

Sistemas multiportadoras OFDM, compensação de canal, prefixo cíclico, PAPR (peak to average power ratio), *time/frequency interleaver*, máscara espectral, RX OFDM – diagrama de blocos, OFDM – pros/contras, sistema SC-FDMA (4G-3GPP-LTE), sistema MC-CDMA (*multicarrier* CDMA), sistema MC-DS-CDMA (*multicarrier direct-sequence* CDMA).

Centro de Tecnologia – Departamento de Eletrônica e Computação

UFSM00265 – SISTEMAS DE COMUNICAÇÃO DIGITAL II

Prof. Fernando DeCastro

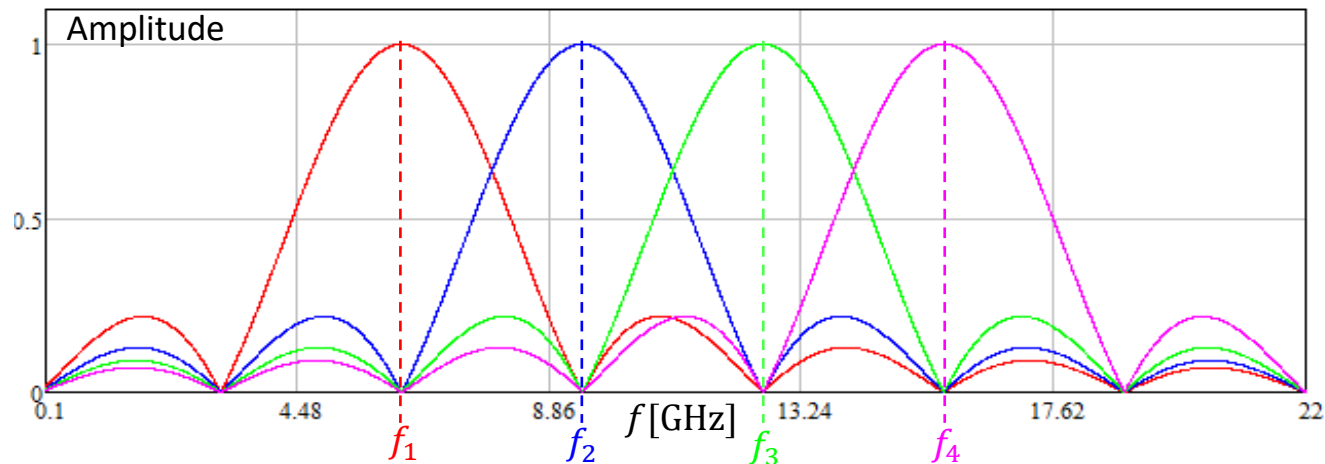


## Sistemas multiportadoras OFDM – Introdução

A ideia básica em um sistema multiportadora OFDM (*orthogonal frequency division multiplexing*) é distribuir os pulsos quadrados do *stream* de símbolos IQ na saída do *mapper* do TX entre  $N_p$  *up-converters* em paralelo, conforme mostra o diagrama no slide 6 p/ um conjunto de  $N_p = 4$  *up-converters* em paralelo. Cada  $m$ -ésimo *up-converter*,  $m = 1, 2 \dots N_p$ , gera um respectivo sub-canal *passband* com frequência central  $f_m$  denominada de frequência da  $m$ -ésima portadora. Por exemplo, a figura abaixo mostra o espectro gerado para um sistema *multicarrier* (= multiportadora) OFDM com  $N_p = 4$  sub-canais cujas frequências centrais são respectivamente  $f_1, f_2, f_3$  e  $f_4$ .

Note no diagrama do slide 6 que, em consequência dos símbolos IQ serem distribuídos pela chave rotativa  $S/P$  entre os 4 *up-converters*, a taxa de símbolos (= *symbol rate*) dos símbolos IQ transmitidos por cada *up-converter* é  $1/N_p = 1/4$  da taxa de símbolos na saída do *mapper*. **Portanto, a duração  $T$  dos símbolos IQ em cada *up-converter* é  $T = N_p T_0 = 4T_0$ , sendo  $T_0$  o intervalo de duração dos símbolos IQ na saída do *mapper*.**

Veremos no slide 18 do Cap IV.2 que, se as portadoras  $f_m$  e  $f_{m+1}$  dos *up-converters*  $m$  e  $m + 1$  forem separadas de  $\Delta f = f_{m+1} - f_m = 1/T$ , **então os espectros dos sub-canais serão ortogonais entre si. Ou seja, na frequência central  $f_m$  de cada sub-canal, onde ocorre o máximo da amplitude do espectro do sub-canal, a curva de amplitude do espectro de todos os demais sub-canais apresentam valor nulo, conforme mostra a figura abaixo.**



Note na figura acima que o espectro dos 4 sub-canais se superpõem no domínio frequência, o que resulta em alta eficiência espectral devido à reduzida largura do espectro conjunto dos 4 sub-canais. Note também que, apesar da superposição, os sub-canais não interferem entre si em consequência da ortogonalidade entre eles.



## Sistemas multiportadoras OFDM – Introdução

Conforme discutido no slide anterior, a sequência de símbolos IQ na saída do *mapper* no diagrama do slide 6 tem seus símbolos IQ igualmente distribuídos e atribuídos aos  $N_p = 4$  sub-canais através da chave rotativa  $S/P$  mostrada no diagrama.

Portanto, a taxa de transmissão de símbolos IQ (*symbol rate*) em cada sub-canal é  $N_p$  vezes menor e, portanto, a duração dos símbolos IQ em cada sub-canal é  $N_p$  vezes maior, tornando  $N_p$  vezes menor a duração dos ecos do multipercurso do canal em relação à duração do símbolo IQ em cada um dos  $N_p$  sub-canais.

Note, portanto, que à medida que o número  $N_p$  de sub-canais aumenta, mais desprezível se torna a duração de cada eco em relação à duração  $T = N_p T_0$  do símbolo IQ em cada um dos  $N_p$  sub-canais, sendo  $T_0$  o intervalo de duração dos símbolos IQ na saída do *mapper*.

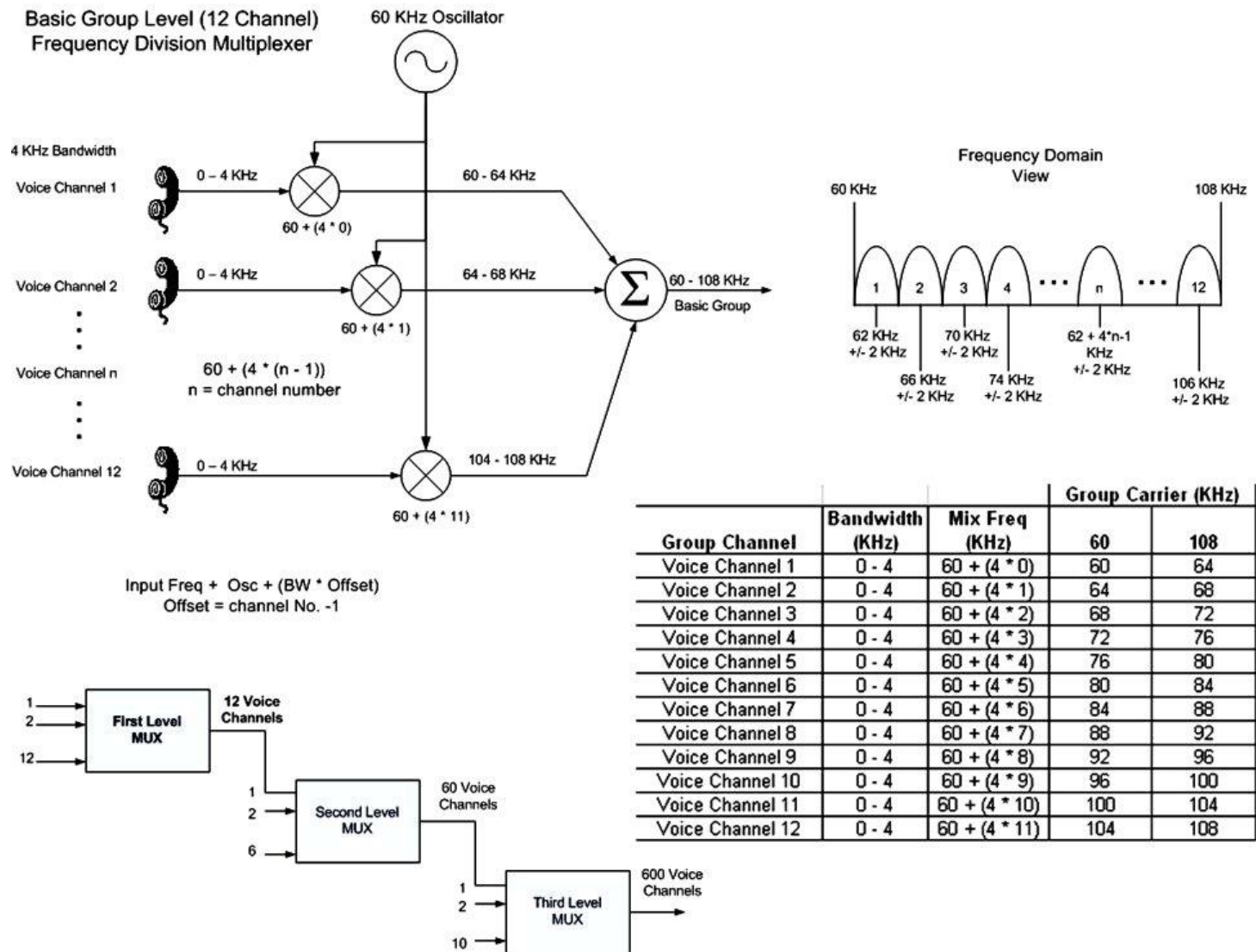
Para canais de transmissão em cenários de propagação urbana, a duração dos ecos originados pelo multipercurso é significativamente longa. Neste cenário de operação urbano é usual que o número  $N_p$  de portadoras de um sistema OFDM seja da ordem de milhares.

Por exemplo, TV digital aberta em VHF adota  $N_p = 8192$  portadoras. Note, portanto, que a duração dos ecos em cada sub-canal deste sistema OFDM é comparativamente reduzido de 8192 vezes. Desta maneira, o número de coeficientes necessário ao equalizador de cada sub-canal é drasticamente reduzido. De fato, a redução é tão drástica que o número de coeficientes necessários ao equalizador de cada sub-canal é de apenas 1 coeficiente, conforme discutiremos no slide 24.

Este diminuto número (i.e., unitário) de coeficientes no equalizador de cada sub-canal de um sistema *multicarrier* OFDM elimina os problemas de convergência que usualmente ocorrem nos equalizadores adaptativos de sistemas ***single carrier*** (portadora única) que estudamos em capítulos anteriores. Conforme vimos no slide 61 do Cap II.2, para que um equalizador fracionário possa atingir a condição *zero forcing* o número de coeficientes do filtro FIR deve ser igual ou maior ao número de amostras do *delay spread* do canal – o que é muito maior do que um número unitário de coeficientes.

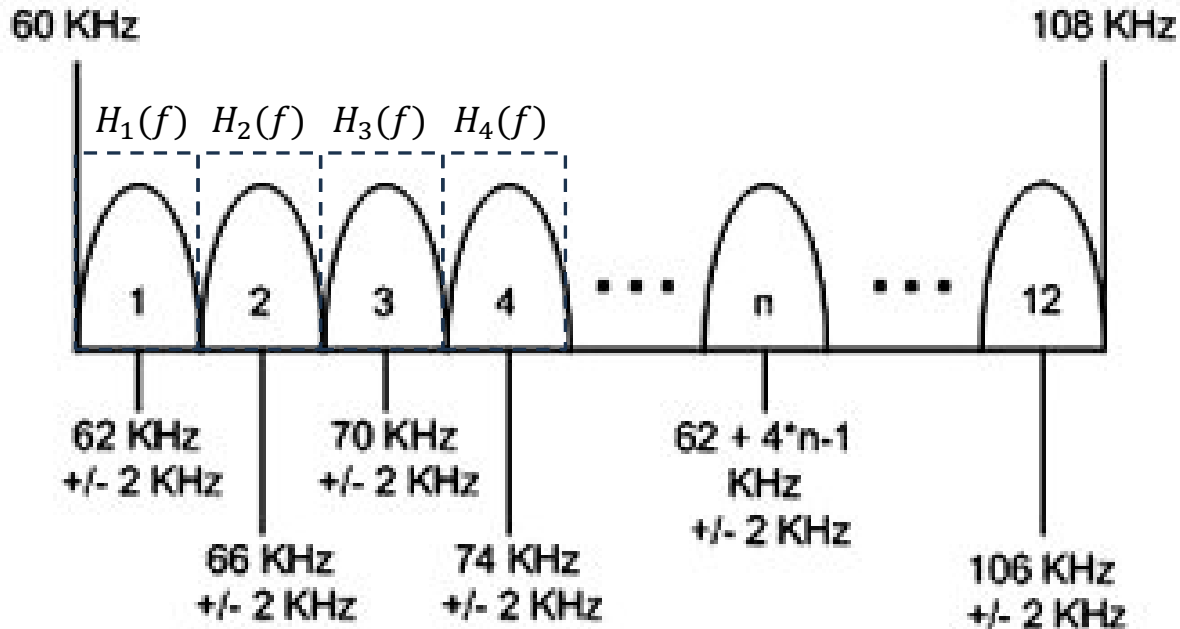
## Sistemas multiportadoras não-ortogonais

Sistemas multiportadoras não-ortogonais são os precursores históricos de sistemas OFDM, e foram desenvolvidos já durante a WWII, como, por exemplo, o sistema *L-Carrier*, desenvolvido para telefonia pela AT&T em 1941 (ver <https://en.wikipedia.org/wiki/L-carrier>), conforme mostra o diagrama abaixo para o 1º nível de multiplexação do sistema:



## Sistemas multiportadoras não-ortogonais

O problema de sistemas multiportadoras não-ortogonais, como o sistema *L-Carrier* referido no slide anterior, é a necessidade de filtros passabanda otimizados para cada sub-canal, otimizados no sentido de que a curva de resposta em frequência  $H(f)$  idealmente deve ter um *roll-off* íngreme e aproximar uma “caixa quadrada” para se obter uma boa separação entre os espectros de sub-canais adjacentes, conforme mostrado em tracejado na figura abaixo (ver <https://en.wikipedia.org/wiki/Roll-off>).

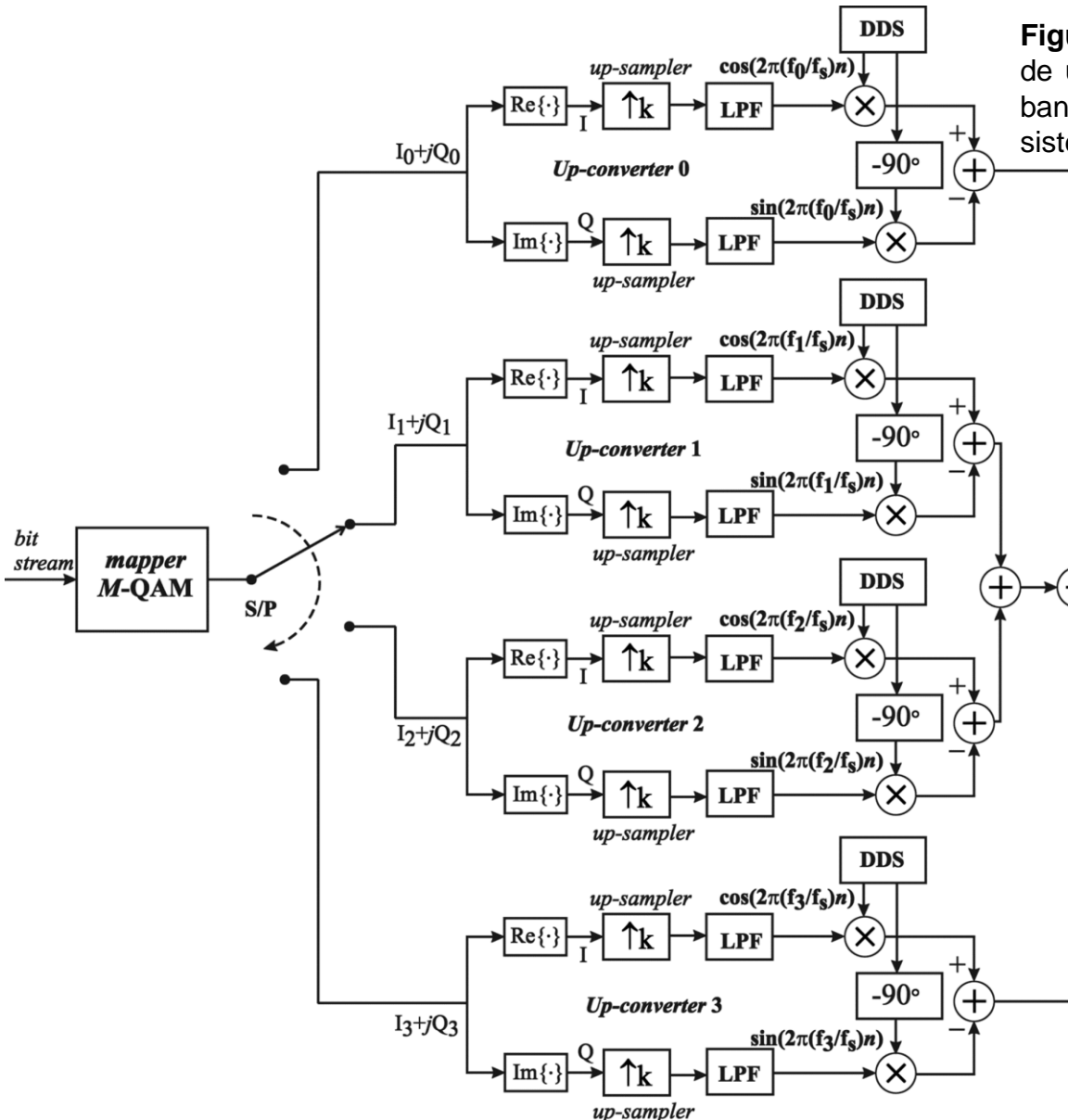


Ocorre que um filtro passabanda que aproxime um filtro ideal, i.e., um filtro com uma curva de resposta em frequência  $H(f)$  no formato de uma “caixa quadrada” perfeita conforme mostrado acima (i.e., *roll-off* zero), são filtros difíceis de implementar na prática. E, dado que uma curva  $H(f)$  com *roll-off* zero é irrealizável na prática, é necessário adotar uma banda de guarda entre sub-canais para minimizar a interferência entre os espectros de sub-canais adjacentes. Todos estes problemas, ainda adicionados à instabilidade de filtros analógicos face à variações ambientais (filtros digitais não apresentam esta instabilidade), levaram ao desenvolvimento de sistemas multiportadoras ortogonais, dando origem ao sistema OFDM.

No próximo slide veremos um exemplo que faz a análise de um sistema multiportadoras não-ortogonais. Os conceitos que veremos na solução do referido exemplo se aplicam a sistemas OFDM, que estudaremos adiante neste capítulo.

## Sistemas multiportadoras não-ortogonais

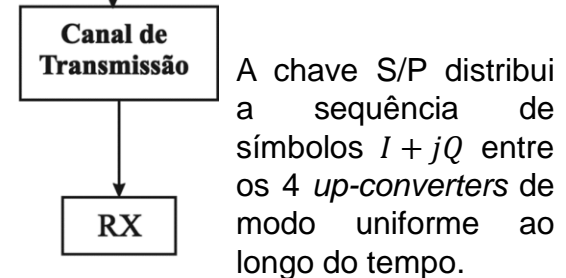
**Exemplo 1:** A Figura 1 abaixo mostra o diagrama simplificado do TX de um sistema multiportadora com 4 canais multiplexados em frequência, os quais são simultaneamente transmitidos através do bloco “Canal de Transmissão”.



**Figura 1:** Diagrama de blocos da etapa de modulação de um TX multiportadora de 4 canais, com largura de banda por canal  $W = 7.0$  MHz. A modulação deste sistema é 64-QAM.

A frequência central de cada canal é respectivamente  $f_0 = 3.5$  MHz,  $f_1 = 10.5$  MHz,  $f_2 = 17.5$  MHz e  $f_3 = 24.5$  MHz. O *bit stream* na entrada do *mapper*, proveniente do codificador de canal, é convertido em uma sequência de símbolos  $I + jQ$  na saída do *mapper*. A taxa de símbolos na saída do *mapper* é desconhecida e seu valor é *symbol\_rate\_mapper*.

A chave rotativa S/P (*serial-to-parallel*) na saída do *mapper* reduz a taxa de símbolos de um fator de 4.



A chave S/P distribui a sequência de símbolos  $I + jQ$  entre os 4 *up-converters* de modo uniforme ao longo do tempo.

O fator de *up-sampling* da sequência de símbolos que trafega em cada *up-convertor* é  $k=8$ .

## Sistemas multiportadoras não-ortogonais

Cada filtro LPF (*low pass filter*) na Figura 1 do slide anterior é um *shaping filter*. Estes filtros são do tipo *root-raised-cosine* e podem ser considerados ideais, com *roll-off*  $\alpha$  tendendo a zero ( $\alpha=0 \Rightarrow$  curva da função de transferência na forma de “caixa quadrada”).

O DDS (*direct digital synthesizer*) em cada *up-converter* gera portadoras respectivamente nas frequências  $f_0, f_1, f_2$  e  $f_3$ .

O DAC (*digital-to-analog converter*) converte em sinal analógico a soma das sequências de amostras geradas pelos *up-converters*, sendo  $f_s$  a frequência de amostragem do DAC.

O HPA (*high power amplifier*) amplifica o sinal analógico do DAC a um nível suficiente tal que, após ter trafegado no canal de transmissão, este sinal transmitido possa ser demodulado corretamente no RX.

O canal de transmissão não só atenua a amplitude e altera a fase do espectro do sinal transmitido por consequência do multipercurso no canal como também adiciona ruído branco gaussiano.

A situação operacional deste sistema é tal que a relação sinal-ruído medida respectivamente em cada canal é  $SNR_0 = 35.6\text{dB}$ ,  $SNR_1 = 21.57\text{dB}$ ,  $SNR_2 = 13.44\text{dB}$ ,  $SNR_3 = 8.05\text{dB}$ . Os 4 equalizadores de canal no RX (não detalhados na Figura 1, a qual detalha somente o TX) operam de modo a efetuar perfeitamente a desconvolução de cada um dos respectivos canais. Para a situação operacional dada, **pede-se**:

- (a) Determine a capacidade total conjunta  $C_{\text{Tot}}$  dos 4 canais com base na Capacidade de Canal (Teorema de Shannon - Hartley).
- (b) Determine a taxa de símbolos *symbol\_rate\_mapper* na saída do *mapper*.
- (c) Determine a taxa em bps do *bit stream* na entrada do *mapper* e verifique se a mesma excede  $C_{\text{Tot}}$  obtida em (a).
- (d) Determine numericamente qual(is) dos 4 canais excede(m) individualmente a(s) respectiva(s) Capacidade(s) de Canal.
- (e) Qual a consequência p/ o valor da BER (*bit error rate*) do *stream* de bits na saída do decodificador de canal do RX p/ as palavras binárias na saída do *de-mapper* correspondentes a símbolos IQ que trafegam nos canais determinados em (d)?
- (f) Para os canais em (d) que excedem a Capacidade de Canal determine  $M$  na modulação  $M$ -QAM a ser adotada nestes canais, em uma nova configuração operacional, tal que a respectiva Capacidade de Canal não seja excedida e tal que simultaneamente seja maximizada a taxa de transmissão do *bit stream* na entrada do *mapper*, sendo  $M \in \{4, 16, 32, 64, 128, 256\}$ .
- (g) Para a nova configuração operacional referida em (f), determine a taxa em bps do *bit stream* na entrada do *mapper*.
- (h) Determine a frequência de amostragem  $f_s$  do DAC.

## Sistemas multiportadoras não-ortogonais

**Solução:** Para a solução deste exemplo vamos usar o *script* Mathcad Exemplo1.xmcd disponível em [https://www.fccdecastro.com.br/ZIP/SCD2\\_C4\\_E1S6.zip](https://www.fccdecastro.com.br/ZIP/SCD2_C4_E1S6.zip), conforme mostrado a seguir.

Do enunciado é dado:

A banda passante de cada um dos 4 canais *passband* é  $W = 7\text{MHz}$ .

Índice $m$ de cada canal:	Frequência $f_m$ da $m$ -ésima portadora = frequência central do $m$ -ésimo canal de largura $W$ :	Relação sinal ruído $\text{SNR}_m$ em dB no $m$ -ésimo canal de largura $W$ :												
$m =$	$f_m =$	$\text{SNR}_m =$												
<table border="1"><tr><td>0</td></tr><tr><td>1</td></tr><tr><td>2</td></tr><tr><td>3</td></tr></table>	0	1	2	3	<table border="1"><tr><td>3.5</td></tr><tr><td>10.5</td></tr><tr><td>17.5</td></tr><tr><td>24.5</td></tr></table> ·MHz	3.5	10.5	17.5	24.5	<table border="1"><tr><td>35.6</td></tr><tr><td>21.57</td></tr><tr><td>13.44</td></tr><tr><td>8.05</td></tr></table> [dB]	35.6	21.57	13.44	8.05
0														
1														
2														
3														
3.5														
10.5														
17.5														
24.5														
35.6														
21.57														
13.44														
8.05														



## Sistemas multiportadoras não-ortogonais

(a) Conforme Teorema de Shannon-Hartley (ver slide 12 do Cap I.1 de Sistemas de Comunicação Digital II), temos que:

$$C_m := \frac{1}{\ln(2)} \cdot W \cdot \ln \left( 1 + 10^{\frac{\text{SNR}_m}{10}} \right)$$

$$C_m =$$

82.786
50.223
31.71
20.186

 ·MHz

→ Capacidade em [Mbps] do  $m$ -ésimo canal de largura  $W$  com centro na frequência da  $m$ -ésima portadora.

$$C_{\text{Tot}} := \sum_{m=0}^{N_p-1} C_m = 184.905 \cdot \text{MHz} \rightarrow \text{Capacidade total conjunta dos } N_p = 4 \text{ canais em [Mbps]} (= \text{capacidade de canal a ser obedecida pelo } \textit{bit stream} \text{ na entrada do } \textit{mapper p/} \text{ que a BER seja nula na saída do decodificador de canal do RX}).$$

**(b)** Do slide 23 do Cap I.2 de Sistemas de Comunicação Digital II temos que a relação entre a largura  $W$  de um canal *passband* e o *symbol rate* na entrada do filtro LPF *raised-cosine* de *roll-off*  $\alpha$  que efetua a contenção espectral para este canal é dada por:

$$W = \text{symbol\_rate} \cdot (1 + \alpha)$$

Do enunciado, os filtros LPF são *shaping filters* do tipo *root-raised-cosine* ideais com  $\alpha := 0$ . Isto faz com que o  $H(f)$  do filtro *root-raised-cosine* seja uma "caixa quadrada" no domínio frequência com banda passante igual à de um filtro *raised-cosine* com  $\alpha = 0$ . Daí, da equação acima, o *symbol rate* da sequência de símbolos IQ que trafega em cada filtro LPF da Figura 1 do enunciado é dada por:

$$\text{symbol\_rate} := \frac{W}{1 + \alpha} = 7 \cdot \text{MHz} \quad [\text{Msymb/s}]$$

Dado que, conforme enunciado, a chave rotativa S/P (*serial-to-parallel*) na saída do *mapper* reduz a taxa de símbolos de um fator de 4, temos que a taxa de símbolos na saída do *mapper* é:

$$\text{symbol\_rate\_mapper} := 4 \cdot \text{symbol\_rate} = 28 \cdot \text{MHz} \quad [\text{Msymb/s}] \rightarrow \text{taxa de símbolos na saída do } \textit{mapper} \\ \text{em mega símbolos por segundo}$$

**(c)** Do enunciado, a modulação em cada um dos 4 canais é 64-QAM  $\rightarrow$  6 bits por símbolo. Daí, a taxa do *bit stream* na entrada do *mapper* é:

$$\text{taxa\_bit\_stream} := 6 \cdot \text{symbol\_rate\_mapper} = 168 \cdot \text{MHz} \quad [\text{Mbps}] \rightarrow \text{note que a taxa no } \textit{bit stream} \text{ na entrada do } \textit{mapper} \\ \text{não excede a capacidade de canal total } C_{\text{Tot}} = 184.905 \text{ MHz} \\ [\text{Mbps}] \text{ do sistema.}$$

## Sistemas multiportadoras não-ortogonais

(d) Do enunciado, a modulação em cada um dos 4 canais é 64-QAM → 6 bits por símbolo. Cada canal transporta símbolos IQ a uma taxa  $\text{symbol\_rate} = 7 \text{ MHz} [\text{Msymb/s}]$ , já determinada em (b). Daí a taxa de bits que está sendo transportada por cada um dos 4 canais é :

$$\text{taxa\_de\_bit\_por\_canal} := 6 \text{symbol\_rate} = 42 \cdot \text{MHz} \quad [\text{Mbps}]$$

Da questão (a) temos:

$$C_m =$$

82.786
50.223
31.71
20.186

·MHz

→ Capacidade em [Mbps] do  $m$ -ésimo canal de largura  $W$  com centro na frequência da  $m$ -ésima portadora, conforme slide 12 do Cap I.1 de Sistemas de Comunicação Digital II.

## Sistemas multiportadoras não-ortogonais

Daí, os canais que excedem a respectiva Capacidade de Canal individual  $C_m$  são:

Nota: A expressão relacional ">" abaixo resulta  $1 \rightarrow V$  (excede  $C_m$ ) ou  $0 \rightarrow F$  (não-excede  $C_m$ )

$$\text{taxa\_de\_bit\_por\_canal} > \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

onde taxa\_de\_bit\_por\_canal = 42 MHz [Mbps] foi determinada em (d)

$$\text{e } \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 82.786 \\ 50.223 \\ 31.71 \\ 20.186 \end{pmatrix} \text{ MHz [Mbps] foi determinada em (a).}$$



## Sistemas multiportadoras não-ortogonais

**(e)** Para este(s) canal(is) que excede(m) a respectiva Capacidade de Canal  $C_m$ , a consequência será que a BER do *stream* de bits resultante do algoritmo de correção de erros do decodificador de canal de RX será forçosamente não nula para aquelas palavras binárias na saída do *de-mapper* que correspondem a símbolos IQ que trafegam neste(s) canal(is). Uma vez que a Capacidade de Canal  $C_m$  de qualquer um dos 4 canais seja excedida, a BER resultará não nula na saída do decodificador de canal do RX, independentemente do algoritmo de correção de erro que for adotado no codificador/decodificador de canal.

**(f)** O número de bits por símbolo para uma modulação  $M$ -QAM, onde, conforme o enunciado,  $M \in \{4, 16, 32, 64, 128, 256\}$  é:

$$M := \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \\ 32 \\ 64 \\ 128 \\ 256 \end{pmatrix} \rightarrow \text{BitsPorSímbolo} := \frac{1}{\ln(2)} \cdot \begin{pmatrix} \ln(M_0) \\ \ln(M_1) \\ \ln(M_2) \\ \ln(M_3) \\ \ln(M_4) \\ \ln(M_5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \quad [\text{bits/symb}]$$

O *symbol rate* é fixo em cada canal. O seu valor já calculado em (b) é  $\text{symbol\_rate} = 7 \cdot \text{MHz} [\text{Msymb/s}]$ .

## Sistemas multiportadoras não-ortogonais

Portanto, as taxas de bit em [Mbps] geradas pelo conjunto de  $M$  possíveis

$$\text{modulações } M\text{-QAM, com } M = \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \\ 32 \\ 64 \\ 128 \\ 256 \end{pmatrix}, \text{ são } \text{symbol\_rate} \cdot \text{BitsPorSimbolo} = \begin{pmatrix} 14 \\ 28 \\ 35 \\ 42 \\ 49 \\ 56 \end{pmatrix} \cdot \text{MHz [Mbps]}.$$

Adaptando a modulação dos canais de índice **2** e **3**, conforme resultados obtidos em (d), de modo que as respectivas Capacidades de Canal não sejam excedidas (semelhantemente a um sistema real que utiliza o conceito de *adaptive modulation* - ver [https://en.wikipedia.org/wiki/Link\\_adaptation](https://en.wikipedia.org/wiki/Link_adaptation)):

Alterando (i.e., adaptando) a modulação de 64-QAM p/ **16-QAM** no canal de índice **2** ( $4 \cdot \text{symbol\_rate} = 28 \cdot \text{MHz}$  [Msymb/s]) a capacidade de canal  $C_2 = 31.71 \cdot \text{MHz}$  [Msymb/s] não é excedida nesta nova configuração.

Alterando (i.e., adaptando) a modulação de 64-QAM p/ **4-QAM** no canal de índice **3** ( $2 \cdot \text{symbol\_rate} = 14 \cdot \text{MHz}$  [Msymb/s]) a capacidade de canal  $C_3 = 20.186 \text{MHz}$  [Msymb/s] não é excedida nesta nova configuração.

(g) A taxa em bps do *bit stream* na entrada do *mapper M-QAM* para a nova configuração operacional definida em (f), configuração obtida do ajuste adaptativo do *M* do *mapper*, resulta conforme abaixo:

$$\text{taxa\_bit\_stream} := \underbrace{6\text{symbol\_rate}}_{\text{wavy line}} + \underbrace{6\text{symbol\_rate}}_{\uparrow} + \underbrace{4\text{symbol\_rate}}_{\uparrow} + \underbrace{2\text{symbol\_rate}}_{\uparrow}$$

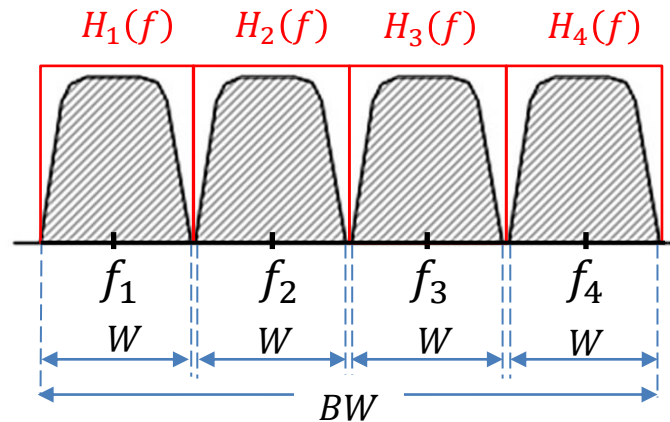
$$\text{taxa\_bit\_stream} = 126 \cdot \text{MHz}$$

(h)  $k := 8 \rightarrow$  fator de *up-sampling* dado no enunciado

Daí, a frequência de amostragem  $f_s$  do DAC é:  $f_s := k \cdot \text{symbol\_rate} = 56 \cdot \text{MHz}$  [MSa/s]

## Orthogonal Frequency Division Multiplexing (OFDM)

Consideremos um sistema *multicarrier* (multiportadora) como o do Exemplo 1 no slide 6, em que os símbolos IQs são uniformemente distribuídos entre  $N_p$  sub-canais de largura  $W$  e frequência central  $f_m$ , com  $m = 1, 2, \dots, N_p$ , sendo a contenção espectral de cada sub-canal efetuada por um *shaping filter* passa-baixa (bloco LPF na Figura 1 do slide 6). É desejável que o conjunto de sub-canais ocupe a menor banda espectral  $BW$  possível para efeito de maximizar a eficiência espectral do sistema. Para este fim, os sub-canais devem ser adjacentes no domínio frequência e devem ter a mínima separação espectral entre si, o que demanda que os *shaping filters* tenham função de transferência *passband* de corte abrupto, como, por exemplo, as funções de transferência  $H_1(f)$ ,  $H_2(f)$ ,  $H_3(f)$  e  $H_4(f)$  para um sistema com  $N_p = 4$  mostradas abaixo:



Ocorre que um filtro *passband* com  $H(f)$  de corte abrupto (a “caixa quadrada” em vermelho de largura  $W$  com centro em  $f_m$  na figura acima) demandam um número grande de coeficientes se implementados digitalmente, ocupando uma significativa área de silício nas implementações em FPGA, sem falar nos problemas do ruído de quantização numérica em filtros de muitos coeficientes (ver efeitos do *quantization noise* no âmbito de filtros digitais para áudio no artigo em <https://www.ti.com/lit/an/slyt375/slyt375.pdf> . E se implementados analogicamente, filtros *passband* de corte abrupto apresentam considerável sensibilidade às condições ambientais, principalmente à temperatura, resultando que o espectro de um canal sempre acaba interferindo no espectro do canal adjacente .

Para resolver este problema na contenção espectral de sistemas *multicarrier*, surgiu a proposição do sistema *multicarrier* OFDM (*Orthogonal Frequency Division Multiplex*), cujo princípio é obter a separação espectral entre sub-canais através da ortogonalidade entre as portadoras, conforme veremos na discussão que segue.



## Orthogonal Frequency Division Multiplexing (OFDM)

Consideremos um sistema *multicarrier* com  $N$  portadoras, sendo  $f_m$  a frequência da  $m$ -ésima portadora,  $m = 1, 2, \dots, N$ . A  $m$ -ésima portadora é gerada pelo DDS e modulada pelos símbolos IQ no respectivo *up-converter* (ver Figura 1 no slide 6), e a saída do  $m$ -ésimo *up-converter* é o sinal modulado do  $m$ -ésimo sub-canal de largura  $W$  e frequência central  $f_m$ , dado por

$$u_m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t + \theta_m), \quad m = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

Seja  $T$  o período do símbolo IQ no  $m$ -ésimo *up-converter* (ver Figura 1 no slide 6) que transporta a informação (informação = sequência de símbolos IQ) do  $m$ -ésimo sub-canal. Para que o sinal  $u_m(t)$  na saída do  $m$ -ésimo *up-converter* não interfira no sinal  $u_n(t)$  na saída do  $n$ -ésimo *up-converter*,  $n = 1, 2, \dots, N$ ,  $n \neq m$ , é necessário que  $u_m(t)$  e  $u_n(t)$  sejam ortogonais entre si, o que equivale à correlação entre  $u_m(t)$  e  $u_n(t)$  ser nula. Para tanto, é necessário que a condição abaixo seja atendida:

$$\int_0^T u_m(t) u_n(t) dt = \int_0^T A_m \cos(2\pi f_m t + \theta_m) A_n \cos(2\pi f_n t + \theta_n) dt = 0 \quad (2)$$

Para simplificar a análise, vamos considerar em (2) que  $f_m = f_1$  e que  $f_n = f_1 + k\Delta f$ , onde  $k = n - 1 = 1, 2, \dots, N - 1$ :

$$\int_0^T A_1 \cos(2\pi f_1 t + \theta_1) A_n \cos(2\pi(f_1 + k\Delta f)t + \theta_n) dt = 0 \quad (3)$$

A pergunta a ser respondida é: Para qual valor de  $\Delta f$  a equação (3) é satisfeita, assegurando que  $u_m(t)$  e  $u_n(t)$  são ortogonais entre si? Vamos experimentar em (3) o valor  $\Delta f = 1/T$ , conforme:

$$\int_0^T A_1 \cos(2\pi f_1 t + \theta_1) A_n \cos\left(2\pi\left(f_1 + \frac{k}{T}\right)t + \theta_n\right) dt = 0 \quad (4)$$

## Orthogonal Frequency Division Multiplexing (OFDM)

Resolvendo a integral em (4) obtemos:

$$\int_0^T A_1 \cos(2\pi f_1 t + \theta_1) A_n \cos\left(2\pi\left(f_1 + \frac{k}{T}\right)t + \theta_n\right) dt = \frac{A_1 A_n T [\sin(\theta_1 + \theta_n + 4\pi f_1 T) - \sin(\theta_1 + \theta_n)]}{8\pi f_1 T + 4\pi k} \quad (5)$$

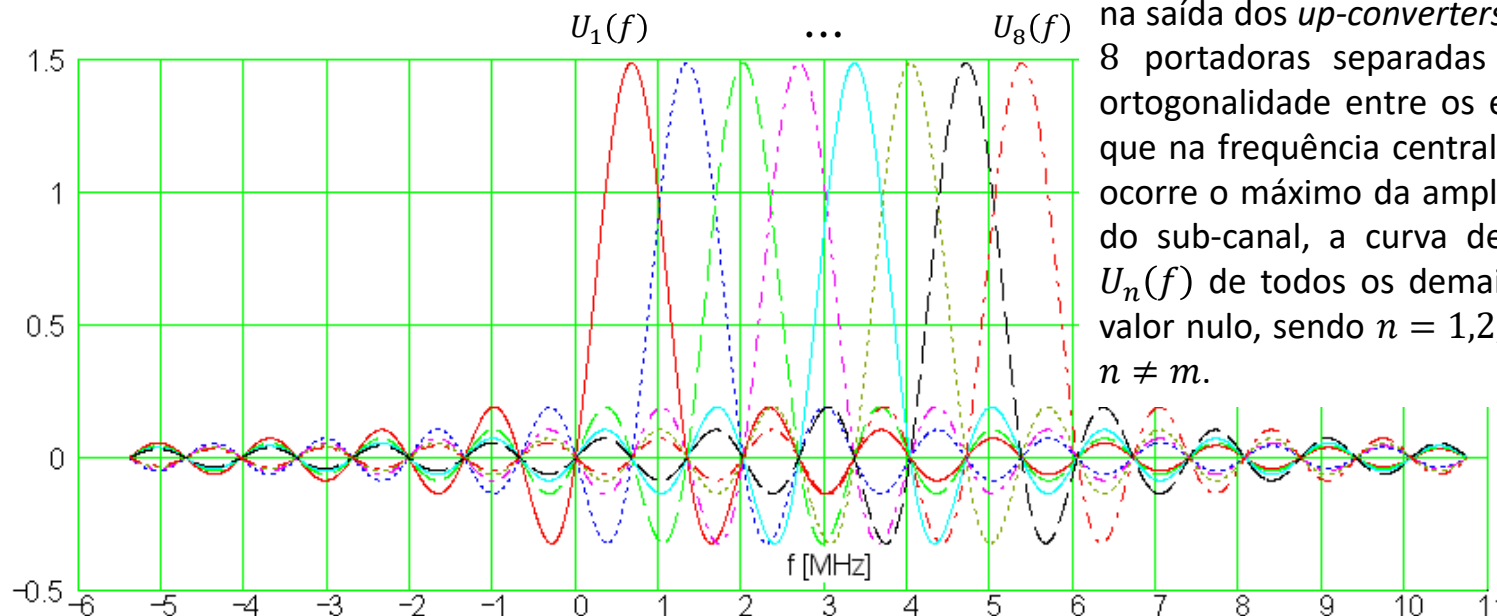
Para que (5) resulte zero, basta que seja obedecida a condição  $f_1 = 0.5 k/T$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , condição em que  $\sin(\theta_1 + \theta_n + 4\pi f_1 T) - \sin(\theta_1 + \theta_n) = 0$  para qualquer valor de  $k$  inteiro.

Portanto, as condições necessárias para que  $u_m(t)$  e  $u_n(t)$  sejam ortogonais entre si são:

- (1) A separação  $\Delta f$  entre as frequências  $f_m$  e  $f_{m+1}$  de duas portadoras adjacentes deve ser  $f_{m+1} - f_m = \Delta f = 1/T$ .
- (2) A frequência da portadora  $f_1$  de frequência mais baixa deve ser um múltiplo inteiro de  $\Delta f = 0.5/T$ , isto é,  $f_1 = 0.5 k/T$ ,  $k = 1, 2, \dots$ .

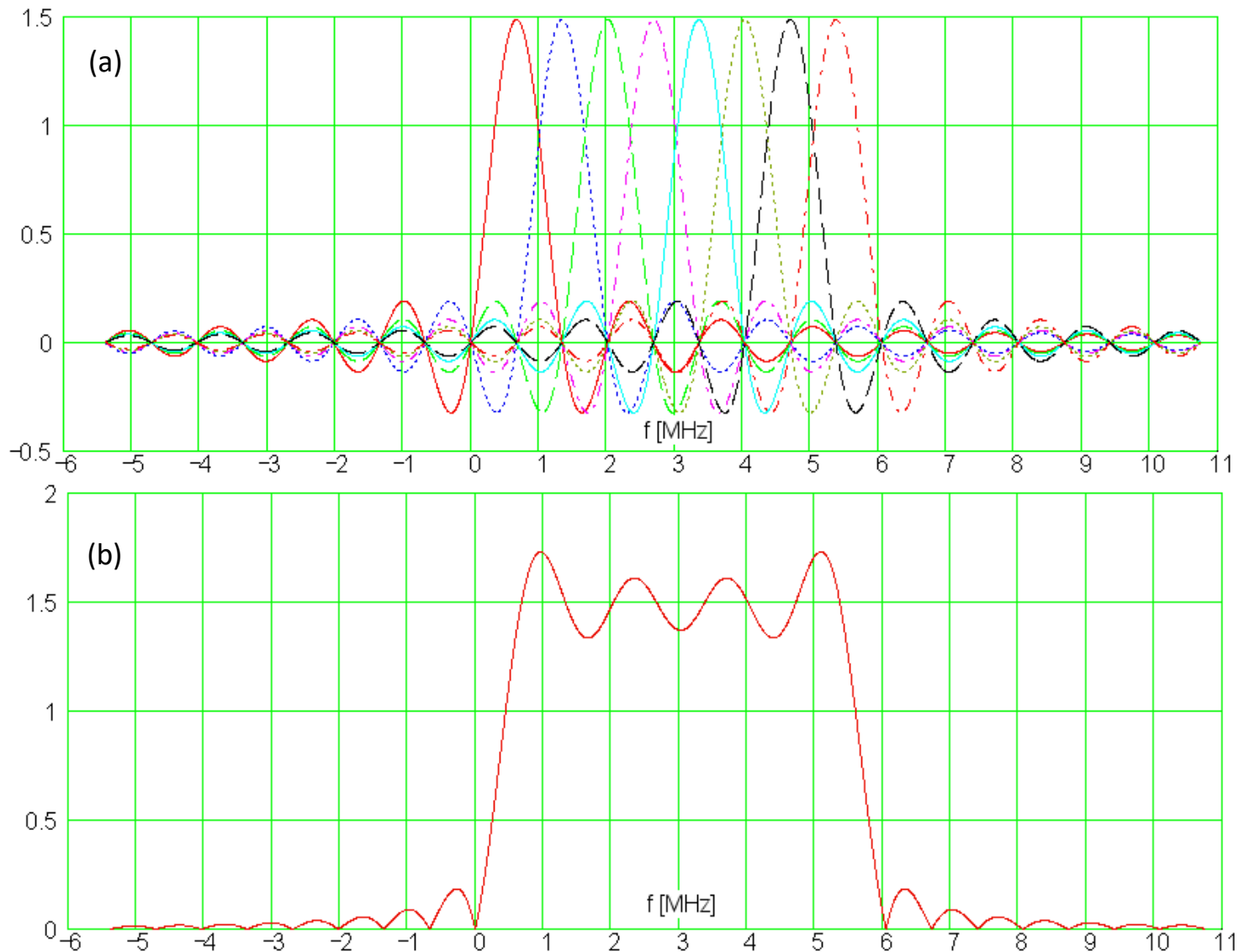
A condição (2) aparentemente poderia gerar alguma dificuldade para a definição da frequência central do canal formado pelo conjunto de  $N$  sub-canais, no entanto, conforme veremos no slide 24, na saída do modulador OFDM há um *up-converter* adicional que estabelece a frequência central do canal.

O gráfico ao lado mostra os respectivos espectros na saída dos *up-converters* de um sistema com  $N = 8$  portadoras separadas de  $\Delta f = 1/T$ . Note a ortogonalidade entre os espectros, na medida em que na frequência central de cada sub-canal, onde ocorre o máximo da amplitude do espectro  $U_m(f)$  do sub-canal, a curva de amplitude do espectro  $U_n(f)$  de todos os demais sub-canais apresentam valor nulo, sendo  $n = 1, 2, \dots, N$ ,  $m = 1, 2, \dots, N$  e  $n \neq m$ .



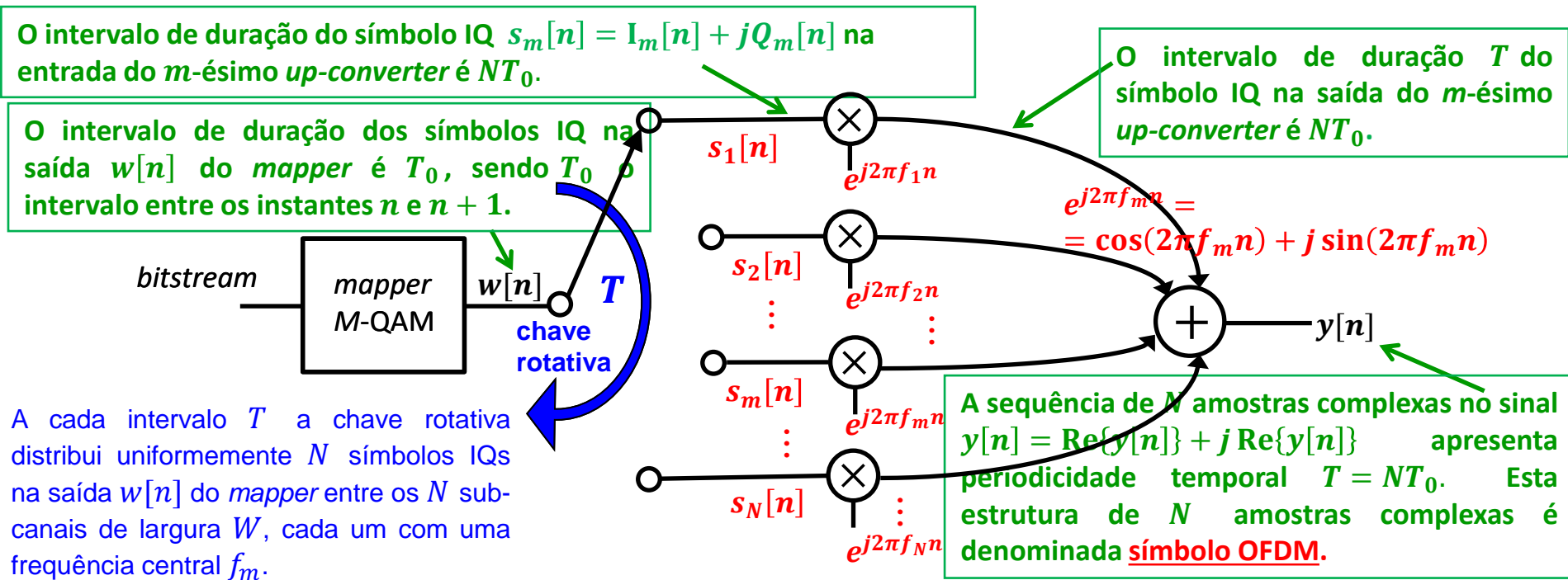
## Orthogonal Frequency Division Multiplexing (OFDM)

Como o hardware dos  $N = 8$  *up-converters* opera sincronizado entre si (operam sob mesmo *clock*), as curvas de amplitude dos espectros individuais de cada *up-converter* mostradas em (a) se superpõem no somador antes do DAC (ver Figura 1 no slide 6), de modo que o sinal na saída do modulador OFDM terá a magnitude do espectro mostrado em (b) :



## Orthogonal Frequency Division Multiplexing (OFDM)

Como o modulador OFDM é um algoritmo usualmente descrito em linguagem VHDL ou em linguagem C, implementado através de técnicas de DSP em uma FPGA ou em um GPP, podemos simplificar o processo de modulação em cada um dos  $N$  sub-canais tornando os ramos I e Q de cada respectivo  $m$ -ésimo *up-converter* como sendo uma única variável complexa  $I + jQ$ . Como simplificação adicional, vamos substituir a LUT (*look up table*) do DDS que gera as duas  $m$ -ésimas portadoras defasadas de  $90^\circ$  para os ramos I e Q por uma LUT que gera os valores da função complexa  $e^{j2\pi f_m n} = \cos(2\pi f_m n) + j \sin(2\pi f_m n)$ , com  $m = 1, 2, \dots, N$ , e cujo domínio é o tempo discreto  $n$ , conforme mostra a figura abaixo.



A cada intervalo  $T$  a chave rotativa distribui uniformemente  $N$  símbolos IQs na saída  $w[n]$  do *mapper* entre os  $N$  sub-canais de largura  $W$ , cada um com uma frequência central  $f_m$ .

Portanto a chave entrega símbolos IQs com uma velocidade  $N/T$  [símbolos/s] e com periodicidade  $T$ [s]. Dado que o espaçamento entre portadoras é  $\Delta f = 1/T$ , então a banda  $BW$  ocupada pelo espectro dos  $N$  sub-canais presentes no sinal  $y[n]$  na saída do modulador é  $BW = N \cdot W = N \cdot \Delta f = N/T$ . O parâmetro que quantifica a ação da chave “entregar símbolos IQs com uma velocidade  $N/T$ ” tem a mesma unidade [símbolos/s] do parâmetro SymbolRate de sistemas *single carrier*, que estudamos em capítulos anteriores. No âmbito de sistemas OFDM, este parâmetro equivalente ao parâmetro SymbolRate recebe o nome de “**clock da FFT**”, porque conforme veremos no slide 23, o conjunto de  $N$  *down-converters* no RX é implementado através de uma FFT (*Fast Fourier Transform*) de  $N$  pontos:

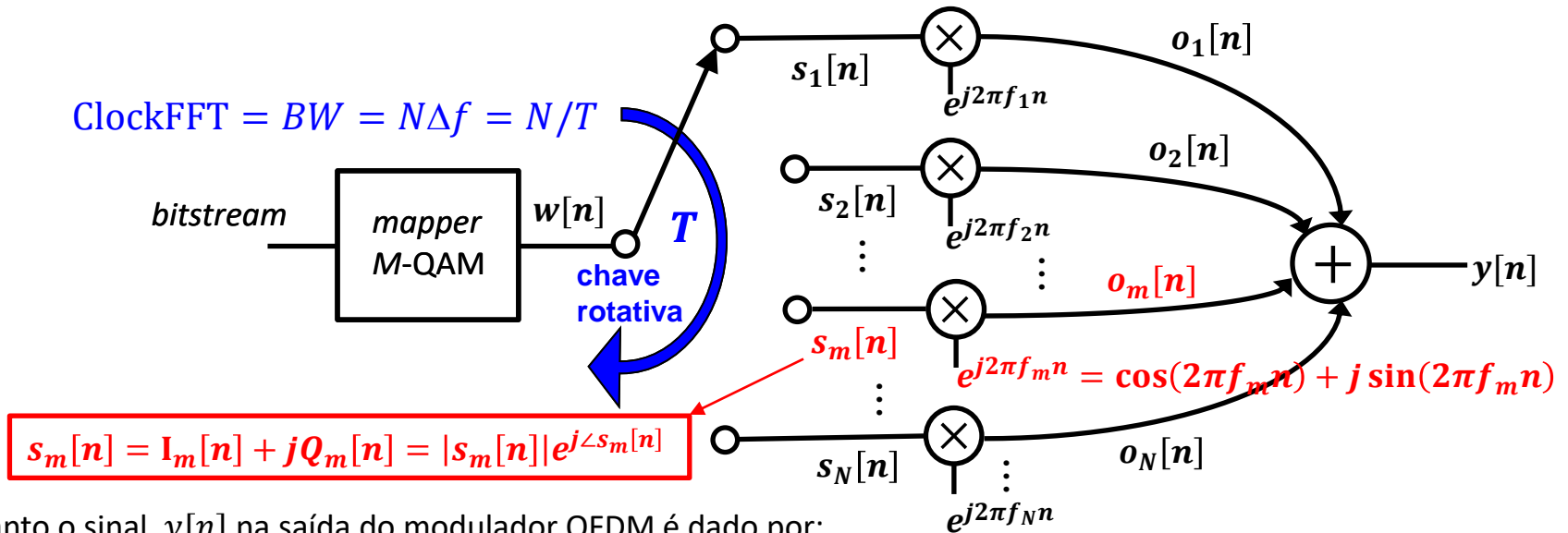
$$\text{ClockFFT} = BW = N \cdot \Delta f = N/T \quad (6)$$



## Orthogonal Frequency Division Multiplexing (OFDM)

Note na figura abaixo que a saída  $o_m[n]$  do  $m$ -ésimo *up-converter*,  $m = 1, 2, \dots, N$ , é dada por:

$$\begin{aligned} o_m[n] &= s_m[n]e^{j2\pi f_m n} = |s_m[n]|e^{j\angle s_m[n]}e^{j2\pi f_m n} = |s_m[n]|e^{j(2\pi f_m n + \angle s_m[n])} = \\ &= |s_m[n]| \cos(2\pi f_m n + \angle s_m[n]) + j|s_m[n]| \sin(2\pi f_m n + \angle s_m[n]) \end{aligned} \quad (7)$$



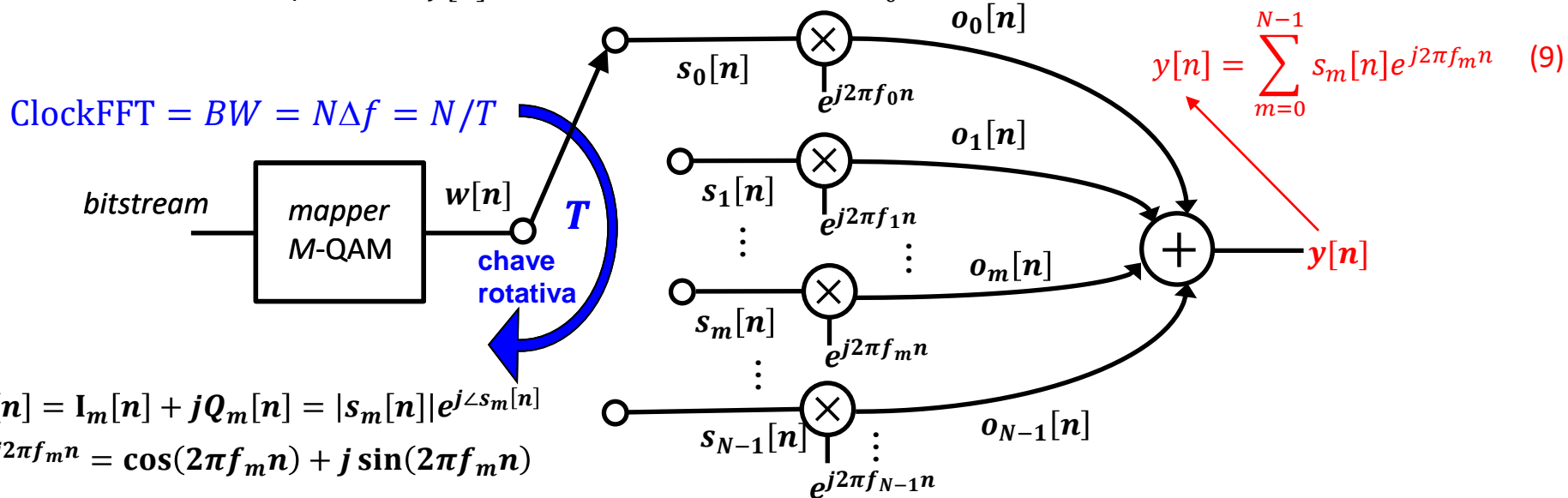
Portanto o sinal  $y[n]$  na saída do modulador OFDM é dado por:

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{m=1}^N o_m[n] = \sum_{m=1}^N s_m[n]e^{j2\pi f_m n} = \sum_{m=1}^N |s_m[n]|e^{j(2\pi f_m n + \angle s_m[n])} = \\ &= \sum_{m=1}^N |s_m[n]| \cos(2\pi f_m n + \angle s_m[n]) + j \sum_{m=1}^N |s_m[n]| \sin(2\pi f_m n + \angle s_m[n]) \end{aligned} \quad (8)$$

onde  $n$  é o domínio tempo discreto das sequências  $s_m[n]$ ,  $o_m[n]$  e  $y[n]$ . Conforme vimos no slide anterior, o intervalo de duração dos símbolos IQ na saída  $w[n]$  do *mapper* é  $T_0$  e na entrada  $s_m[n]$  e na saída  $o_m[n]$  do  $m$ -ésimo *up-converter* a duração dos símbolos IQ é  $NT_0$ . **Como o intervalo de tempo entre as amostras  $n$  e  $n + 1$  é  $T_0$ , isto implica que o valor de  $s_m[n]$  é mantido constante por  $N$  amostras na entrada do  $m$ -ésimo *up-converter* a partir do início da rotação da chave. Note que, uma vez transcorrido um intervalo de  $N$  amostras no tempo discreto  $n$  a partir do início da rotação da chave, o resultado na saída  $y[n]$  é uma sequência de  $N$  amostras complexas que constitui o símbolo OFDM, de duração  $T = NT_0$ .**

## Orthogonal Frequency Division Multiplexing (OFDM)

Portanto, a geração do sinal OFDM na saída  $y[n]$  se dá resumidamente conforme segue: A chave rotativa paraleliza a sequência de símbolos IQ de duração  $T_0$  na saída  $w[n]$  do *mapper* distribuindo  $N$  símbolos desta sequência nas entradas dos respectivos  $N$  *upconverters* conforme figura abaixo, e a seguir a chave volta para a posição inicial. O valor  $s_m[n]$  do símbolo IQ armazenado na entrada do  $m$ -ésimo *up-converter* é mantido constante durante  $N$  amostras no tempo discreto  $n$ , i.e, durante o intervalo de tempo  $T = NT_0$ . Uma vez definido e armazenado o valor  $s_m[n]$  na entrada de todos os  $m$ -ésimos *up-converters*, sendo  $m = 0, 1, \dots, N - 1$ , a equação (9) é executada para  $n = 0, 1, \dots, N - 1$  gerando em  $y[n]$  uma sequência de  $N$  amostras complexas, que constituem um símbolo OFDM. O processo se repete gerando um novo símbolo OFDM de  $N$  amostras complexas em  $y[n]$  a cada cada intervalo  $T = NT_0$ .



Dado que o valor  $s_m[n]$  do símbolo IQ armazenado na entrada do  $m$ -ésimo *up-converter* de frequência  $f_m$  é mantido constante durante o intervalo de  $N$  amostras no tempo discreto  $n$ , então podemos considerar que durante este intervalo fica estabelecida uma sequência  $S[m] = s_m$  de símbolos IQ no domínio frequência discreta  $m$ . Neste contexto, a equação (9) é interpretada como a IDFT (*Inverse Discrete Fourier Transform*) da sequência  $S[m]$  de  $N$  amostras de valor  $I + jQ$  no domínio frequência discreto  $m$ , sendo  $m = 0, 1, \dots, N - 1$ , e cujo resultado é a sequência  $y[n]$  no domínio tempo discreto  $n$ , sendo  $n = 0, 1, \dots, N - 1$ :

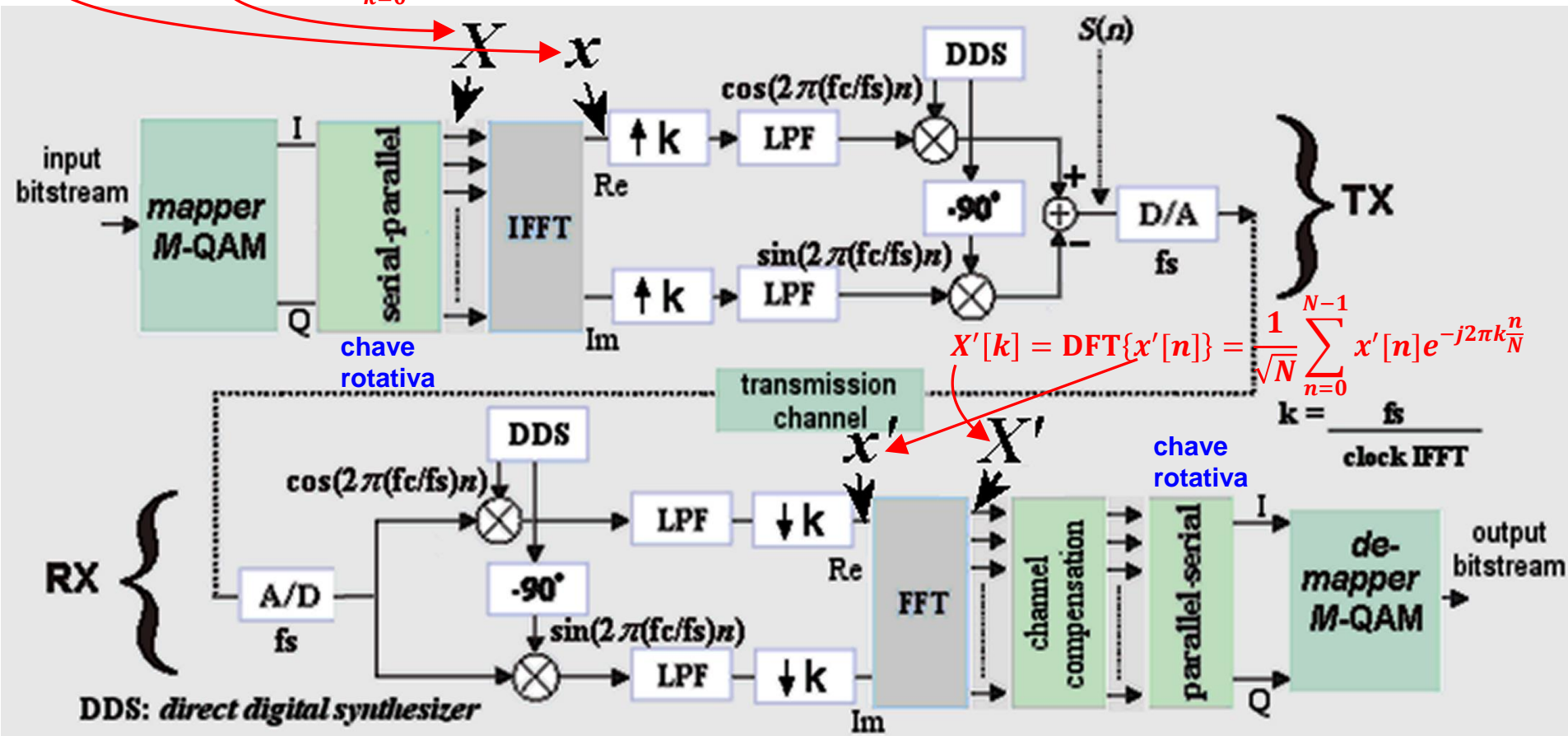
$$y[n] = \text{IDFT}\{S[m]\} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{N-1} S[m] e^{j2\pi n \frac{m}{N}} \quad (10)$$

## Orthogonal Frequency Division Multiplexing (OFDM)

Os conceitos discutidos nos slides anteriores encontram-se resumidos na figura abaixo, em que é mostrado o diagrama de blocos simplificado de um sistema TX-RX multicarrier OFDM com  $N$  portadoras moduladas por símbolos IQ  $M$ -QAM. O TX implementa a IDFT referida na equação (10) através de uma IFFT (*Inverse Fast Fourier Transform*) de  $N$  pontos. A cada símbolo OFDM  $x'[n]$  recebido o RX recupera os  $N$  símbolos IQ  $X[k]$  transmitidos pelo TX na saída  $X'[k]$  do bloco FFT (*Fast Fourier Transform*) do RX (ver [https://en.wikipedia.org/wiki/Fast\\_Fourier\\_transform](https://en.wikipedia.org/wiki/Fast_Fourier_transform)), que implementa a operação  $X'[k] = \text{DFT}\{x'[n]\}$ , também de  $N$  pontos. Se o bloco "transmission channel" não adicionar ruído ao sinal transmitido e, além, disto, a ISI (*Inter Symbol Interference*) for nula por não haver multipercursos no canal, então  $X'[k]$  recebido no RX é igual a  $X[k]$  transmitido pelo TX.

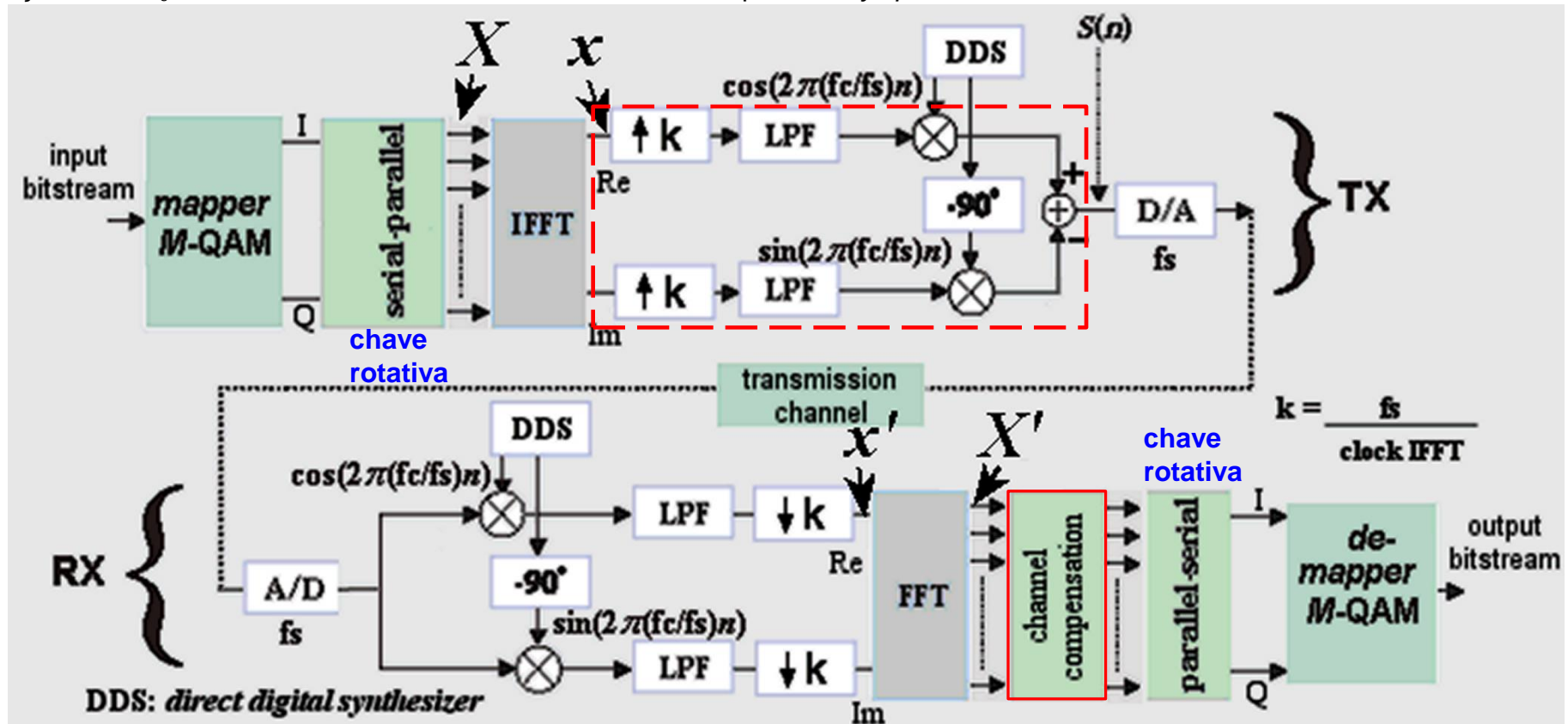
$$x[n] = \text{IDFT}\{X[k]\} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi n \frac{k}{N}}$$

$$X'[k] = \text{DFT}\{x'[n]\} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x'[n] e^{-j2\pi n \frac{k}{N}}$$



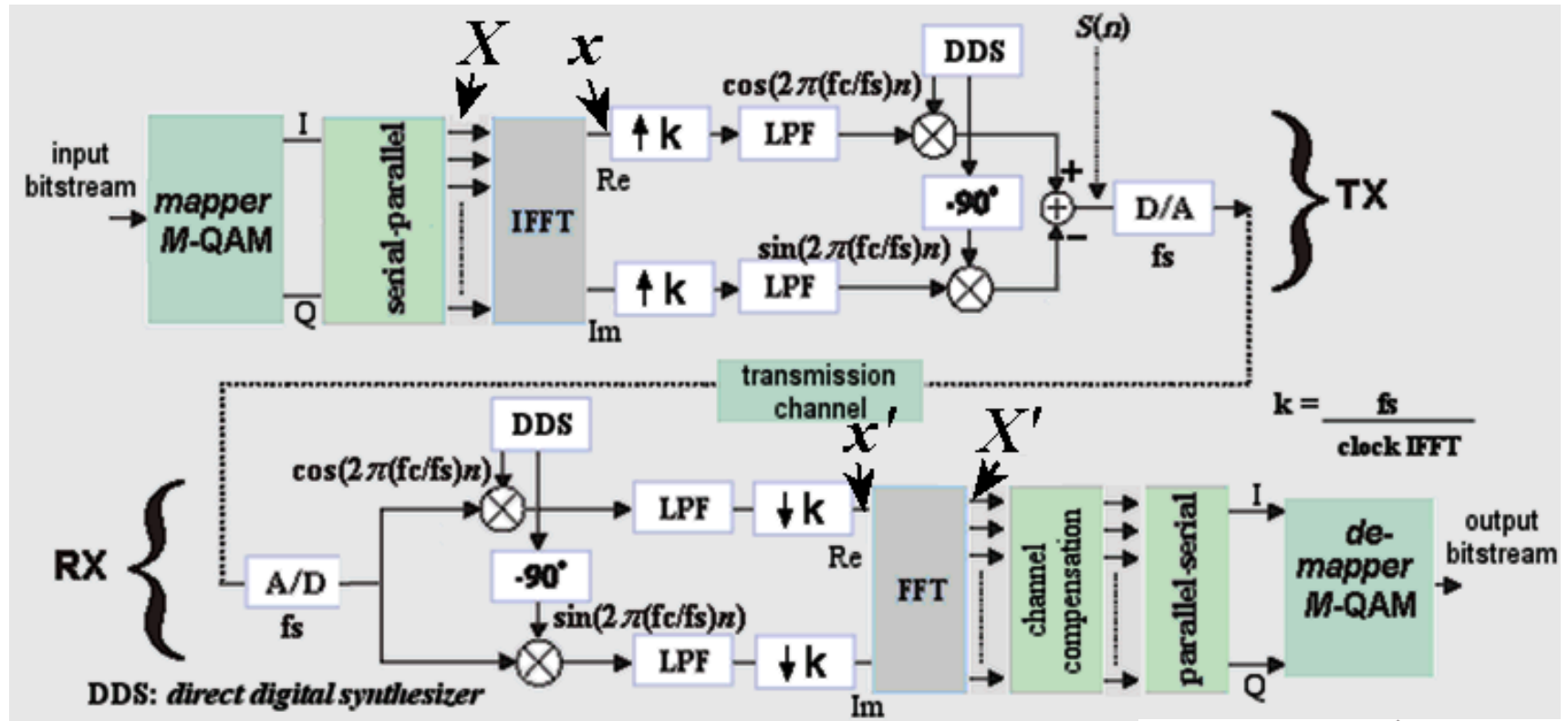
## Orthogonal Frequency Division Multiplexing (OFDM)

Note na figura abaixo que a sequência complexa  $x[n] = \text{Re}\{x[n]\} + j \text{Im}\{x[n]\}$  na saída da IFFT do TX tem o seu espectro transladado para a frequência central  $f_c$  do canal através do bloco tracejado em **vermelho na figura** abaixo, que consiste de um *up-sampler*  $\uparrow k$  seguido de um filtro LPF e de um *up-converter* cuja frequência do DDS é  $f_c$ . O filtro LPF faz a contenção espectral dos pulsos em  $\text{Re}\{x[n]\}$  e  $\text{Im}\{x[n]\}$ , e pode ser um filtro *root-raised-cosine* referido ao intervalo de símbolo IQ  $T_0 = 1/\text{ClockFFT}$  (ver equação (6) no slide 20). Note também que o processo de soma realizado pela IDFT é uma média que estabelece uma janela de filtragem no domínio frequência e que auxilia na contenção espectral. A sequência  $\text{Re}\{x[n]\}$  é atribuída ao ramo I do *up-converter* e a sequência  $\text{Im}\{x[n]\}$  é atribuída ao ramo Q do *up-converter*. O bloco “channel compensation” na saída da FFT do RX consiste de um conjunto de  $N$  coeficientes complexos, um para cada sub-canal, cada coeficiente fazendo a compensação do valor da função da transferência do canal na frequência  $f_k$  do  $k$ -ésimo sub-canal,  $k = 0, 1, \dots, N - 1$ , conforme veremos nos slides 29 a 40. Cada um destes coeficientes complexos pode ser considerado um equalizador de um único coeficiente ( $L = 1$ ), visto que a duração  $T = NT_0$  do símbolo OFDM é usualmente muito maior que o *delay spread* do canal, conforme discutido no slide 3.



## Orthogonal Frequency Division Multiplexing (OFDM)

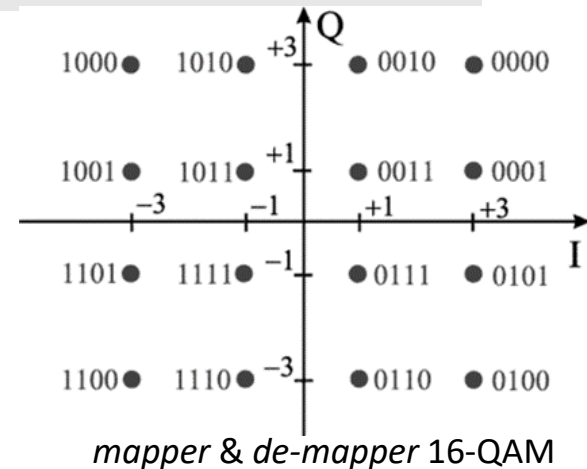
**Exemplo 2:** A figura abaixo mostra a etapa de modulação de um sistema de comunicação digital OFDM 16-QAM:



**Figura 2:** Etapa de modulação de um sistema de comunicação digital OFDM 16-QAM.

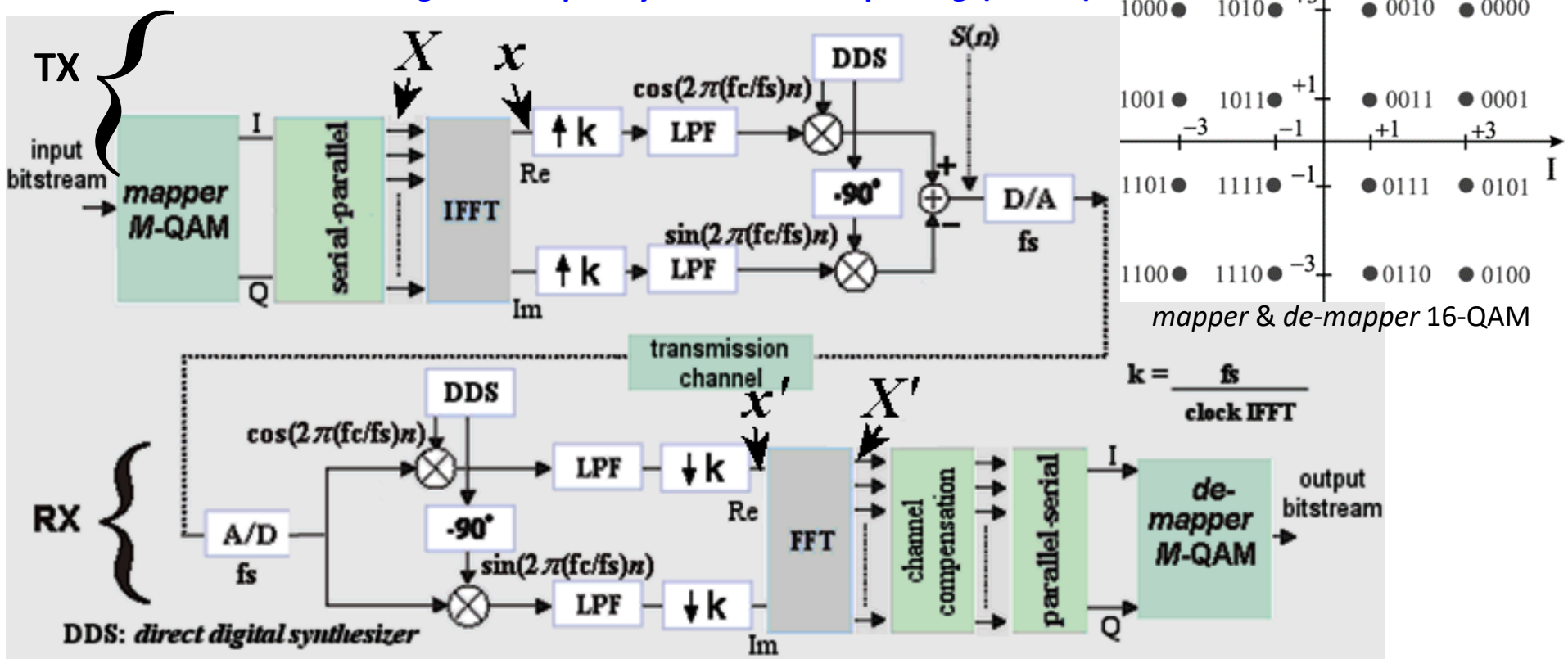
Note que o *buffer* de entrada da IFFT no TX armazena valores  $X = I + jQ$  da constelação de referência do *mapper*. Da mesma forma, se não houver degradação de sinal no canal de transmissão por ação do multipercurso e do ruído, o *buffer* de saída da FFT no RX armazena valores  $X' = I' + jQ'$  da constelação de referência do *de-mapper*.

Note ainda que a saída  $x$  da IFFT no TX e a entrada  $x'$  da FFT no RX são valores complexos  $Re + jIm$  mas que **não são os valores da constelação de referência 16-QAM.**





## Orthogonal Frequency Division Multiplexing (OFDM)



O bloco IFFT no TX executa a operação  $x[n] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi n \frac{k}{N}}$ , onde  $X$  pode assumir qualquer um dos valores  $I + jQ$  da constelação do *mapper* 16-QAM, de acordo com a palavra binária de 4 bits a ser transmitida.

O bloco FFT no RX executa a operação inversa da executada no TX, isto é,  $X'[k] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x'[n] e^{-j2\pi k \frac{n}{N}}$ , e, se não ocorrer degradação de sinal no bloco “transmission channel”, o *buffer* de saída  $X'$  da FFT recupera os valores  $I + jQ$  originais armazenados no *buffer* de entrada  $X$  da IFFT.

### Pede-se:

**(a)** Sabendo que o sistema utiliza  $N = 8$  portadoras e que em um determinado instante o *buffer* de entrada  $X$  da IFFT do TX armazena os valores dados pelo vetor  $\underline{X} = [X_1 \ X_2 \ X_3 \ X_4 \ X_5 \ X_6 \ X_7 \ X_8]^T$ , resultantes do *input bitstream*  $B = \{00100011011111001011011100111111\}$ , determine os valores resultantes no *buffer* de saída  $x$  da IFFT definido pelo vetor  $\underline{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7 \ x_8]^T$ .



## Orthogonal Frequency Division Multiplexing (OFDM)

**(b)** A partir do resultado obtido em (a) comprove numericamente que o bloco FFT no RX recupera em seu *buffer* de saída  $X'$  os valores dos símbolos  $I + jQ$  originais no *buffer* de entrada  $X$  da IFFT do TX. Considere que os valores resultantes no *buffer* de saída da IFFT definido pelo vetor  $\underline{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7 \ x_8]^T$  são transmitidos do TX ao RX através do canal de transmissão sem sofrer qualquer degradação por ruído ou por multipercurso no canal.

**Solução:** Para a solução deste exemplo vamos usar o *script* Mathcad Exemplo2.xmcd disponível em [https://www.fccdecastro.com.br/ZIP/SCD2\\_C4\\_E2S25.zip](https://www.fccdecastro.com.br/ZIP/SCD2_C4_E2S25.zip), conforme mostrado a seguir.

**(a)** Lendo o arquivo "IQStream.txt" contendo os símbolos IQ gerados pelo script "IQ&BitstreamGenerator.xmcd":

$\text{IQStream} := \text{READPRN}(\text{"IQStream.txt"})$

$X := \text{IQStream}^{\langle 0 \rangle} + j \cdot \text{IQStream}^{\langle 1 \rangle}$

$$X = \begin{pmatrix} 1 + 3i \\ 1 + i \\ 1 - i \\ -3 - 3i \\ -1 + i \\ 1 - i \\ 1 + i \\ -1 - i \end{pmatrix}$$

→ Símbolos  $X = I + jQ$  armazenados no *buffer* de entrada da IFFT no TX, conforme mostrado na Figura 2 do enunciado. Os referidos símbolos  $X = I + jQ$  são gerados no *mapper* do TX pelo *input bitstream* B dado no enunciado.

$\underline{N} := \text{length}(X) \quad N = 8 \quad \rightarrow \text{Número de portadoras}$

# Orthogonal Frequency Division Multiplexing (OFDM)

A operação IFFT no TX é dada por

$$n := 0..N - 1$$

$$x_n := \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \left( X_k \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot n \cdot \frac{k}{N}} \right) \quad \rightarrow x[n] = \text{IFFT}\{X[k]\}$$

resultando na seguinte seqüência de números complexos  $x_n$  no *buffer* de saída da IFFT no TX:

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.914 + 1.207i \\ -2.121 + 3.536i \\ -0.5 - 0.793i \\ 1.414 + 2.828i \\ 0.914 + 0.207i \\ 0.707 - 0.707i \\ 0.5 + 2.207i \end{pmatrix}$$

# Orthogonal Frequency Division Multiplexing (OFDM)

(b) A operação FFT no RX é dada por (onde, abaixo,  $x_{-}$  representa  $x'$  e  $X_{-}$  representa  $X'$ ):

$x_{-} := x \rightarrow$  a atribuição  $x' = x$  implica que os valores resultantes no buffer de saída da IFFT definido pelo vetor  $x$  são transmitidos do TX ao RX através do canal de transmissão sem sofrer qualquer degradação por ruído ou por multipercurso no canal, conforme estabelecido no enunciado.

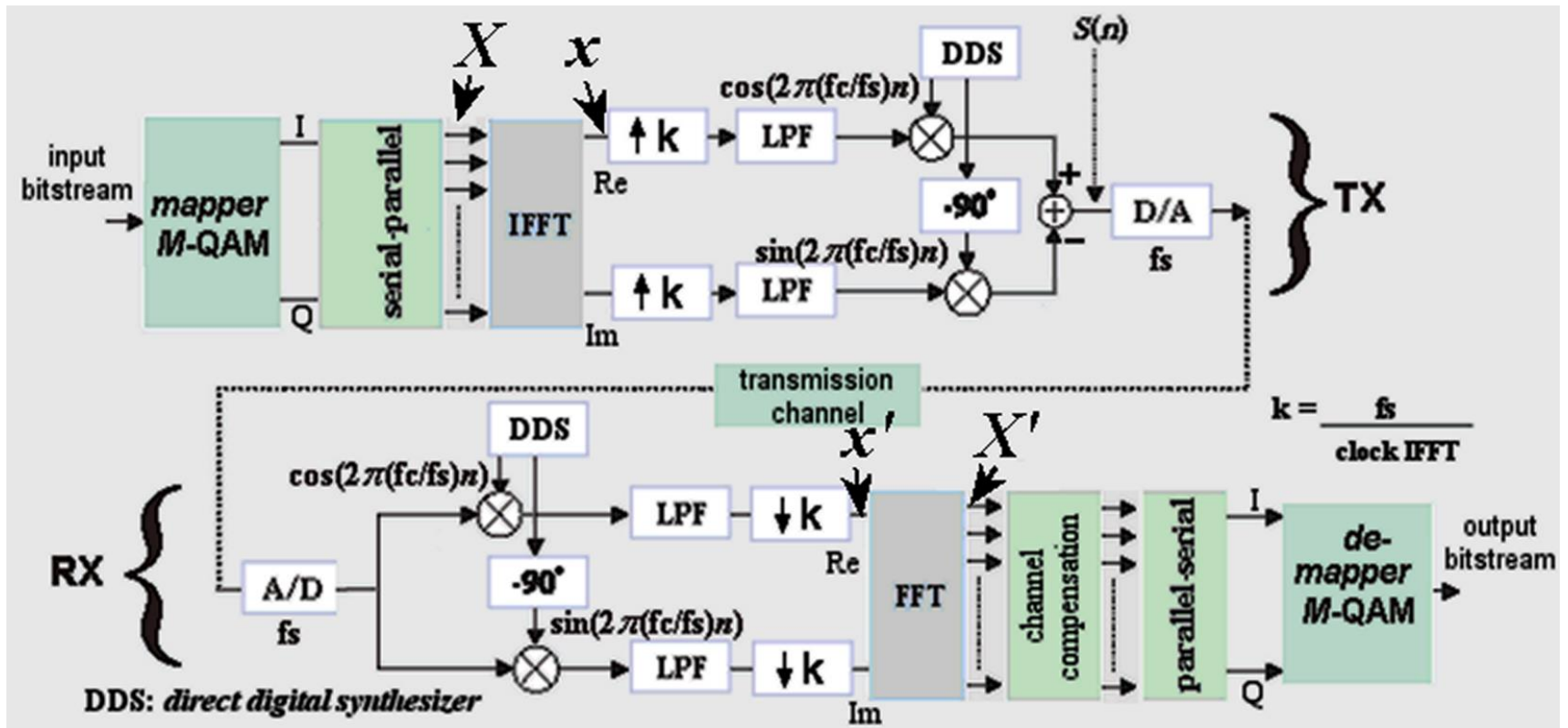
$$k := 0..N-1$$

$$X_{-k} := \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \left( x_{-n} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot \frac{n}{N}} \right) \rightarrow X'[k] = \text{FFT}\{x'[n]\}$$

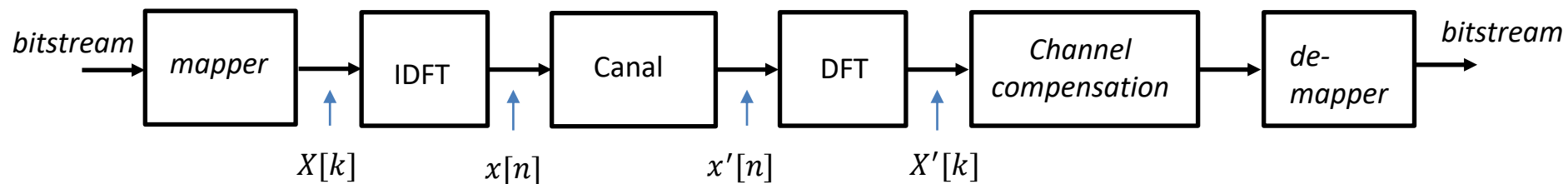
$$X_{-} = \begin{pmatrix} 1 + 3i \\ 1 + i \\ 1 - i \\ -3 - 3i \\ -1 + i \\ 1 - i \\ 1 + i \\ -1 - i \end{pmatrix} \rightarrow X - X_{-} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \underline{0} \Rightarrow \text{OK! Isto comprova que a sequência } X \text{ de símbolos IQ no } \textit{buffer} \text{ de entrada da IFFT no TX é igual à sequência } X' (X_{-}) \text{ de símbolos IQ no } \textit{buffer} \text{ de saída da FFT no RX, e que, portanto, os símbolos IQ foram recuperados corretamente na saída da FFT do RX.}$$

## Compensação de canal (*channel compensation*):

Consideremos o diagrama de blocos de um sistema TX-RX *multicarrier* OFDM com  $N$  portadoras moduladas por símbolos IQ  $M$ -QAM mostrado abaixo:



Para efeito de facilitar a análise que segue, vamos simplificar o diagrama de blocos acima para a seguinte forma equivalente em banda-base:

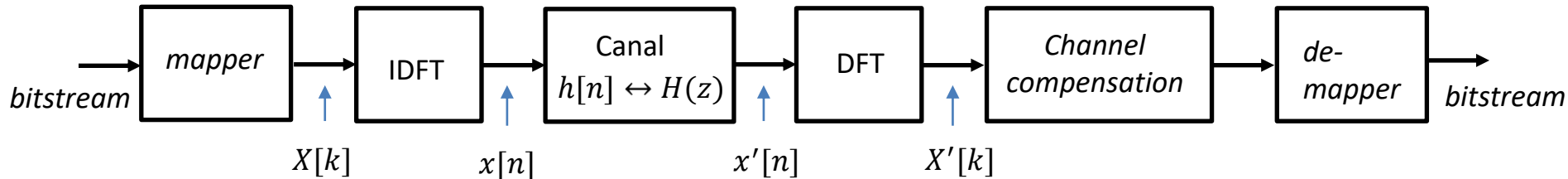


## Compensação de canal (*channel compensation*):

O canal apresenta uma resposta ao impulso  $h[n]$  (medida através do *delay profile* do canal – ver slides 17 a 20 do Cap II.1) e uma função de transferência  $H(z)$  no domínio frequência  $z$  dada por

$$H(z) = Z\{h[n]\} \quad (11)$$

onde  $Z\{\cdot\}$  é o operador Transformada  $Z$  (ver [http://www.fccdecastro.com.br/pdf/SS\\_aula23a26\\_25062020.pdf](http://www.fccdecastro.com.br/pdf/SS_aula23a26_25062020.pdf)).



A saída do canal é dada pela convolução da sequência de amostras complexas  $x[n] = \text{Re}\{x[n]\} + j \text{Im}\{x[n]\}$  na saída da IDFT com a resposta ao impulso  $h[n]$  do canal:

$$x'[n] = x[n] * h[n] \quad (12)$$

Portanto a saída da DFT no RX é dada por:

$$X'[k] = \text{DFT}\{x'[n]\} = \text{DFT}\{x[n] * h[n]\} = \text{DFT}\{x[n]\} \text{DFT}\{h[n]\} = \text{DFT}\{\text{IDFT}\{X[k]\}\} \text{DFT}\{h[n]\} = X[k]H[k] \quad (13)$$

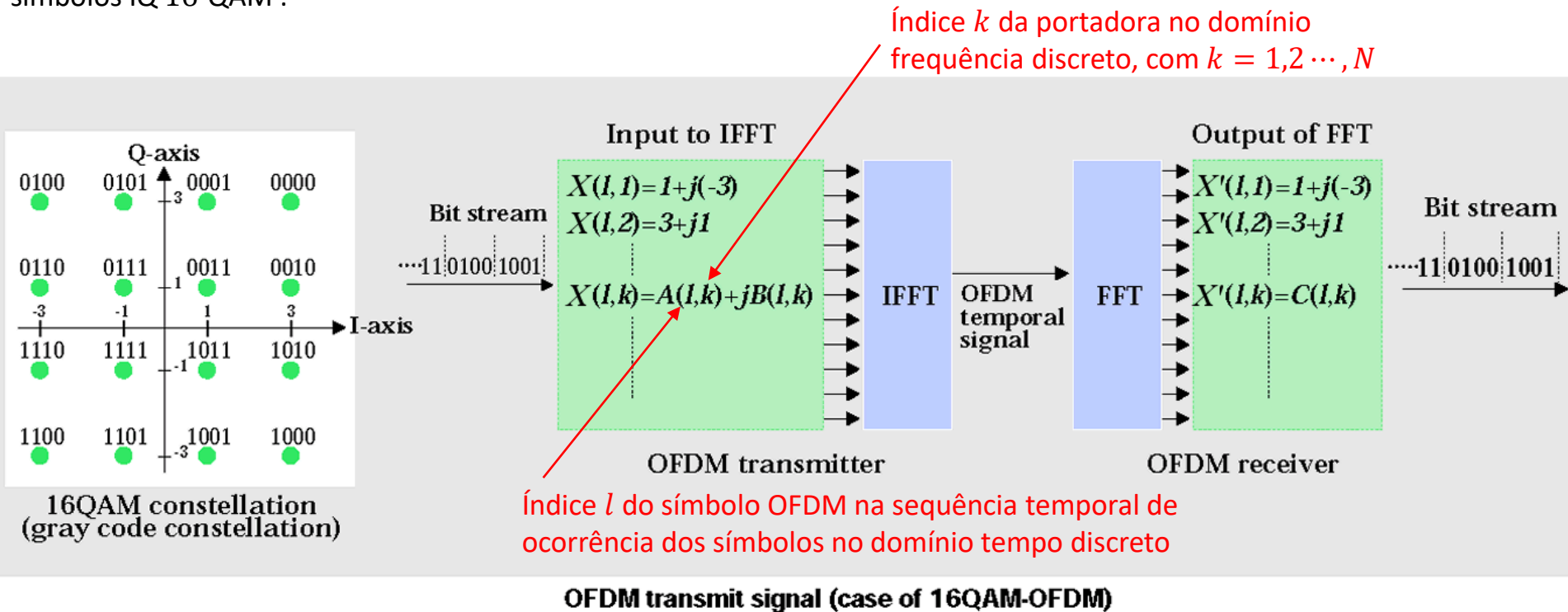
Note em (13) que  $H[k] = \text{DFT}\{h[n]\}$  é a Transformada  $Z$   $H(z) = Z\{h[n]\}$  em (11) calculada p/  $z = 1e^{j\theta}$  sobre o círculo de raio unitário em pontos de amostragem que são separados por um intervalo de  $2\pi/N$ , onde  $N$  é o número de pontos da DFT (= número de portadoras do sistema OFDM) – ver [http://www.fccdecastro.com.br/pdf/SS\\_aula27a29\\_06072020.pdf](http://www.fccdecastro.com.br/pdf/SS_aula27a29_06072020.pdf).

Note também de (13) que, se não há multipercurso no canal então não há ecos, e conseqüentemente a resposta ao impulso do canal é um único impulso  $\delta[n]$ . Nesta situação (13) é reescrita como:

$$X'[k] = \text{DFT}\{x'[n]\} = \text{DFT}\{x[n] * \delta[n]\} = \text{DFT}\{x[n]\} \text{DFT}\{\delta[n]\} = \text{DFT}\{\text{IDFT}\{X[k]\}\} 1 = X[k] \quad (14)$$

## Compensação de canal (*channel compensation*):

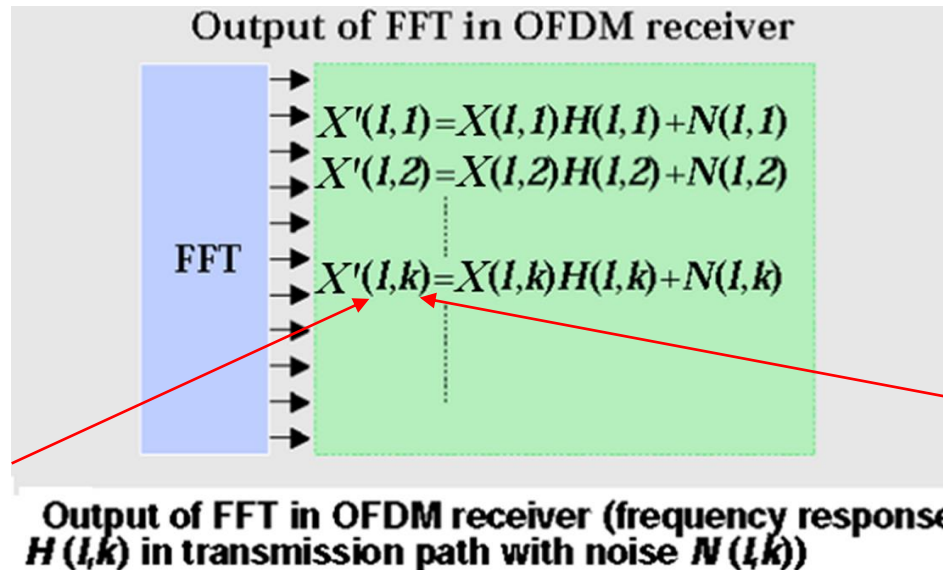
Portanto, da equação (14), não havendo multipercursos no canal, para cada  $l$ -ésimo símbolo OFDM transmitido,  $X'[k]$  na saída da DFT no RX recupera sem distorção os  $N$  símbolos IQ originais na entrada  $X[k]$  da IDFT no TX, conforme vimos no Exemplo 2 no slide 25 e conforme mostra a figura abaixo p/ um TX-RX *multicarrier* OFDM com  $N$  portadoras moduladas por símbolos IQ 16-QAM :





## Compensação de canal (*channel compensation*):

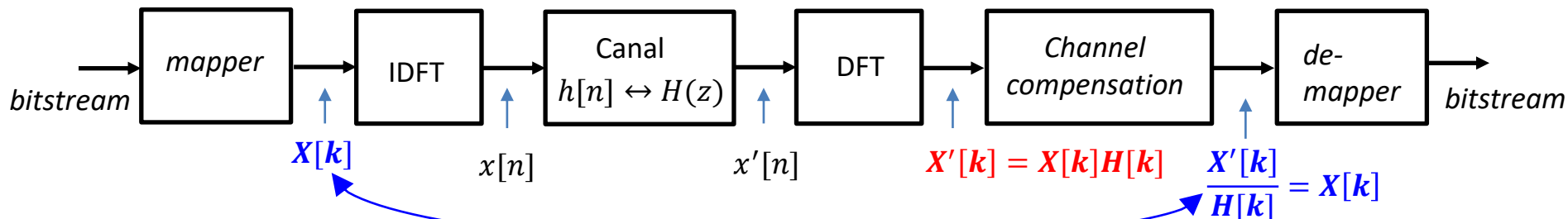
Em havendo multipercurso e ruído no canal, a saída da DFT é conforme mostra a figura abaixo:



Índice  $l$  do símbolo OFDM na sequência temporal de ocorrência dos símbolos no domínio tempo discreto

Índice  $k$  da portadora no domínio frequência discreto, com  $k = 1,2 \dots, N$

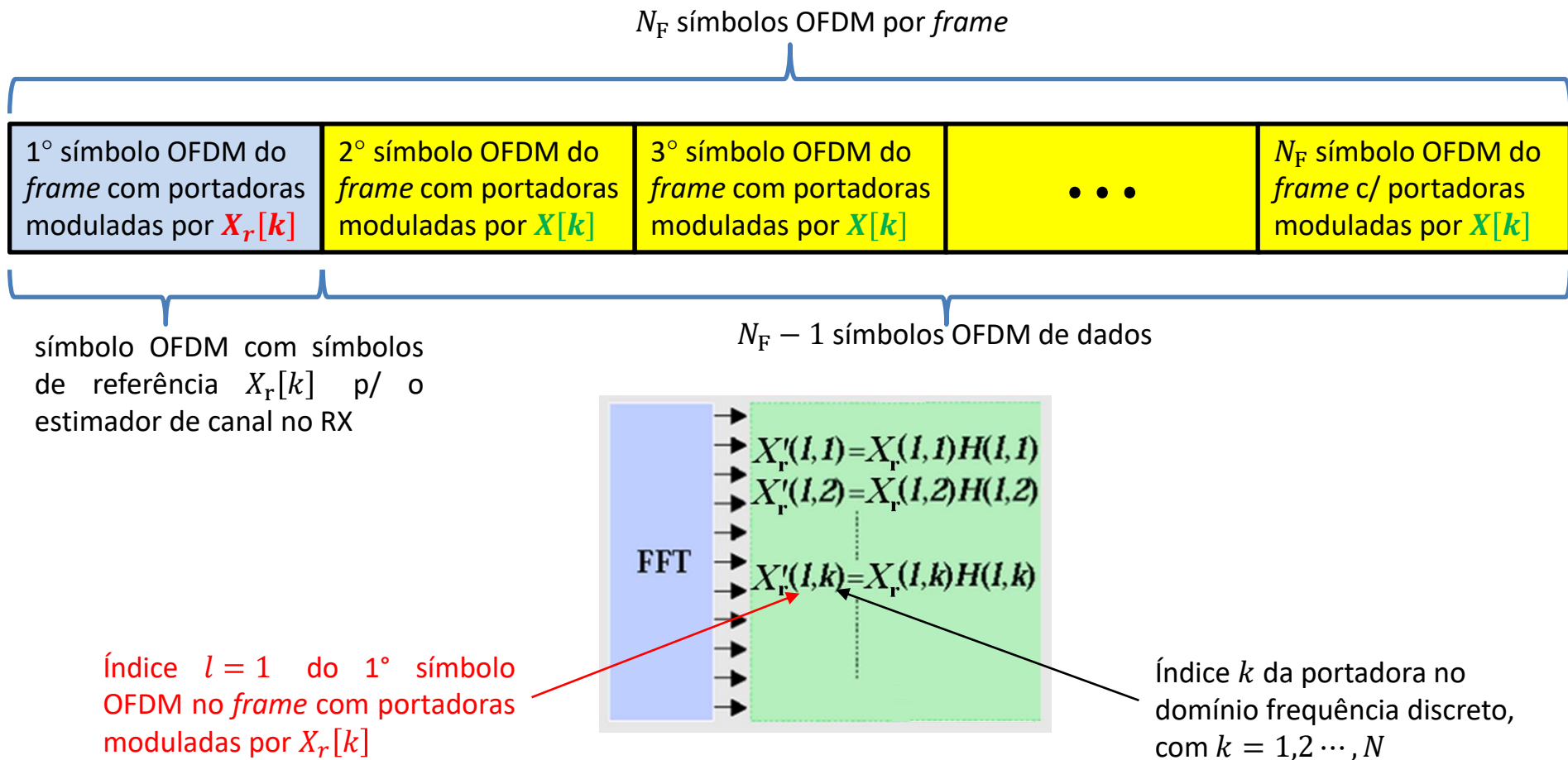
Assumindo que a relação sinal ruído (SNR – *signal to noise ratio*) seja suficientemente alta para que o ruído  $N[l, k]$  na figura acima seja desprezível em relação ao sinal  $X[l, k]H[l, k]$  recebido no  $k$ -ésimo sub-canal, o bloco *Channel compensation* estima a função de transferência  $H[k]$  em cada frequência  $k$  de cada  $k$ -ésimo respectivo sub-canal e divide os  $N$  valores de  $X'[k]$  na saída da DFT pelos valores de  $H[k]$  estimados, recuperando assim a cada  $l$ -ésimo símbolo OFDM os símbolos IQ originalmente transmitidos em  $X[k]$  conforme mostra a figura abaixo:



Fica evidente, portanto, a importância do processo de estimação do canal, de modo que a pergunta a ser respondida é: Como estimar a função de transferência  $H[k]$  em cada frequência  $k$  de cada  $k$ -ésimo respectivo sub-canal?

## Compensação de canal (*channel compensation*):

Existem vários métodos para se estimar a função de transferência  $H[k]$  em cada frequência  $k$  de cada  $k$ -ésimo respectivo sub-canal. Um possível método é o denominado **símbolo OFDM de referência**, que consiste em organizar a sequência de símbolos OFDM em uma estrutura de  $N_F$  símbolos OFDM denominada *frame*. O TX transmite o primeiro símbolo OFDM do *frame* com suas  $N$  portadoras moduladas por símbolos IQ de referência  $X_r[k]$ , sendo que uma cópia de  $X_r[k]$  encontra-se previamente gravada em uma LUT (*Look Up Table*) no hardware do RX, semelhantemente a sequência  $d[n]$  usada para treino do equalizador LMS, conforme vimos no slide 50 do Cap II.2. Os demais  $N_F - 1$  símbolos OFDM do frame têm suas portadoras moduladas por símbolos IQ  $X[k]$  de dados, cujos valores são determinados pela palavra binária na entrada do *mapper*, conforme mostrado abaixo:



## Compensação de canal (*channel compensation*):

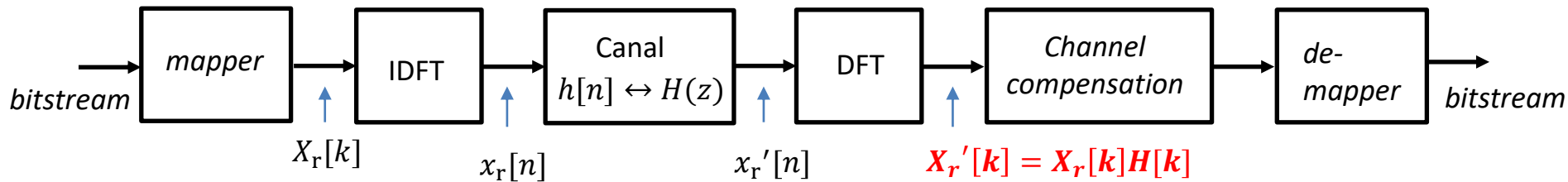
Ao receber o 1º símbolo OFDM do *frame* com portadoras moduladas por  $X_r[k]$ , o RX consulta a cópia dos símbolos IQ  $X_r[k]$  transmitidos que está gravada na LUT (*Look Up Table*) em seu hardware e determina  $H[k]$  através de

$$H[k] = \frac{X_r'[k]}{X_r[k]} \quad (15)$$

recebidos no RX na saída da DFT(FFT)  
(ver figuras abaixo)

gravados na LUT no hardware do RX

O processo de estimação de  $H[k]$  ao RX receber o 1º símbolo OFDM do *frame* é resumido abaixo:

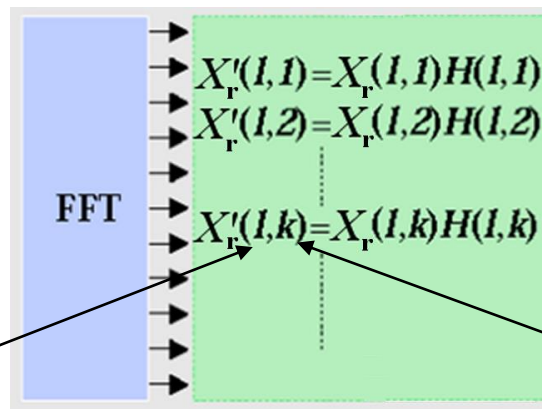


$$H[k] = \frac{X_r'[k]}{X_r[k]}$$

recebidos no RX na saída da DFT(FFT)

gravados na LUT no hardware do RX

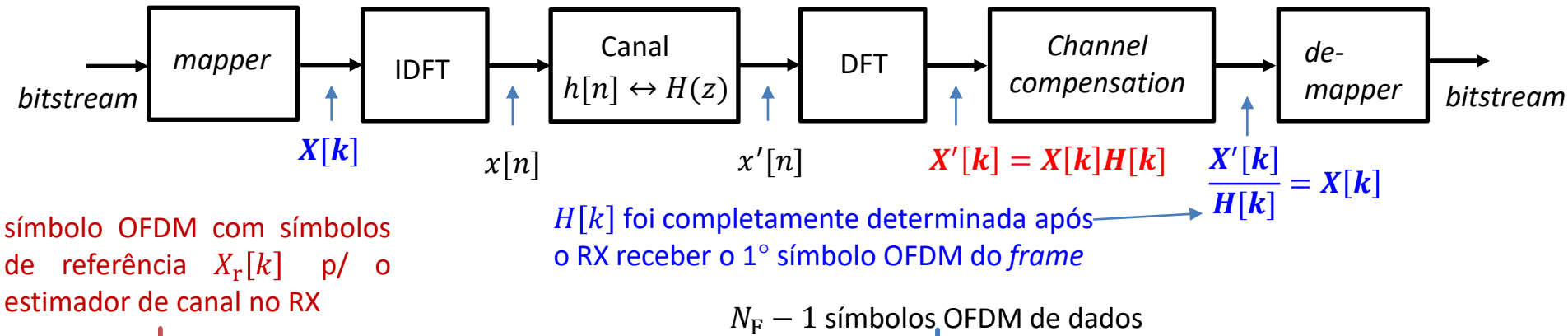
Índice  $l = 1$  do 1º símbolo OFDM no *frame* com portadoras moduladas por  $X_r[k]$



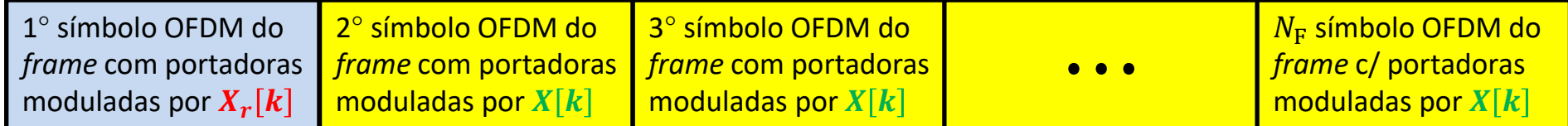
Índice  $k$  da portadora no domínio frequência discreto, com  $k = 1, 2 \dots, N$

## Compensação de canal (*channel compensation*):

Uma vez determinada  $H[k]$  conforme slide anterior, após o RX receber o 1º símbolo OFDM do *frame* com portadoras moduladas por  $X_r[k]$ , o RX usa  $H[k]$  assim determinada para compensar o canal e recuperar  $X[k]$  originalmente transmitido em todos os subsequentes  $N_F - 1$  símbolos de dados do *frame*, conforme mostrado abaixo:



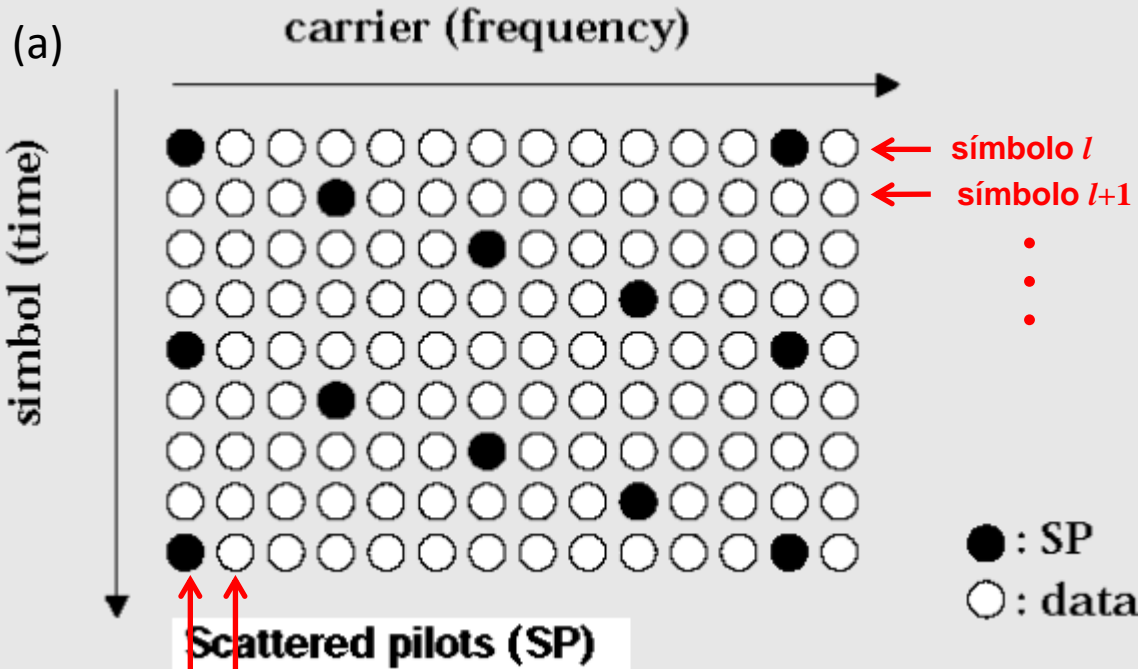
símbolo OFDM com símbolos de referência  $X_r[k]$  p/ o estimador de canal no RX



O RX usa a função de transferência  $H[k]$  do canal determinada após receber o símbolo OFDM de referência (1º símbolo OFDM do *frame*) para compensar o canal e recuperar  $X[k]$  originalmente transmitido em todos os subsequentes  $N_F - 1$  símbolos OFDM de dados do *frame* recebido pelo RX. Portanto, este método demanda que o intervalo de tempo entre símbolos OFDM de referência seja suficientemente pequeno para que, sob operação móvel, a função de transferência instantânea do canal não se afaste em demasia de  $H[k]$  determinada no início do *frame*, o que, caso contrário, geraria ISI (*Inter Symbol Interference*) na entrada do *de-mapper*, resultando BER (*Bit Error Rate*) significativa na saída do mesmo, conforme discutimos no slide 13 do Cap I.1.

## Compensação de canal (*channel compensation*):

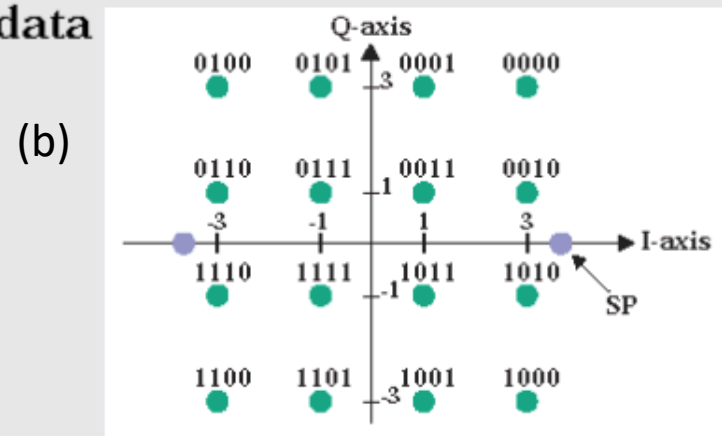
O método ***scattered pilots (SPs)*** é um método alternativo bastante usual para estimar a função de transferência  $H[k]$  em cada frequência  $k$  de cada  $k$ -ésimo respectivo sub-canal,  $k = 1, 2, \dots, N$ , sendo  $N$  o número de portadoras. Este método usa portadoras piloto uniformemente espalhadas no domínio tempo discreto  $l$  e no domínio frequência discreta  $k$  conforme mostra as figuras (a) e (b) para um sistema OFDM 16-QAM.



portadora  $k$  portadora  $k+1$  • • •

Uma cópia do valor do símbolo BPSK que modula cada SP, bem como uma cópia do respectivo índice  $l_p$  do símbolo OFDM e do respectivo índice  $k_p$  da portadora que definem a posição no tempo  $l$  e na frequência  $k$  de cada piloto  $SP[l_p, k_p]$  transmitido pelo TX encontram-se previamente gravados em uma LUT (*Look Up Table*) no hardware do RX. A sequência de símbolos BPSK que modulam os pilotos  $SP[l_p, k_p]$  é aleatória e com distribuição uniforme.

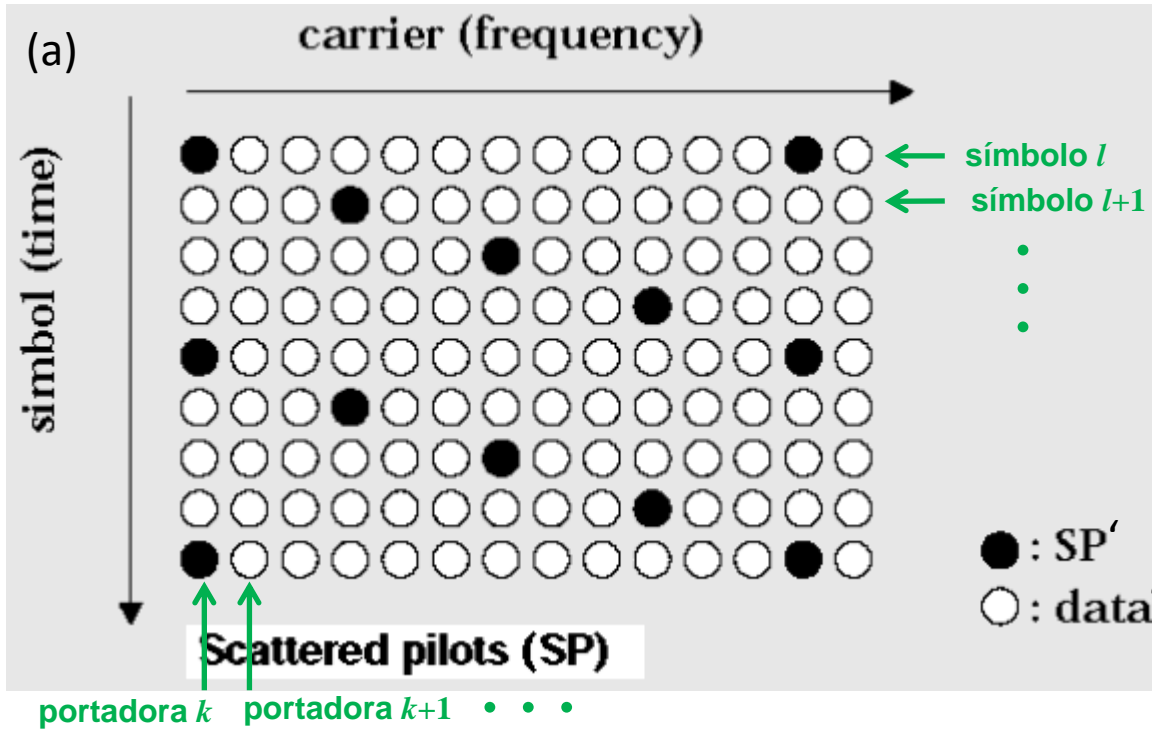
O TX transmite a  $k$ -ésima portadora de dados do  $l$ -ésimo símbolo OFDM modulada pelo símbolo 16-QAM  $X[l, k]$ , correspondentes às posições  $[l, k]$  onde ocorrem bolas brancas no mapa do *buffer* de armazenamento na entrada da IDFT mostrado em (a), sendo  $X[l, k]$  determinado pela palavra binária de 4 bits na entrada do *mapper*, conforme mapa da constelação mostrado em (b). Nas posições  $[l_p, k_p]$  em (a), onde ocorrem bolas pretas, o TX transmite SPs moduladas por símbolos BPSK  $SP[l_p, k_p]$  cujo valor SP é mostrado em (b).



Sp data of 16QAM-OFDM (for the RMS value  $\sqrt{10}$  in 16QAM, SP is placed  $(+L \sqrt{10}, 0)$  or  $(-L \sqrt{10}, 0)$ )

## Compensação de canal (*channel compensation*):

O RX recebe o símbolo IQ  $X'[l, k]$  na  $k$ -ésima portadora de dados do  $l$ -ésimo símbolo OFDM, portadora que foi modulada pelo símbolo  $X[l, k]$  transmitido pelo TX, onde as posições  $[l, k]$  correspondem às bolas brancas no mapa do *buffer* de armazenamento na saída da DFT no RX, conforme mostrado em (a).



As SPs  $SP'[l_p, k_p]$  recebidas pelo RX nas posições  $[l_p, k_p]$  em (a) onde ocorrem bolas pretas, são usadas para determinar a função de transferência do canal  $H[l_p, k_p]$  na frequência  $k_p$  e no instante  $l_p$  de ocorrência do símbolo OFDM através de:

$$H[l_p, k_p] = \frac{SP'[l_p, k_p]}{SP[l_p, k_p]} \quad (16)$$

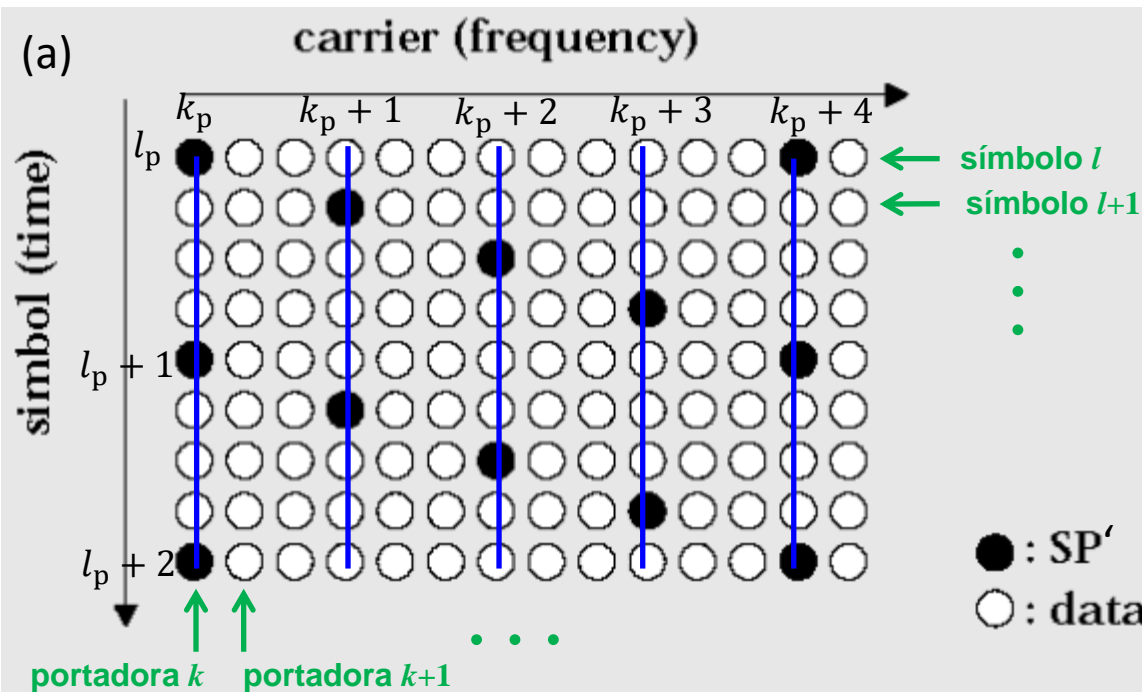
recebidos no RX na saída da DFT(FFT)

gravados na LUT no hardware do RX

Uma vez determinado  $H[l_p, k_p]$  através de (16), é necessário determinar os demais valores da função de transferência  $H[l, k]$  do canal nas posições  $[l, k]$  do *buffer* de armazenamento na saída da DFT que não estão nas posições  $[l_p, k_p]$  das pilotos onde  $H[l_p, k_p]$  foi determinado. Isto é feito através de **interpolação**, conforme veremos no próximo slide.

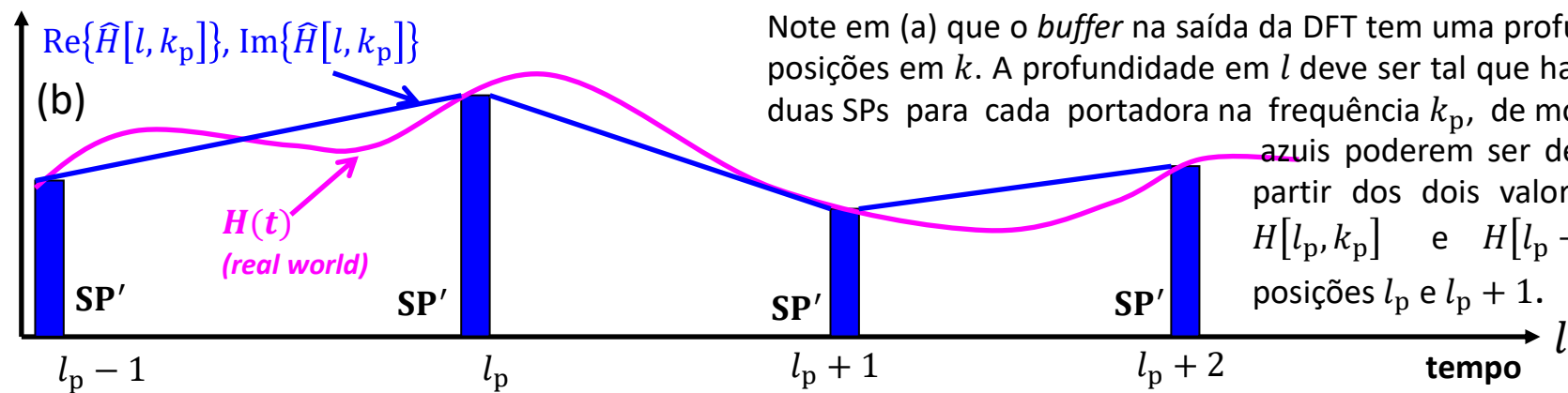


## Compensação de canal (*channel compensation*):



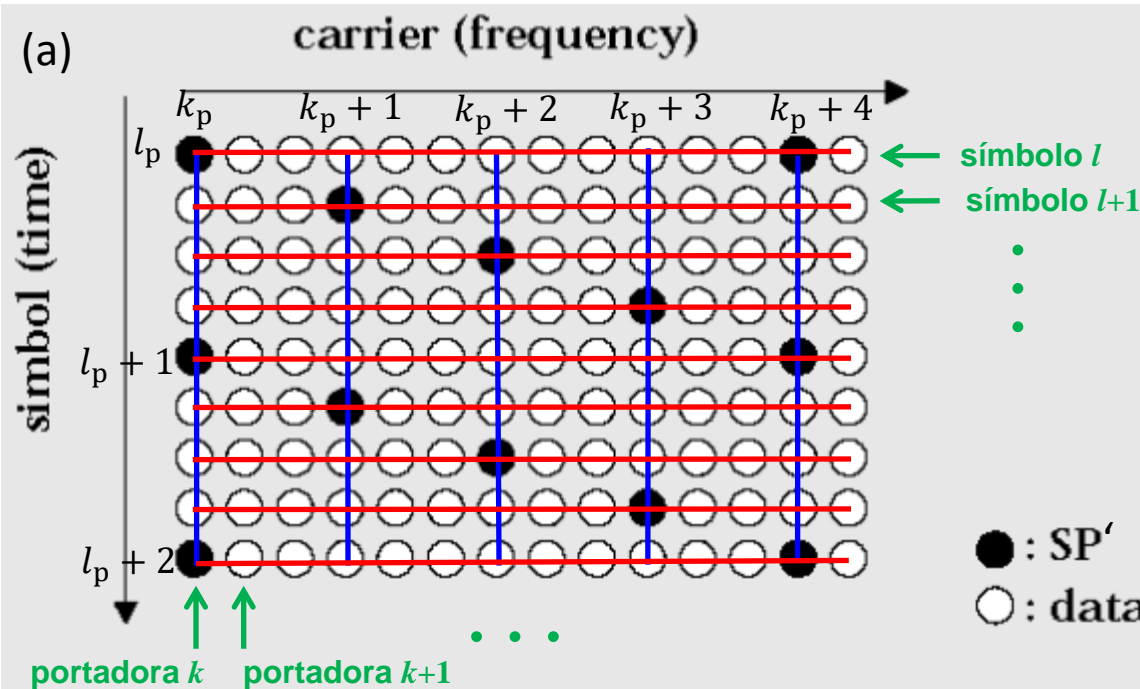
Para determinar os demais valores da função de transferência do canal  $H[l, k]$  nas posições  $[l, k]$  do *buffer* na saída da DFT em (a) que não estão nas posições  $[l_p, k_p]$  das pilotos SP onde  $H[l_p, k_p]$  foi determinado por (16), primeiro determina-se a equação das retas azuis de valor complexo em (a) que interceptam os dois valores complexos  $H[l_p, k_p]$  e  $H[l_p + 1, k_p]$  nas posições  $l_p$  e  $l_p + 1$  de cada dois SPs adjacentes no domínio tempo  $l, p/$  uma mesma frequência  $k_p$ . Para  $\text{Re}\{H\}$  determina-se a reta que intercepta os pontos  $\text{Re}\{H[l_p, k_p]\}$  e  $\text{Re}\{H[l_p + 1, k_p]\}$  e  $p/$   $\text{Im}\{H\}$  determina-se a reta que intercepta os pontos  $\text{Im}\{H[l_p, k_p]\}$  e  $\text{Im}\{H[l_p + 1, k_p]\}$ , conforme mostrado em (b).

Daí, a partir da equação determinada para cada reta, determina-se os demais valores da função de transferência  $\hat{H}[l, k_p]$  para as 3 posições  $l$  entre as posições  $l_p$  e  $l_p + 1$ , conforme mostrado em (a). E repete-se o procedimento para cada frequência  $k_p$  de modo que ao final do processo os valores de  $H[l, k]$  são conhecidos ao longo das retas azuis em (a).



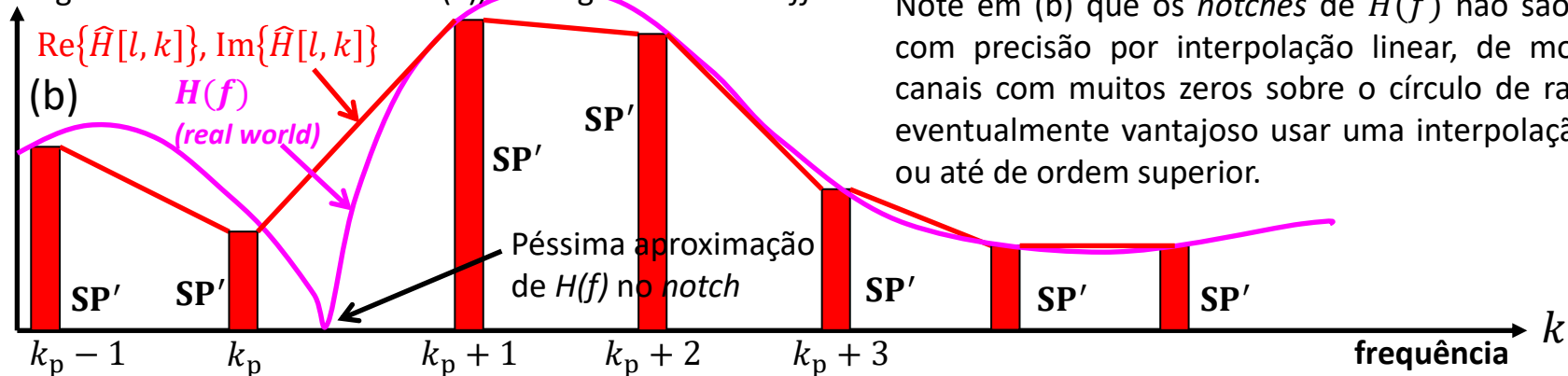
Note em (a) que o *buffer* na saída da DFT tem uma profundidade de  $N$  posições em  $k$ . A profundidade em  $l$  deve ser tal que haja pelo menos duas SPs para cada portadora na frequência  $k_p$ , de modo às retas azuis poderem ser determinadas a partir dos dois valores complexos  $H[l_p, k_p]$  e  $H[l_p + 1, k_p]$  nas posições  $l_p$  e  $l_p + 1$ .

## Compensação de canal (*channel compensation*):



O próximo passo para determinar  $H[l, k]$  nas posições  $[l, k]$  do *buffer* na saída da DFT em (a) que não estão nas posições  $[l_p, k_p]$  das SPs onde  $H[l_p, k_p]$  foi determinado por (16), consiste em determinar a equação das retas vermelhas de valor complexo em (a) que interceptam os dois valores complexos  $H[l, k_p]$  e  $H[l, k_p + 1]$  nas posições  $k_p$  e  $k_p + 1$  de duas retas azuis adjacentes no domínio frequência  $k$  (cujos valores já se sabe), para um mesmo instante  $l$ . Para  $\text{Re}\{H\}$  determina-se a reta vermelha que intercepta os pontos  $\text{Re}\{H[l, k_p]\}$  e  $\text{Re}\{H[l, k_p + 1]\}$  e para  $\text{Im}\{H\}$  determina-se a reta que intercepta os pontos  $\text{Im}\{H[l, k_p]\}$  e  $\text{Im}\{H[l, k_p + 1]\}$ , conforme mostrado em (b).

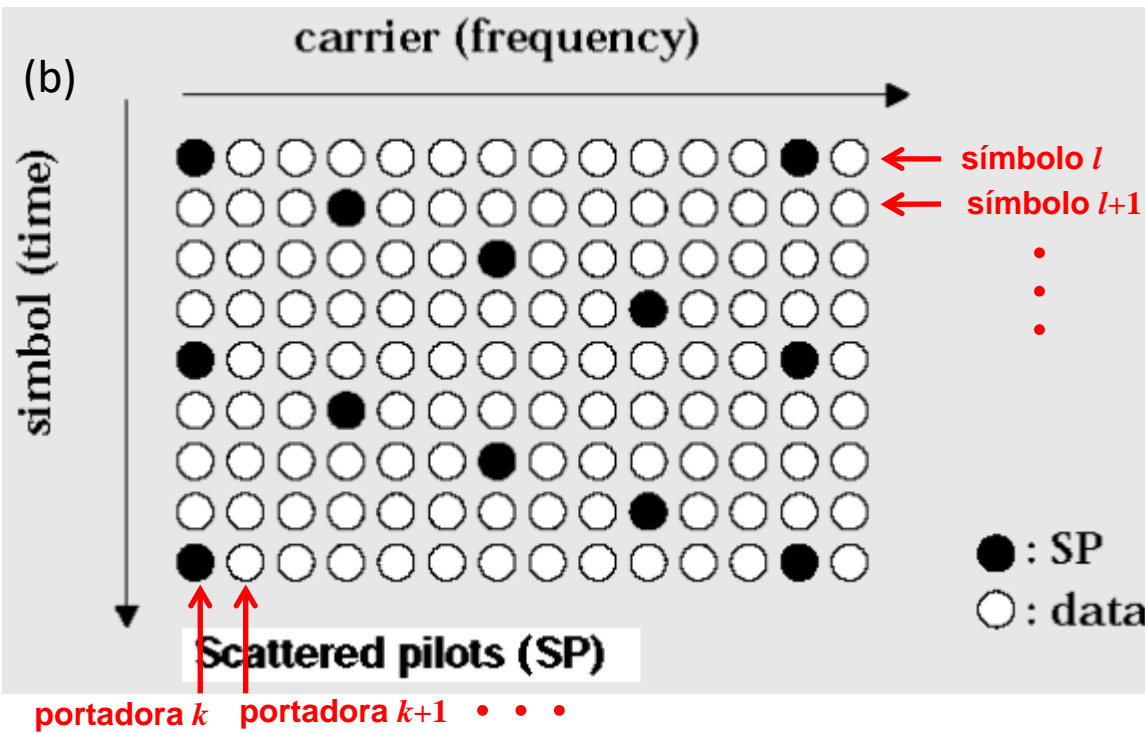
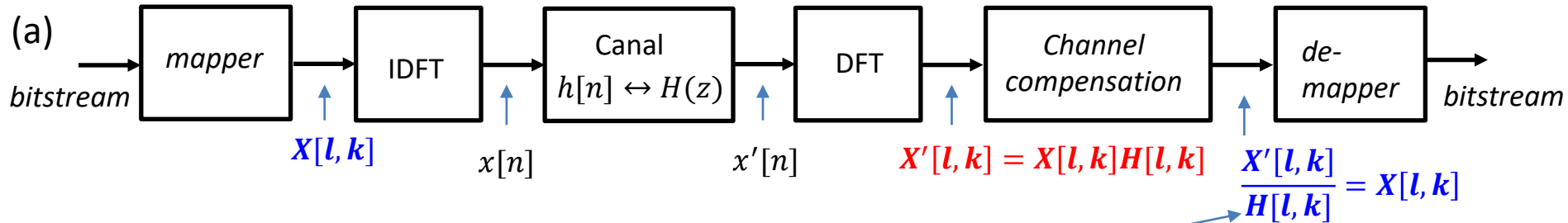
Daí, a partir da equação determinada para cada reta vermelha, determina-se os demais valores da função de transferência  $\hat{H}[l, k]$  para as 2 posições  $k$  entre as posições  $k_p$  e  $k_p + 1$ , conforme mostrado em (a). E repete-se o procedimento para cada instante  $l$  de ocorrência do símbolo OFDM de modo que ao final do processo os valores de  $H[l, k]$  são conhecidos ao longo das retas vermelhas em (a), e são gravados no *buffer*.



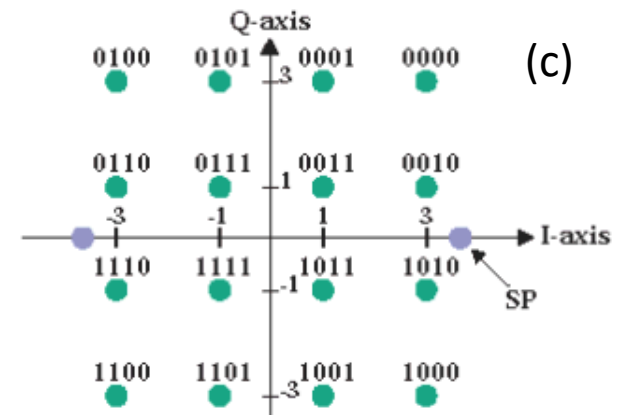
Note em (b) que os *notches* de  $H(f)$  não são aproximados com precisão por interpolação linear, de modo que para canais com muitos zeros sobre o círculo de raio unitário é eventualmente vantajoso usar uma interpolação quadrática, ou até de ordem superior.

## Compensação de canal (*channel compensation*):

Uma vez determinada  $H[l, k]$  conforme slide anterior, o RX usa  $H[l, k]$  assim determinada para compensar o canal e recuperar  $X[l, k]$  originalmente transmitido nas posições  $[l, k]$  onde ocorrem bolas brancas no mapa do *buffer* de armazenamento na entrada da IDFT mostrado (b), conforme procedimento mostrado em (a). Para cada  $X[l, k]$  obtido na saída do bloco *Channel compensation*, o *de-mapper* gera em sua saída uma palavra binária de 4 bits conforme mapa da constelação mostrado em (c).

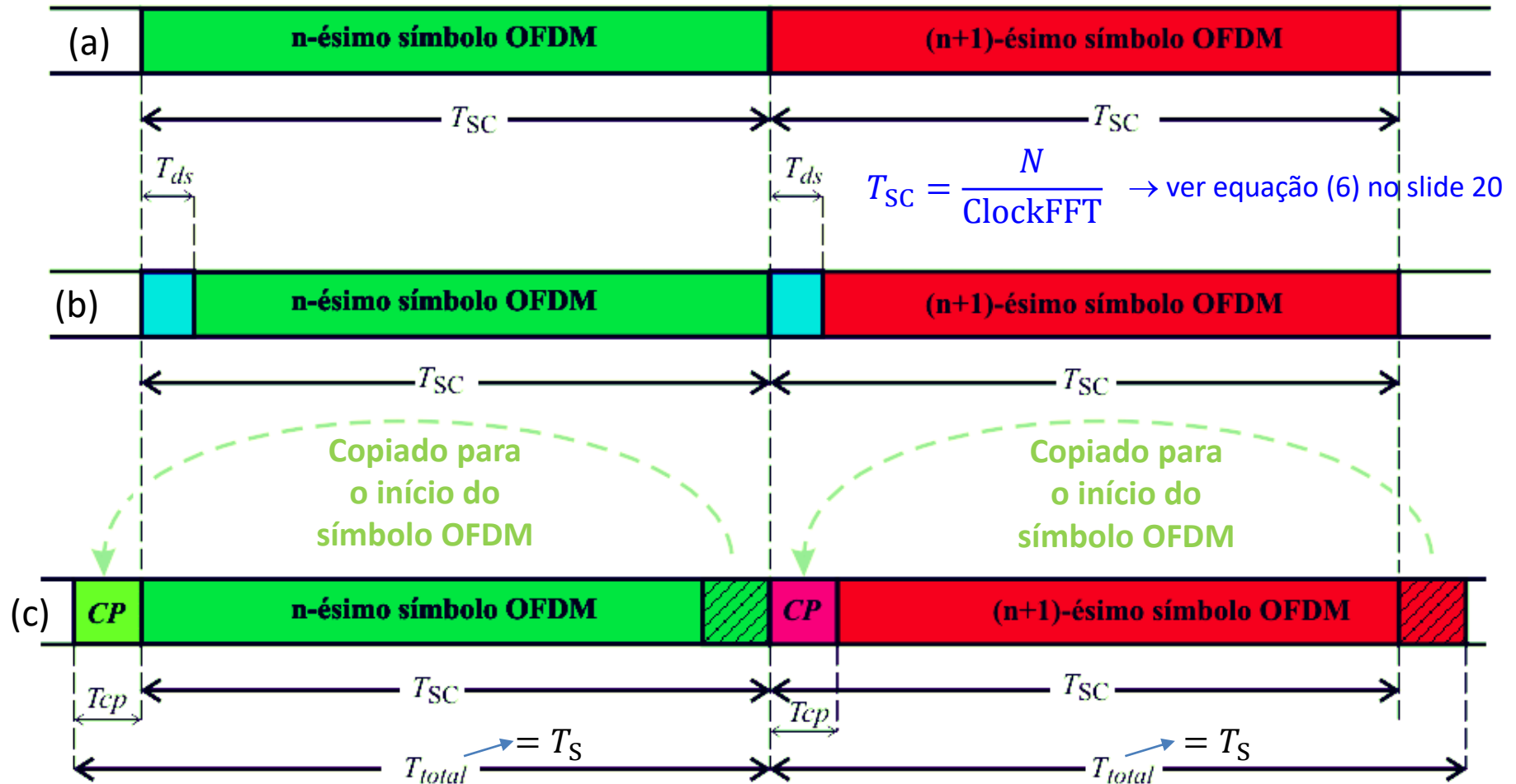


$H[l, k]$  é completamente determinada por interpolação no tempo  $l$  e na frequência  $k$  dos valores de  $H[l_p, k_p]$  determinados por (16) nas posições  $[l_p, k_p]$  das pilotos SPs no *buffer* de armazenamento na saída da DFT, conforme slide anterior.



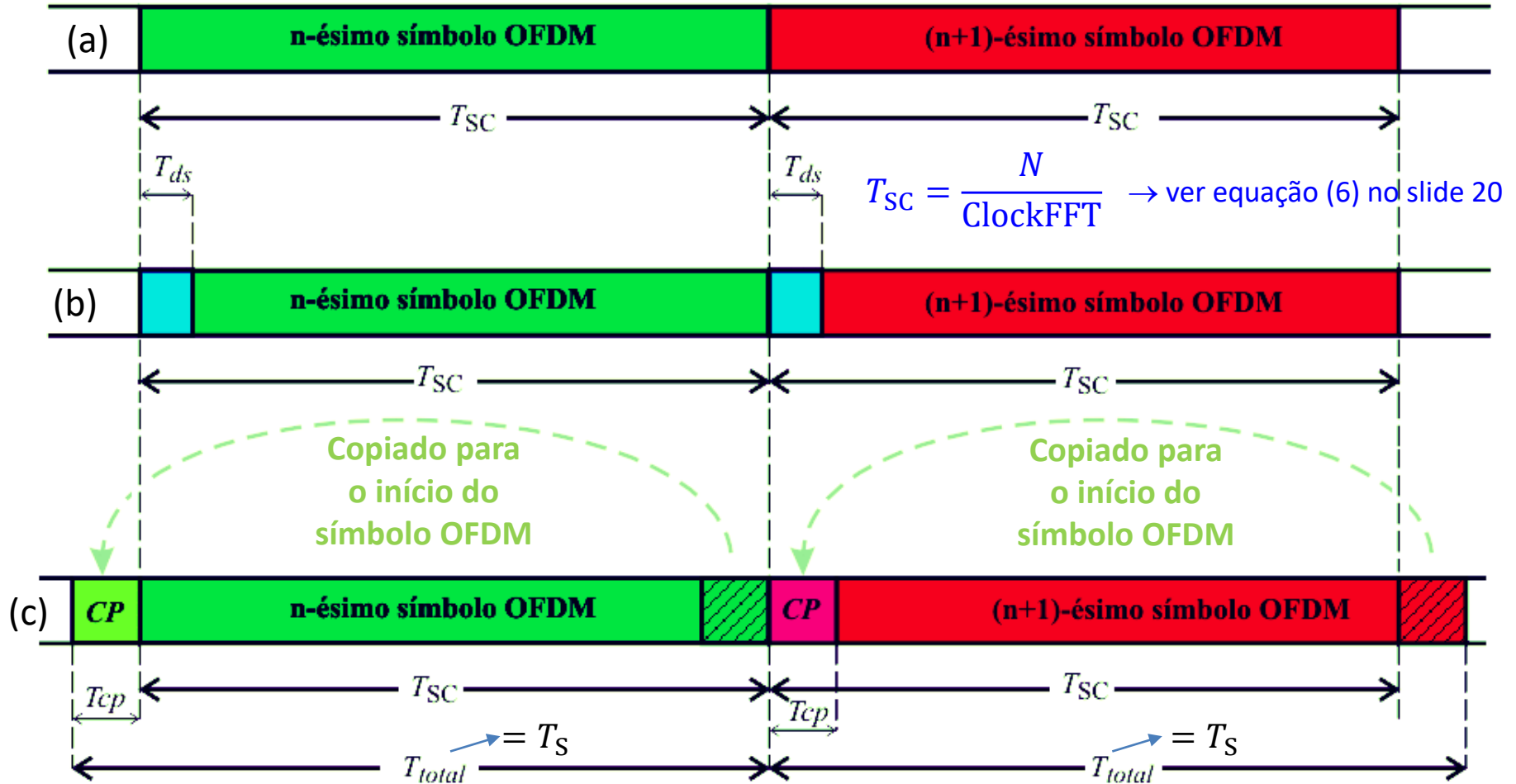
## Prefixo cíclico (*cyclic prefix*)

Os ecos do  $n$ -ésimo símbolo OFDM gerados por multipercursos no canal se estendem no tempo por um intervalo  $T_{ds}$  correspondente ao *delay spread* do canal e interfere nas portadoras do  $(n + 1)$ -ésimo símbolo OFDM subsequente, conforme mostrado em (b), gerando o efeito denominado ICI (*Inter Carrier Interference*). O ICI gera dispersão de símbolos na entrada do *de-mapper*, aumentando a BER (*Bit Error Rate*) na sua saída, de maneira similar ao efeito do ruído em sistemas *single-carrier* discutido no slide 13 do Cap I.1. Portanto, é necessário inserir um intervalo de guarda de duração  $T_{ds}$  entre cada dois símbolos OFDM adjacentes no tempo. A duração  $T_{ds}$  deve ser igual ou maior ao *delay spread* do canal, caso contrário os ecos do símbolo OFDM anterior gerarão ICI no símbolo OFDM posterior.



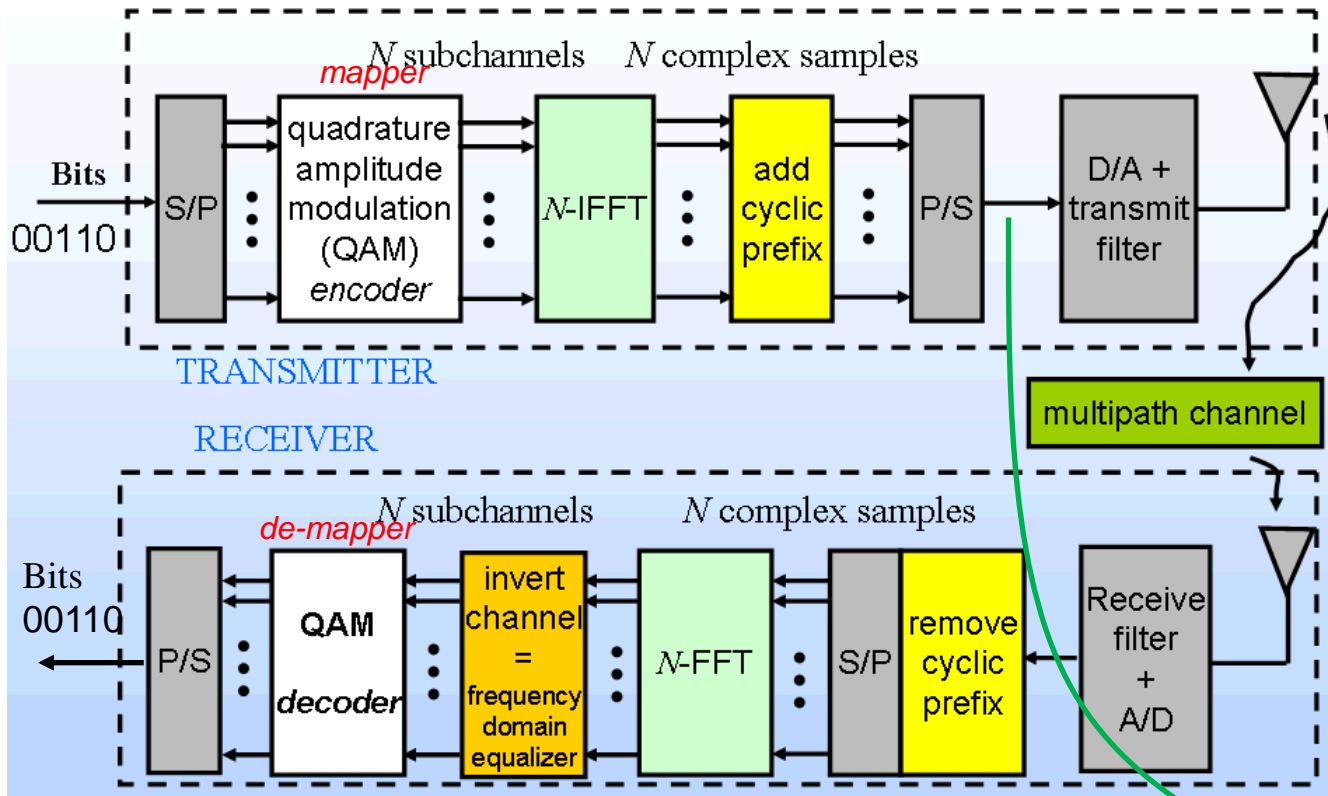
## Prefixo cíclico (*cyclic prefix*)

O intervalo de guarda não pode ser gerado simplesmente interrompendo (zerando) abruptamente o sinal por um intervalo de tempo  $T_{ds}$  ou maior porque isto geraria um amplo espectro de espúrios espectrais. Para evitar este problema, é inserido no início de cada símbolo OFDM o denominado prefixo cíclico CP, com duração  $T_{cp}$  maior ou igual ao *delay spread* ( $T_{ds}$ ). Cada CP consiste na cópia do intervalo de duração  $T_{cp}$  ao final do símbolo OFDM e esta cópia é colocada na frente do símbolo OFDM, conforme mostrado em (c).



## Prefixo cíclico (cyclic prefix)

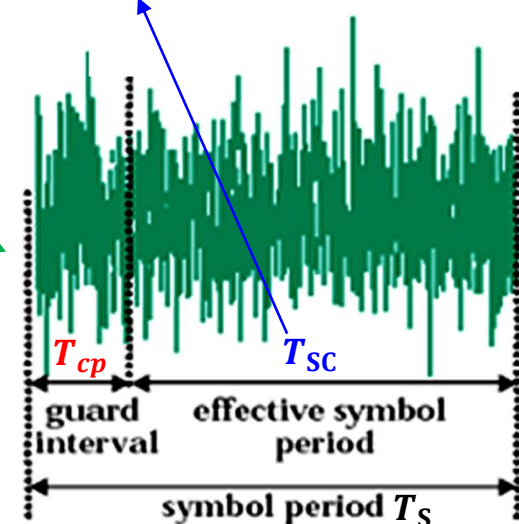
O processo de inserção do prefixo cíclico de duração  $T_{cp}$  no TX e a remoção no RX é mostrada em amarelo abaixo:



Portanto, levando em consideração o intervalo de duração  $T_{cp}$  do prefixo cíclico, o intervalo total  $T_s$  de duração de um símbolo OFDM é dado por

$$T_s = \underbrace{\frac{N}{\text{ClockFFT}}}_{T_{sc}} + T_{cp} \quad (17)$$

$$T_{sc} = \frac{N}{\text{ClockFFT}}$$



Importante notar que os símbolos IQ de dados são transmitidos somente durante o intervalo efetivo de símbolo  $T_{sc}$ . Durante o intervalo  $T_{cp}$  de duração do prefixo cíclico o sistema apenas espera, e não transmite nenhuma informação útil para o RX. Dado que a condição  $T_{cp} \geq \text{delay spread}$  deve ser atendida para evitar ICI, para canais com *delay spread* muito longo é usual reduzir o *overhead* do prefixo cíclico fazendo  $T_{sc} \gg T_{cp}$  através da adoção de um número  $N$  de portadoras elevado. Por exemplo, TV digital aberta em VHF (sistema ISDB-T –  $\text{ClockFFT} = 8.127 \text{ MHz}$ ) adota  $N = 8192$  ( $T_{sc} = 1.008 \text{ ms}$ ) para o cenário de multipercurso urbano, com 64-QAM modulando as portadoras de dados (bitrate 19.3 Mbps) e intervalo de guarda  $T_{cp} = \frac{1}{8} T_{sc}$ .

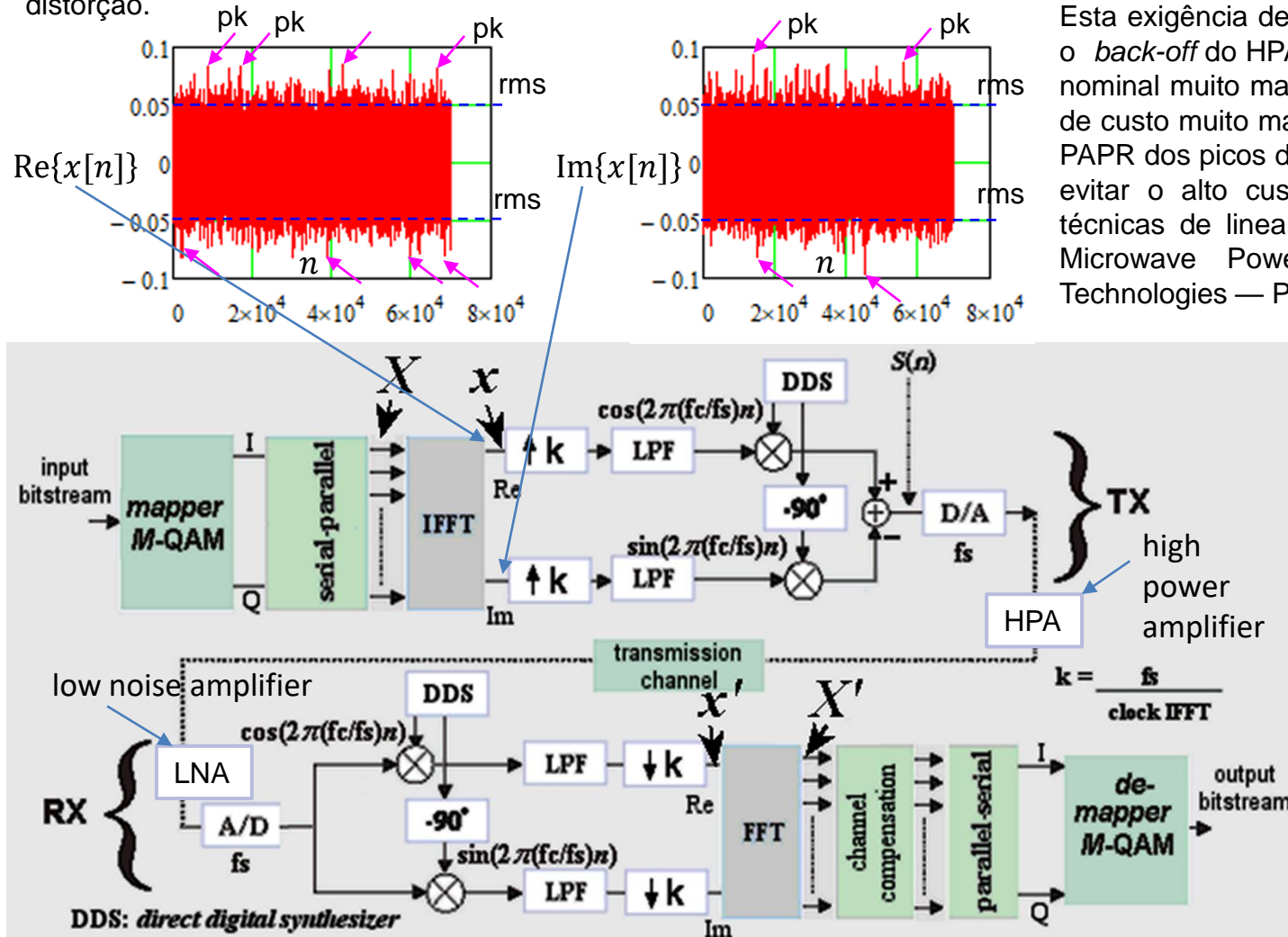


## PAPR (peak to average power ratio):

Como o sinal na saída de um modulador OFDM de  $N$  portadoras é uma superposição de  $N$  senoides de frequências diferentes (ver equação (8) slide 21), dependendo da amplitude e fase de cada senoide em função da palavra binária na entrada do *mapper*, ocorrerá que em determinados instantes algumas senoides se superpõem construtivamente gerando os picos *pk* indicados pelas setas em magenta na figura, picos que são valores acima do valor médio rms (*root mean square*) mostrado nas retas tracejadas em azul. Esta situação caracteriza o denominado PAPR (*peak to average power ratio*), que é um problema em sistemas OFDM porque demanda que o HPA (*high power amplifier* – ver figura abaixo) seja capaz de amplificar linearmente os picos sem qualquer distorção.

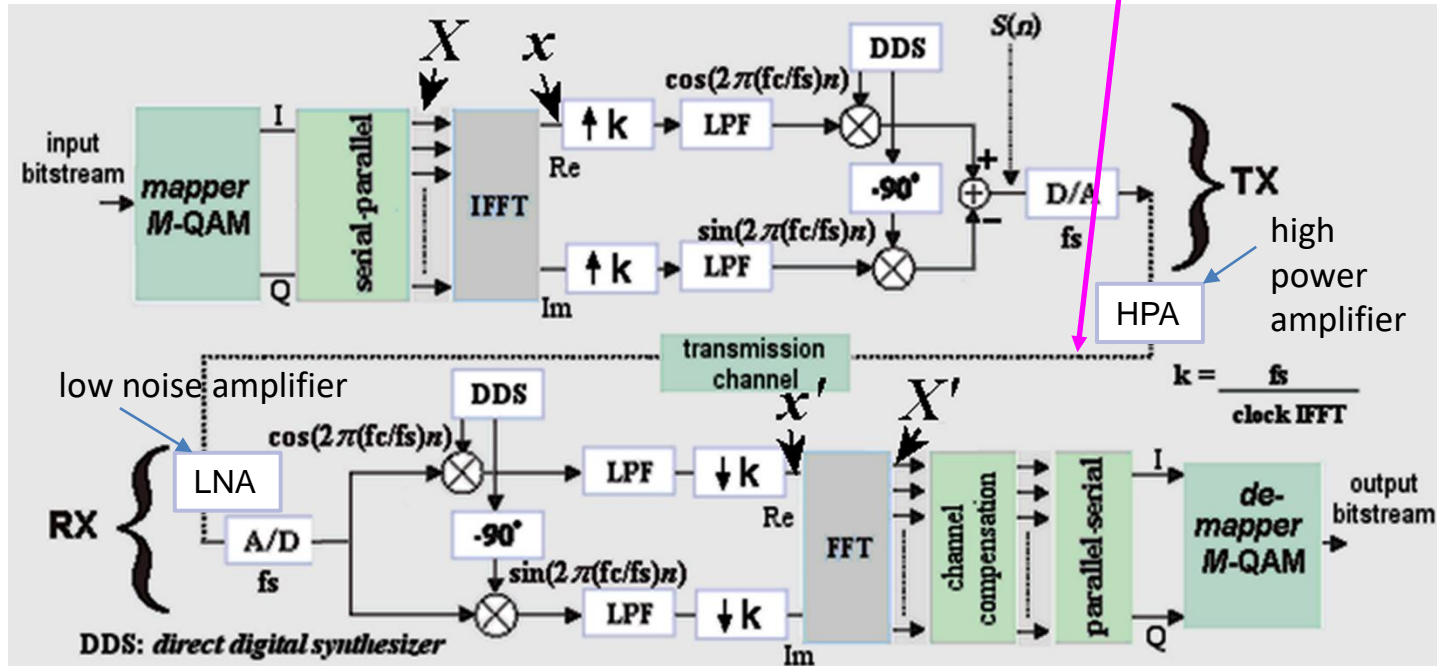
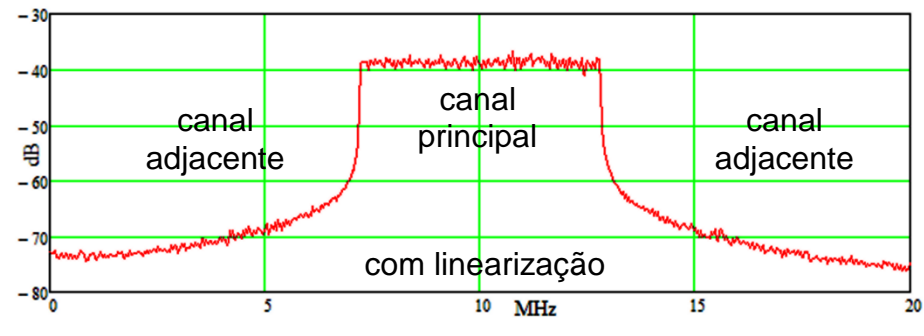
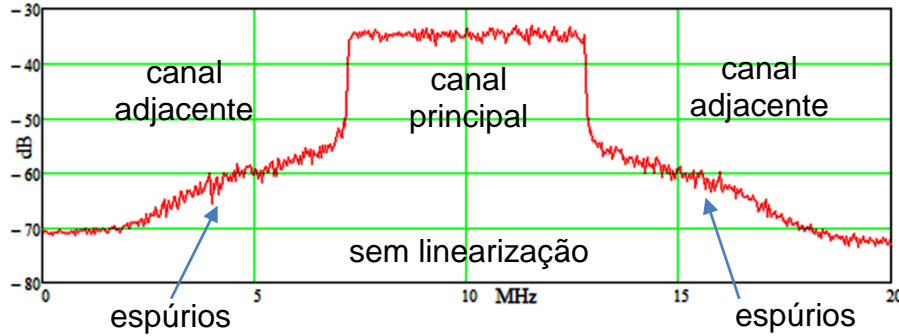
Esta exigência de amplificação linear obriga fazer o *back-off* do HPA, i.e., usar um HPA de potência nominal muito maior que o necessário, e portanto de custo muito maior, para poder acomodar o alto PAPR dos picos de potência do sinal OFDM. Para evitar o alto custo do *back-off* é usual adotar técnicas de linearização do HPA. Ver "RF and Microwave Power Amplifier and Transmitter Technologies — Part 4" (pag 28) disponível em

<http://www.fccdecastro.com.br/pdf/RF&MicrowavePowerAmp&XMTRs.pdf>



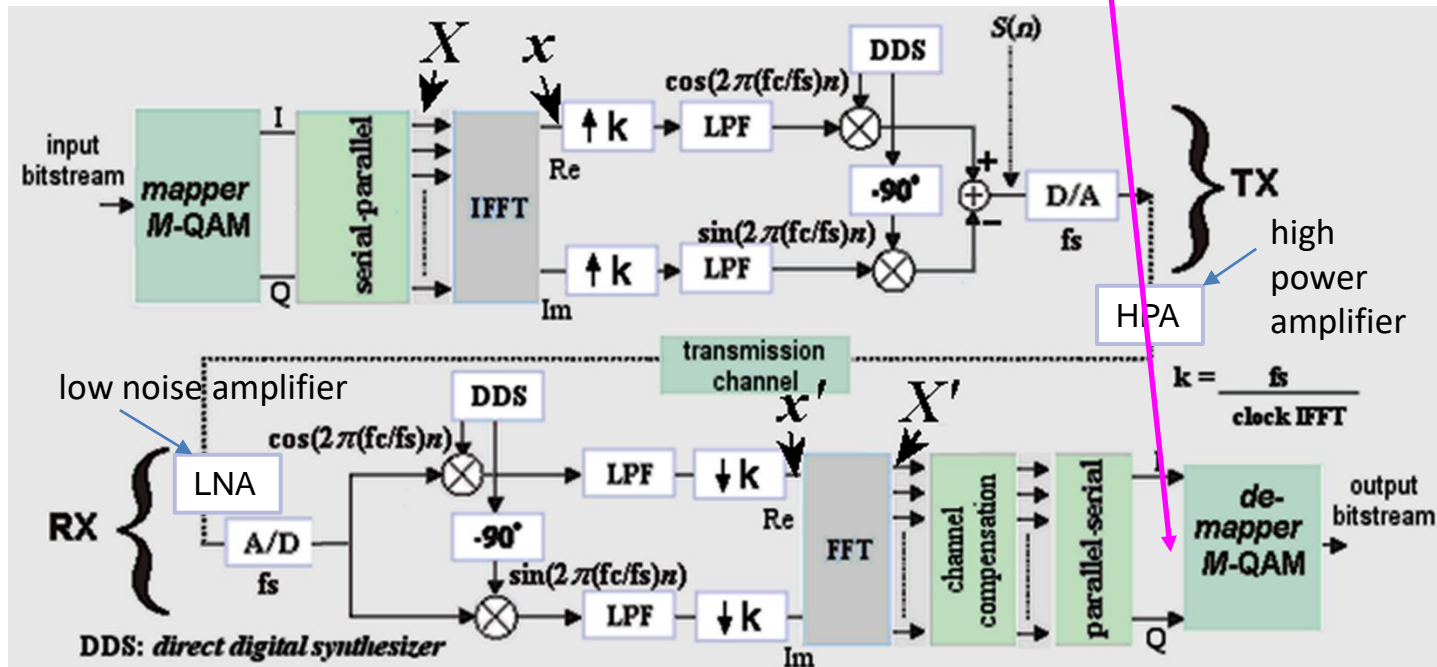
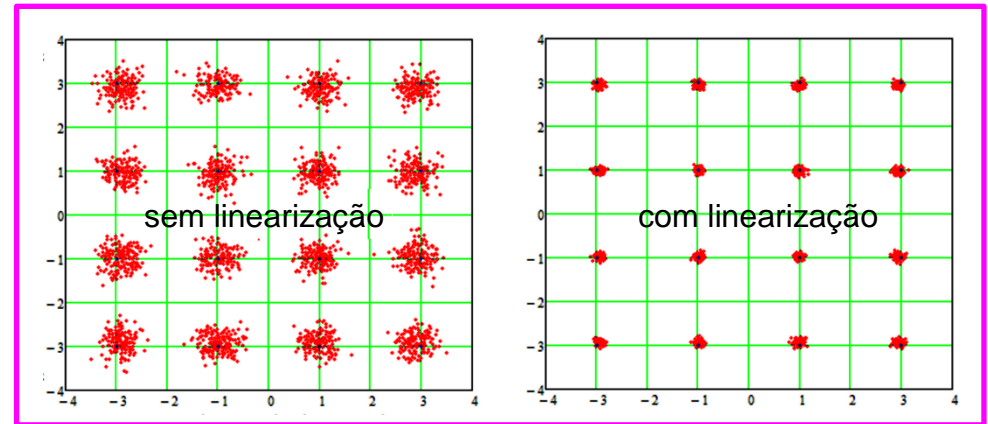
## PAPR (peak to average power ratio):

A não adoção de *back-off* ou de linearização resulta em espúrios espectrais nos canais adjacentes ao canal principal do sistema OFDM, interferindo no sinal dos serviços alocados nos canais adjacentes pelo órgão regulador (ANATEL, FCC, etc...) Estes espúrios são gerados por intermodulação em consequência da não-linearidade na curva de transferência *input-output* do HPA, ocorrendo nas vizinhanças do canal principal conforme mostra o espectro do sinal na saída do HPA:



## PAPR (peak to average power ratio):

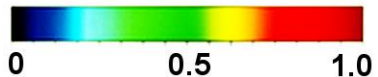
Além da geração de espúrios de intermodulação na saída do HPA no TX, a não adoção de *back-off* ou de linearização distorce a sequência de símbolos IQ transmitidos, gerando dispersão de símbolos em torno dos símbolos de referência da constelação na entrada do *de-mapper* no RX, podendo aumentar a BER (Bit Error Rate) na saída do mesmo caso a dispersão dos símbolos invada as regiões de decisão adjacentes:



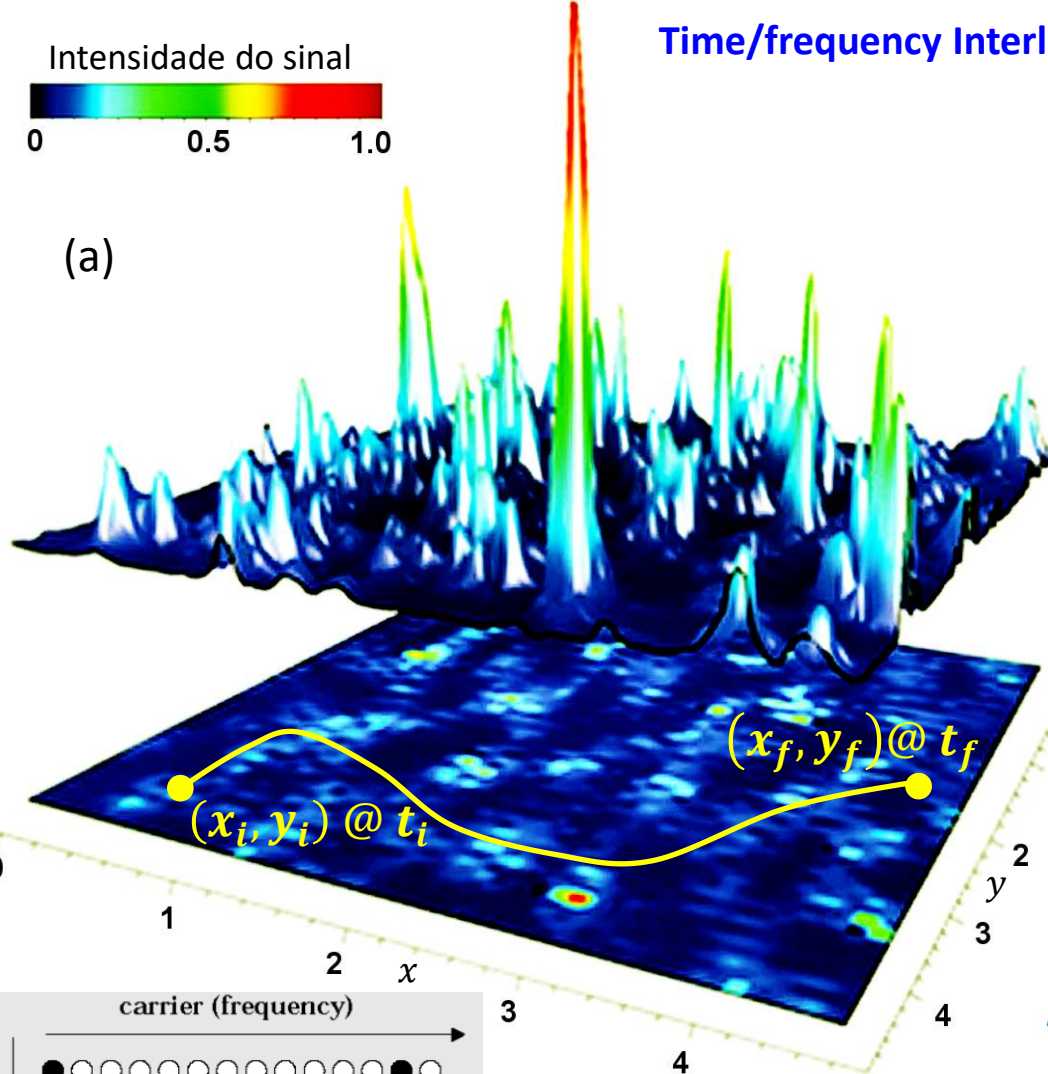


## Time/frequency Interleaver:

Intensidade do sinal

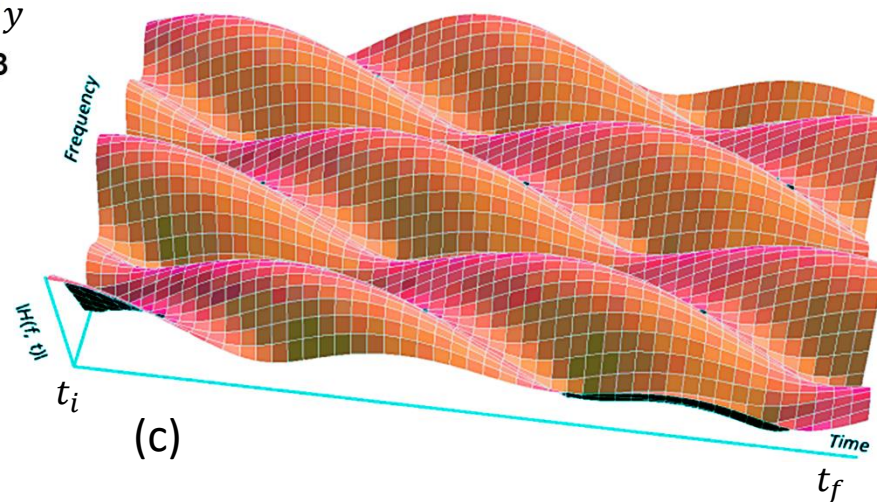
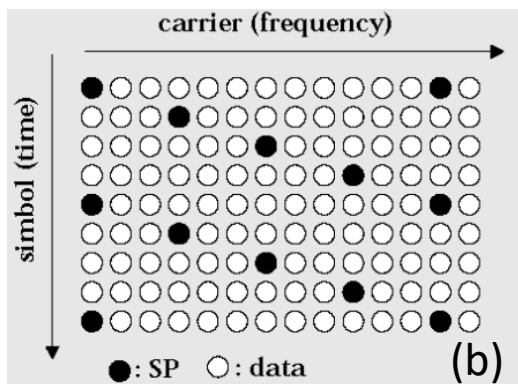


(a)



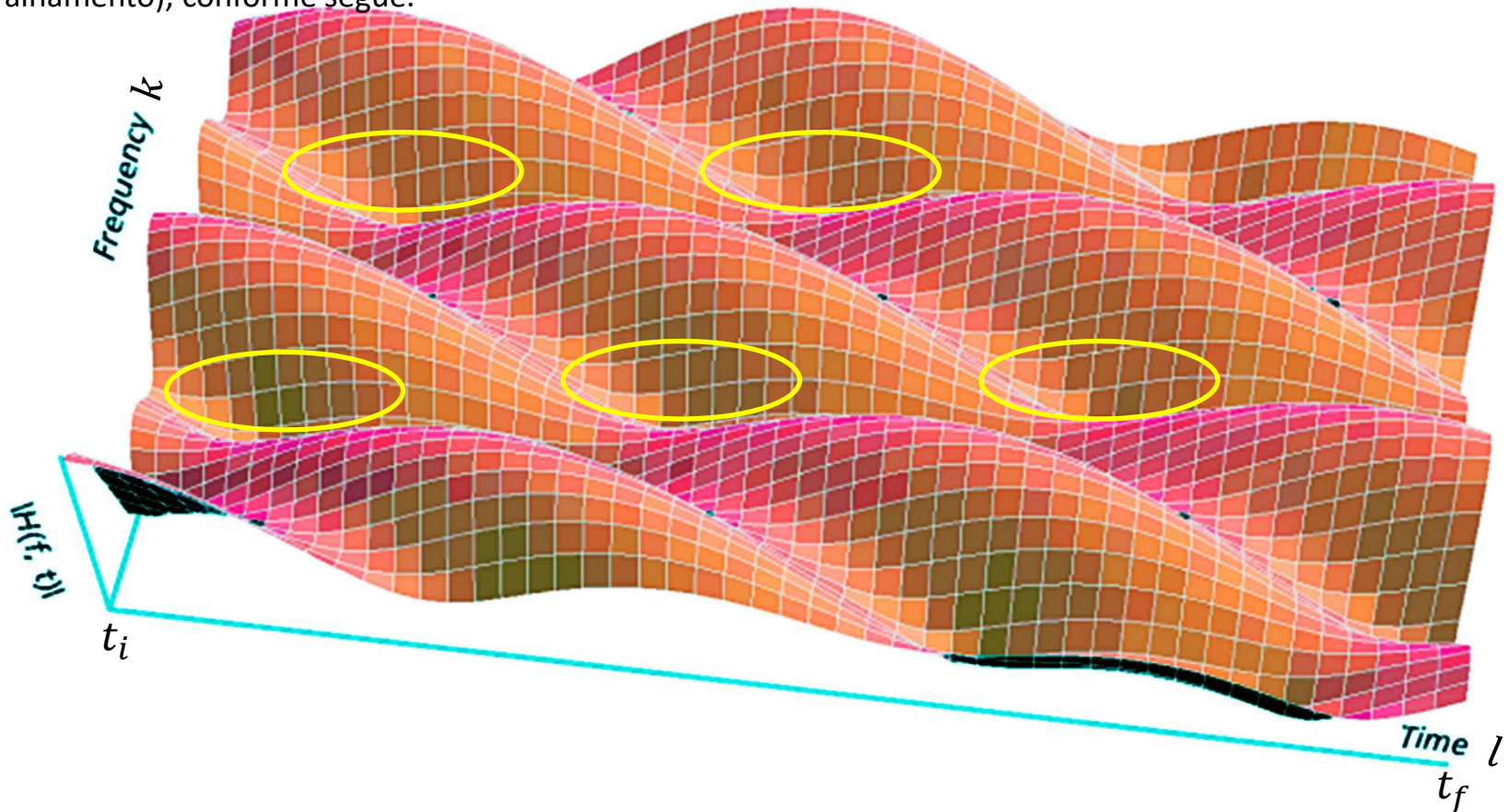
Vamos supor que um RX OFDM se mova no cenário de multipercuso mostrado em (a) ao longo do caminho amarelo, que inicia na coordenada  $(x_i, y_i)$  no instante  $t_i$  e termina na coordenada  $(x_f, y_f)$  no instante  $t_f$ . Vamos supor que o *buffer* na saída da DFT (ver slides 39 e 40) mostrado em (b) tenha uma profundidade suficiente no domínio tempo  $l$  de modo que os valores da função de transferência do canal  $H[l, k]$  determinados pelo bloco *Channel compensation* (ver slide 41) estão gravados no *buffer* da DFT desde o instante  $t_i$  até o instante  $t_f$ .

Em (c) é mostrado os valores de  $|H[l, k]|$  gravado no *buffer* na saída da DFT, desde o início do caminho amarelo na coordenada  $(x_i, y_i)$  no instante  $t_i$  até o fim na coordenada  $(x_f, y_f)$  no instante  $t_f$ .



## Time/frequency Interleaver:

Note que para determinados instantes  $l$  de símbolos OFDM e para determinadas frequências  $k$  de portadoras a magnitude  $|H[l, k]|$  da função de transferência do canal desvanece em consequência da interferência destrutiva entre as ondas no canal (multipercurso), estabelecendo regiões de maior *fading* (desvanecimento) no domínio  $[l, k]$  conforme mostrado pelos elipsoides em amarelo marcados na superfície de  $|H[l, k]|$  no *buffer* da DFT abaixo. Nestas regiões de maior *fading em*  $[l, k]$  a SNR (*signal to noise ratio*) na entrada do *de-mapper* é muito baixa resultando em BER (*bit error rate*) não nula na saída do mesmo. Dependendo do tamanho e do formato da região de *fading*, a sequência de bits errados na saída do *de-mapper* devido à baixa SNR pode ser excessivamente longa, excedendo a capacidade de correção de erro dos códigos corretores de erro do decodificador de canal. Para quebrar as longas sequências de bit errados em blocos menores, evitando exceder a capacidade de correção dos códigos corretores, adota-se o processo denominado **interleaving** (embaralhamento), conforme segue.



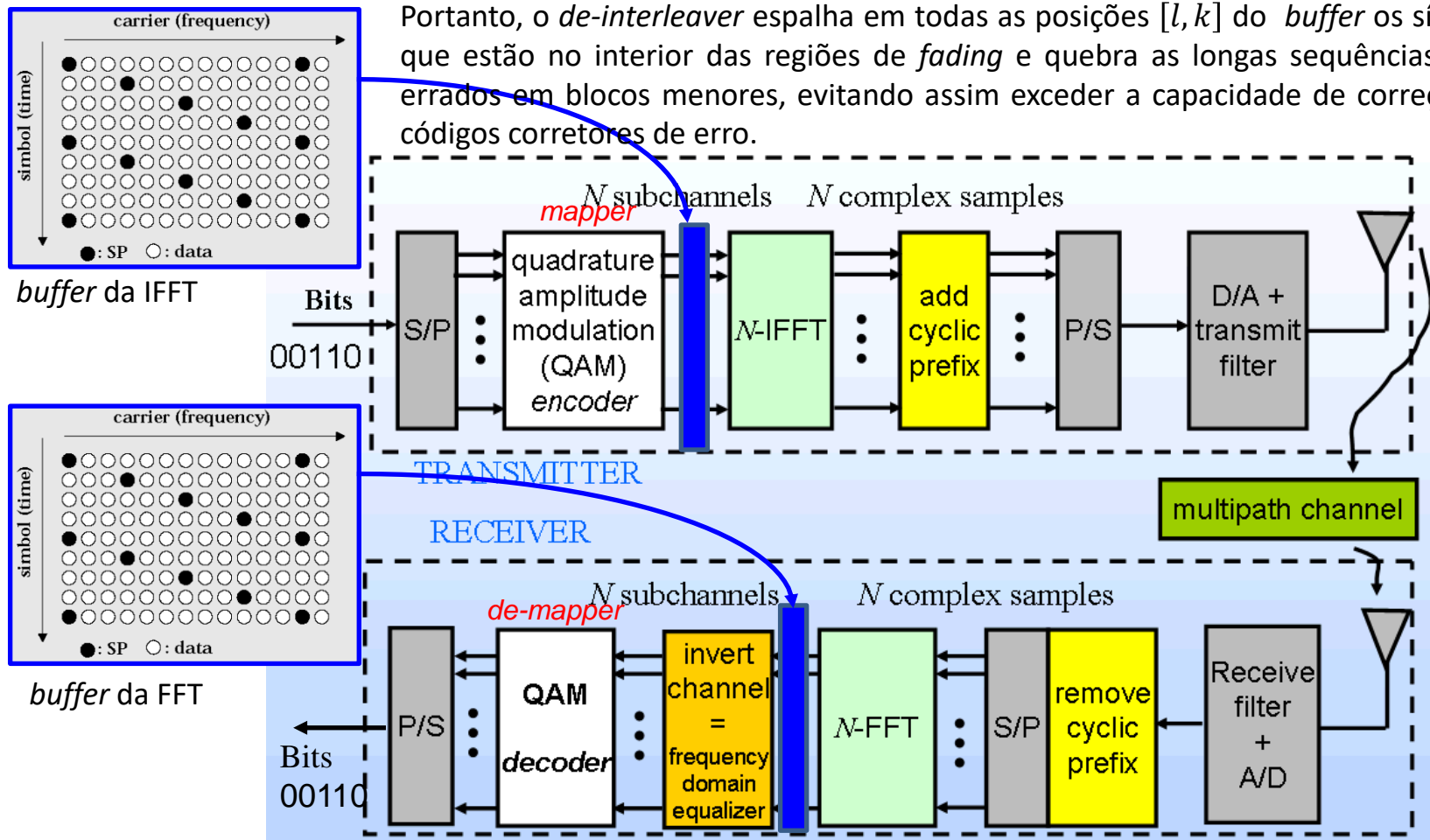


## Time/frequency Interleaver:

O processo de *interleaving* realizado pelo *interleaver* consiste em reordenar aleatoriamente a posição  $[l, k]$  dos símbolos IQ de dados  $X[l, k]$  (bolas brancas na figura abaixo) no *buffer* da IFFT no TX. O *de-interleaver* no RX conhece a sequência de reordenamento feita no TX pelo *interleaver*, de modo que o *de-interleaver* reposiciona nas suas posições originais os símbolos  $X'[l, k]$  recebidos no *buffer* da FFT.

Ocorre que quando o RX reposiciona nas suas posições originais os símbolos  $X'[l, k]$  recebidos no *buffer* da FFT, implicitamente estará sendo reordenada aleatoriamente a posição  $[l, k]$  dos símbolos IQ de dados  $X[l, k]$  no interior das regiões de maior *fading* (elipsoides amarelos no slide anterior), porque o *fading* ocorre no canal antes do *de-interleaver*.

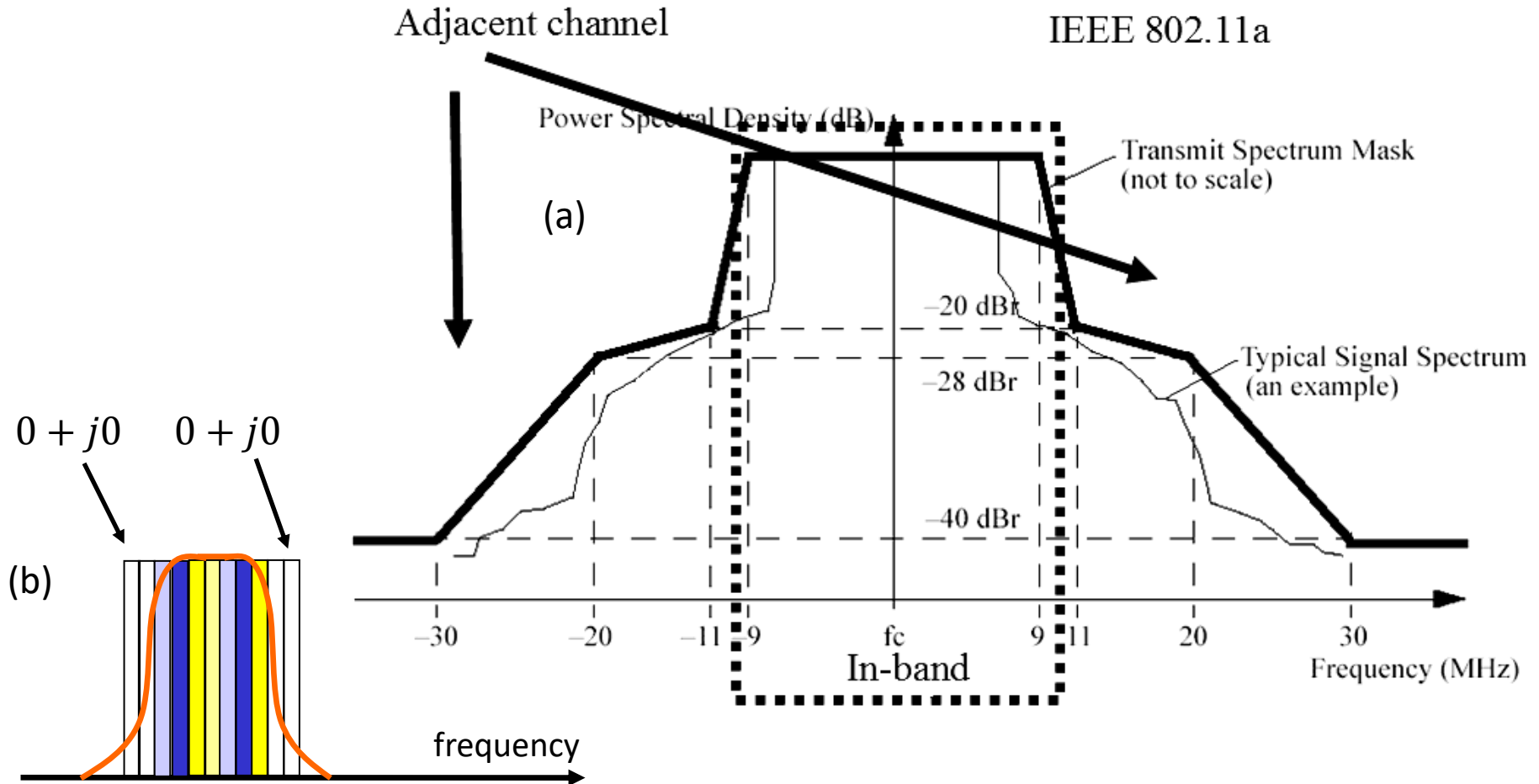
Portanto, o *de-interleaver* espalha em todas as posições  $[l, k]$  do *buffer* os símbolos que estão no interior das regiões de *fading* e quebra as longas sequências de bit errados em blocos menores, evitando assim exceder a capacidade de correção dos códigos corretores de erro.





## Máscara Espectral:

Todo sistema de comunicações, em particular sistemas *wireless*, deve obedecer uma máscara espectral definida pelo órgão regulador (ANATEL, FCC, etc...) que especifica os limites do espectro do sinal do sistema no canal principal (*in-band channel*) bem como especifica a amplitude máxima dos espúrios nos canais adjacentes, conforme mostrado em (a) para um sistema IEEE 802.11a. Para efeito de conformação espectral do sinal OFDM, símbolos IQs nulos ( $0 + j0$ ) são atribuídos às portadoras das extremidades alta e baixa do espectro, conforme mostrado em (b), de modo a atender a máscara espectral exigida. Esta é uma flexibilidade possibilitada por sistemas OFDM que não é encontrada em sistemas *single carrier*.





## Orthogonal Frequency Division Multiplexing – prós/contras e considerações finais

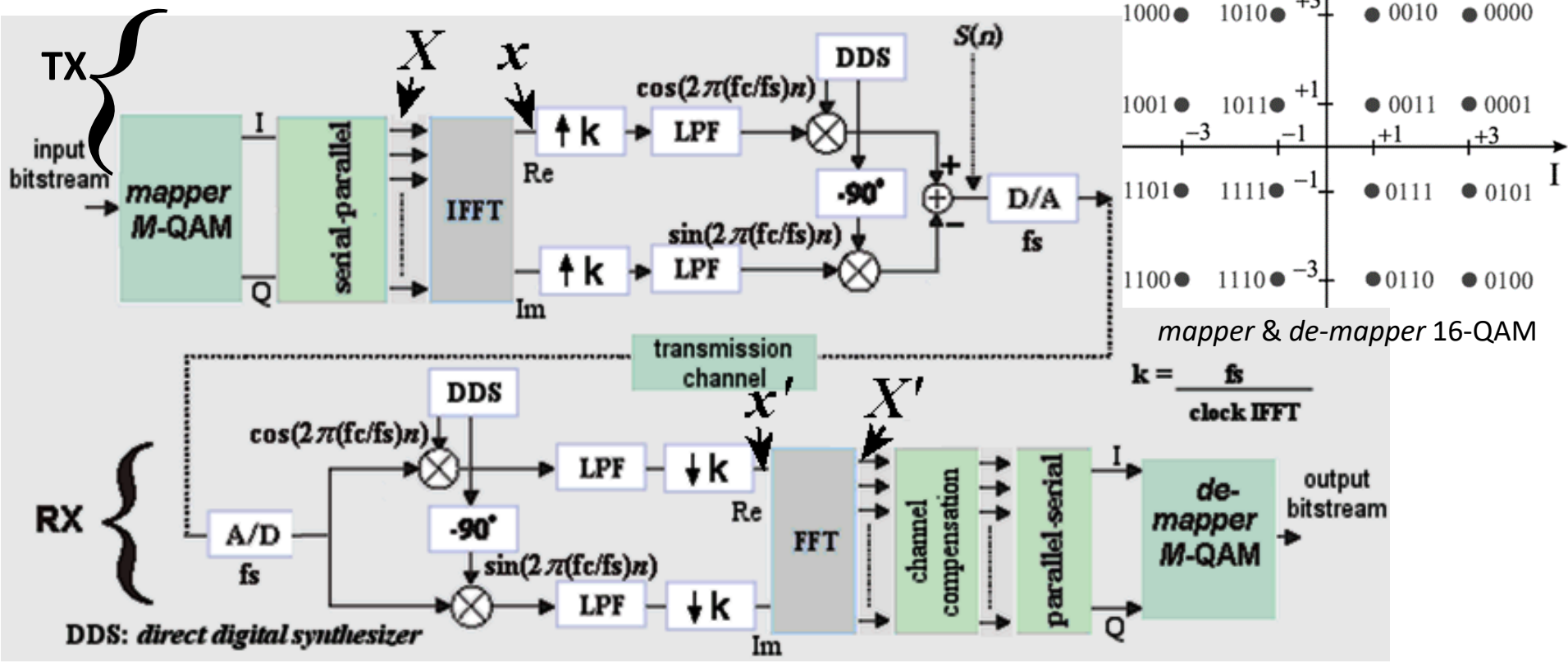
### Prós:

- Não apresenta banda de guarda entre as portadoras.
- Possui uma elevada eficiência espectral (as portadoras se superpõem).
- Baixo custo computacional nos algoritmos IFFT (*Inverse Fast Fourier Transform*) e FFT (*Fast Fourier Transform*), utilizados na modulação e demodulação.
- Robustez em relação à interferência e ao multipercurso.
- Diminuição do desvanecimento seletivo em frequência causada por multipercurso.
- Redução significativa do uso de equalizadores.
- Apresenta bom desempenho em ambientes de propagação NLOS (*Non Line of Sight*).
- Permite a atribuição de modulações distintas a diferentes portadoras.

### Contras:

- Alto PAPR do sinal OFDM demanda amplificadores de potência capazes de operar sob ampla faixa dinâmica com absoluta linearidade na curva de transferência *input-output*.
- Perda de eficiência espectral quando o intervalo de guarda necessita ser muito longo em função do *delay spread* do canal (denominado *overhead* do intervalo de guarda).
- Bem mais sensível ao desvio Doppler do que sistemas *single carrier* (devido à pouca separação em frequência entre as portadoras), demandando um sincronismo de portadora preciso.
- Bem mais sensível ao *phase noise* dos osciladores do hardware do que sistemas *single carrier* (devido à pouca separação em frequência entre as portadoras).
- Receptor OFDM demanda mecanismo de sincronização preciso no tempo entre as janelas da IFFT e FFT.

**Exemplo 3:** A figura abaixo mostra a etapa de modulação de um sistema OFDM 16-QAM:



**Figura 3:** Etapa de modulação de um sistema de comunicação digital OFDM 16-QAM.

O sistema utiliza  $N_{port} = 8$  portadoras com um *clock* na IFFT e FFT de valor  $clock_{FFT} = 8.16$  [MHz].

A frequência central do canal de transmissão é  $f_c = 174$  [MHz] e o *delay profile* do canal é conforme Tabela 1 ao lado.

Sabe-se que as portadoras de índices zero e 7 correspondem respectivamente às frequências mais baixa e mais alta da banda ocupada do canal.

**Tabela 1: Channel Delay Profile**

Amplitude do percurso [dB]:	Atraso do percurso [ $\mu$ s]:
0	0
-3.5	2.5
-15	4.5

## Pede-se:

- (a) Plote a curva do módulo em [dB] da resposta em frequência  $|H(f)|$  deste canal de transmissão **passband**, sendo  $H(f) = H(e^{j\theta}) = Z\{h[n]\} |_{z=e^{j\theta}}$ , onde  $-\pi \leq \theta \leq \pi$  é o intervalo de variação da frequência digital  $\theta$  de acordo com Nyquist, intervalo que é equivalente ao intervalo  $f_c - \text{ClockFFT}/2 \leq f \leq f_c + \text{ClockFFT}/2$  da frequência analógica  $f$ .  $h[n]$  é a resposta ao impulso discreta deste canal e  $Z\{\cdot\}$  é o operador Transformada Z. A relação entre a frequência analógica  $f$  e a frequência digital  $\theta$  é dada por  $f = f_c + \frac{\theta}{2\pi} \text{ClockFFT}$  (ver Exemplo 3 no slide 29 do Cap II.1 – note a equivalência entre o ClockFFT em sistemas OFDM e o *SymbolRate* (SR) em sistemas *single carrier*).
- (b) Plote a curva da fase da resposta em frequência  $\angle H(f)$  [°] do canal de transmissão **passband**, sendo  $H(f)$  definida conforme em (a).
- (c) Sabe-se que o *input bitstream* na entrada do *mapper* é *ibstream*={00010010010101111110010011110011} e que o primeiro símbolo 16-QAM gerado na saída do *mapper* é armazenado no *buffer* na entrada da IFFT do TX na posição correspondente à portadora de índice zero. Determine o conteúdo  $X' = I' + jQ'$  do *buffer* na saída da FFT do RX antes do bloco *channel compensation* na Figura 3 do enunciado.
- (d) Determine o conjunto de coeficientes de compensação *CoefComp* que o bloco *channel compensation* multiplicará as respectivas amostras  $X' = I' + jQ'$  do *buffer* na saída da FFT, para efeito de compensar os efeitos do *delay profile* do canal. Efetue a multiplicação dos coeficientes de *CoefComp* pelas respectivas amostras de  $X' = I' + jQ'$  e obtenha a sequência  $s_{\text{comp}}$  de amostras compensadas dos efeitos do *delay profile* do canal. Compare  $s_{\text{comp}}$  com a sequência  $s = I + jQ$  armazenada no *buffer* na entrada da IFFT no TX e verifique se o multipercurso foi efetivamente compensado pelo conjunto de coeficientes *CoefComp*.
- (e) Para as condições operacionais deste sistema, determine a duração mínima  $T_{\text{cp}}$  [μs] do prefixo cíclico no início de cada símbolo OFDM. Apresente arrazoado justificando analiticamente o processo de determinação de  $T_{\text{cp}}$ .
- (f) Determine o *overhead*  $T_{\text{cp}}/T_s$  gerado pelo prefixo cíclico na taxa de transmissão útil global do sistema, onde  $T_s = N_{\text{port}}/\text{ClockFFT} + T_{\text{cp}}$  é a duração do símbolo OFDM, conforme equação (17) do slide 44.
- (g) Determine a taxa de transmissão em [Kbps] em cada portadora.

**(h)** Determine a taxa de transmissão de dados úteis em [Mbps] para o *output bitstream* da Figura 3 do enunciado, sabendo que das  $N_{port}$  portadoras totais,  $N_{port}/4$  não transportam dados úteis e são utilizadas como portadoras piloto  $SP[l_p, k_p]$  para transportar a sequência de símbolos BPSK de referência que modulam os pilotos  $SP[l_p, k_p]$  no bloco *channel compensation* no RX. O bloco *channel compensation* determina a função de transferência  $H(f)$  do canal conforme determinação de  $H[l, k]$  no slide 41.

**Solução:** Para a solução deste exemplo vamos usar o *script* Mathcad Exemplo3.xmcd disponível em [https://www.fccdecastro.com.br/ZIP/SCD2\\_C4\\_E3S54.zip](https://www.fccdecastro.com.br/ZIP/SCD2_C4_E3S54.zip), conforme mostrado a seguir.

**(a & b)** Lendo o arquivo "IQStream.txt" contendo os símbolos IQ gerados pelo script "IQ&BitstreamGenerator.xmcd":

`IQStream := READPRN("IQStream.txt")`

$$\underline{s} := \text{IQStream}^{\langle 0 \rangle} + j \cdot \text{IQStream}^{\langle 1 \rangle} = \begin{pmatrix} 3 + i \\ 1 + 3i \\ 3 - i \\ 1 - i \\ -1 - 3i \\ 3 - 3i \\ -1 - i \\ 1 + i \end{pmatrix}$$



É dado no enunciado:

$\text{ClockFFT} := 8.16 \cdot \text{MHz} \rightarrow$  clock da FFT (equivalente ao *symbol rate* de um sistema *single carrier*).

$f_c := 174\text{MHz} \rightarrow$  frequência central do canal

$N_{\text{port}} := 8 \rightarrow$  Número de portadoras

**Amplitude do eco em db**    **Atraso do eco em  $\mu\text{s}$**

$$\text{DelayProfile} := \begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3.5 & 2.5 \\ -15 & 4.5 \\ -\infty & 0 \\ -\infty & 0 \\ -\infty & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

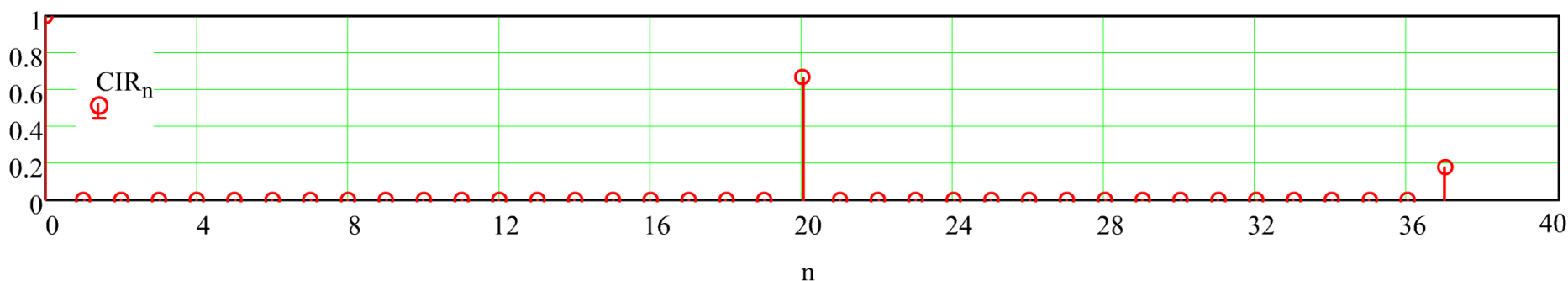
$$T := \frac{1}{\text{ClockFFT}} = 0.123 \cdot \mu\text{s} \rightarrow \text{Duração de uma amostra complexa Re+jIm em banda-base, na saída da IFFT no TX}$$

Dividindo a 2ª coluna do *DelayProfile* por  $T = 0.123 \cdot \mu\text{s}$  e arredondando para o inteiro mais próximo obtemos o número de intervalos amostrais correspondente ao atraso temporal do respectivo eco cuja amplitude em vezes (vezes= $10^{\text{db}/20}$ ) é especificada na 1ª coluna:

$$\text{DelayProfile} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.668 & 20 \\ 0.178 & 37 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A tabela DelayProfile acima permite determinar a resposta ao impulso discreta do canal através do seguinte arrazoado: A resposta ao impulso discreta do canal é formada por impulsos com amplitude especificada na 1ª coluna da tabela DelayProfile, impulsos estes que ocorrem nos respectivos instantes discretos de tempo (=índice das amostras) dados pela 2ª coluna desta tabela. A todas as demais amostras da resposta ao impulso do canal é atribuído o valor zero. Desta maneira, a resposta ao impulso discreta do canal resulta em:

### Resposta discreta ao impulso CIR (Channel Impulse Response) do canal:



Sejam  $F_{min}$  e  $F_{max}$  as frequências que delimitam a faixa de frequências passíveis de serem transmitidas por este canal para que Nyquist seja obedecido. Neste contexto, é necessário que a mínima frequência  $F_{min}$  e a máxima frequência  $F_{max}$  em torno da frequência central  $f_c = 174 \cdot \text{MHz}$  do canal obedeçam o seguinte mapeamento:

$$-\pi < \theta < \pi \rightarrow F_{min} < f < F_{max} \rightarrow f_c - \text{ClockFFT}/2 < f < f_c + \text{ClockFFT}/2$$

Note que este mapeamento obedece a faixa de variação permissível da frequência digital  $\theta$  para um canal bandpass de acordo com Nyquist. Neste contexto, temos portanto que:

$$F_{min} := f_c - \frac{\text{ClockFFT}}{2} = 169.92 \cdot \text{MHz}$$

$$F_{max} := f_c + \frac{\text{ClockFFT}}{2} = 178.08 \cdot \text{MHz}$$

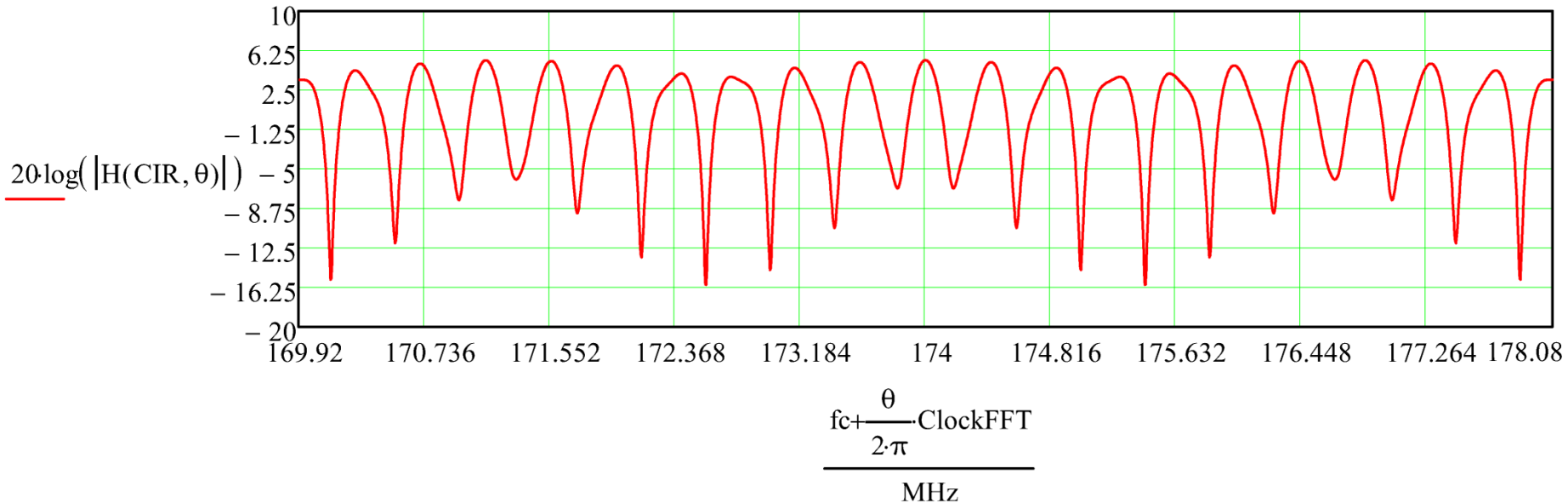
A resposta em frequência  $H(e^{j\theta})$  do canal é obtida aplicando-se a Transformada Z à resposta ao impulso do canal com  $z=e^{j\theta}$ , sendo  $-\pi<\theta<\pi$  a faixa de variação permissível da frequência digital  $\theta$ .

A Transformada Z para  $z=e^{j\theta}$  de uma sequência discreta  $CIR_n$  com N amostras ( no caso  $N = 38$  ) é dada pela equação (A) abaixo, sendo  $-\pi<\theta<\pi \rightarrow F_{min}=f_c-\text{ClockFFT}/2 < f < F_{max}=f_c+\text{ClockFFT}/2$ :

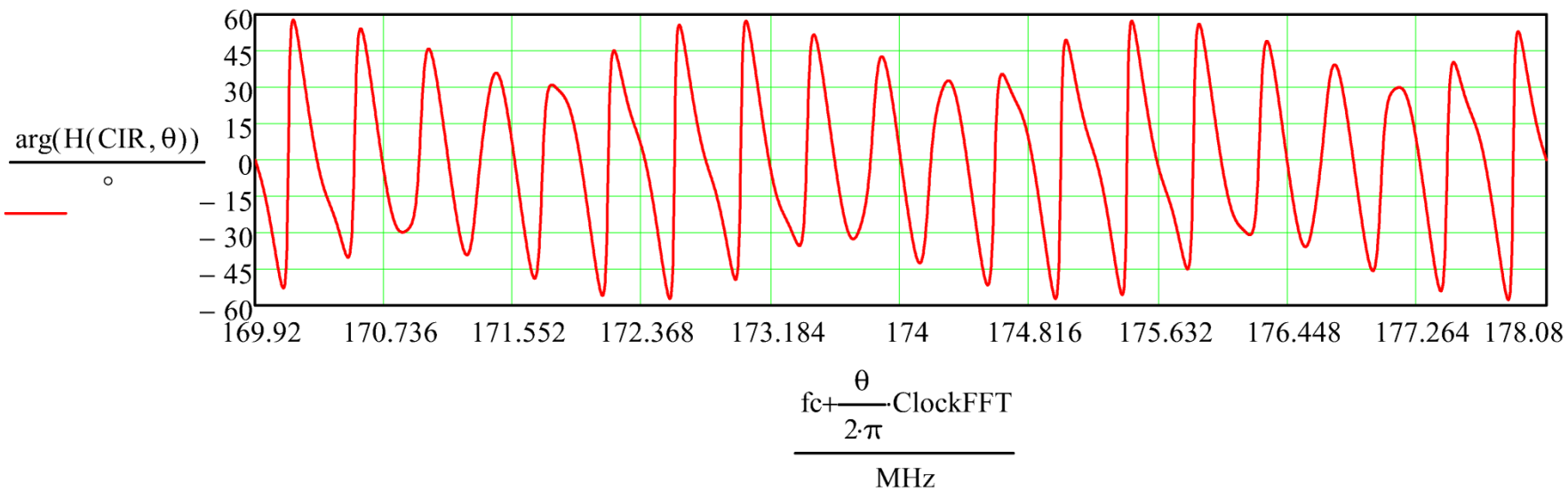
$$H(C, \theta) := \sum_{n=0}^{\text{length}(C)-1} \left[ C_n \cdot (e^{j \cdot \theta})^{-n} \right] \quad \theta := -\pi, -\pi + \frac{\pi}{1000} .. \pi \quad (A)$$

A partir de (A), o gráfico do módulo da resposta em frequência  $H(e^{j\theta})$  em [dB] e o gráfico do ângulo em [°] de  $H(e^{j\theta})$ , para  $-\pi<\theta<\pi \rightarrow F_{min}<f<F_{max}$ , sendo  $F_{min} = 169.92 \cdot \text{MHz}$  e  $F_{max} = 178.08 \cdot \text{MHz}$ , é conforme segue:

Módulo da resposta em frequência do canal [dB]:



## Fase da resposta em frequência do canal [graus]:



(c) Os  $N_{port} = 8$  símbolos  $s = I + jQ$  armazenados no *buffer* de entrada  $X$  da IFFT no TX da Figura 3 do enunciado são gerados na saída do *mapper* do TX a partir do *input bitstream* na entrada do *mapper*, conforme "*ibstream*" dado no enunciado, e, a seguir, estes símbolos são paralelizados no bloco *serial-parallel* sendo então armazenados no *buffer* de entrada  $X$  da IFFT. Consultando o mapeamento do *mapper* dado na Figura 3 do enunciado, os referidos símbolos  $s = I + jQ$  resultam conforme segue:

$$s = \begin{pmatrix} 3 + i \\ 1 + 3i \\ 3 - i \\ 1 - i \\ -1 - 3i \\ 3 - 3i \\ -1 - i \\ 1 + i \end{pmatrix}$$

Obtendo as frequências digitais  $\theta_{d_k}$ , sendo  $k := 0, 1..N_{port} - 1$  e  $N_{port} = 8$  portadoras, frequências digitais estas que correspondem às frequências analógicas de cada portadora no canal de transmissão:

$$\theta_{d_k} := -\pi + k \cdot \frac{2\pi}{N_{port} - 1} \quad \rightarrow \quad \theta_{d_k} =$$

-3.142
-2.244
-1.346
-0.449
0.449
1.346
2.244
3.142

A função de transferência  $H(e^{j\theta})$  do canal na frequência digital  $\theta_{d_k}$  de cada uma das  $N_{port} = 8$  portadoras é obtida da equação (A) acima, resultando conforme segue:

$$H(\text{CIR}, \theta_{d_k}) = \begin{pmatrix} 1.491 \\ 1.456 + 0.696i \\ 1.011 + 0.574i \\ 0.287 + 0.151i \\ 0.287 - 0.151i \\ 1.011 - 0.574i \\ 1.456 - 0.696i \\ 1.491 \end{pmatrix}$$



### Nota 1:

Note que  $H(e^{j\theta}) = H(\text{CIR}, \theta_{d_k})$  foi obtida pela Transformada Z da resposta ao impulso  $\text{CIR}_n$  do canal,  $p/z = 1e^{j\theta}$  e  $-\pi < \theta < \pi$ .

Um RX OFDM prático usa a FFT ao invés da Transformada Z, devido ao alto custo computacional da Transformada Z que é inadequado para operação em tempo real.

Ocorre que uma FFT de  $N_{\text{port}} = 8$  pontos é equivalente à Transformada Z para  $z = 1e^{j\theta}$  calculada em  $N_{\text{port}}$  pontos discretos no domínio z sobre o círculo de raio unitário, pontos que são separados angularmente de um intervalo de  $\frac{2\pi}{N_{\text{port}}}$ , conforme

slide 6 de [http://www.fccdecastro.com.br/pdf/SS\\_aula27a29\\_06072020.pdf](http://www.fccdecastro.com.br/pdf/SS_aula27a29_06072020.pdf). Neste contexto, os valores numéricos resultantes de ambas as transformadas (FFT e Z) são equivalentes. Assim, para fins didáticos, será usada aqui a Transformada Z para  $z = 1e^{j\theta}$  em substituição à FFT.

O conjunto de  $N_{\text{port}} = 8$  amostras complexas  $X' = I' + jQ'$ , onde  $X'$  é aqui representado por  $X_{-}$ , são armazenadas no *buffer* de saída da FFT do RX (ver Figura 3 do enunciado), sendo  $X_{-}$  analiticamente obtido pela multiplicação da sequência de símbolos  $s_k = I_k + jQ_k$  (16-QAM) armazenados no *buffer* de entrada da IFFT do TX pela  $H(e^{j\theta}) = H(\text{CIR}, \theta_{d_k})$  do canal calculado na frequência digital  $\theta_{d_k}$  de cada  $N_{\text{port}} = 8$  portadoras (ver slide 33 do Cap IV.2, sendo  $H(e^{j\theta})$  equivalente à  $H[k]$  no slide 33):

$$X_{-k} := s_k \cdot H(\text{CIR}, \theta_{d_k}) \quad \rightarrow \quad X_{-k} = \begin{pmatrix} 4.472 + 1.491i \\ -0.631 + 5.065i \\ 3.609 + 0.712i \\ 0.438 - 0.136i \\ -0.74 - 0.71i \\ 1.311 - 4.758i \\ -2.152 - 0.76i \\ 1.491 + 1.491i \end{pmatrix}$$

**(d)** O bloco *channel compensation* multiplica as  $N_{\text{port}} = 8$  amostras  $I' + jQ'$  armazenadas no *buffer*  $X'$  de saída da FFT do RX por um conjunto de respectivos coeficientes complexos para efeito de compensar a função de transferência  $H(e^{j\theta})$  do canal, já obtida na solução do item (a). Este conjunto de coeficientes de compensação  $\text{CoefComp}$  é obtido de  $H^{-1}(e^{j\theta})$ , isto é, de  $H(\text{CIR}, \theta_{d_k})^{-1}$ , conforme segue:

$$\text{CoefComp}_k := \frac{1}{H(\text{CIR}, \theta_{d_k})} \rightarrow \text{CoefComp} = \begin{pmatrix} 0.671 \\ 0.559 - 0.267i \\ 0.748 - 0.425i \\ 2.729 - 1.436i \\ 2.729 + 1.436i \\ 0.748 + 0.425i \\ 0.559 + 0.267i \\ 0.671 \end{pmatrix}$$

$$\text{scomp}_k := \text{CoefComp}_k \cdot X_{-k} \rightarrow \text{scomp} = \begin{pmatrix} 3 + i \\ 1 + 3i \\ 3 - i \\ 1 - i \\ -1 - 3i \\ 3 - 3i \\ -1 - i \\ 1 + i \end{pmatrix}$$

De (c) obtivemos  $s = \begin{pmatrix} 3 + i \\ 1 + 3i \\ 3 - i \\ 1 - i \\ -1 - 3i \\ 3 - 3i \\ -1 - i \\ 1 + i \end{pmatrix}$ , e daí, fazendo  $s - s_{\text{comp}}$  obtemos  $s - s_{\text{comp}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

$s - s_{\text{comp}} = \underline{0} \rightarrow \text{OK!}$  Multipercurso efetivamente compensado.

**Nota 2:** Usualmente, em um RX OFDM operando em tempo real, a função de transferência  $H(e^{i\theta})$  do canal não é obtida através da transformada Z da resposta ao impulso do canal, conforme aqui obtido, mas sim, através de algum método similar ao método *scattered pilots*  $SP[l_p, k_p]$ , conforme visto nos slides 37 a 41 do Cap IV.2. Note que as portadoras piloto  $SP[l_p, k_p]$  não transmitem dados úteis, e, portanto, o valor  $100 * N_{\text{pilot}} / N_{\text{port}}$  dá a percentagem da taxa útil global do sistema que é desperdiçada na transmissão de  $N_{\text{pilot}}$  portadoras piloto  $SP[l_p, k_p]$ .

(e) Caso não haja prefixo cíclico, o cenário de multipercurso definido no *delay profile* gera interferência entre as portadoras de dois símbolos OFDM  $S_n$  e  $S_{n+1}$  adjacentes no tempo, onde  $n$  é o índice da ordem de ocorrência temporal. Para eliminar este efeito, é necessário haver no início de cada símbolo  $S_n$  um prefixo cíclico cuja duração  $T_{cp}$  deve ser maior que o *delay spread* do canal. Seja  $B_n$  a seqüência de amostras correspondente à serialização do *buffer* de saída  $x$  da IFFT (vide Figura 3 do enunciado). O prefixo cíclico é formado pela seqüência de amostras no trecho ao final de  $B_n$ , trecho de duração de  $T_{cp}$  segundos, amostras que são sequencialmente inseridas antes do início de  $B_n$ . Este processo de inserção define o símbolo OFDM  $S_n$  a partir das amostras de  $B_n$ . Desta maneira, evita-se que os ecos de  $S_n$  avancem sobre  $S_{n+1}$ , gerando interferência entre as portadoras dos dois símbolos OFDM. Note que as portadoras dentro de um mesmo símbolo OFDM não interferem entre si devido à ortogonalidade entre elas, e não por efeito do prefixo cíclico.

Daí, baseado no princípio de que a duração  $T_{cp}$  deve ser maior que o *delay spread* do canal, temos que:

$$T_{cp} = 4.5 \cdot \mu\text{s} \quad \rightarrow \text{eco de maior atraso no tempo, obtido da tabela do } \textit{delay profile} \text{ do canal (vide acima)}$$

**(f)**  $100 \cdot T_{cp} / T_s$  dá a percentagem da taxa útil global do sistema que é desperdiçada na transmissão do prefixo cíclico, "deperdício" que é denominado de *overhead*. Note na equação (17) do slide 44 do Cap IV.2 (abaixo reproduzida) que quanto maior o número  $N_{port}$  de portadoras menor o *overhead*  $T_{cp} / T_s$  gerado por um longo prefixo cíclico (necessário devido a um longo *delay spread* no canal). Daí, portanto, temos:

$$N_{port} = 8 \quad \rightarrow \text{número de portadoras} \quad T_s := \frac{N_{port}}{\text{ClockFFT}} + T_{cp} = 5.48 \cdot \mu\text{s} \quad \rightarrow \text{duração de um símbolo OFDM} \quad \frac{T_{cp}}{T_s} = 0.821 \quad \rightarrow \text{overhead}$$

**(g)** Cada símbolo 16-QAM transportado no *symbol stream* atribuído a cada portadora pelo bloco *serial-parallel* da Figura 3 do enunciado é transmitido pelo TX a cada intervalo de  $T_s$  segundos, intervalo que corresponde ao tempo de duração de um símbolo OFDM (tempo de duração da sequência de amostras resultante no *buffer* de saída da IFFT no TX + tempo de duração  $T_{cp}$  do prefixo cíclico inserido). Daí temos:

$$N_{BitsPorSimboloIQ} := 4 \quad \rightarrow \text{16-QAM: símbolo IQ corresponde a 4 bits}$$

$$\text{TaxaBitsPorPortadora} := \frac{N_{BitsPorSimboloIQ}}{T_s} = 729.875 \cdot \text{KHz} \quad [\text{Kbps}]$$

**(h)** O bloco *parallel-serial* no RX da Figura 3 do enunciado serializa os diversos *streams* paralelos de símbolos IQ recebidos e que foram originalmente atribuídos a cada portadora pelo bloco *serial-parallel* do TX. Independente dos símbolos IQ estarem serializados ou paralelos, e independente dos símbolos IQ serem símbolos 16-QAM para transporte de dados ou símbolos BPSK para estimação e compensação do canal, o enunciado afirma que das  $N_{port}$  portadoras,  $N_{port}/4$  são portadoras piloto  $SP[l_p, k_p]$  utilizadas para transportar a sequência de símbolos BPSK de referência para o bloco *channel compensation* no RX (ver slides 37 a 41 do Cap IV.2). Nesta situação, temos que a taxa de transmissão de dados úteis em [Mbps] para o *output bitstream* da Figura 3 do enunciado é dada por:

$$\text{TaxaOutputBitStream} := \text{TaxaBitsPorPortadora} \cdot \left( N_{port} - \frac{N_{port}}{4} \right) = 4.379 \cdot \text{MHz} \quad [\text{Mbps}]$$

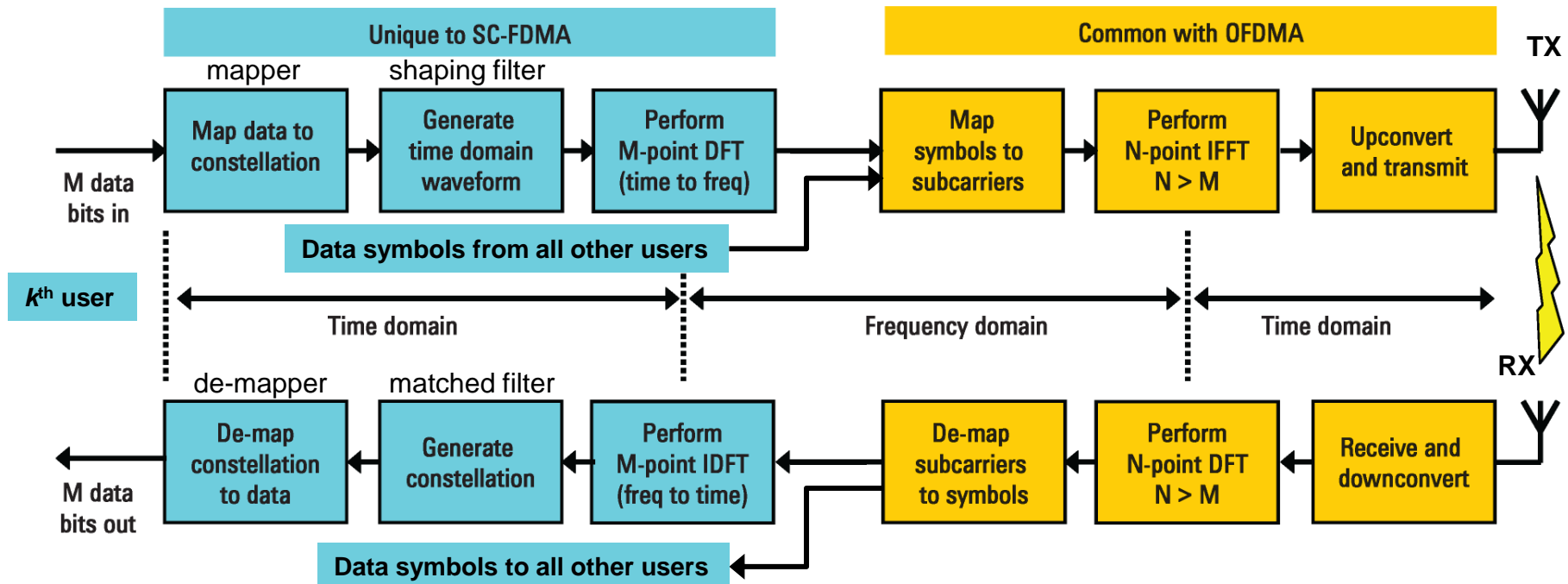


## Sistema SC-FDMA (4G-3GPP-LTE)

O sistema SC-FDMA (*Single Carrier – Frequency Division Multiple Access*) proporciona a mesma versatilidade de multiplexação que o sistema OFDM, sem o problema do alto custo dos HPAs para transmissores OFDM em razão do alto PAPR, conforme discutimos nos slides 45 a 47. O sistema SC-FDMA é adotado no *uplink* (telefone celular → *base-station*) do sistema de 4ª geração para telefonia celular 4G LTE (*Long Term Evolution*), desenvolvido pelo consórcio 3GPP (*3rd Generation Partnership Project*). O *downlink* (*base-station* → telefone celular) do sistema LTE adota OFDM, dado que não há uma limitação rigorosa de custo para o HPA do TX da *base-station*, ao contrário do HPA do telefone celular cujo custo é criticamente limitado por razões de mercado.

A figura abaixo mostra o diagrama de blocos simplificado do sistema SC-FDMA. Note que a saída do *shaping filter* de cada usuário é aplicada a uma DFT de M pontos cuja saída é entregue a uma IFFT de N pontos. Por exemplo, se a IFFT tiver  $N = 2048$  portadoras recebendo *data symbols* de 16 usuários, então o número de pontos M da DFT de cada usuário é  $M = N/16 = 128$ .

Como, para cada usuário, a sequência de símbolos IQ no domínio tempo é submetida a uma DFT antes de ser mapeada nas portadoras da IFFT, e como a IFFT é o inverso da DFT (uma anula o efeito da outra), então o sinal que é transmitido pela antena é a própria sequência de símbolos IQ do usuário, da mesma forma que em um sistema *single carrier*. Portanto, no sistema SC-FDMA não há superposição de senoides gerando picos e alto PAPR, como é o caso do sistema OFDM. Note que é mantida no sistema SC-FDMA a flexibilidade de multiplexar usuários em múltiplas portadoras, de mesma forma que no sistema OFDM.

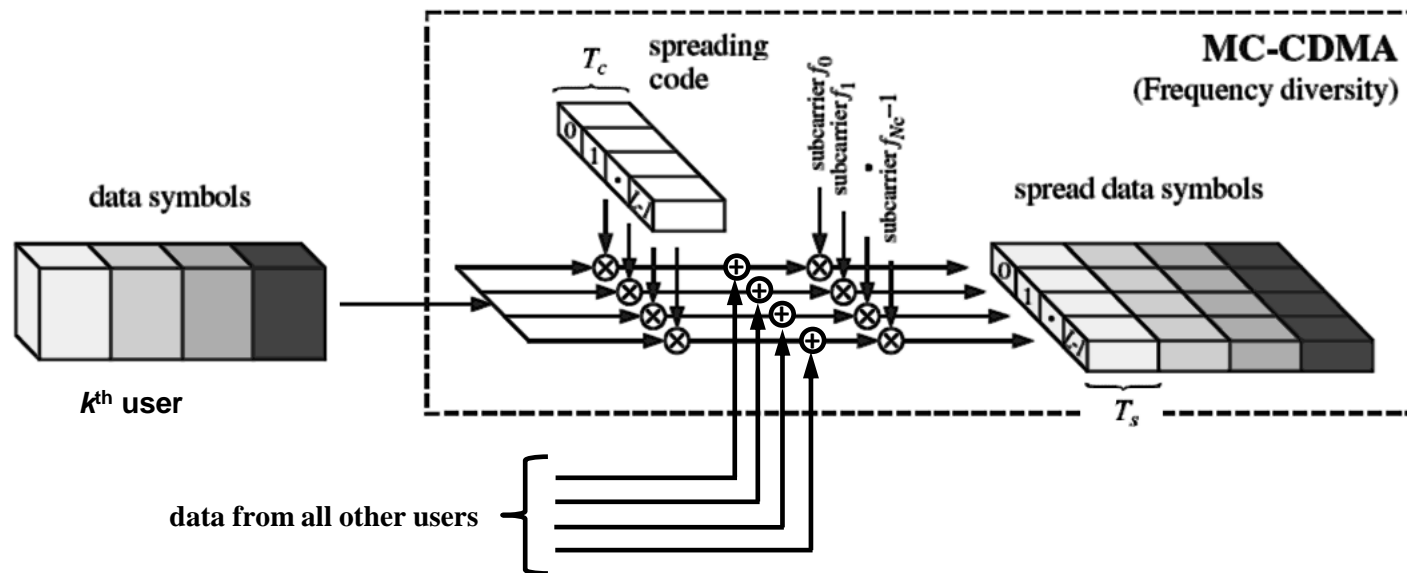


## Sistemas Multicarrier Spread Spectrum

Sistemas MSS (*multicarrier spread spectrum*) são sistemas híbridos que contemplam simultaneamente as características de sistemas OFDM e de sistemas CDMA. Dois sistemas MSS largamente empregados em comunicações militares são os sistemas MC-CDMA (*multicarrier CDMA*) e MC-DS-CDMA (*multicarrier direct-sequence CDMA*).

No sistema MC-CDMA cada  $k$ -ésimo usuário tem cada um de seus símbolos IQ atribuído às  $N_c$  portadoras (o mesmo símbolo é atribuído às  $N_c$  portadoras), sendo previamente submetido ao processo de *spreading* através de um código específico ao  $k$ -ésimo usuário, conforme mostra a figura.

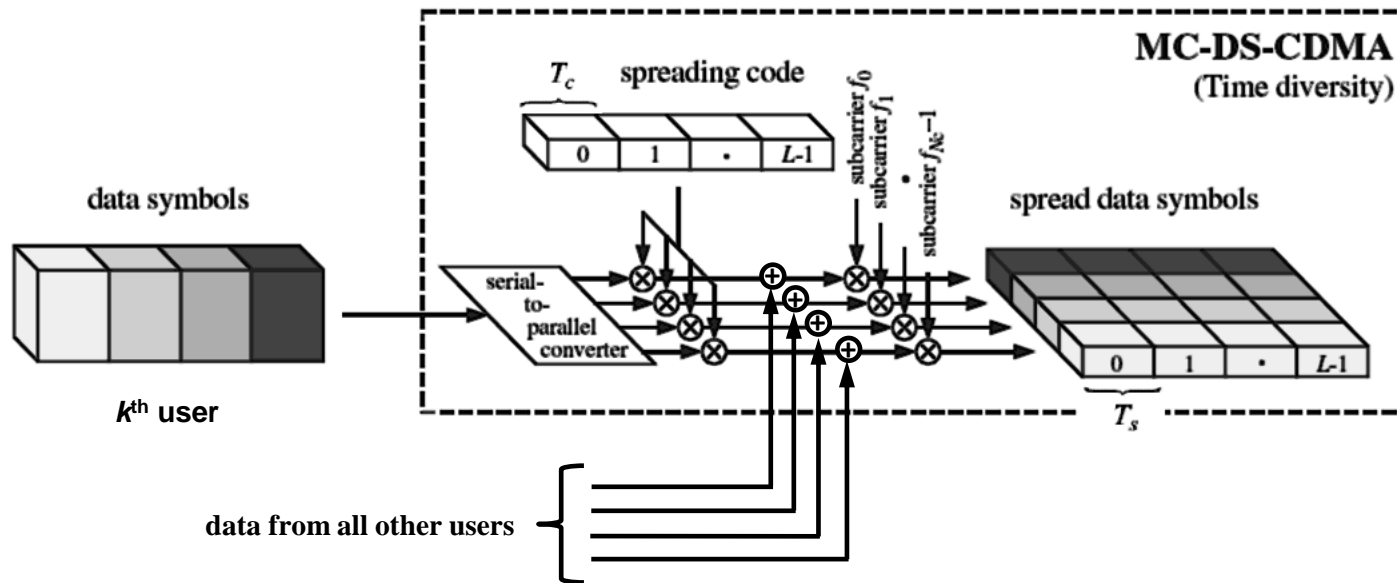
Note que os usuários são separados por código, e que, como o mesmo símbolo IQ de cada usuário (após o *spreading*) modula todas as  $N_c$  portadoras, obtém-se assim uma alta diversidade em frequência. Por esta razão, o sistema MC-CDMA é robusto e insensível aos *notches* na função de transferência do canal (*fading* seletivo) causado pelo multipercurso no canal, como acontece em um cenário operacional de multipercurso urbano.



## Sistemas Multicarrier Spread Spectrum

No sistema MC-DS-CDMA cada  $k$ -ésimo usuário tem a sequência de seus símbolos IQ distribuídos entre as  $N_c$  portadoras através do bloco *serial-to-parallel* (= chave rotativa do sistema OFDM), sendo previamente submetido ao processo de *spreading* através de um código específico ao  $k$ -ésimo usuário, conforme mostra a figura.

De mesma forma que no sistema MC-CDMA, os usuários são separados por código, com a diferença que no sistema MC-DS-CDMA o *spreading* é feito ao longo do tempo, obtendo-se assim uma alta diversidade temporal. Por esta razão, o sistema MC-DS-CDMA é robusto e insensível ao *fading* de sinal que ocorre em toda a banda operacional quando, sob operação móvel, a trajetória de movimento do RX passa por uma rápida sequência de regiões de sombra de sinal ou quando o canal é do tipo Rayleigh (ver [https://en.wikipedia.org/wiki/Rayleigh\\_fading](https://en.wikipedia.org/wiki/Rayleigh_fading)).

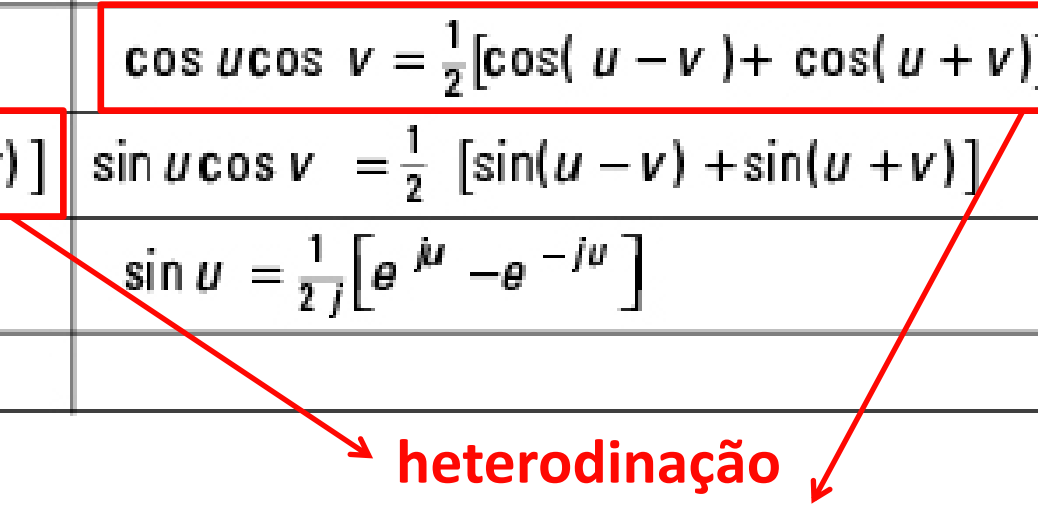


<b>Operation</b>	<b>Formula</b>
Rectangular to Polar Conversion	$z = x + jy = re^{j\theta}$ where $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ and $\theta = \arctan(y/x)$
Polar to Rectangular Conversion	$z = re^{j\theta} = r [\cos(\theta) + j\sin(\theta)] = x + jy$ where $x = r \cos(\theta)$ and $y = r \sin(\theta)$
Add: $z_3 = z_1 + z_2$	$(x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$
Subtract: $z_3 = z_1 - z_2$	$(x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$
Multiply: $z_3 = z_1 z_2$ (polar form)	$(x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + y_1 x_2)$ $r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$
Divide: $z_3 = z_1 / z_2$  (polar form)	$\frac{(x_1 x_2 - y_1 y_2) - j(x_1 y_2 - y_1 x_2)}{x_2^2 + y_2^2}$ $\frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$

## Apêndice B:

Sejam  $u = 2\pi f_1 t$  e  $v = 2\pi f_2 t$ . Valem as seguintes relações (*relationships*) trigonométricas:

<i>Relationship</i>	<i>Relationship</i>
$\sin u = \cos(u - \pi/2)$	$\cos u = \sin(u + \pi/2)$
$\cos(-u) = \cos u$	$\sin(-u) = -\sin(u)$
$\sin^2 u + \cos^2 u = 1$	$\cos^2 u = \frac{1}{2}(1 + \cos 2u)$
$\sin^2 u = \frac{1}{2}(1 - \cos 2u)$	$\cos(u \pm v) = \cos u \cos v \mp \sin u \sin v$
$\sin(u \pm v) = \sin u \cos v \pm \cos u \sin v$	$\cos u \cos v = \frac{1}{2}[\cos(u - v) + \cos(u + v)]$
$\sin u \sin v = \frac{1}{2}[\cos(u - v) - \cos(u + v)]$	$\sin u \cos v = \frac{1}{2}[\sin(u - v) + \sin(u + v)]$
$\cos u = \frac{1}{2}[e^{ju} + e^{-ju}]$	$\sin u = \frac{1}{2j}[e^{ju} - e^{-ju}]$
$e^{ju} = \cos u + j \sin u$	


**heterodinação**  
 das frequências  $f_1$  e  $f_2$