

Capítulo VI – Interferência Intersimbólica e Equalização de Canal

- ⇒ Um dos maiores obstáculos para a confiabilidade de comunicações digitais é a **interferência entre símbolos (ISI – *Inter-Symbol Interference*)**, inerentemente presente em todos os canais dispersivos, classe à que pertence a grande maioria dos canais de transmissão práticos.
- ⇒ É imperativa, portanto, a desconvolução do canal no receptor, sob ruído, com o objetivo de equalizá-lo.
- ⇒ A informação a ser transmitida é enviada através de um canal dispersivo C , resultando em ISI no sinal recebido $u(n)$, onde n é um número inteiro.
- ⇒ Representando a seqüência de símbolos $s(n)$ originados no transmissor digital, a cada instante nT , o transmissor envia o símbolo $s(nT) \in A$ através de C , sendo $A = \{s_0, s_1, \dots, s_{M-1}\}$ o alfabeto da informação a ser transmitida, constituído por M possíveis símbolos, e T o intervalo de amostragem dos símbolos (ou intervalo de *Baud*).
- ⇒ Conectado ao transmissor através do canal C , o receptor deverá ser capaz de identificar a quais símbolos do alfabeto A pertencem as amostras do sinal recebido $u(n)$, de acordo com a seqüência originalmente transmitida $s(n)$.

- A **dispersão de um canal** é medida pelo **intervalo de L_c amostras não nulas que resultam em resposta a uma excitação impulsiva imposta ao canal.**
- A existência da ISI no sinal recebido, resultante da dispersão de C , é observada através do fato de $u(n)$ assumir inúmeros valores tais que $u(n) \notin A$, mesmo sob ausência total de ruído.
- Portanto, ao transmitir $s(n)$ através de C , $u(n) \notin A$ como conseqüência da convolução da fonte original $s(n)$ com a resposta ao impulso $c(n)$ de C .
- Cada elemento da seqüência recebida $u(n)$ consiste em uma soma ponderada de todos os elementos prévios de $s(n)$, com ponderação determinada por $c(n)$.
- Sob o ponto de vista humano-acústico, a ISI pode ser percebida ao se estabelecer diálogo em um ambiente fechado com paredes de material reflexivo, como rocha polida.
- A reverberação acústica – ou ISI – pode atingir tal nível de incômodo a ponto de não se compreender as palavras (símbolos) do interlocutor.
- Uma solução para a distorção causada pela superposição de símbolos recebidos é adicionar ao receptor um **sistema capaz de compensar ou reduzir a ISI no sinal proveniente do canal.**

- Tal sistema compensador é denominado **Equalizador**.
- Como a operação geradora de ISI é uma convolução, o equalizador deve realizar a operação inversa, a desconvolução.
- Em consequência, um equalizador é considerado eficaz em atender ao objetivo a que se destina, se

a convolução da resposta ao impulso do canal $c(n)$ com a resposta ao impulso do equalizador $f(n)$ resultar em uma resposta impulsiva conjunta $h(n)$ definida por um único impulso $\delta(n-d)$ em algum instante d .

A resposta $\delta(n-d)$ caracteriza uma resposta impulsiva conjunta sem nenhuma dispersão.

No domínio frequência z , esta situação é expressa por

$$H(z) = C(z)F(z) = z^{-d} \quad (6.1)$$

Um canal dispersivo, ou multi-percurso, pode ser modelado através de uma função de transferência $C(z)$ do tipo FIR.

Assim, de (6.1), a função $F(z)$ do equalizador deve realizar, a menos do termo z^{-d} que define o atraso d da resposta conjunta $\delta(n-d)$ desejada, a inversa de $C(z)$.

De fato, se $d = 0$, $F(z)$ realiza exatamente $C^{-1}(z)$.

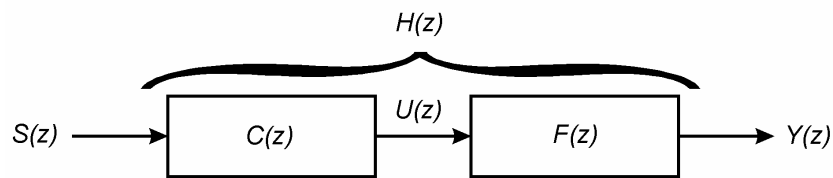


Figura 6.1: Modelo do canal e equalizador no domínio frequência.

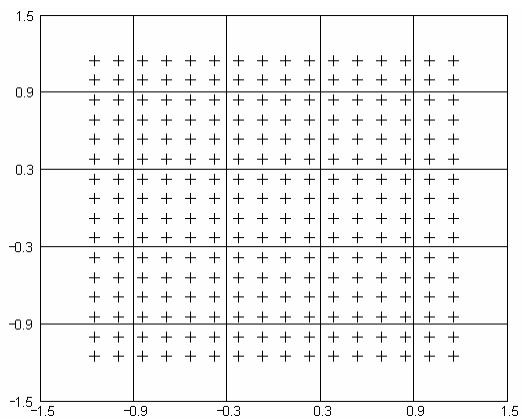
A Figura 6.1 mostra o diagrama de blocos simplificado resultante do sistema no domínio frequência z , onde

$Y(z) = Z\{y(n)\}$ é a resposta à excitação
 $S(z) = Z\{s(n)\}$ e

$U(z) = Z\{u(n)\}$ é a seqüência recebida $u(n)$ no domínio z , sendo

$Z\{\cdot\}$ o operador Transformada Z.

No domínio tempo, a remoção de ISI efetuada por um equalizador de canal pode ser melhor compreendida através do exemplo mostrado na Figura 6.2.



A Figura 6.2a mostra o alfabeto A , ou constelação, dos símbolos complexos referentes a uma fonte $s(n)$ cuja modulação (ou sinalização) é 256-QAM (QAM – *Quadrature Amplitude Modulation*) com variância unitária.

Fig. 6.2a: Constelação 256-QAM.

$N_a = 50000$ símbolos do alfabeto A da fonte de informação $s(n)$, gerados sequencialmente com probabilidade uniforme, são enviados através do canal C , caracterizado por dimensão de dispersão $L_c = 128$, cujo $|c(n)|$ é mostrado na Figura 6.2b, resultando no conjunto de N_a amostras u recebidas mostrado na Figura 6.2c.

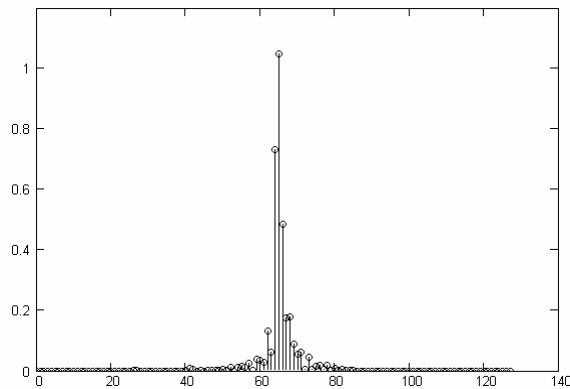


Fig. 6.2b:
Resposta impulsiva $|c(n)|$ do canal .

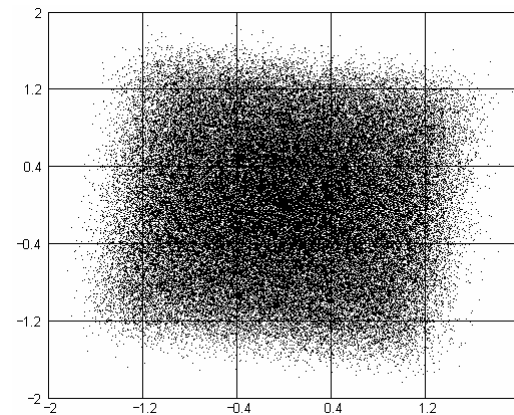


Fig. 6.2c:
Conjunto u na entrada do equalizador.

Ao ser submetido ao equalizador, o conjunto de amostras u transforma-se no conjunto de amostras equalizadas y mostradas na Figura 6.2d, próximo, portanto, da constelação original mostrada na Figura 6.2a.

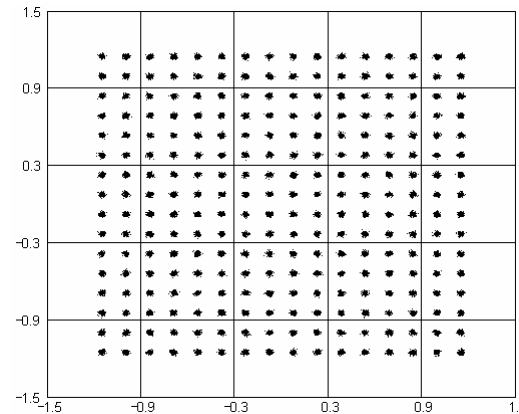


Fig. 6.2d: Conjunto y na saída do equalizador.

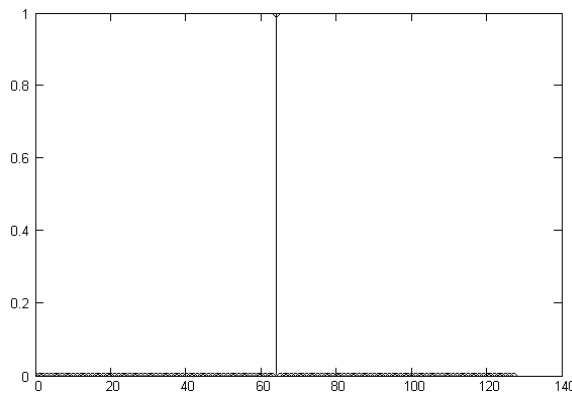


Fig. 6.2e: Módulo da resposta impulsiva combinada do canal e equalizador.

A resposta impulsiva conjunta $h(n)$ do equalizador e canal é mostrada na Figura 6.2e, resultando em $h(n) \approx \delta(n - 64)$, onde $\delta(n)$ é a função impulso unitário discreta.

Sempre que $h(n) \rightarrow \delta(n - d)$ diz-se que o equalizador atingiu a condição (ou situação) ZF (*zero forcing*), quando então, $ISI \rightarrow 0$.

Equalizador LMS – DD

O equalizador utilizado no processo de desconvolução da Figura 6.2 é um equalizador denominado LMS – DD e é baseado no algoritmo LMS.

A Figura 6.3 mostra o diagrama de blocos de um equalizador LMS –DD.

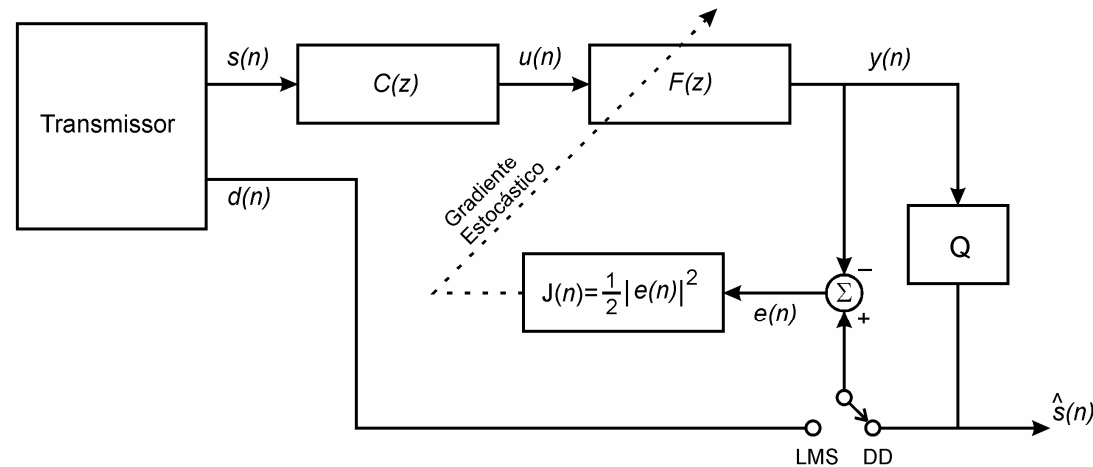


Figura 6.3: Equalizador LMS–DD.

O equalizador LMS–DD é clássico no contexto de equalização adaptativa, contexto no qual o equalizador adapta sua $F(z)$, objetivando reduzir a ISI.

A técnica baseia-se na transmissão de uma seqüência de treinamento preestabelecida, a qual é conhecida *a priori* tanto no transmissor como no receptor.

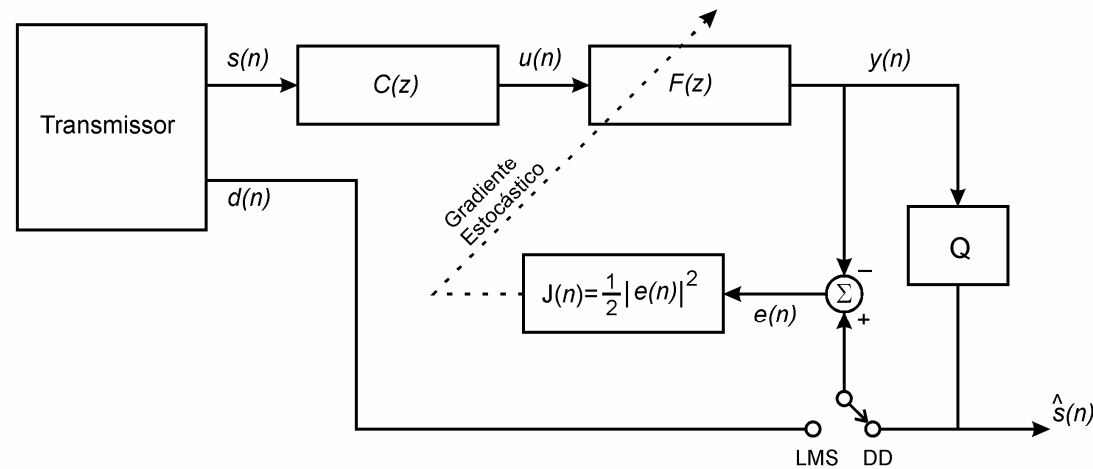


Figura 6.3: Equalizador LMS–DD.

- No receptor, o equalizador utiliza a seqüência de treinamento conhecida para adaptar $F(z)$ de modo **supervisionado**, através do algoritmo LMS, buscando atingir a condição *zero forcing* ($ISI \rightarrow 0$).
- É claro que, se o transmissor tivesse que enviar somente esta seqüência de supervisão, não haveria necessidade de equalizar o canal, já que este sinal de treinamento definido *a priori* não carrega informação útil.
- Na prática, no entanto, a seqüência de treinamento é transmitida somente na fase inicial do estabelecimento de comunicações ponto a ponto ou periodicamente para sistemas que operem em modo *broadcast*.

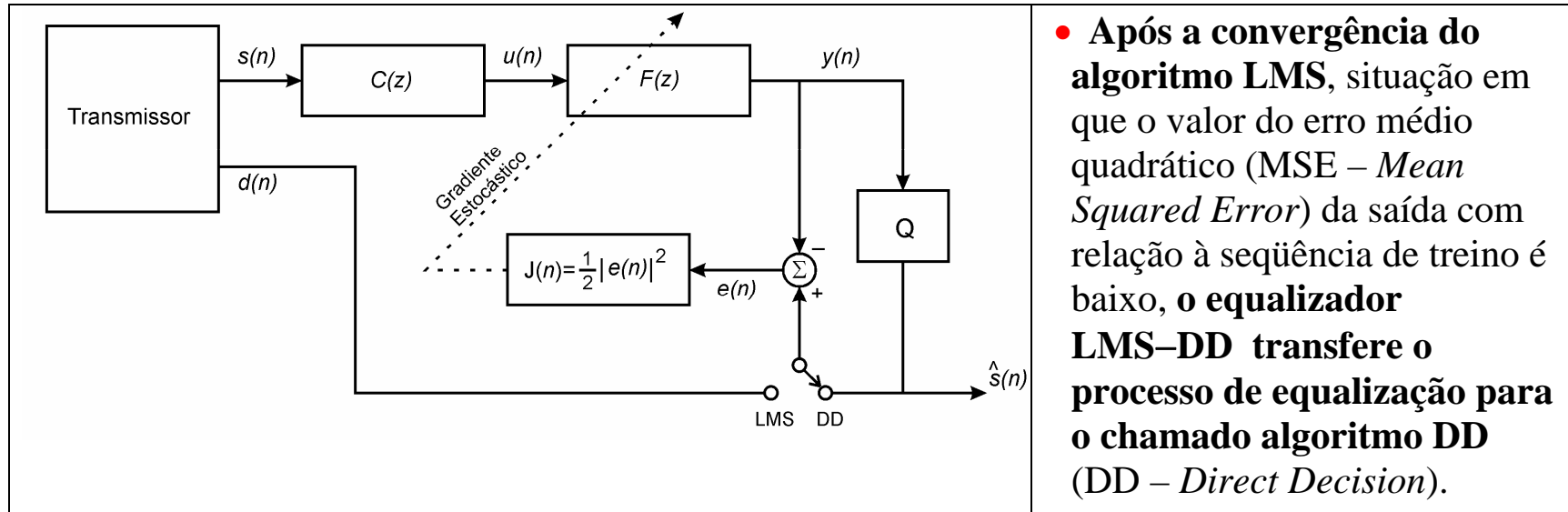
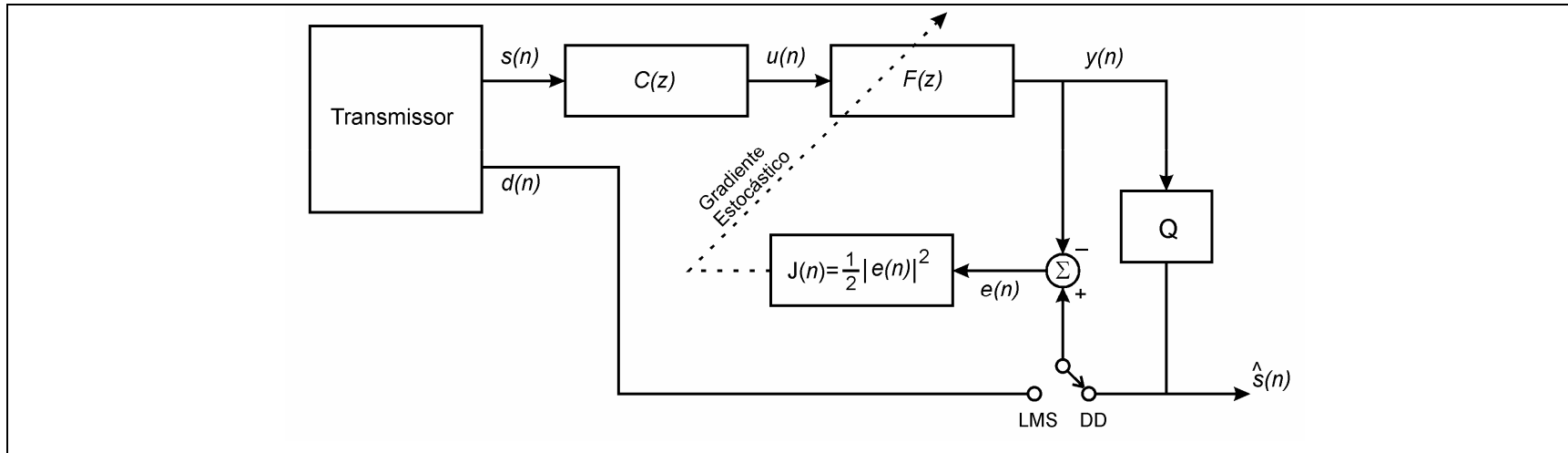


Figura 6.3: Equalizador LMS–DD.

- O algoritmo DD dispensa a seqüência de treino enquanto nenhuma alteração súbita e significativa ocorrer no canal.
- No algoritmo DD, a saída y do equalizador é aplicada a um quantizador Q , que é um dispositivo de decisão que estima a qual símbolo do alfabeto A mais próximo se encontra o valor de y , conforme mostra a Figura 6.4.
- Após o algoritmo LMS atingir um nível de MSE suficientemente baixo, a chave comuta da seqüência de treino $d(n)$ para a estimativa da seqüência originalmente transmitida $\hat{s}(n) = Q\{y(n)\}$.



É importante observar que o algoritmo Gradiente Estocástico adapta $F(z)$ objetivando minimizar a função de custo J , a qual mede:

- ⇒ o erro quadrático instantâneo entre a seqüência de saída $y(n)$ do equalizador e $\hat{s}(n)$ quando a chave está na posição “DD” ou
- ⇒ o erro quadrático instantâneo entre $y(n)$ e a seqüência de treino $d(n)$ quando a chave está na posição “LMS”.

- O algoritmo DD é capaz de acompanhar, de modo adaptativo, lentas variações em $C(z)$ sem a necessidade explícita de se retransmitir novamente o sinal de treinamento.
- O equalizador LMS–DD é um equalizador **não-autodidata** ou **supervisionado** porque tem acesso à seqüência de símbolos originais $s(n)$ através da seqüência de treino $d(n)$.
- Isto torna o processo de desconvolução supervisionado muito mais fácil do que o processo de desconvolução denominado **autodidata**, o qual não necessita deste sinal de referência.
- No entanto, esta facilidade implica na resultante penalidade de reduzir a banda passante do sistema digital como um todo.

Funcionamento do Equalizador LMS – DD

A Figura 6.4 detalha um Equalizador LMS – DD.

A seqüência de amostras $u(n)$ recebida do canal é seqüencialmente armazenada na fila (*queue*) de blocos z^{-1} (z^{-1} : saída do bloco atrasada de uma amostra com relação à entrada).

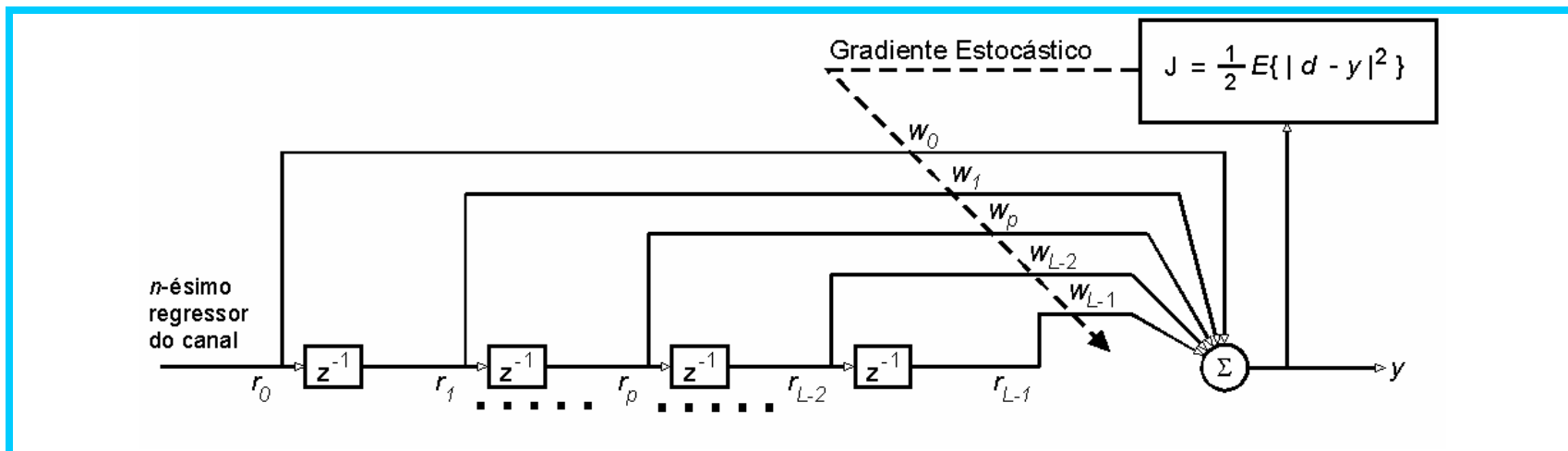


Figura 6.4: Diagrama do Equalizador LMS – DD.

Como um grande número de sistemas digitais utiliza modulação M -QAM e M -PSK, as amostras $u(n)$ são, em geral, números complexos.

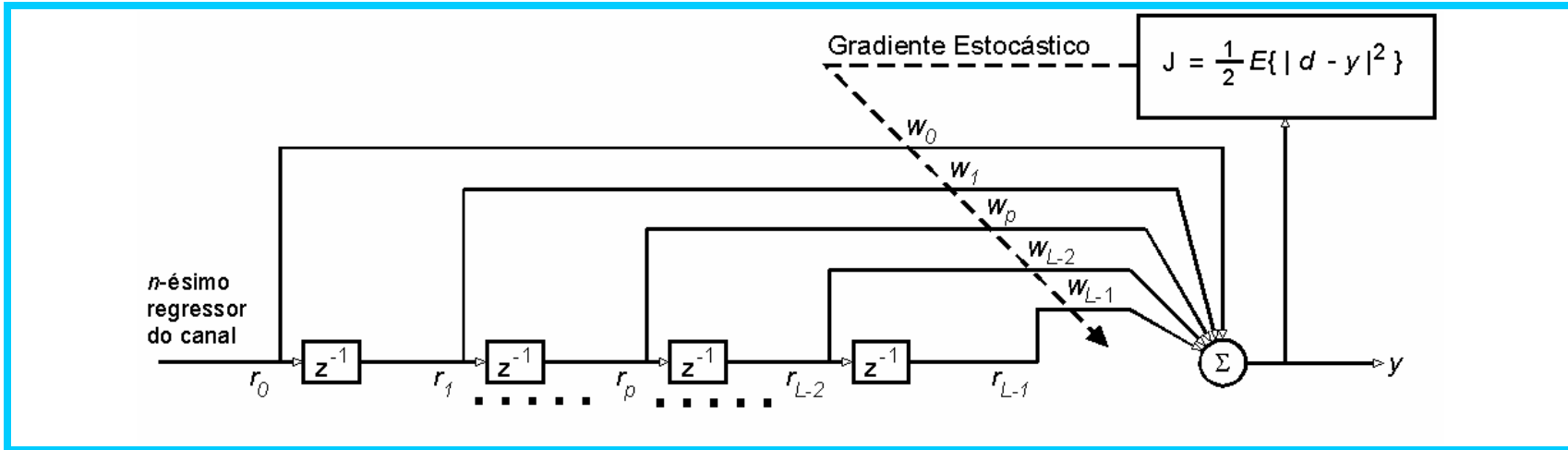


Figura 6.4: Diagrama do Equalizador LMS – DD.

O conjunto de saídas da fila de blocos z^{-1} define o vetor $\underline{r} = [r_0 \ r_1 \ \dots \ r_{L-1}]^T$, denominado **regressor do canal**.

O conjunto de coeficientes $\{W_0, W_1, \dots, W_{L-1}\}$ define os ganhos dos caminhos que chegam ao somador Σ .

O somador Σ estabelece a soma das saídas dos blocos z^{-1} ponderadas pelo conjunto de coeficientes $\{W_0, W_1, \dots, W_{L-1}\}$, de forma que $F(z) = W_0 + W_1 z^{-1} + \dots + W_{L-1} z^{L-1}$.

A $F(z)$ assim implementada define um filtro FIR transversal e um equalizador com esta arquitetura é denominado **equalizador transversal**.

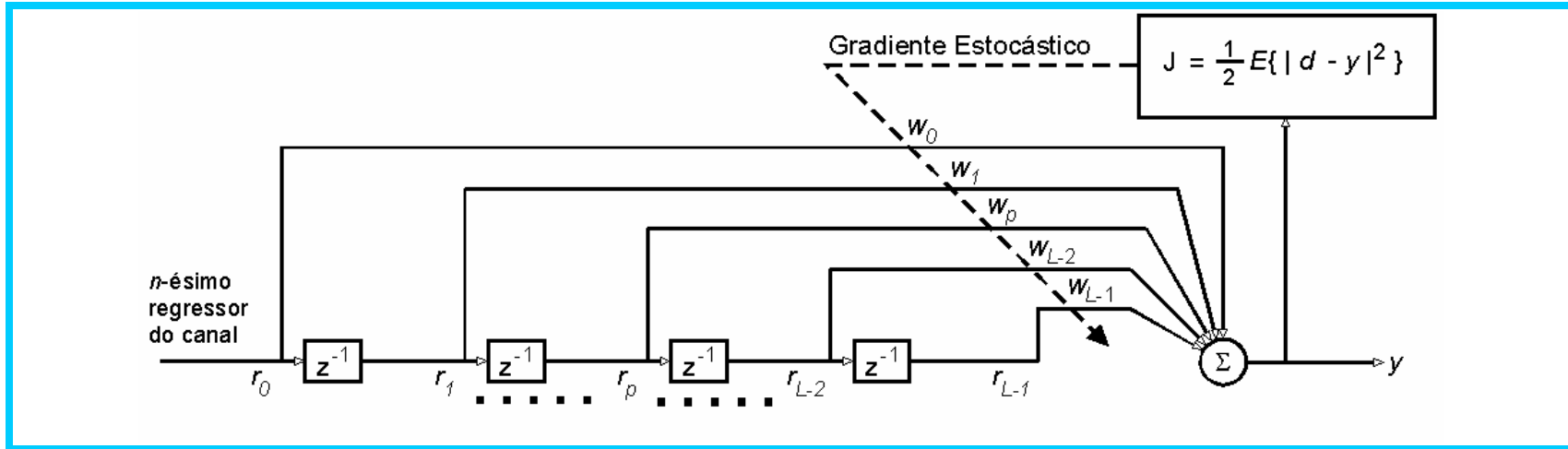


Figura 6.4: Diagrama do Equalizador LMS – DD.

A Figura 6.4 mostra o equalizador no instante n . Como o instante é definido, visando a compacidade das equações no desenvolvimento que segue, não explicitaremos o indexador n para as variáveis envolvidas a menos que n não seja inequivocamente definido pelo contexto.

A partir de sua inicialização, o vetor de pesos $\underline{W} = [W_0 \ W_1 \ \dots \ W_{L-1}]^T$ é atualizado pelo Gradiente Estocástico, visando minimizar a função de custo J .

Observe que J mede o quadrado da norma Euclidiana entre a saída do equalizador e o símbolo da seqüência de treino (ou o símbolo na saída do quantizador Q se a chave estiver na posição “DD”).

Seja o vetor representativo do n -ésimo regressor do canal $\underline{r}(n)$, $n = 0, 1, \dots$, definido por

$$r_k(n) = u(L - 1 - k + n), \quad k = 0, 1, \dots, L - 1 \quad (6.2)$$

onde L é a dimensão do equalizador e u é a seqüência de amostras recebida do canal.

A saída do equalizador é dada por

$$y = \underline{W}^T \cdot \underline{r} \quad (6.3)$$

ou

$$y = \sum_{k=0}^{L-1} W_k \cdot r_k \quad (6.4)$$

que é identicamente equivalente à

$$\begin{aligned} y &= \left\{ \sum_{k=0}^{L-1} [\operatorname{Re}\{W_k\} \operatorname{Re}\{r_k\} - \operatorname{Im}\{W_k\} \operatorname{Im}\{r_k\}] \right\} + j \left\{ \sum_{k=0}^{L-1} [\operatorname{Re}\{W_k\} \operatorname{Im}\{r_k\} + \operatorname{Im}\{W_k\} \operatorname{Re}\{r_k\}] \right\} = \\ &= \operatorname{Re}\{y\} + j \operatorname{Im}\{y\}, \quad j = \sqrt{-1} \end{aligned} \quad (6.5)$$

A minimização da função de custo J é feita através de sucessivos ajustes do vetor \underline{W} pelo algoritmo Gradiente Estocástico, à medida que n é incrementado:

$$J = \frac{1}{2} E\{|d - y|^2\} = \lim_{n \rightarrow \infty} J(n) \quad (6.6)$$

$$J(n) = \frac{1}{2} \{|d(n) - y(n)|^2\} \quad (6.7)$$

$$W_p(n+1) = W_p(n) + \eta_w \cdot (-\nabla_p J(n)), \quad p = 0, 1, \dots, L-1 \quad (6.8)$$

onde w_p é o p -ésimo peso do vetor de pesos \underline{W} , η_w é o passo de adaptação, $\eta_w > 0$, e

$$\nabla_p J = \nabla_p^R J + j \nabla_p^I J = \frac{\partial J}{\partial \text{Re}\{W_p\}} + j \frac{\partial J}{\partial \text{Im}\{W_p\}} \quad (6.9)$$

é o p -ésimo componente do vetor gradiente complexo de J tomado com relação à variação do p -ésimo componente do vetor \underline{W} .

Substituindo (6.7) em (6.9),

$$\nabla_p J = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial |d - y|^2}{\partial \text{Re}\{W_p\}} + j \frac{\partial |d - y|^2}{\partial \text{Im}\{W_p\}} \right] \quad (6.10)$$

Mas de (6.5),

$$\begin{aligned}
 |d - y|^2 &= (\text{Re}\{d\} - \text{Re}\{y\})^2 + (\text{Im}\{d\} - \text{Im}\{y\})^2 = & (6.11) \\
 &= \left\{ \text{Re}\{d\} - \left[\sum_{k=0}^{L-1} [\text{Re}\{W_k\} \text{Re}\{r_k\} - \text{Im}\{W_k\} \text{Im}\{r_k\}] \right] \right\}^2 + \\
 &+ \left\{ \text{Im}\{d\} - \left[\sum_{k=0}^{L-1} [\text{Re}\{W_k\} \text{Im}\{r_k\} + \text{Im}\{W_k\} \text{Re}\{r_k\}] \right] \right\}^2
 \end{aligned}$$

De (6.11), com referência à (6.10),

$$\frac{\partial |d - y|^2}{\partial \text{Re}\{W_p\}} = 2 \left(\begin{array}{l} [\text{Re}\{d\} - \text{Re}\{y\}] \left[\frac{\partial \text{Re}\{d\}}{\partial \text{Re}\{W_p\}} - \text{Re}\{r_p\} \right] + \\ [\text{Im}\{d\} - \text{Im}\{y\}] \left[\frac{\partial \text{Im}\{d\}}{\partial \text{Re}\{W_p\}} - \text{Im}\{r_p\} \right] \end{array} \right) \quad (6.12)$$

$$\frac{\partial |d - y|^2}{\partial \text{Im}\{W_p\}} = 2 \left(\begin{array}{l} [\text{Re}\{d\} - \text{Re}\{y\}] \left[\frac{\partial \text{Re}\{d\}}{\partial \text{Im}\{W_p\}} + \text{Im}\{r_p\} \right] + \\ [\text{Im}\{d\} - \text{Im}\{y\}] \left[\frac{\partial \text{Im}\{d\}}{\partial \text{Im}\{W_p\}} - \text{Re}\{r_p\} \right] \end{array} \right) \quad (6.13)$$

Mas d é um valor constante independente do vetor \underline{W} , portanto todas as derivadas de d em (6.12) e (6.13) são nulas. Tendo este fato em mente e substituindo (6.12) e (6.13) em (6.10), temos

$$-\nabla_p \mathbf{J} = \left(\begin{array}{c} [\operatorname{Re}\{d\} - \operatorname{Re}\{y\}] \operatorname{Re}\{r_p\} + \\ [\operatorname{Im}\{d\} - \operatorname{Im}\{y\}] \operatorname{Im}\{r_p\} \end{array} \right)^+ + j \left(\begin{array}{c} [\operatorname{Im}\{d\} - \operatorname{Im}\{y\}] \operatorname{Re}\{r_p\} + \\ -[\operatorname{Re}\{d\} - \operatorname{Re}\{y\}] \operatorname{Im}\{r_p\} \end{array} \right) \quad (6.14)$$

Substituindo (6.14) em (6.8), obtém-se a equação de atualização do vetor \underline{W} para a minimização da função de custo \mathbf{J} através do Gradiente Estocástico:

$$W_p(n+1) = W_p(n) + \eta_w \left\{ \left(\begin{array}{c} [\operatorname{Re}\{d(n)\} - \operatorname{Re}\{y(n)\}] \operatorname{Re}\{r_p(n)\} + \\ [\operatorname{Im}\{d(n)\} - \operatorname{Im}\{y(n)\}] \operatorname{Im}\{r_p(n)\} \end{array} \right)^+ + j \left(\begin{array}{c} [\operatorname{Im}\{d(n)\} - \operatorname{Im}\{y(n)\}] \operatorname{Re}\{r_p(n)\} + \\ -[\operatorname{Re}\{d(n)\} - \operatorname{Re}\{y(n)\}] \operatorname{Im}\{r_p(n)\} \end{array} \right) \right\} \quad (6.15)$$

ou, visto que $e(n) = d(n) - y(n)$,

$$W_p(n+1) = W_p(n) + \eta_w \left\{ \left(\begin{array}{c} \operatorname{Re}\{e(n)\} \operatorname{Re}\{r_p(n)\} + \\ \operatorname{Im}\{e(n)\} \operatorname{Im}\{r_p(n)\} \end{array} \right)^+ + j \left(\begin{array}{c} \operatorname{Im}\{e(n)\} \operatorname{Re}\{r_p(n)\} - \\ \operatorname{Re}\{e(n)\} \operatorname{Im}\{r_p(n)\} \end{array} \right) \right\} \text{ mas} \quad (6.16)$$

$$\left(\operatorname{Re}\{e\} \operatorname{Re}\{r_p\} + \operatorname{Im}\{e\} \operatorname{Im}\{r_p\} \right)^+ + j \left(\operatorname{Im}\{e\} \operatorname{Re}\{r_p\} - \operatorname{Re}\{e\} \operatorname{Im}\{r_p\} \right) = e \cdot r_p^* \quad (6.17)$$

daí, (6.16) pode ser re-escrita como

$$W_p(n+1) = W_p(n) + \eta_w e(n) r_p^*(n) \text{ ou em forma vetorial,} \quad (6.18)$$

$$\underline{W}(n+1) = \underline{W}(n) + \eta_w e(n) \underline{r}^*(n) \quad (6.19)$$

Etapa	Sumário do Equalizador LMS – DD
1	Inicializar o vetor L dimensional \underline{W} : $\underline{W} = \underline{0} + j\underline{0}$ onde $j = \sqrt{-1}$ e L é o “tamanho” (dimensão) do equalizador.
2	Inicializar o indexador de regressor do canal (ou indexador de instante/iteração): $n = 0$
3	Obter o vetor que define o n -ésimo regressor do canal $\underline{r}(n)$: $r_k(n) = u(L-1-k+n)$, $k = 0, 1, \dots, L-1$ onde u é a seqüência de amostras recebida do canal.
4	Obter a saída do equalizador no instante n : $y(n) = \underline{W}^T(n) \cdot \underline{r}(n)$
5	Calcular erro: $e(n) = d(n) - y(n)$
6	Atualizar o vetor de pesos \underline{W} : $\underline{W}(n+1) = \underline{W}(n) + \eta_w e(n) \underline{r}^*(n)$
7	Incrementar indexador: $n=n+1$
8	Comutação da chave LMS – DD : Se o MSE dado pela média dos últimos L valores de $e(n)$ é menor que: 0.076 p/16-QAM, 0.0182 p/ 64-QAM, 0.0045 p/ 256-QAM e 0.0011 p/ 1024-QAM, então comuta a chave para DD, caso contrário comuta a chave para LMS (neste último caso o receptor deve sinalizar ao transmissor para que este reinicie o envio da seqüência de treino).
9	Repetir as etapas 3 a 9 até que todas as amostras enviadas tenham sido processadas.

Técnicas de Equalização Usuais – Discussão

Na grande maioria dos sistemas de comunicação digital de alta velocidade a função de transferência $C(z)$ do canal de propagação C não é conhecida *a priori*.

Além do canal não ser conhecido, a sua caracterização varia com o tempo, devido à alterações nas condições ambientais do percurso do canal ou devido ao movimento relativo entre transmissor e receptor.

Portanto, é bastante desejável que o equalizador seja implementado baseado em técnicas adaptativas, de forma a poder acompanhar as variações de $C(z)$ ao longo do tempo.

No entanto, o uso de uma seqüência de treinamento para o equalizador constitui desperdício de banda passante, já que seqüências de treinamento não transportam informação útil.

A necessidade imperiosa de sistemas de comunicação digital de alta velocidade não se coaduna com a não otimização da ocupação de banda.

Mesmo para comunicações ponto a ponto, em que a seqüência de treinamento necessitaria ser transmitida somente na fase inicial, não é raro alguma variação drástica no canal (possivelmente pequenas aeronaves na linha de visada entre antenas ou pássaros na região de campo próximo [Jasik] de uma das antenas) obrigar a parada momentânea do sistema para que seja efetuada a reinicialização do equalizador LMS–DD pelo algoritmo LMS.

É imperativo, portanto, a concepção de equalizadores que operem com base no sinal recebido e com base em alguma característica estatística da fonte $s(n)$, mas não necessariamente com base na seqüência de símbolos originais $s(n)$ (implícita na seqüência de treino $d(n)$).

Tal classe de equalizadores é denominada autodidata.

Um equalizador autodidata, portanto, efetua a desconvolução autodidata do canal sem a necessidade de conhecer a seqüência $s(n)$ originalmente transmitida, ao contrário dos algoritmos supervisionados LMS e LMS-DD, que forçosamente precisam desta referência (dada pela seqüência de treino $d(n)$) para que a condição ZF seja alcançada.

Os equalizadores autodidatas, ou não-supervisionados, são também conhecidos como equalizadores cegos (*blind equalizers*), pela maneira como buscam atingir a condição ZF.