardware* do TX é efetuar um *re-sampling* através de um interpolador antes do *matched-filter* de modo a realinhar as amostras entre $g_T(t)$ e $g_R(t)$ sem alterar o intervalo de amostragem T do *sampler*, conforme mostrado em (a). O desalinhamento Δt entre $g_T(t)$ e $g_R(t)$ é mostrado em (b).



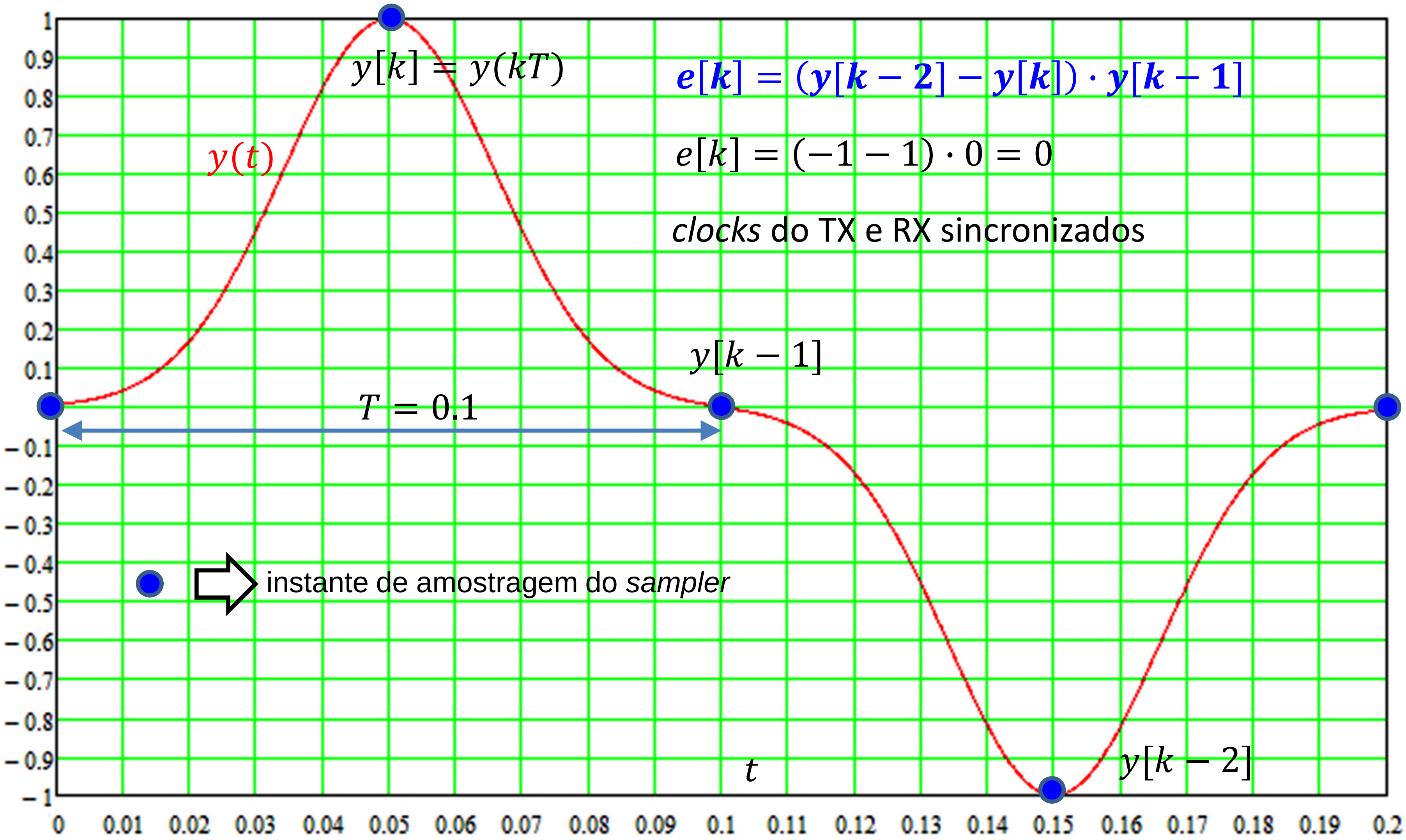
O bloco TEE mede o sinal $y(kT)$ e determina o desalinhamento Δt entre as amostras de $g_T(t)$ e $g_R(t)$ através da função de erro de Gardner $e[k] = (y[k-2] - y[k]) \cdot y[k-1]$ (ver slides 39 a 41), sendo $y[k] = y(kT)$, e onde $e[k]$ é o erro instantâneo e na saída do TEE. Note que a função de erro de Gardner necessita 2 amostras de $y(t)$ por período de símbolo T para determinar uma amostra $e[k]$ do erro instantâneo.

O erro $e[k]$ é filtrado pelo *loop filter*, que é basicamente um integrador discreto no tempo (ver slide 42). Sendo um integrador, o *loop filter* mantém constante a sua saída x imediatamente após $e[k]$ estabilizar em zero (ver https://en.wikipedia.org/wiki/Integrator).

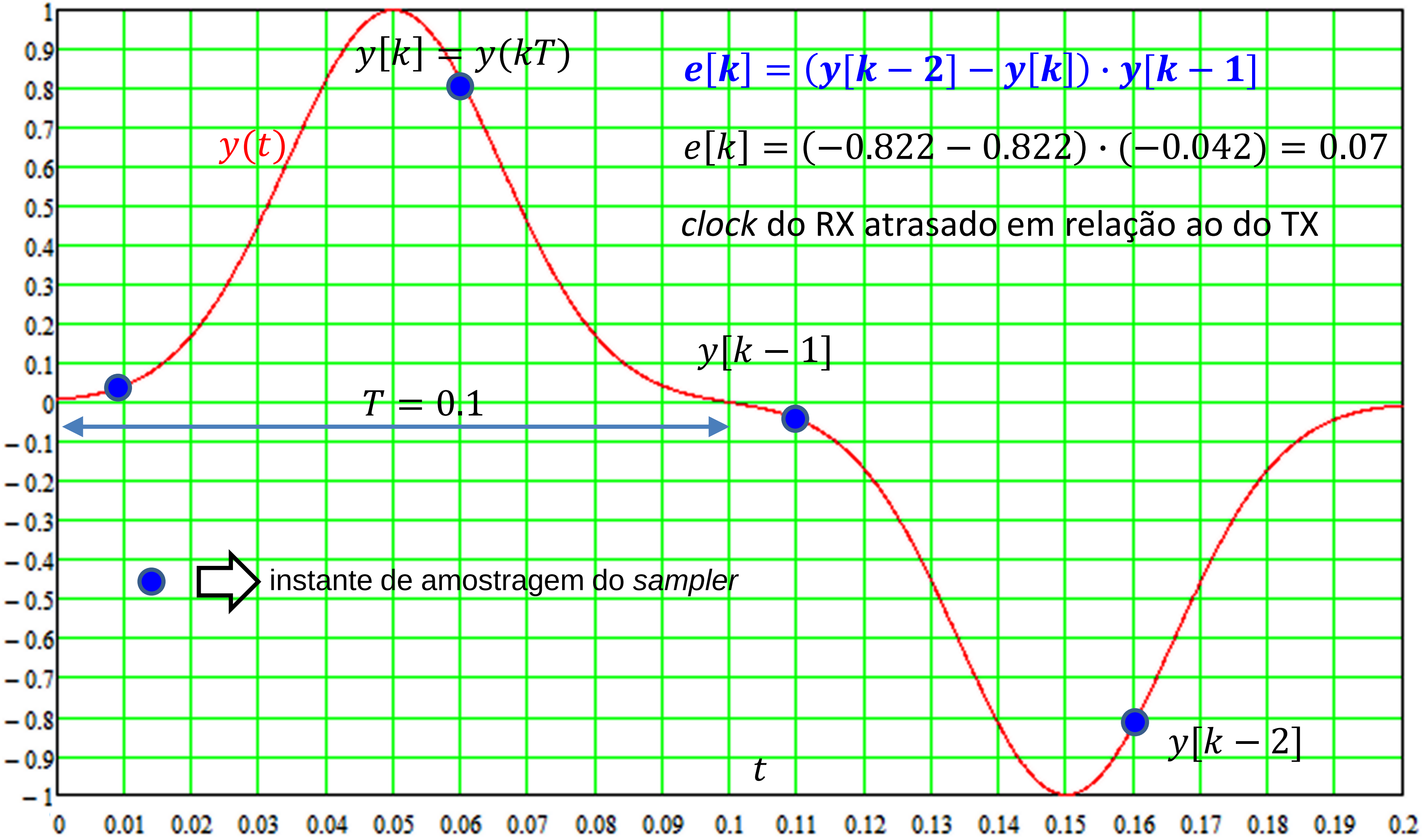


Note em (b) que a saída x do *loop filter* (ver slide 42) controla a reta $y(x) = ax + b$ do interpolador. A cada iteração k, $y_2 = g_T(x_2)$ recebido é substituído por $g_T(x) = y(x) = ax + b$. Após a k- *ésima* amostra recebida, k >5000 ou mais, o *loop* converge, i.e., $e[k] \rightarrow 0$ e a saída x do *loop filter* estabiliza a reta em $y(x_o) = a x_o + b$ recuperando a amostra $y(x_o) = g_T(x_o)$ que substitui $y_2 = g_T(x_2)$ e que minimiza o desalinhamento Δt de $g_T(t)$ em relação $g_R(t)$ e assim sincroniza os *clocks*.

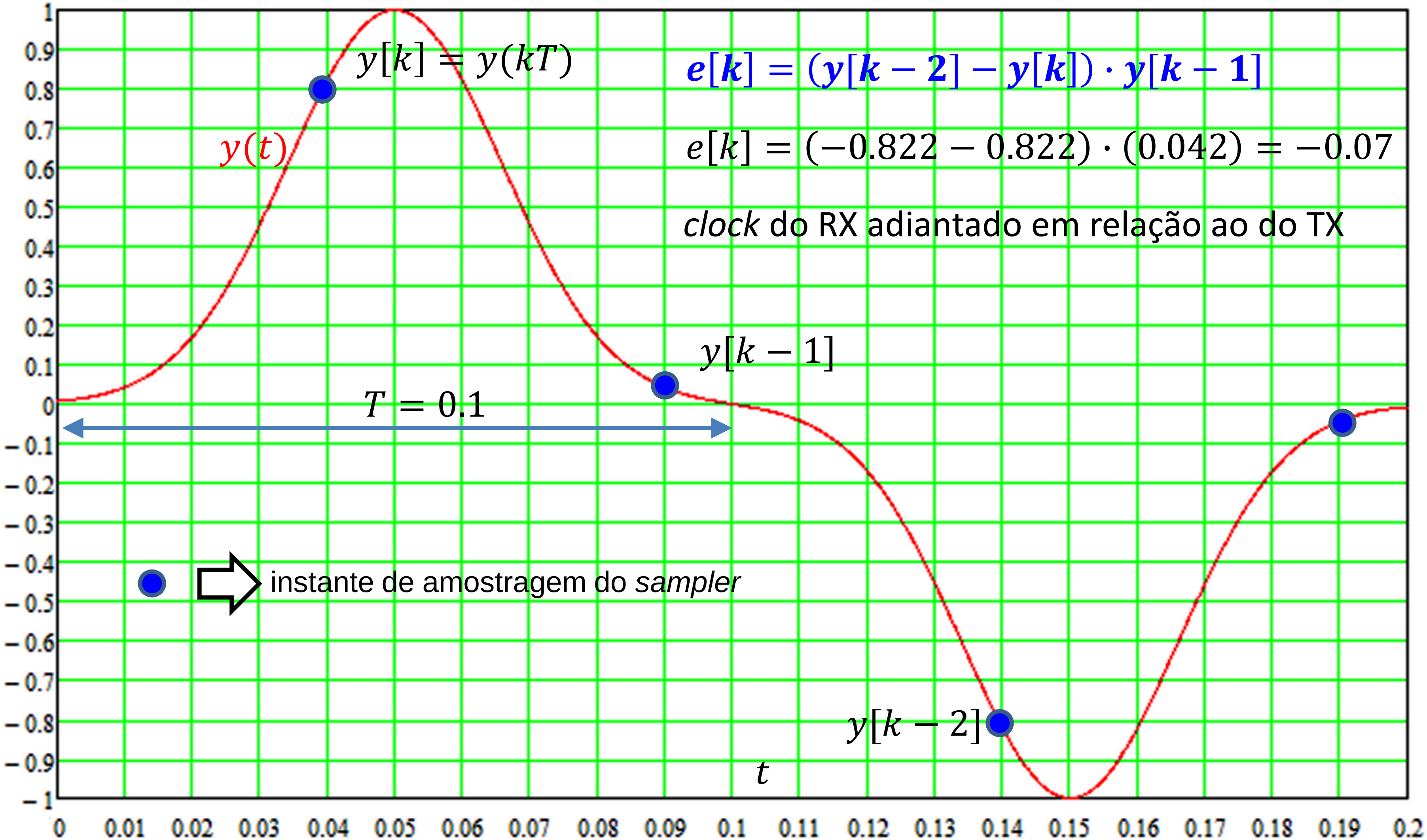
Timing Error Estimator (TEE) – função de erro de Gardner



Timing Error Estimator (TEE) – função de erro de Gardner



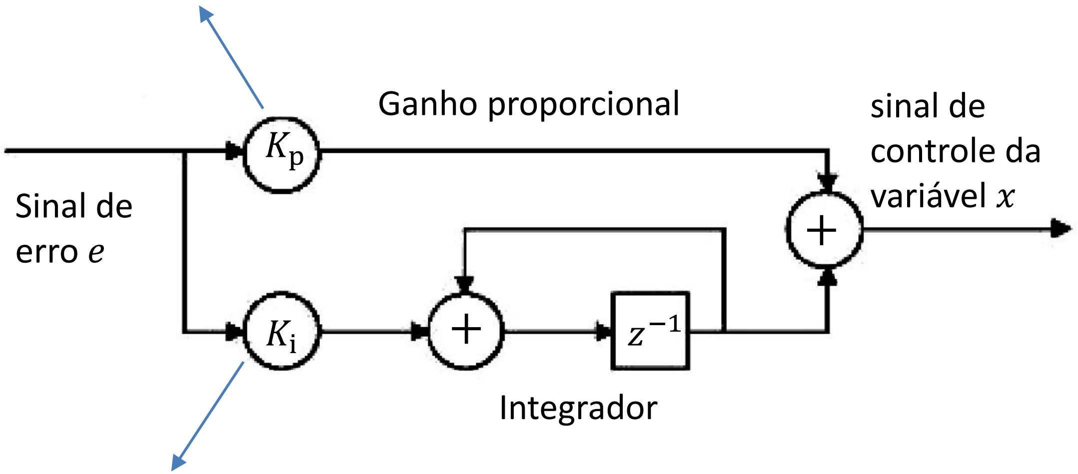
Timing Error Estimator (TEE) – função de erro de Gardner



Note que o TEE de Gardner falha se os pulsos adjacentes no tempo em $y(t)$ tiverem sinais algébricos iguais. Mas isto não afeta a convergência do *loop*, porque qualquer sistema digital contempla um *scrambler* na entrada do modulador (*energy dispersal scrambler* - ver https://en.wikipedia.org/wiki/Scrambler) que torna aleatória e uniforme a distribuição dos símbolos IQ transmitidos p/ efeito de eficiência espectral. Isto faz c/ que após um número suficiente de amostras recebidas obtenha-se a condição de um número igual de pulsos positivos e negativos, não impedindo assim a convergência do *loop* apesar das falhas do TEE de Gardner.

Loop filter – controlador PI (proporcional integrador)

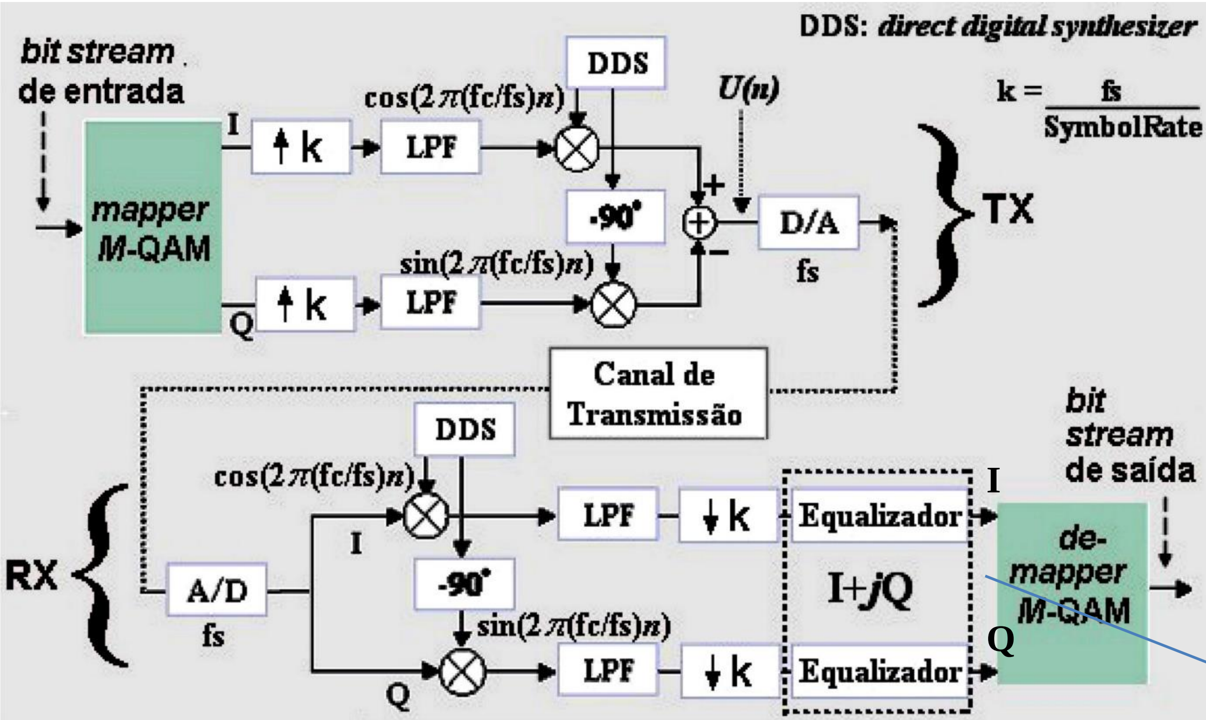
K_p é a constante de ganho que controla o *phase (time) tracking*



K_i é a constante de ganho que controla o *frequency tracking*

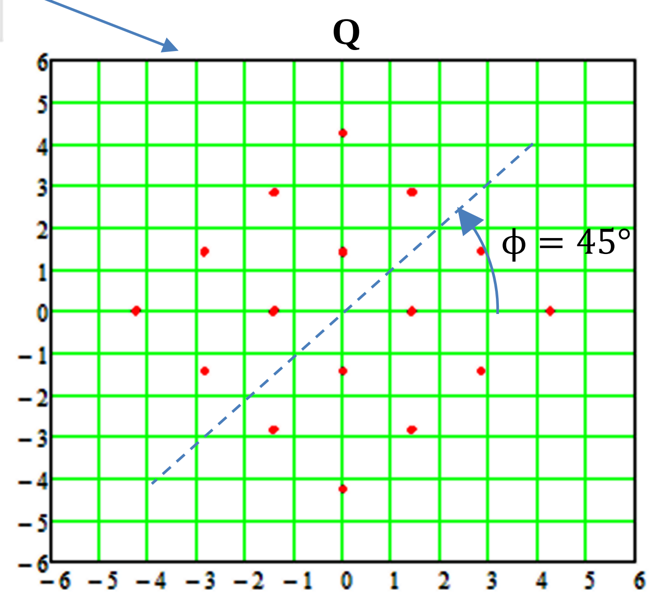
Na prática K_i e K_p são ajustados experimentalmente objetivando: (1) minimizar o erro residual após a convergência do *loop*, (2) minimizar o tempo de convergência do *loop* e (3) minimizar eventual instabilidade (oscilação) do *loop*. Pode ser necessário acrescentar um controlador PD para assegurar a estabilidade do *loop* – ver https://www.embarcados.com.br/controlador-pid-digital-parte-1/ e https://www.embarcados.com.br/controlador-pid-digital-parte-2/ .

Ainda, no âmbito da prática, o interpolador linear implementado através da reta $y = ax + b$ descrito nos slides 37 e 38 é instrutivo sob o ponto de vista didático mas não é a melhor técnica de interpolação para sincronismo de símbolo. Na prática, é usual utilizar técnicas de interpolação de maior custo computacional mas de melhor desempenho, como o **Interpolador Cúbico de Farrow** – ver Cap 11.6 "*Interpolators*" na página 344 de https://www.fccdecastro.com.br/pdf/PLLWC.pdf .



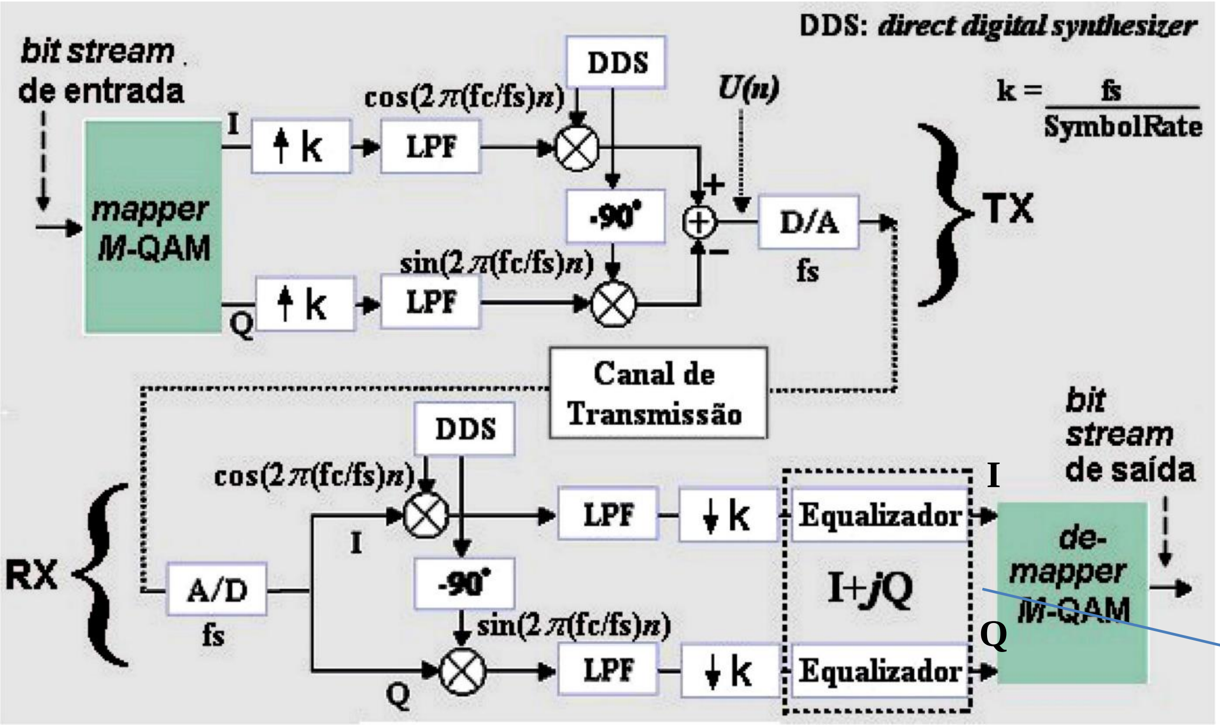
Consideremos um enlace *wireless* 16QAM com $f_c = 300$MHz, de modo que o comprimento da onda que se propaga no canal de transmissão entre a antena TX e a antena RX é $\lambda = c/f_c = 1.0$m, sendo $c = 3 \times 10^8$ m/s a velocidade de propagação da onda. Vamos supor que a distância entre a antena TX e a antena RX seja ℓ =100.125 m.

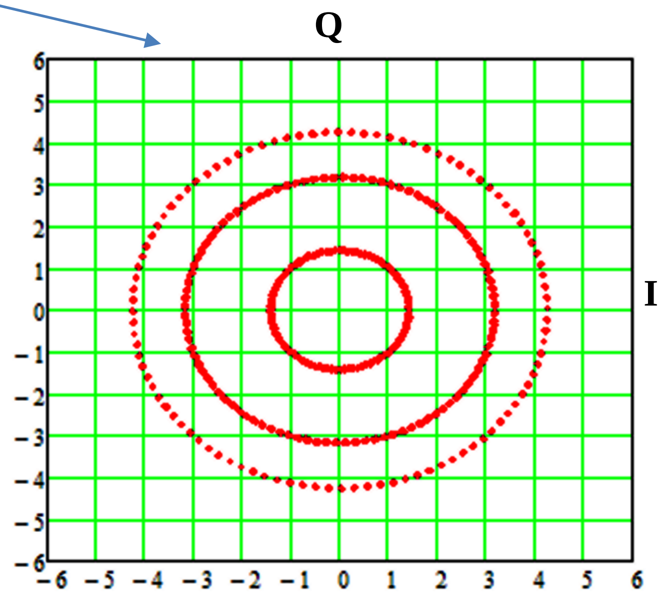
Uma onda eletromagnética plana varia sua fase de 360° ao se propagar ao longo de uma distância correspondente a um comprimento de onda λ.



Expressando a distância ℓ =100.125 m entre a antena TX e a antena RX em termos do comprimento de onda λ temos que $\ell = 100\lambda + \lambda/8$. Portanto a fase da onda ao incidir na antena RX é $\phi = \frac{\lambda/8}{\lambda} 360° = 45°$. Como a fase dos símbolos IQ demodulados no RX é a fase da senoide recebida na entrada do A/D, então o *offset* de fase $\phi = 45°$ da onda será somado ao ângulo de todos os símbolos IQ resultando que a constelação dos símbolos IQ recebidos será girada de $\phi = 45°$ conforme mostra o gráfico ao lado.

Dado que não há como prever a distância ℓ entre TX e RX, é necessário compensar a fase residual (*phase offset*) resultante da propagação da onda ao longo do canal de transmissão. O sub-sistema responsável por esta compensação do *phase offset* é denominado de **sincronismo de portadora.**

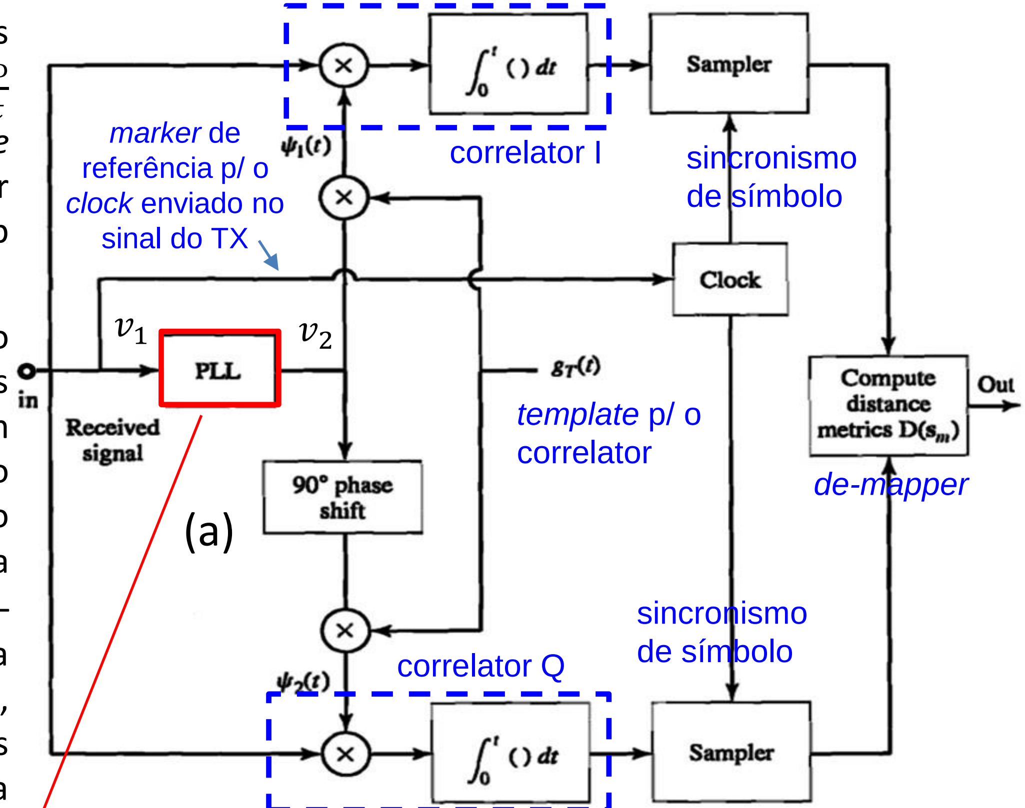




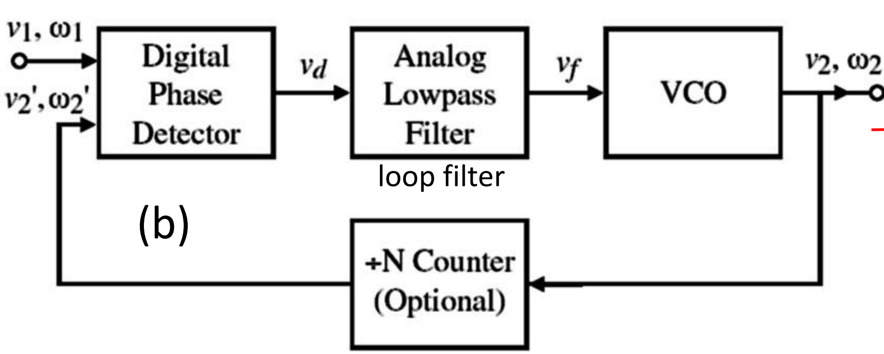
Se o RX está em movimento relativo ao TX então a distância ℓ entre TX e RX varia com o transcorrer do tempo (situação de operação usual em telefonia celular, por exemplo). Em consequência o *offset* de fase ϕ também variará com o tempo t. O resultado é que os símbolos IQ recebidos giram com uma velocidade angular $\omega = \frac{d\phi}{dt}$, conforme mostra o gráfico ao lado. Nesta situação dinâmica o sincronismo de portadora deve compensar não somente o *offset* de fase ϕ da constelação de símbolos IQ recebidos como também a frequência $\omega = \frac{d\phi}{dt}$ de giro dos símbolos IQ, caso contrário a BER na saída do *de-mapper* será muito alta.

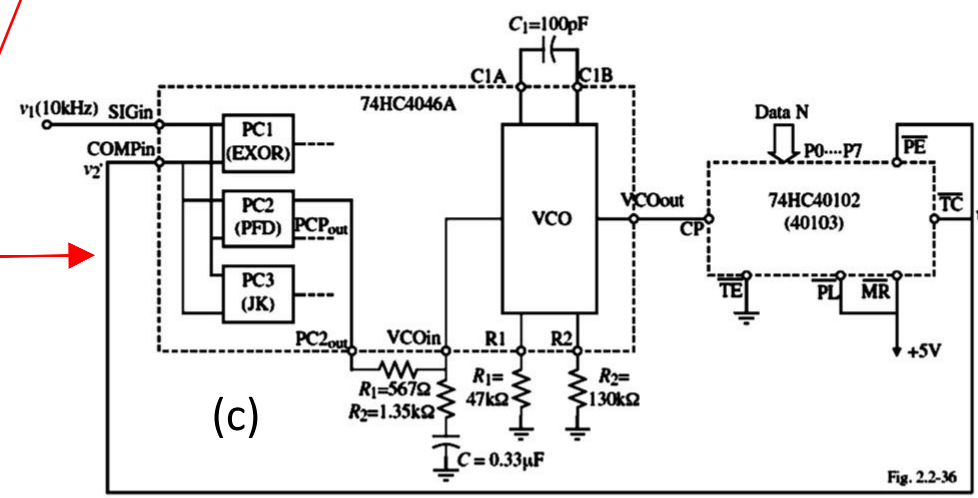
Sincronismo de Portadora

Uma técnica usual p/ compensar o *offset* de fase ϕ dos símbolos IQ recebidos como também a frequência $\omega = \frac{d\phi}{dt}$ de giro dos símbolos IQ é a adoção de um PLL (*phase locked loop*), conforme mostrado em (a), (b) e (c) - ver https://en.wikipedia.org/wiki/Phase-locked_loop e Cap 11.4 de https://www.fccdecastro.com.br/pdf/PLLWC.pdf.

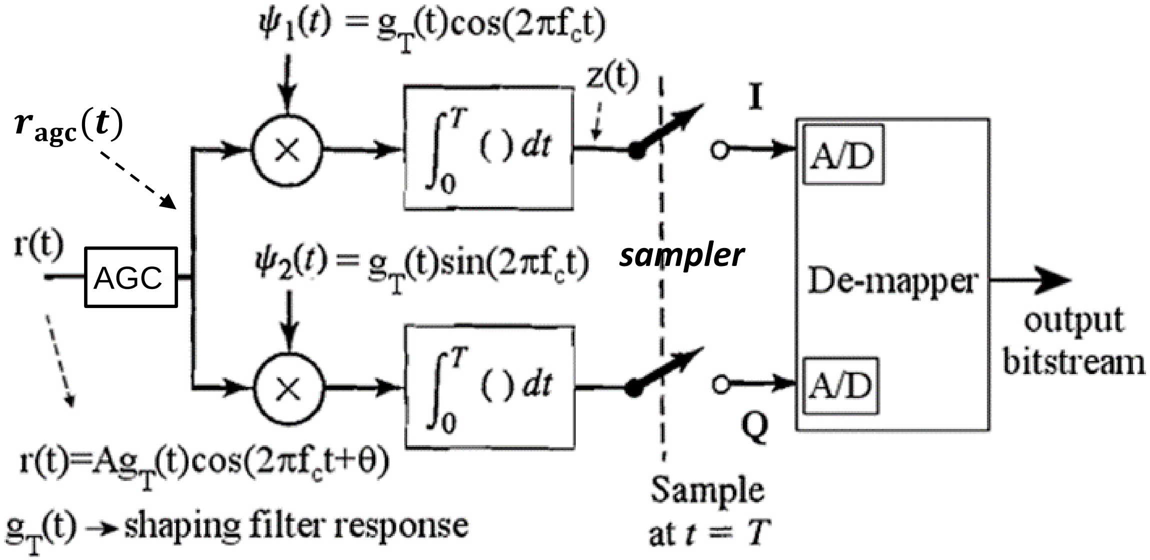


A saída v_d do *phase detector* em (b) é uma tensão de erro que é proporcional à diferença de fase entre as entradas v_1 e $v_2{}'$. v_d é filtrada por um *loop filter* que é um controlador PI (filtro RC em (c)) com função similar ao *loop filter* do sub-sistema de sincronismo de símbolo descrito no slide 38. A saída v_f do *loop filter* controla a frequência de um oscilador controlado por tensão (VCO – *voltage controlled oscillator*) cuja saída v_2 é realimentada ao *phase detector* através do divisor por N. Para N = 1, após o *settling time* do *loop* (que depende dos parâmetros do *loop filter*), tanto a fase como a frequência ω_2 do sinal v_2 serão idênticas a de v_1, estabelecendo assim o sincronismo de portadora entre TX e RX.

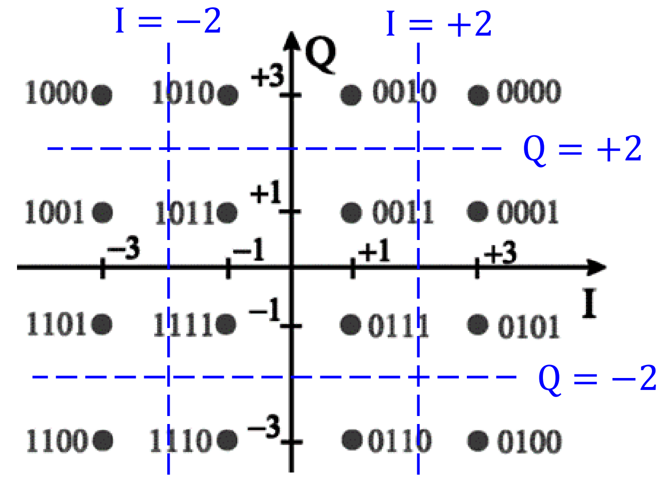




Exemplo 2: O diagrama abaixo mostra a etapa de demodulação de um RX 16-QAM com detecção por correlator analógico.



(a) Diagrama de blocos do demodulador 16-QAM.



(b) Constelação adotada no *de-mapper* do RX 16-QAM.

Figura 1: Etapa de demodulação de um RX 16-QAM.

A taxa do *bitstream* na saída do *de-mapper* é 40 Mbps e a frequência da portadora é $f_c = 430\text{MHz}$. Cada símbolo IQ tem uma duração $T = 1/$*symbol rate*, onde *symbol rate* é a taxa de símbolos IQ na entrada do *de-mapper*.

O sistema de sincronismo de símbolo (slides 37 e 38) deste RX é tal que o *sampler* na Figura 1(a) amostra o sinal na saída dos integradores no instante $t = T$ correspondente ao ponto de amplitude máxima do sinal, amostragem que é efetuada em sincronismo no tempo com o *clock* do TX. A amostragem no instante $t = T$ minimiza o ruído e maximiza o sinal, maximizando a SNR na entrada do *de-mapper*, e, portanto, minimiza a BER (*bit error rate*) em sua saída.

O bloco AGC (*automatic gain control*) ajusta a amplitude do sinal $r_{agc}(t)$ recebido de modo que a magnitude (=módulo) dos símbolos IQ na entrada *de-mapper* sejam coerentes com as regiões de decisão (quadrados delimitados pelas linhas tracejadas em **azul**) da constelação de referência mostrada na Figura 1(b). Especificamente, o AGC ajusta a amplitude do sinal $r_{agc}(t)$ de modo que o maior valor de amplitude de $r_{agc}(t)$ corresponda à magnitude $\sqrt{(\pm 3)^2 + (\pm 3)^2} = 4.243$ dos símbolos IQ nos 4 cantos da constelação de referência mostrada na Figura 1(b).

Pede-se:

(a) Determine a frequência de amostragem f_s do A/D e o intervalo T entre as amostras na saída do *sampler* na Figura 1(a).

(b) Determine o *symbol rate* deste sistema.

(c) Assuma que o sistema de sincronismo de portadora esteja inoperante em razão de defeito em um componente mas que o AGC e o sistema de sincronismo de símbolo estejam ativos e operando corretamente. Nesta situação operacional, a amplitude dos símbolos IQ recebidos é coerente com as regiões de decisão do *de-mapper* mostradas em azul na Figura 1(b) mas a fase residual φ não é compensada no sinal recebido $r(t) = Ag_T(t)\, cos(2\pi f_c t + \theta + \varphi)$. Sabe-se que as coordenadas geográficas nas quais estão localizados o TX e o RX são tais que eles encontram-se distantes entre si de $l =$ 0.25 Km, não estando TX e RX em movimento relativo um ao outro nem tampouco havendo multipercurso no cenário de operação. Determine para esta situação operacional qual palavra binária resulta na saída do *de-mapper* do RX caso o TX transmita a palavra binária **0001**. Considere $c = 2.99792458 \times 10^8$m/s a velocidade de propagação da onda EM que transporta os pulsos *passband* do *shaping filter* através do canal de transmissão no enlace entre TX ao RX.

(d) Assuma as mesmas condições operacionais do item (c), exceto que o RX move-se com uma velocidade v=90Km/h em relação ao TX. Nesta situação $r(t) = Ag_T(t)\, cos(2\pi f_r t + \theta + \varphi)$ é tal que $f_r \neq f_c$ devido ao efeito Doppler ocasionado pelo movimento relativo entre TX e RX sob velocidade v. O efeito Doppler em um canal sem multipercurso (i.e, em um canal AWGN) apenas faz o conjunto de símbolos IQ recebidos girar com uma velocidade angular $\omega_D = 2\pi f_{\text{doppler}}$ sobre o mapa da constelação de referência mostrado na Figura 1(b), sendo f_{doppler} = vf/c. Determine o quanto gira (em graus) por ação do efeito Doppler cada novo símbolo IQ recebido em relação ao símbolo recebido em instante imediatamente anterior.

(e) A partir do resultado em (d) determine quantos símbolos IQ precisam ser recebidos para que o desvio Doppler gire de 45° a constelação dos símbolos IQ recebidos em relação à constelação de referência.

(f) A partir do resultado em (e) determine quanto tempo transcorre para que o desvio Doppler gire de 45° a constelação dos símbolos IQ recebidos em relação à constelação de referência.

Solução:

Para a solução deste exemplo vamos usar o *script* Mathcad Exemplo2.xmcd disponível em https://www.fccdecastro.com.br/ZIP/SCD2_C1_E2S46.zip .

(a) Do enunciado, a taxa do *bitstream* na saída do *de-mapper* é $\text{bitrate} := 40\text{MHz}$ [Mbps] e da Figura 1(b) do enunciado temos que o número de bits pos símbolo IQ é $\text{NBitsPerSymbol} := 4$.

Daí: $$\text{SymbolRate} := \frac{\text{bitrate}}{\text{NBitsPerSymbol}} = 10\cdot\text{MHz}$$

Uma vez que o correlator é analógico, o A/D que segue o correlator na Figura 1(a) digitaliza uma amostra por símbolo IQ. Daí:

$\text{fs} := \text{SymbolRate} = 10\cdot\text{MHz}$ →frequência de amostragem do AD $\quad \text{Ts} := \dfrac{1}{\text{SymbolRate}} = 0.1\cdot\mu\text{s}$ →duração de um símbolo IQ

(b) Vide item (a).

(c) Do enunciado, a palavra binária Btx_0 transmitida é $Btx_0 := \text{"0001"}$. ←

Por inspeção visual da Figura 1(b) do enunciado, a palavra binária $Btx_0 = \text{"0001"}$ resulta no símbolo $Stx_0 = (3 + i)$ na saída do *mapper* do TX.

Se o sincronismo de portadora do RX estivesse operacional, o símbolo transmitido $Stx_0 = (3 + i)$ pelo TX resultaria na palavra binária $Brx_0 = \text{"0001"}$ na saída do *de-mapper* do RX, palavra binária recebida no RX que corresponde à palavra $Btx_0 = \text{"0001"}$ originalmente transmitida pelo TX - vide Figura 1(b) do enunciado.

Sincronismo de Portadora

No entanto, do enunciado, o sincronismo de portadora do RX está inoperante. Portanto, o ângulo ϕ residual (que é uma função da distância entre TX e RX) não será compensado e os símbolos recebidos estarão todos girados de ϕ em relação aos símbolos da constelação de referência mostrada na Figura 1(b). Determinando o valor do ângulo residual ϕ:

Do enunciado: $L := 0.25 \cdot km$ → distância entre TX e RX $\quad fc := 430 \cdot MHz$ → freqüência da onda EM portadora

$\lambda := \frac{c}{fc} = 0.697\,m$ → comprimento de onda da onda EM portadora de freqüência fc

$Num\lambda := \frac{L}{\lambda} = 358.581$ → $N := floor(Num\lambda) = 358$ → **Numλ** é um número em ponto flutuante que expressa quantos comprimentos de onda λ separam TX e RX um do outro. **N=floor(Numλ)** expressa quantos comprimentos de onda **inteiros** separam TX e RX um do outro. **Nota:** A onda EM exibe variação de fase de 2πN [rad] ao se propagar um número N inteiro de comprimentos de onda λ ao longo do percurso de propagação.

$Frac\lambda := Num\lambda - floor(Num\lambda)$ → $Frac\lambda = 0.581$ → fração decimal de λ que, se somado ao número inteiro de λ's que separam TX e RX resulta na distância exata entre TX e RX, distância expressa em comprimentos de onda.

Daí, $\phi := Frac\lambda \cdot 2 \cdot \pi$ → $\phi = 209.305\,deg$. Assim, o símbolo IQ Stx_0 transmitido sofre uma rotação de fase $\phi = 209.305\,deg$ em relação ao seu valor original, **causado pelo giro de fase ϕ da onda EM no percurso entre TX e RX**, o que resulta um símbolo IQ Srx_0 recebido na entrada do *de-mapper* do RX dado por:

$$Srx_0 := Stx_0 \cdot e^{j \cdot \phi} = (-2.127 - 2.34i)$$

E, por inspeção visual da Figura 1(b) do enunciado, o valor IQ $Srx_0 = (-2.127 - 2.34i)$ resulta na palavra binária $Brx_0 = "1100"$ na saída do *de-mapper* , e que não corresponde à palavra $Btx_0 = "0001"$ originalmente transmitida. Portanto, o fato de o sincronismo de portadora estar inoperante causou a palavra binária transmitida $Btx_0 = "0001"$ ser recebida como $Brx_0 = "1100"$, o que constitui um erro do demodulador.

(d) Nesta situação em que o RX move-se a uma velocidade v em relação ao TX temos:

$r(t) = A\cdot gT(t)\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot fr\cdot t + \theta + \phi)$ onde $fr = fc + fdoppler$

$v := 90\cdot kph \leftarrow$

$fdoppler := fc\cdot\frac{v}{c} = 35.858\cdot Hz$

O oscilador local do *mixer* - *mixer* é o bloco '⊗' na Figura 1(a) - opera em fc e a frequência central do sinal r(t) recebido é fr=fc+fdoppler. Portanto o *mixer* da Figura 1(a) não converte integralmente o sinal r(t) para banda-base, permanecendo uma componente residual de frequência equivalente a fdoppler. Desta maneira, se Stx(n) é a sequência de símbolos originalmente transmitidos pelo TX, a sequência de símbolos correspondentes Srx(n) resultante na entrada do *de-mapper* do RX é dada nesta situação por:

$Srx(n) = Stx(n)\cdot e^{j\cdot 2\cdot\pi\cdot fdoppler\cdot n\cdot Ts}$ ou $Srx(n) = Stx(n)\cdot e^{j\cdot 2\cdot\pi\cdot\frac{fdoppler}{SymbolRate}\cdot n}$

Portanto, o conjunto de símbolos IQ recebidos Srx gira com uma velocidade angular ωD [rad/s] sobre o mapa da constelação de referência mostrado na Figura 1(b), sendo ωD dada por:

$\omega D := 2\cdot\pi\cdot fdoppler = 225.303\cdot\frac{rad}{s}$

Daí, cada novo símbolo IQ recebido gira em relação ao símbolo IQ recebido no instante imediatamente anterior de um valor dado por:

$GiroAngularPorIntervaloDeSimbolo := Ts\cdot\omega D = 22.53\times 10^{-6}\cdot rad$

$GiroAngularPorIntervaloDeSimbolo = 1.291\times 10^{-3}\cdot°$

(e) O número Nsr de símbolos IQ que precisam ser recebidos para que a constelação dos símbolos IQ recebidos gire 45° em relação à constelação de referência é dado por:

$$\mathrm{Nsr} := \frac{45°}{\mathrm{GiroAngularPorIntervaloDeSimbolo}} = 34859.588$$

(f) O tempo Tsr que transcorre para que a constelação dos símbolos IQ recebidos gire 45° em relação à constelação de referência é dado por:

$$\mathrm{Tsr} := \mathrm{Nsr}\cdot\mathrm{Ts} = 3.486\cdot\mathrm{ms}$$

Simuladores 16–QAM

Dois simuladores de um sistema TX-RX 16-QAM, um com filtro Gaussiano e outro com filtro *Root Raised Cosine*, implementados em *scripts* MathCad, encontram-se disponíveis no link abaixo:

http://www.fccdecastro.com.br/ZIP/Simulador16-QAM.zip.

É instrutivo executar estes *scripts,* comparando o desempenho do sistema com filtro Gaussiano com o desempenho do sistema com filtro *Root Raised Cosine*, alterar os parâmetros e interpretar os resultados gráficos.

Ambos scripts possibilitam avaliar o espectro do sinal transmitido e recebido, a degradação da constelação de símbolos IQ recebidos em consequência do ruído gaussiano aditivo e do multipercurso no canal de transmissão, a degradação da constelação de símbolos IQ recebidos em consequência da assincronia de símbolo e em consequência da assincronia de portadora. Note que estes scripts não implementam o processo de sincronismo de símbolo como também não implementam o processo de sincronismo de portadora – eles apenas demonstram o efeito do problema de assincronia de símbolo e de assincronia de portadora.

Apêndice A:

Operation	***Formula***
Rectangular to Polar Conversion	$z = x + jy = re^{j\theta}$ where $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ and $\theta = \arctan(y/x)$
Polar to Rectangular Conversion	$z = re^{j\theta} = r\,[\cos(\theta) + j\sin(\theta)] = x + jy$ where $r = \cos(\theta)$ and $y = r\sin(\theta)$
Add: $z_3 = z_1 + z_2$	$(x_1 + x_2) + j\,(y_1 + y_2)$
Subtract: $z_3 = z_1 - z_2$	$(x_1 - x_2) + j\,(y_1 - y_2)$
Multiply: $z_3 = z_1 z_2$ (polar form)	$(x_1 x_2 - y_1 y_2) + j\,(x_1 y_2 + y_1 x_2)$ $r_1 r_2\, e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$
Divide: $z_3 = z_1 / z_2$ (polar form)	$\dfrac{(x_1 x_2 - y_1 y_2) - j\,(x_1 y_2 - y_1 x_2)}{x_2^2 + y_2^2}$ $\dfrac{r_1}{r_2}\, e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$

Apêndice B:

Sejam $\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{\pi}\mathbf{f}_1\boldsymbol{t}$ e $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{\pi}\mathbf{f}_2\boldsymbol{t}$. Valem as seguintes relações (*relationships*) trigonométricas:

Relationship	***Relationship***
$\sin u = \cos(u - \pi/2)$	$\cos u = \sin(u + \pi/2)$
$\cos(-u) = \cos u$	$\sin(-u) = -\sin(u)$
$\sin^2 u + \cos^2 u = 1$	$\cos^2 u = \frac{1}{2}(1 + \cos 2u)$
$\sin^2 u = \frac{1}{2}(1 - \cos 2u)$	$\cos(u \pm v) = \cos u \cos v \mp \sin u \sin v$
$\sin(u \pm v) = \sin u \cos v \pm \cos u \sin v$	$\boxed{\cos u \cos v = \frac{1}{2}[\cos(u - v) + \cos(u + v)]}$
$\boxed{\sin u \sin v = \frac{1}{2}[\cos(u - v) + \cos(u + v)]}$	$\sin u \cos v = \frac{1}{2}[\sin(u - v) + \sin(u + v)]$
$\cos u = \frac{1}{2}\left[e^{ju} + e^{-ju}\right]$	$\sin u = \frac{1}{2j}\left[e^{ju} - e^{-ju}\right]$
$e^{ju} = \cos u + j \sin u$	

heterodinação

das frequências $\mathbf{f}_1$ e $\mathbf{f}_2$

Apêndice C:

Pseudocódigo para determinação da sequência z[n] que resulta da convolução discreta no domínio tempo entre as sequências x[n] e y[n], definida por **z[n] = Conv(x[n],y[n]) = x[n]$*$y[n]**.

$$
\begin{array}{l}
\mathrm{Conv}(X,Y) := \left|
\begin{array}{l}
Nx \leftarrow \mathrm{length}(X) - 1 \\
Ny \leftarrow \mathrm{length}(Y) - 1 \\
\textbf{for}\ \ n \in 0..(Nx + Ny) \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
Z_n \leftarrow 0.0 \\
\textbf{if}\ \ Nx \geq Ny \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
Z_n \leftarrow Z_n + \displaystyle\sum_{m=0}^{n} \left(X_m Y_{n-m}\right) \ \ \textbf{if}\ \ n \leq Ny \\
Z_n \leftarrow Z_n + \displaystyle\sum_{m=n-Ny}^{n} \left(X_m Y_{n-m}\right) \ \ \textbf{if}\ \ (n > Ny)\cdot(n \leq Nx) \\
Z_n \leftarrow Z_n + \displaystyle\sum_{m=n-Ny}^{Nx} \left(X_m Y_{n-m}\right) \ \ \textbf{if}\ \ (n > Nx)\cdot[n \leq (Nx + Ny)]
\end{array}
\right. \\
\textbf{otherwise} \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
Z_n \leftarrow Z_n + \displaystyle\sum_{m=0}^{n} \left(X_m Y_{n-m}\right) \ \ \textbf{if}\ \ n \leq Nx \\
Z_n \leftarrow Z_n + \displaystyle\sum_{m=0}^{Nx} \left(X_m Y_{n-m}\right) \ \ \textbf{if}\ \ (n > Nx)\cdot(n \leq Ny) \\
Z_n \leftarrow Z_n + \displaystyle\sum_{m=n-Ny}^{Nx} \left(X_m Y_{n-m}\right) \ \ \textbf{if}\ \ (n > Ny)\cdot[n \leq (Nx + Ny)]
\end{array}
\right.
\end{array}
\right. \\
\textbf{return}\ \ Z
\end{array}
\right.
\end{array}
$$