



Transformada de Fourier no Tempo Discreto (DTFT – *Discrete Time Fourier Transform*) - análise espectral no domínio frequência angular ω de sinais não-periódicos no domínio tempo discreto



Departamento de Eletrônica e Computação

Centro de Tecnologia

ELC1115 – Sinais e Sistemas

Prof. Fernando DeCastro

DTFT (*Discrete Time Fourier Transform*) Transformada de Fourier no domínio tempo discreto

Vimos no Cap III.2 das notas de aula que uma sequência periódica $x[n]$ de período N pode ser representada por uma superposição de exponenciais complexas :

$$x[n] = \sum_{k=n_0}^{n_0+N-1} c_x[k] e^{j2\pi kn/N} \quad (1)$$

onde n_0 é um valor inteiro e arbitrário, sendo usualmente adotado $n_0 = 0$ e onde os coeficientes $c_x[k]$, que definem o espectro discreto de $x[n]$, são dados por:

$$c_x[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N} \quad (2)$$

No Cap III.3 partimos da SF exponencial de um sinal periódico $x_T(t)$ de período T conforme (3) abaixo, com coeficientes espectrais $c_x[k]$ dado por (4):

$$x_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_x[k] e^{j2\pi kt/T} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_x[k] e^{jk\omega t} \quad \text{sendo } \omega = 2\pi/T \quad (3)$$

$$c_x[k] = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x_T(t) e^{-j2\pi kt/T} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) e^{-jk\omega t} dt \quad (4)$$

E, mediante um procedimento analítico que converte o domínio frequência discreto para contínuo adaptamos (3) e (4) para representar um sinal $x_T(t)$ para $T \rightarrow \infty$ de modo que as componentes espectrais resultem com uma separação infinitesimal entre si no domínio frequência (ver slides 14 a 17 do Cap III.3). Especificamente, o referido procedimento analítico adapta as equações (3) e (4) para que possam representar um sinal $x(t)$ aperiódico (i. e., $T \rightarrow \infty$), representação que define a transformada de Fourier direta $X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ e inversa $x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\}$, conforme (5) e (6):

$$X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (5)$$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (6)$$

DTFT (*Discrete Time Fourier Transform*) Transformada de Fourier no domínio tempo discreto

A semelhança entre as equações (1) e (3) sugere que é possível aplicar a (1) e (2) o mesmo procedimento analítico referido no slide anterior aplicado a (3) e (4) para converter o domínio frequência discreto para contínuo. O procedimento adapta (1) e (2) para representar uma sequência $x[n]$ de período N infinito, i.e. aperiódica, situação em que as componentes espectrais resultam com uma separação infinitesimal entre si no domínio frequência. Aplicando então o referido procedimento às equações (1) e (2) obtemos a representação que define a DTFT direta $X(\omega) = \mathcal{F}\{x[n]\}$ e inversa $x[n] = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\}$, conforme (7) e (8):

$$X(\omega) = \mathcal{F}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \quad (7)$$

$$x[n] = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_0}^{\omega_0+2\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega \quad (8)$$

onde ω_0 é um valor arbitrário, sendo usualmente adotado $\omega_0 = -\pi$. Note que os limites de integração em (8) implicam **que $X(\omega)$ é periódica de período 2π no domínio frequência ω** . Esta periodicidade decorre da periodicidade de $e^{-j\omega n}$ em (7), cujo período em função do argumento ωn é 2π , sendo n inteiro. Para evidenciar a representação através de exponenciais complexas de periodicidade 2π é usual adotar a notação $X(e^{j\omega})$ para representar $X(\omega)$ quando então (7) e (8) podem ser reescritas na forma

$$X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \quad (9)$$

$$x[n] = \mathcal{F}^{-1}\{X(e^{j\omega})\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (10)$$

A equação (9) é a DTFT (*Discrete Time Fourier Transform*) da sequência $x[n]$ e é uma expressão que computa o espectro $X(e^{j\omega})$, ou seja, a amplitude e a fase de cada senoide que constrói a sequência $x[n]$ no tempo, lembrando que o conceito de espectro já foi discutido em capítulos anteriores. Especificamente, $X(e^{j\omega})$ expressa a magnitude e a fase de cada componente espectral no domínio frequência requerida para sintetizar $x[n]$ no domínio tempo discreto por meio da equação (10), que é a DTFT inversa de $X(e^{j\omega})$. Pelo fato de $X(e^{j\omega})$ representar amplitude e fase de cada senoide que constrói o sinal digitalizado $x[n]$ no tempo, diz-se que $X(e^{j\omega})$ representa o **espectro de frequências angulares digitais ω** que constroem a sequência $x[n]$ no tempo.

DTFT inversa (síntese de $x[n]$ no domínio tempo discreto)

DTFT direta (análise espectral de $x[n]$ no domínio frequência contínuo)

$$x[n] = \mathcal{F}^{-1}\{X(e^{j\omega})\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \iff X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

- Note que, na DTFT, o domínio tempo n é discreto, mas o domínio frequência ω é contínuo.
- Mais à frente, em capítulo posterior, estudaremos a Transformada Discreta de Fourier (DFT), em que tanto o domínio tempo n quanto o domínio frequência k são discretos.
- A DFT é adotada quando a sequência $x[n]$ não é definida para todo n mas, sim, para um número limitado de amostras n .
- A DTFT é adotada quando a sequência $x[n]$ é definida para todo n .
- Se o sinal $x[n]$ existe em todo o tempo, a separação das componentes espectrais no domínio frequência é infinitesimal e, portanto, o espectro $X(e^{j\omega})$ é contínuo.

$$X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \quad (9)$$

Como já observado para todas as representações espectrais discutidas em capítulos anteriores, o espectro $X(e^{j\omega})$ resultante da DTFT – equação (9) – é uma função complexa de ω :

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \mathcal{F}\{x[n]\} = \text{Re}\{X(e^{j\omega})\} + j \text{Im}\{X(e^{j\omega})\} = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega}) = \\ &= \sqrt{X_R^2(e^{j\omega}) + X_I^2(e^{j\omega})} e^{j \text{atan}\left(\frac{X_I(e^{j\omega})}{X_R(e^{j\omega})}\right)} = \underbrace{|X(e^{j\omega})|}_{\text{magnitude do espectro}} \underbrace{e^{j\angle X(e^{j\omega})}}_{\text{fase do espectro}} \end{aligned} \quad (11)$$

$$|X(e^{j\omega})| = \sqrt{X_R^2(e^{j\omega}) + X_I^2(e^{j\omega})} \quad (12)$$

$$\angle X(e^{j\omega}) = \text{atan}\left(\frac{X_I(e^{j\omega})}{X_R(e^{j\omega})}\right) \quad (13)$$

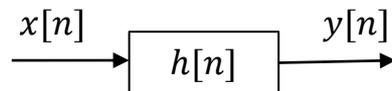
Interação do espectro $X(e^{j\omega})$ com a função de transferência $H(e^{j\omega})$ do sistema discreto

Consideremos um sistema LTI em que é aplicado um impulso $\delta[n]$ à sua entrada $x[n]$, de modo que a saída $y[n]$ do sistema represente a resposta ao impulso $h[n]$ do sistema.



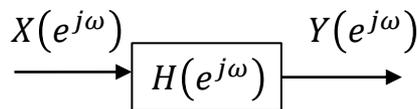
$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0, \\ 1, & n = 0. \end{cases}$$

Como vimos no Cap II.3 das notas de aula anteriormente, podemos determinar a saída $y[n]$ deste sistema, para uma entrada $x[n]$, através da convolução de $x[n]$ com a resposta ao impulso $h[n]$ do sistema.



$$y[n] = x[n] * h[n] \quad (14)$$

Com base na propriedade "Convolution" da Transformada de Fourier (que, pela similaridade da representação, também vale para a DTFT), conforme slide 27 do Cap III.3, temos



$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \quad (15)$$

Da equação (40) slide 32 do Cap III.3 e da equação (9) obtemos

$$H(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{h[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\omega n} \quad (16)$$

Conseqüentemente, de (16), infere-se que a função de transferência $H(e^{j\omega})$ de um sistema LTI discreto é dada pela DTFT de sua resposta ao impulso $h[n]$.

Interação do espectro $X(e^{j\omega})$ com a função de transferência $H(e^{j\omega})$ do sistema discreto

$$\begin{array}{ccc} X(e^{j\omega}) & \xrightarrow{\quad} & Y(e^{j\omega}) \\ \downarrow & \boxed{\begin{array}{c} H(e^{j\omega}) \\ h[n] \end{array}} & \downarrow \\ x[n] & \xrightarrow{\quad} & y[n] \end{array} \quad \begin{array}{l} Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \\ y[n] = x[n] * h[n] \end{array} \quad \begin{array}{l} (15) \\ (14) \end{array}$$

De (15), temos

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\mathcal{F}\{y[n]\}}{\mathcal{F}\{x[n]\}} \quad (17)$$

onde, de (9), temos

$$\mathcal{F}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \quad (18)$$

$$\mathcal{F}\{y[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] e^{-j\omega n} \quad (19)$$

Note que se a excitação $x[n]$ do sistema é um impulso $\delta[n]$, i.e. $x[n] = \delta[n]$, de modo que a resposta $y[n]$ é a resposta ao impulso $h[n]$, então resulta de (9) que

$$X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{\delta[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] e^{-j\omega n} = e^{-j\omega 0} = 1 \quad (20)$$

$$Y(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{h[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\omega n} \quad (21)$$

Substituindo (20) e (21) em (17) obtemos o mesmo resultado que (16):

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\omega n}}{1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\omega n}$$

De (17) fica evidenciada a importante propriedade de que a função de transferência $H(e^{j\omega})$ de um sistema LTI discreto é dada pela razão entre os espectros de saída e entrada, ou equivalentemente pela razão entre as DTFTs entre as seqüências de saída e entrada no domínio tempo discreto.

Condições para existência da DTFT

A DTFT de uma sequência $x[n]$ só existe se a sequência for somável em valor absoluto. Ou seja, se $|x[n]|$ for somável para $-\infty < n < \infty$, então $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$ existe.

Isto equivale a considerar que a DTFT existe quando a soma infinita $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$ converge, ou seja,

$$|X(e^{j\omega})| < \infty \quad \text{para todo } \omega. \quad (22)$$

Dado que uma sequência $x[n]$ estável é, por definição, absolutamente somável, todas as sequências estáveis terão DTFT e, portanto, pode-se afirmar que qualquer sistema estável (BIBO – *bounded input bounded output* – ver https://en.wikipedia.org/wiki/BIBO_stability) terá uma resposta finita e contínua em frequência.

No entanto, há casos em que $|x[n]|$ não é somável para $-\infty < n < \infty$, i.e., a soma não converge para um valor finito, mas ainda assim é possível determinar a DTFT. A tabela abaixo mostra alguns destes casos.

| | Sequência $x[n]$ | Transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ |
|---|---|---|
| Caso 1: Transformada de Fourier de uma Constante | $x[n] = 1$, para todo n | $X(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega + 2\pi r).$ |
| Caso 2: Transformada de Fourier de Sequências Exponenciais Complexas | $x[n] = e^{j\omega_0 n}$, para todo n | $X(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi r)$ |
| Caso 3: Transformada de Fourier de sequências que podem ser expressas como a soma de componentes discretas de frequência | $x[n] = \sum_k a_k e^{j\omega_k n}, -\infty < n < \infty$ | $X(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_k 2\pi a_k \delta(\omega - \omega_k + 2\pi r)$ |
| Caso 4: Transformada de Fourier da Sequência Degrau Unitário | $x[n] = u[n]$, para $n \geq 0$ | $U(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{r=-\infty}^{\infty} \pi \delta(\omega + 2\pi r)$ |

Propriedades de Simetria da DTFT

As propriedades de simetria da Transformada de Fourier são úteis por, para determinadas situações, simplificarem a solução de problemas.

Uma sequência **conjugada simétrica** $x_e[n]$ é definida como uma sequência para a qual

$$x_e[n] = x_e^*[-n] \quad (23)$$

Uma sequência **conjugada antissimétrica** $x_o[n]$ é definida como uma sequência para a qual

$$x_o[n] = -x_o^*[-n] \quad (24)$$

onde (*) denota a operação complexo conjugado.

Qualquer sequência $x[n]$ pode ser expressa como a superposição de uma sequência conjugada simétrica $x_e[n]$ e de uma sequência conjugada antissimétrica $x_o[n]$. Especificamente,

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n] \quad (25)$$

onde

$$x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[-n]) = x_e^*[-n] \quad (26)$$

$$x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x^*[-n]) = -x_o^*[-n] \quad (27)$$

Uma **sequência real** que é conjugada simétrica, tal que $\mathbf{x_e[n] = x_e[-n]}$, é denominada **sequência par (even)**, e uma **sequência real** que é conjugada antissimétrica, tal que $\mathbf{x_o[n] = -x_o[-n]}$, é denominada **sequência ímpar (odd)**.

Propriedades de Simetria da DTFT

De maneira similar, um espectro $X(e^{j\omega})$ pode ser expresso como a superposição de um espectro conjugado simétrico $X_e(e^{j\omega})$ e de um espectro conjugado antissimétrico $X_o(e^{j\omega})$. Especificamente,

$$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{j\omega}) \quad (28)$$

onde $X_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} [X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})]$ e $X_o(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} [X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})]$

Um espectro conjugado simétrico $X_e(e^{j\omega})$ obedece a condição $X_e(e^{j\omega}) = X_e^*(e^{-j\omega})$. (29)

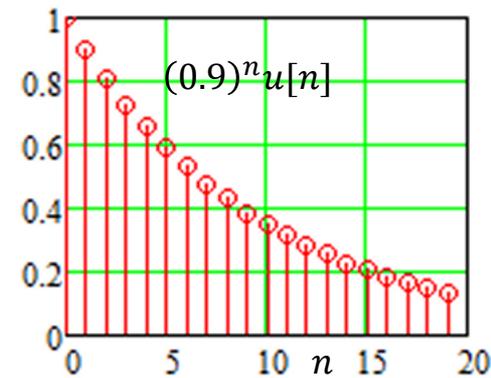
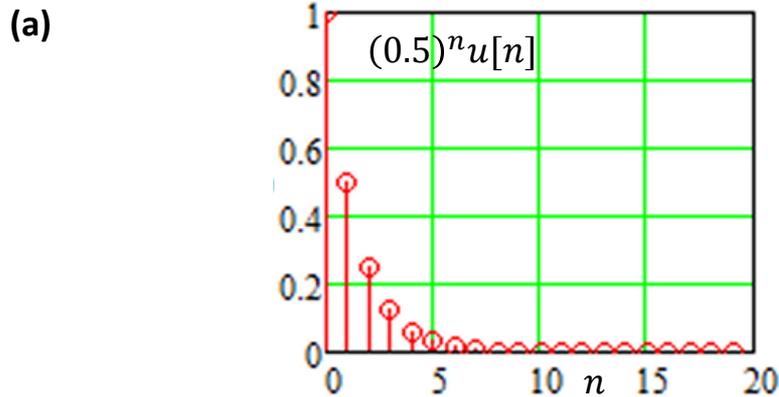
Um espectro conjugado antissimétrico $X_o(e^{j\omega})$ obedece a condição $X_o(e^{j\omega}) = -X_o^*(e^{-j\omega})$. (30)

| Sequência $x[n]$ | Transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ |
|---|--|
| 1. $x^*[n]$ | $X^*(e^{-j\omega})$ |
| 2. $x^*[-n]$ | $X^*(e^{j\omega})$ |
| 3. $\mathcal{Re}\{x[n]\}$ | $X_e(e^{j\omega})$ (componente simétrica conjugada de $X(e^{j\omega})$) |
| 4. $j \mathcal{Im}\{x[n]\}$ | $X_o(e^{j\omega})$ (componente antissimétrica conjugada de $X(e^{j\omega})$) |
| 5. $x_e[n]$ (componente simétrica conjugada de $x[n]$) | $X_R(e^{j\omega}) = \mathcal{Re}\{X(e^{j\omega})\}$ |
| 6. $x_o[n]$ (componente antissimétrica conjugada de $x[n]$) | $jX_I(e^{j\omega}) = j \mathcal{Im}\{X(e^{j\omega})\}$ |
| <i>As propriedades a seguir se aplicam somente quando $x[n]$ é real:</i> | |
| 7. Qualquer $x[n]$ real | $X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$ (a transformada de Fourier é simétrica conjugada) |
| 8. Qualquer $x[n]$ real | $X_R(e^{j\omega}) = X_R(e^{-j\omega})$ (a parte real é par) |
| 9. Qualquer $x[n]$ real | $X_I(e^{j\omega}) = -X_I(e^{-j\omega})$ (a parte imaginária é ímpar) |
| 10. Qualquer $x[n]$ real | $ X(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega}) $ (a magnitude é par) |
| 11. Qualquer $x[n]$ real | $\angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega})$ (a fase é ímpar) |
| 12. $x_e[n]$ (componente par de $x[n]$) | $X_R(e^{j\omega})$ |
| 13. $x_o[n]$ (componente ímpar de $x[n]$) | $jX_I(e^{j\omega})$ |

Propriedades de Simetria da DTFT - Exemplo

Exemplo: Consideremos a resposta $x[n] = a^n u[n]$, com $a \in \mathfrak{R}$, resultante na saída de um sistema LTI discreto quando o sistema é excitado com um impulso $\delta[n]$ aplicado à sua entrada. **Pede-se:** **(a)** Plote a resposta ao impulso $x[n]$ do sistema para $a = 0.5$ e para $a = 0.9$. **(b)** Determine a expressão analítica da resposta em frequência $X(e^{j\omega})$ do sistema através de $X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n]\}$ **(c)** Verifique se $X(e^{j\omega})$ obtida em (b) obedece a propriedade 7 da tabela de propriedades de simetria do slide anterior. **(d)** Plote $|X(e^{j\omega})|$, $\angle X(e^{j\omega})$, $\text{Re}\{X(e^{j\omega})\}$ e $\text{Im}\{X(e^{j\omega})\}$ para $a = 0.5$ e para $a = 0.9$. **(e)** Verifique quais propriedades de simetria da tabela do slide anterior são obedecidas pelos espectros $|X(e^{j\omega})|$, $\angle X(e^{j\omega})$, $\text{Re}\{X(e^{j\omega})\}$ e $\text{Im}\{X(e^{j\omega})\}$ obtidos em (d).

Solução:



(b)

A DTFT de $x[n]$ é obtida de (9):
$$X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \quad \text{se } |ae^{-j\omega}| < 1 \quad \text{ou} \quad |a| < 1.$$

Ver Apêndice C

Condição
para o
somatório
convergir

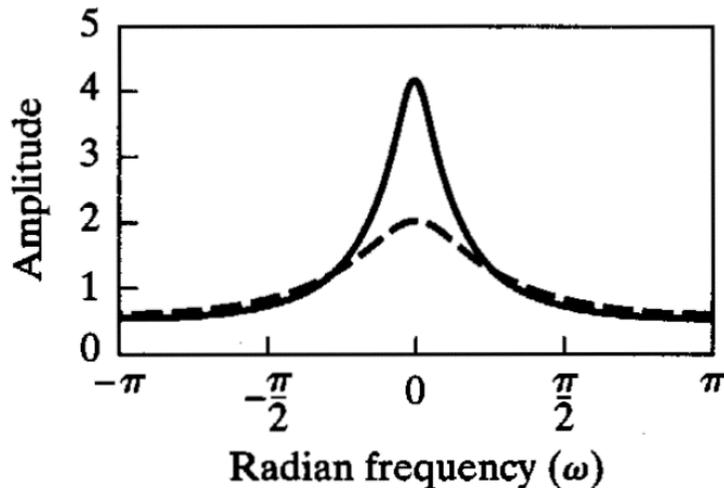
Propriedades de Simetria da DTFT - Exemplo

(c) Conjugando $X(e^{j\omega})$ obtido em (b) e trocando o sinal de ω observa-se que a expressão não se altera:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} = X^*(e^{-j\omega}) \quad (\text{propriedade 7}) \quad X(e^{j\omega}) \text{ é simétrica conjugada.}$$

(d&e)

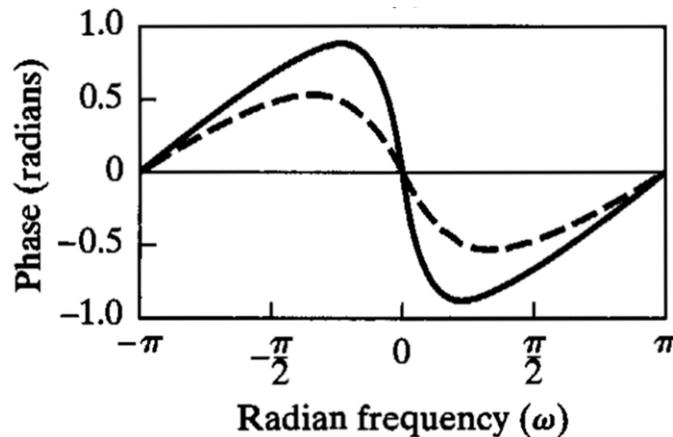
$$|X(e^{j\omega})| = \frac{1}{(1 + a^2 - 2a \cos \omega)^{1/2}} = |X(e^{-j\omega})| \quad (\text{propriedade 10})$$



Resposta em frequência do sistema .
Magnitude, $a > 0$;
Curva sólida, $a = 0.9$;
Curva tracejada, $a = 0.5$.

Magnitude de $X(e^{j\omega})$ é par.

$$\angle X(e^{j\omega}) = \tan^{-1} \left(\frac{-a \sin \omega}{1 - a \cos \omega} \right) = -\angle X(e^{-j\omega}) \quad (\text{propriedade 11})$$



Resposta em frequência do sistema .

Fase, $a > 0$;

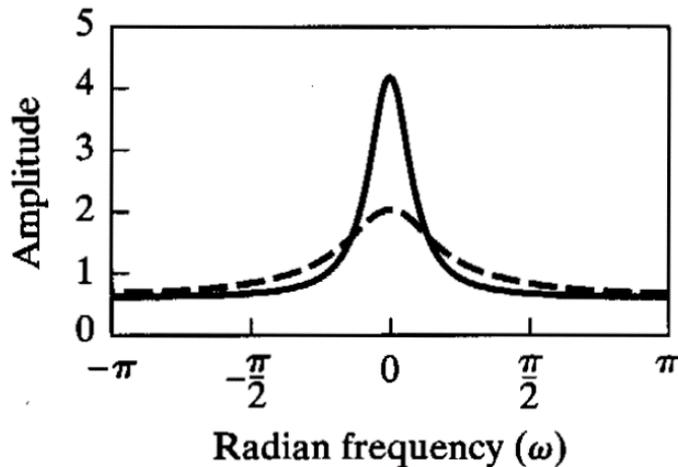
Curva sólida, $a = 0.9$;

Curva tracejada, $a = 0.5$.

Fase de $X(e^{j\omega})$ é ímpar.

Propriedades de Simetria da DTFT - Exemplo

$$X_R(e^{j\omega}) = \frac{1 - a \cos \omega}{1 + a^2 - 2a \cos \omega} = X_R(e^{-j\omega}) \quad (\text{propriedade 8})$$



Resposta em frequência do sistema.

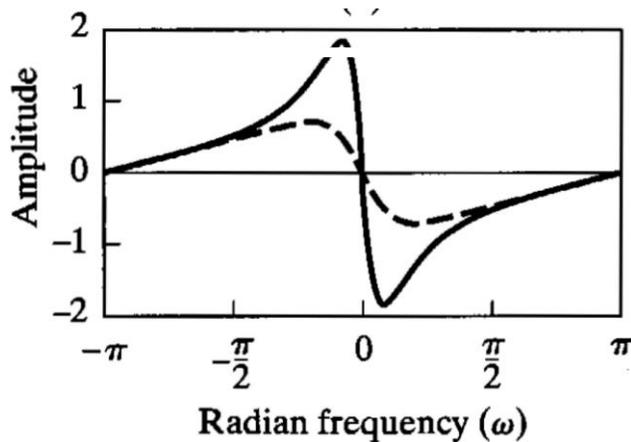
Parte real, $a > 0$;

Curva sólida, $a = 0.9$;

Curva tracejada, $a = 0.5$.

Parte real de $X(e^{j\omega})$ é par.

$$X_I(e^{j\omega}) = \frac{-a \sin \omega}{1 + a^2 - 2a \cos \omega} = -X_I(e^{-j\omega}) \quad (\text{propriedade 9})$$



Resposta em frequência do sistema.

Parte imaginária, $a > 0$;

Curva sólida, $a = 0.9$;

Curva tracejada, $a = 0.5$.

Parte imaginária de $X(e^{j\omega})$ é ímpar.

Propriedades gerais da DTFT
decorrentes das equações (9) e (10)

| Propriedade | $x[n] = \mathcal{F}^{-1}\{X(e^{j\omega})\}$ \longleftrightarrow $X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n]\}$ $y[n] = \mathcal{F}^{-1}\{Y(e^{j\omega})\}$ \longleftrightarrow $Y(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{y[n]\}$ |
|---|---|
| Linearidade | 1. $ax[n] + by[n]$ $aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$ |
| Deslocamento no tempo | 2. $x[n - n_d]$ (n_d um inteiro) $e^{-j\omega n_d} X(e^{j\omega})$ |
| Deslocamento em frequência | 3. $e^{j\omega_0 n} x[n]$ $X(e^{j(\omega - \omega_0)})$ |
| Reversão no tempo | 4. $x[-n]$ $X(e^{-j\omega})$ $X^*(e^{j\omega})$ se $x[n]$ real. |
| Diferenciação em frequência | 5. $nx[n]$ $j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$ |
| Convolução | 6. $x[n] * y[n]$ $X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$ |
| Multiplicação (modulação de $y[n]$ por $x[n]$) | 7. $x[n]y[n]$ $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega - \theta)})d\theta$ |
| Conservação da energia no tempo e em frequência | <p>Teorema de Parseval:</p> <p>8. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] ^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) ^2 d\omega$</p> <p>9. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})d\omega$</p> |

Pares comuns de DTFTs inversa $\mathcal{F}^{-1}\{\cdot\}$ e direta $\mathcal{F}\{\cdot\}$
decorrentes das equações (9) e (10)

$$x[n] = \mathcal{F}^{-1}\{X(e^{j\omega})\} \quad \longleftrightarrow \quad X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n]\}$$

| | |
|----------------------------------|---|
| 1. $\delta[n]$ | 1 |
| 2. $\delta[n - n_0]$ | $e^{-j\omega n_0}$ |
| 3. 1 $(-\infty < n < \infty)$ | $\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega + 2\pi k)$ |
| 4. $a^n u[n]$ $(a < 1)$ | $\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$ |
| 5. $u[n]$ | $\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega + 2\pi k)$ |
| 6. $(n + 1)a^n u[n]$ $(a < 1)$ | $\frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^2}$ |

Pares comuns de DTFTs inversa $\mathcal{F}^{-1}\{\cdot\}$ e direta $\mathcal{F}\{\cdot\}$
decorrentes das equações (9) e (10)

$$x[n] = \mathcal{F}^{-1}\{X(e^{j\omega})\} \quad \longleftrightarrow \quad X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n]\}$$

7. $\frac{r^n \text{sen } \omega_p (n+1)}{\text{sen } \omega_p} u[n] \quad (|r| < 1)$

$$\frac{1}{1 - 2r \cos \omega_p e^{-j\omega} + r^2 e^{-j2\omega}}$$

8. $\frac{\text{sen } \omega_c n}{\pi n}$

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

9. $x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

$$\frac{\text{sen}[\omega(M+1)/2]}{\text{sen}(\omega/2)} e^{-j\omega M/2}$$

10. $e^{j\omega_0 n}$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k)$$

11. $\cos(\omega_0 n + \phi)$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} [\pi e^{j\phi} \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k) + \pi e^{-j\phi} \delta(\omega + \omega_0 + 2\pi k)]$$

Teorema de Parseval:

$$\text{Se } x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}),$$

$$\text{então, } E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega.$$

A função $|X(e^{j\omega})|^2$ é denominada **Densidade Espectral de Energia**, porque determina como a energia da sequência $x[n]$ é distribuída no domínio frequência.

O Teorema de Parseval nos diz que determinar a energia da sequência $x[n]$ no domínio tempo equivale a determinar a energia do espectro $X(e^{j\omega})$ de $x[n]$ no domínio frequência. Ou seja, a energia do sinal é conservada ao passarmos o sinal do domínio tempo para o domínio frequência e vice-versa.

Necessariamente, a Densidade Espectral de Energia é definida unicamente para sinais cuja energia é finita.

Convolução:

Seja $x[n]$ o sinal aplicado à entrada de um sistema LTI discreto, e seja $h[n]$ a resposta ao impulso do sistema. Então, temos que a relação domínio tempo/domínio frequência é dada por

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}), \quad \text{e} \quad h[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} H(e^{j\omega}),$$

A saída $y[n]$ no domínio tempo do sistema é $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n]$,

e a saída $Y(e^{j\omega})$ no domínio frequência do sistema é $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$.

A interpretação aqui é a mesma do caso contínuo no tempo já visto no Cap III.3: a convolução entre a entrada $x[n]$ do sistema e a sua resposta ao impulso $h[n]$ é equivalente à multiplicação do espectro $X(e^{j\omega})$ do sinal de entrada $x[n]$ pela função de transferência $H(e^{j\omega})$ do sistema.

($H(e^{j\omega})$ também é conhecida como a resposta em frequência do sistema)

Generalizando, o Teorema da Convolução estabelece que a convolução entre duas sequências $x[n]$ e $y[n]$ no domínio tempo é equivalente à multiplicação das correspondentes Transformadas de Fourier de Tempo Discreto $X(e^{j\omega})$ e $Y(e^{j\omega})$ no domínio frequência (respectivos espectros de $x[n]$ e $y[n]$):

$$x[n] * y[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$$

Teorema da Modulação (ou teorema do Janelamento):

$$\text{Se } x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}), \text{ e } w[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} W(e^{j\omega}),$$

$$\text{e se } y[n] = x[n]w[n],$$

$$\text{então } Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})W(e^{j(\omega-\theta)})d\theta. \quad (31)$$

A equação (31) acima é uma convolução periódica, isto é, uma convolução de duas funções periódicas, com os limites de integração se estendendo somente sobre um período.

Comparando o Teorema da Convolução com o Teorema da Modulação, nota-se que:

- a convolução no tempo discreto de duas sequências é equivalente à multiplicação dos correspondentes espectros no domínio frequência,
- a multiplicação no tempo discreto de duas sequências é equivalente à convolução periódica dos correspondentes espectros no domínio frequência.

DTFT - exemplos

Exemplo 1: Consideremos o filtro passa baixa ideal com frequência de corte ω_c cuja resposta ao impulso no domínio tempo discreto é (ver par 8 slide 17)

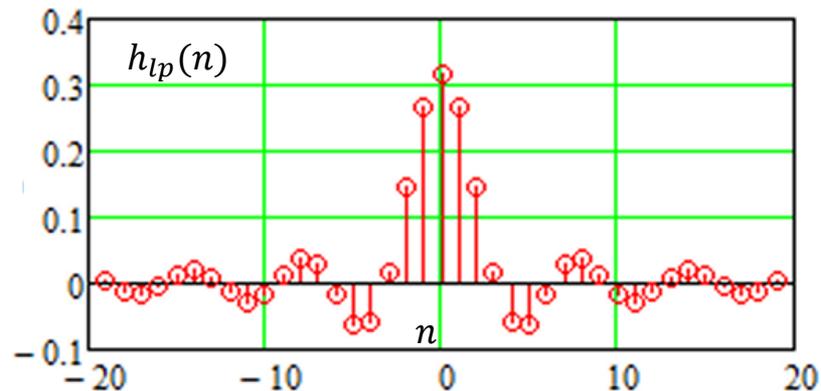
$$h_{lp}[n] = \frac{\sin \omega_c n}{\pi n} \quad (32)$$

A resposta em frequência $H_{lp}(e^{j\omega})$ deste filtro é obtida ao aplicarmos a DTFT à sequência $h_{lp}[n]$. Na prática, para efeito da implementação de $h_{lp}[n]$ em *hardware*, o número de amostras na resposta ao impulso é limitado a um intervalo finito $-M \leq n \leq M$. **Pede-se: (a)** Plote $h_{lp}[n]$ para $\omega_c = 1$ rad/s. **(b)** Plote $H_{lp}(e^{j\omega})$ e avalie o efeito de $M = \{1, 3, 7, 19\}$ na fidelidade de $H_{lp}(e^{j\omega})$ em representar a resposta em frequência deste filtro passa baixa ideal.

Solução: (a)

$$h_{lp}(n) = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n} = \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}(\omega_c n) \quad (33)$$

onde $\text{sinc}(u) = \frac{\sin u}{u}$

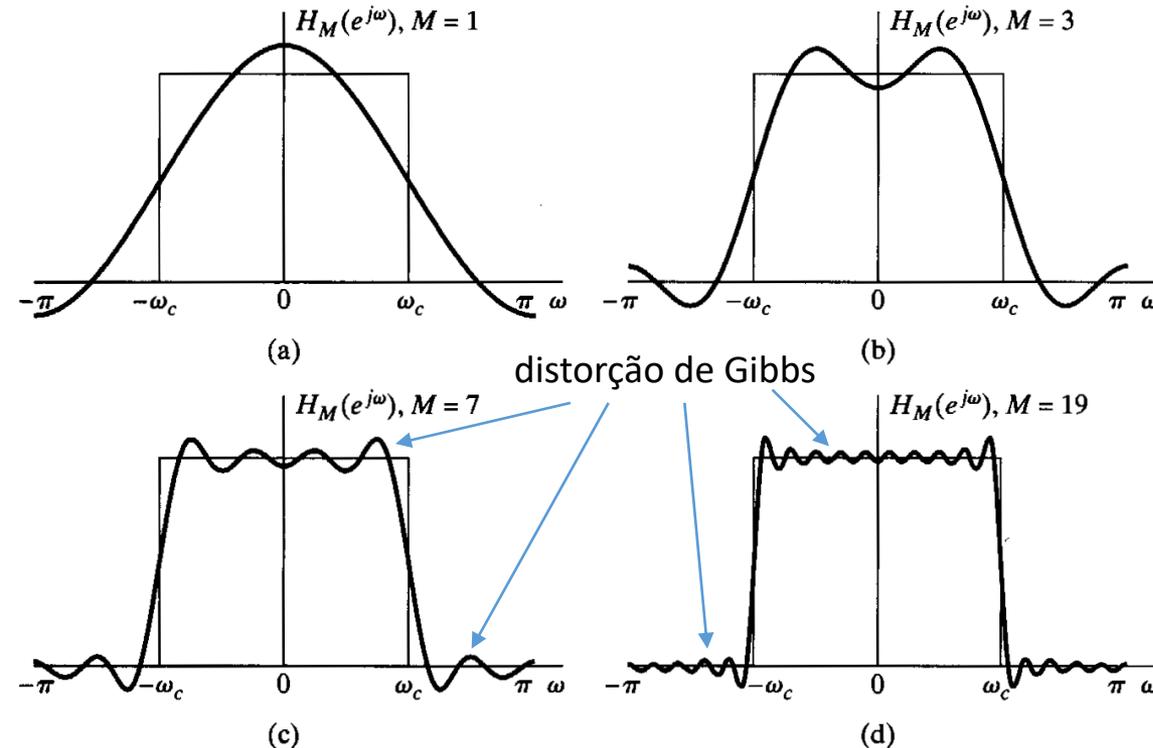


DTFT - exemplos

De (9), aplicando a DTFT a $h_{lp}[n]$ dada por (32) e delimitando $h_{lp}[n]$ ao intervalo $-M \leq n \leq M$ obtemos a resposta em frequência $H_{lp}(e^{j\omega})$ do filtro passa baixa ideal:

$$H_M(e^{j\omega}) = \sum_{n=-M}^M \frac{\sin \omega_c n}{\pi n} e^{-j\omega n} \quad (34)$$

Plotando (34) para $M = \{1, 3, 7, 19\}$ no intervalo $-\pi < \omega < \pi$, temos



Note que, à medida que M aumenta, a distorção de Gibbs (discutida no Cap III.1 para o domínio tempo) na banda de passagem e na banda de rejeição do filtro varia mais rapidamente, mas a amplitude da oscilação não diminui em $\omega = \omega_c$.

Mas note que, no limite quando $M \rightarrow \infty$, $H_M(e^{j\omega})$ se aproxima da resposta em frequência de um filtro passa baixa ideal com frequência de corte ω_c .

Exemplo 2: Um conversor A/D com frequência de amostragem $f_s = 64kHz$ digitaliza um sinal analógico de áudio dado por $x[t] = a_1 \cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + a_2 \cos(2\pi f_2 t + \phi_2)$, sendo $a_1 = 3$, $f_1 = 4kHz$, $\phi_1 = 30^\circ$, $a_2 = 1$, $f_2 = 8kHz$, $\phi_2 = -60^\circ$. Seja $x[n]$ a sequência na saída do conversor A/D resultante da digitalização de $x[t]$.

Pede-se:

(a) Plote o gráfico da sequência $x[n]$ no intervalo $0 \leq n \leq 64$.

(b) Plote o gráfico do módulo e da fase do espectro $X(e^{j\omega})$ de frequências angulares digitais de $x[n]$ no intervalo $-\pi \leq \omega \leq \pi$, assumindo que o conversor A/D esteja ligado desde $t = -\infty$, isto é, assuma que a componente do regime transitório já se extinguiu e que só haja a componente do regime permanente.

(c) Plote os gráficos obtidos em (b) com o eixo da abscissa representando o intervalo de frequências analógicas $-f_s/2 \leq f \leq f_s/2$ (Nyquist).

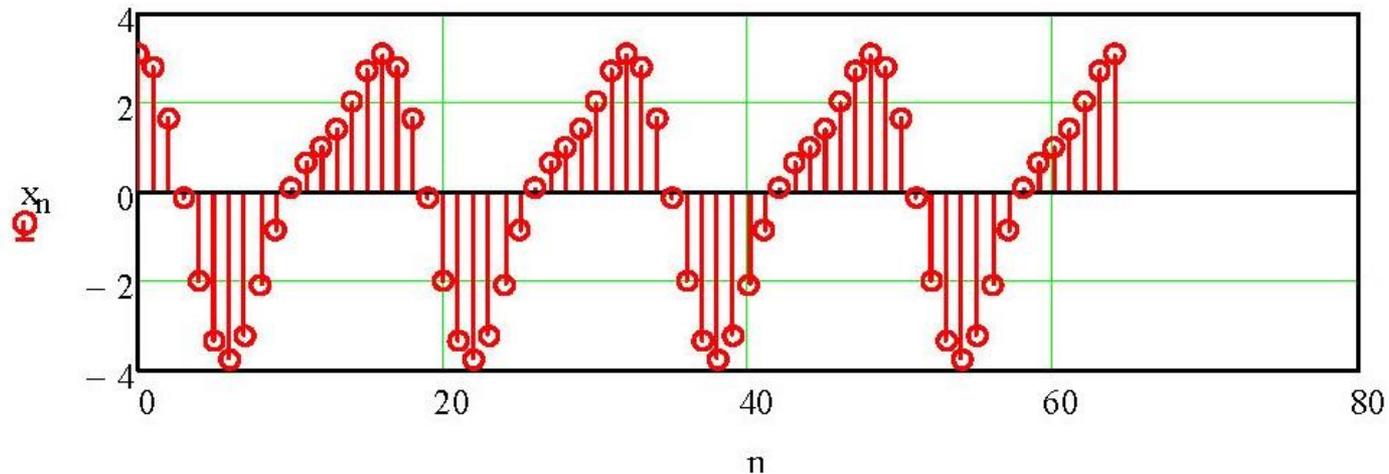
Solução:

(a) Gráfico da sequência $x[n]$ no intervalo $0 \leq n \leq 64$:

Para discretizar $x[t] = a_1 \cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + a_2 \cos(2\pi f_2 t + \phi_2)$ substituímos t por $nT_s = n \frac{1}{f_s}$ onde T_s é o intervalo entre amostras no sinal digitalizado:

$$n := 0, 1..64$$

$$x_n := a_1 \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{f_1}{f_s} \cdot n + \phi_1\right) + a_2 \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{f_2}{f_s} \cdot n + \phi_2\right)$$



(b) Gráfico do módulo e da fase do espectro $X(e^{j\omega})$ de frequências angulares digitais de $x[n]$ no intervalo $-\pi \leq \omega \leq \pi$, assumindo que o conversor A/D esteja ligado desde $t = -\infty$, isto é, assumindo que a componente do regime transitório já se extinguiu e que só haja a componente do regime permanente:

Do par 11 da tabela de Pares de Transformadas de Fourier, temos: (ver slide 17)

$$F(\cos(\omega_0 \cdot n + \phi)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\pi \cdot e^{j \cdot \phi} \cdot \delta(\omega - \omega_0 + 2 \cdot \pi \cdot k) + \pi \cdot e^{-j \cdot \phi} \cdot \delta(\omega + \omega_0 + 2 \cdot \pi \cdot k) \right)$$

Mas, do enunciado, o intervalo solicitado é $-\pi \leq \omega \leq \pi$, então $k=0$ na equação acima, resultando em:

$$F(\cos(\omega_0 \cdot n + \phi)) = \pi \cdot e^{j \cdot \phi} \cdot \delta(\omega - \omega_0) + \pi \cdot e^{-j \cdot \phi} \cdot \delta(\omega + \omega_0)$$

As frequências digitais em $x[n]$ acima são:

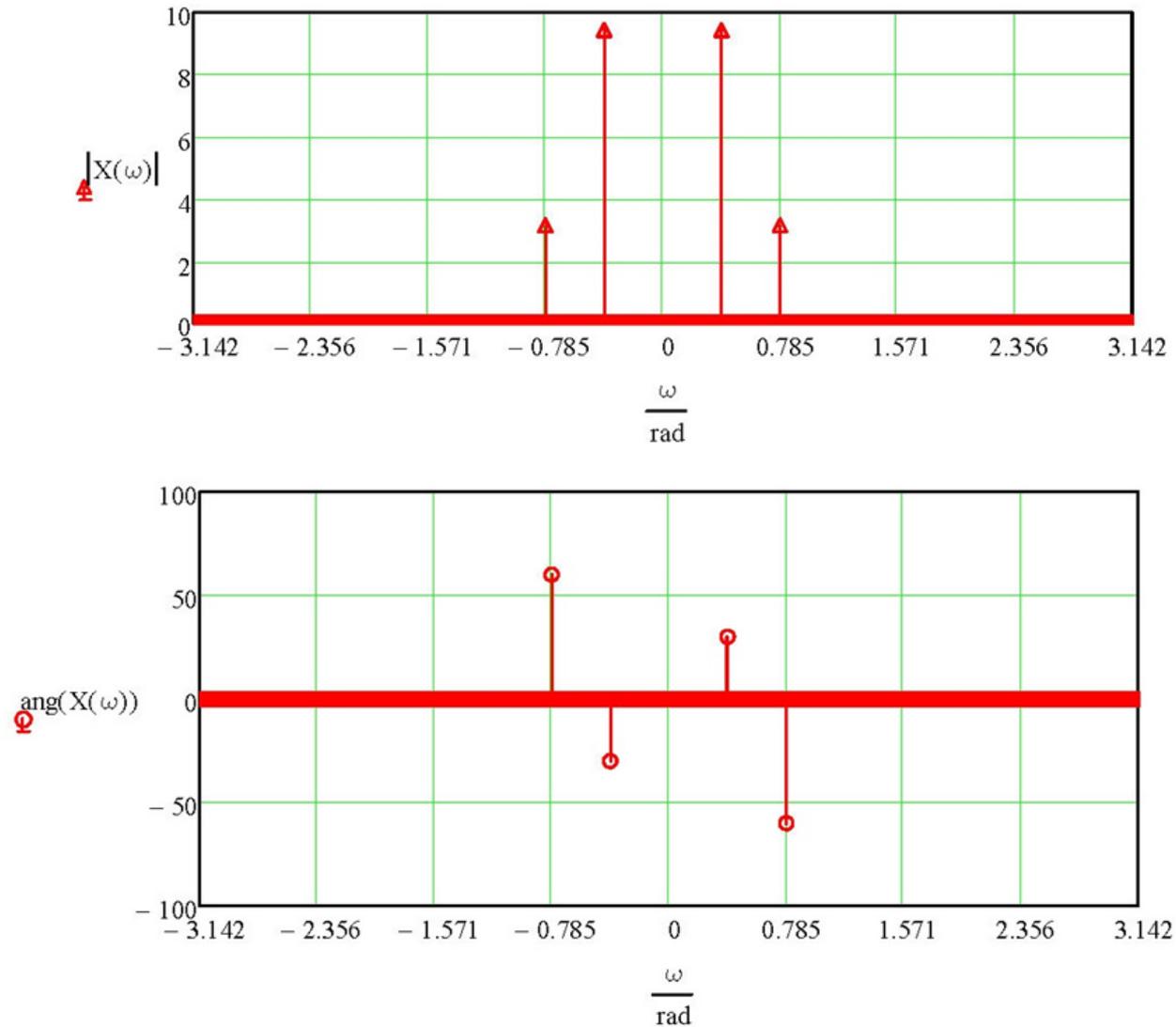
$$\omega_1 := 2 \cdot \pi \cdot \frac{f_1}{f_s} \rightarrow \omega_1 = 0.393 \cdot \text{rad} \quad \omega_2 := 2 \cdot \pi \cdot \frac{f_2}{f_s} \rightarrow \omega_2 = 0.785 \cdot \text{rad}$$

Portanto, a Transformada de Fourier $X(\omega) = F\{X[n]\}$ é:

$$X(\omega) := a_1 \cdot \left(\pi \cdot e^{j \cdot \phi_1} \cdot \delta(\omega - \omega_1) + \pi \cdot e^{-j \cdot \phi_1} \cdot \delta(\omega + \omega_1) \right) + a_2 \cdot \left(\pi \cdot e^{j \cdot \phi_2} \cdot \delta(\omega - \omega_2) + \pi \cdot e^{-j \cdot \phi_2} \cdot \delta(\omega + \omega_2) \right) \quad (35)$$

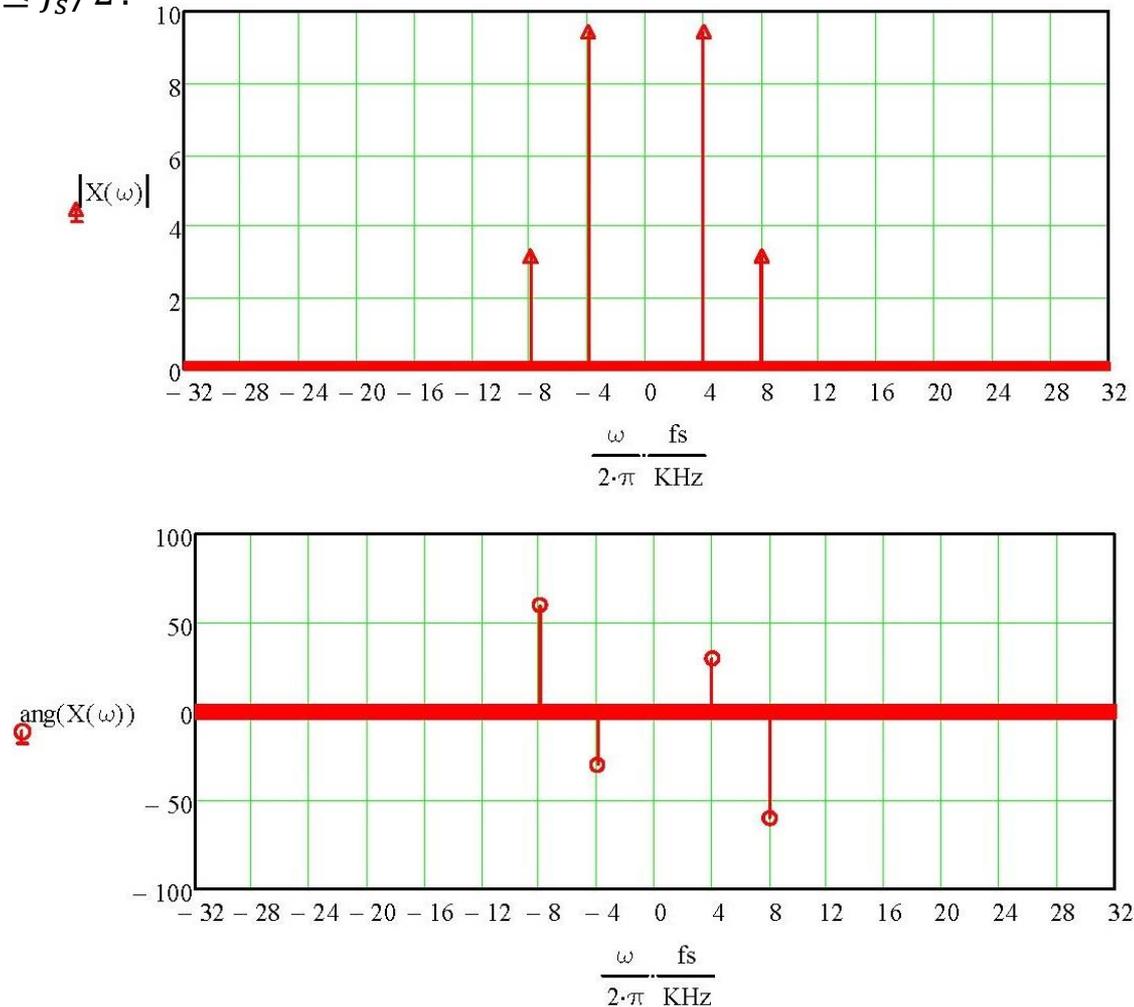
DTFT - exemplos

De (35) no slide anterior os gráficos do módulo e da fase do espectro $X(e^{j\omega})$ de frequências angulares digitais de $x[n]$ no intervalo $-\pi \leq \omega \leq \pi$ resultam em



DTFT - exemplos

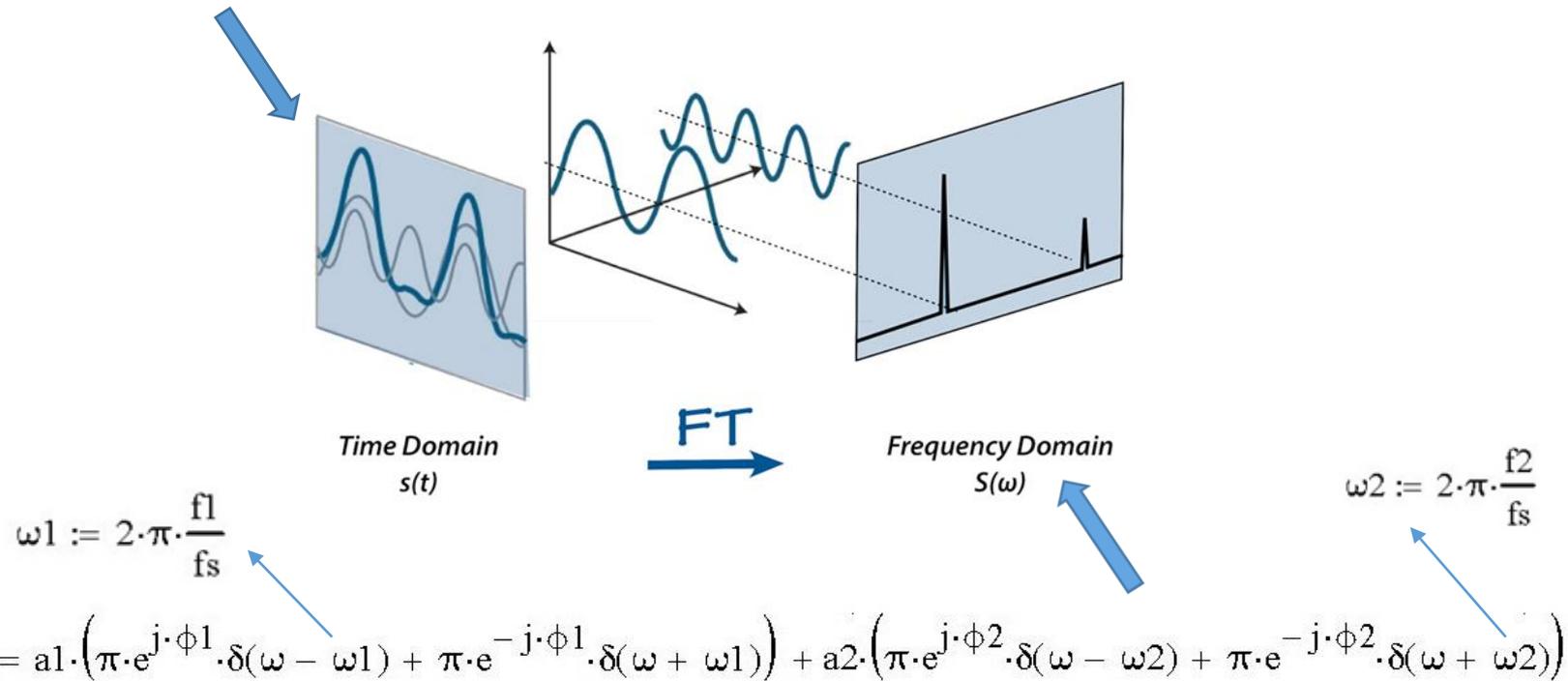
(c) Gráficos obtidos em (b) com o eixo da abscissa representando o intervalo de frequências analógicas $-f_s/2 \leq f \leq f_s/2$.



Portanto, cada k -ésimo cosseno de amplitude A_k , fase φ_k e frequência f_k no domínio tempo contínuo gerou um espectro formado por dois impulsos complexos de amplitude $A_k \pi$ no domínio frequência, ambos respectivamente ocorrendo em $-f_k$ e $+f_k$, com fase de cada impulso respectivamente sendo $-\varphi_k$ e $+\varphi_k$.

DTFT - exemplos

$$x[t] = a_1 \cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + a_2 \cos(2\pi f_2 t + \phi_2) \quad (\text{sinal analógico na entrada do conversor A/D})$$



(espectro da sequência $x[n]$ na saída do conversor A/D, quando $x(t)$ é aplicado à entrada do A/D)

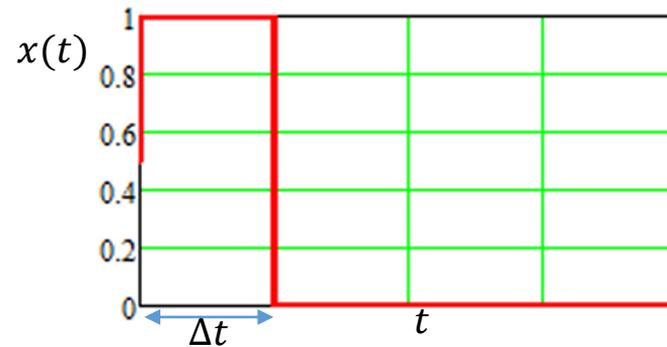
Homework

Refaça o Exemplo 2 (ver slide 23) para uma frequência de amostragem $f_s = 32\text{kHz}$.

DTFT - exemplos

Exemplo 3: Um conversor A/D com frequência de amostragem $f_s = 64\text{kHz}$ digitaliza um sinal analógico $x(t)$ que é um pulso retangular de amplitude $A = 1$, iniciando em $t = 0$ e de duração Δt , conforme mostra a figura.

Seja $x[n]$ a sequência na saída do conversor A/D resultante da digitalização de $x(t)$.



Pede-se:

- Plote o gráfico da sequência $x[n]$ para $\Delta t = 10/f_s$ no intervalo $0 \leq n \leq 20$;
- Plote o gráfico do módulo e da fase do espectro $X(e^{j\omega})$ de frequências angulares digitais de $x[n]$ no intervalo $-\pi \leq \omega \leq \pi$;
- Plote os gráficos obtidos em (b) com o eixo da abscissa representando o intervalo de frequências analógicas $-f_s/2 \leq f \leq f_s/2$;
- Repita (a), (b) e (c) para $\Delta t = 5/f_s$;
- Repita (a), (b) e (c) para $\Delta t = 2/f_s$;
- Repita (a), (b) e (c) para $\Delta t = 1/f_s$;
- Estabeleça conclusões a partir dos resultados encontrados de (a)-(f).

Solução:

(a) Gráfico da sequência $x[n]$ para $\Delta t = 10/f_s$ no intervalo $0 \leq n \leq 20$:

$x[t]$ é um pulso retangular de amplitude $A = 1$, iniciando em $t = 0$, e de duração $\Delta t = 10/f_s$, $f_s = 64\text{kHz}$.

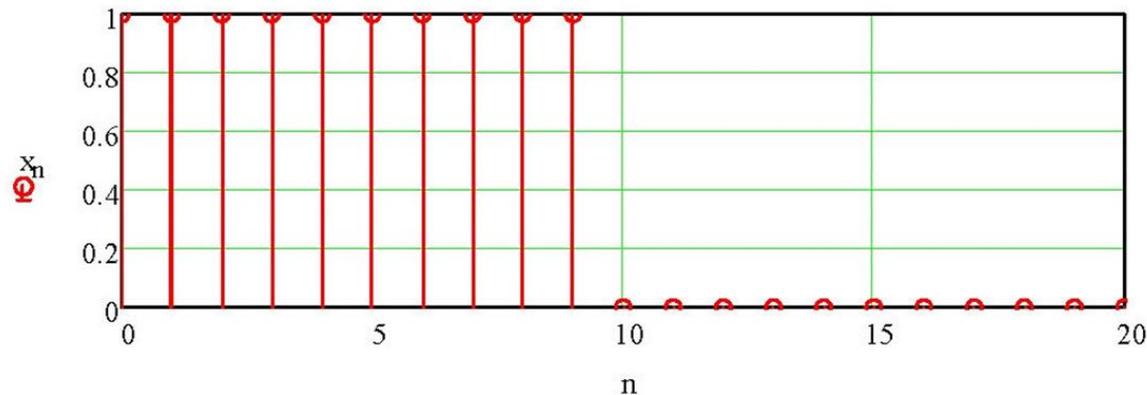
$$\Delta t := \frac{10}{f_s} \rightarrow \Delta t = 0.156\text{ms} \rightarrow \text{duração do pulso } x(t)$$

$$T_s := \frac{1}{f_s} \rightarrow T_s = 0.016\text{ms} \rightarrow \text{intervalo entre as amostras da sequencia } x[n]$$

$$N := \text{round}\left(\frac{\Delta t}{T_s}\right) \rightarrow N = 10 \rightarrow \text{número de amostras do pulso representado por } x[n]$$

Portanto, para $n := 0, 1 \dots 20$, a sequência $x[n]$ na saída do A/D é representada por:

$x_n := \text{if}[(n \geq 0) \cdot (n < N), A, 0]$ sendo $A = 1$ e $N = 10$, o que resulta no gráfico:



DTFT - exemplos

(b) Gráfico do módulo e da fase do espectro $X(e^{j\omega})$ de frequências angulares digitais de $x[n]$ no intervalo $-\pi \leq \omega \leq \pi$:

(ver slide 17)

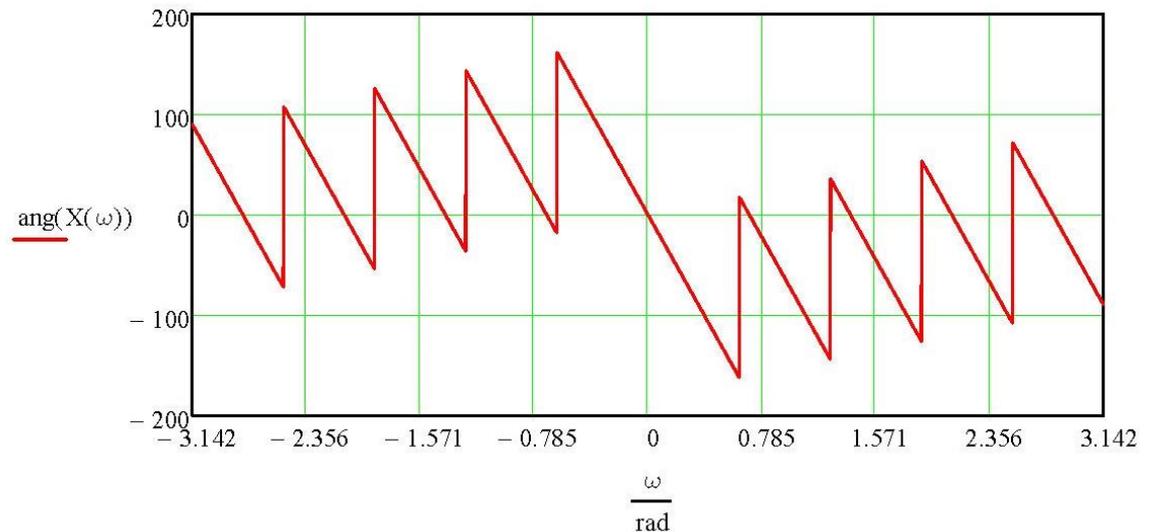
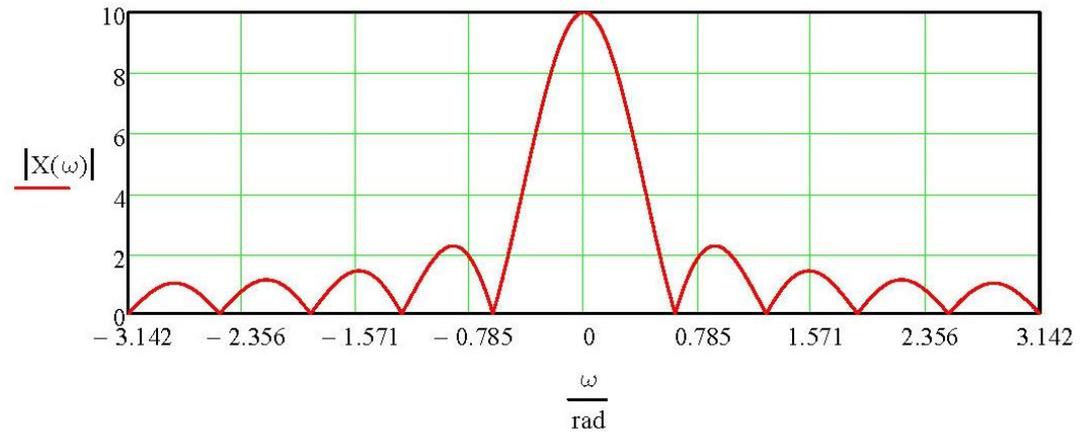


Do par 9 da tabela de Pares de Transformadas de Fourier, com $M := N - 1$, temos que a Transformada de Fourier da sequência $x[n]$ acima definida, isto é, $X(\omega) = F\{x[n]\}$, é dada por:

$$X(\omega) := \frac{A \cdot \sin\left[\omega \cdot \left(\frac{M+1}{2}\right)\right]}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot \frac{M}{2}}$$

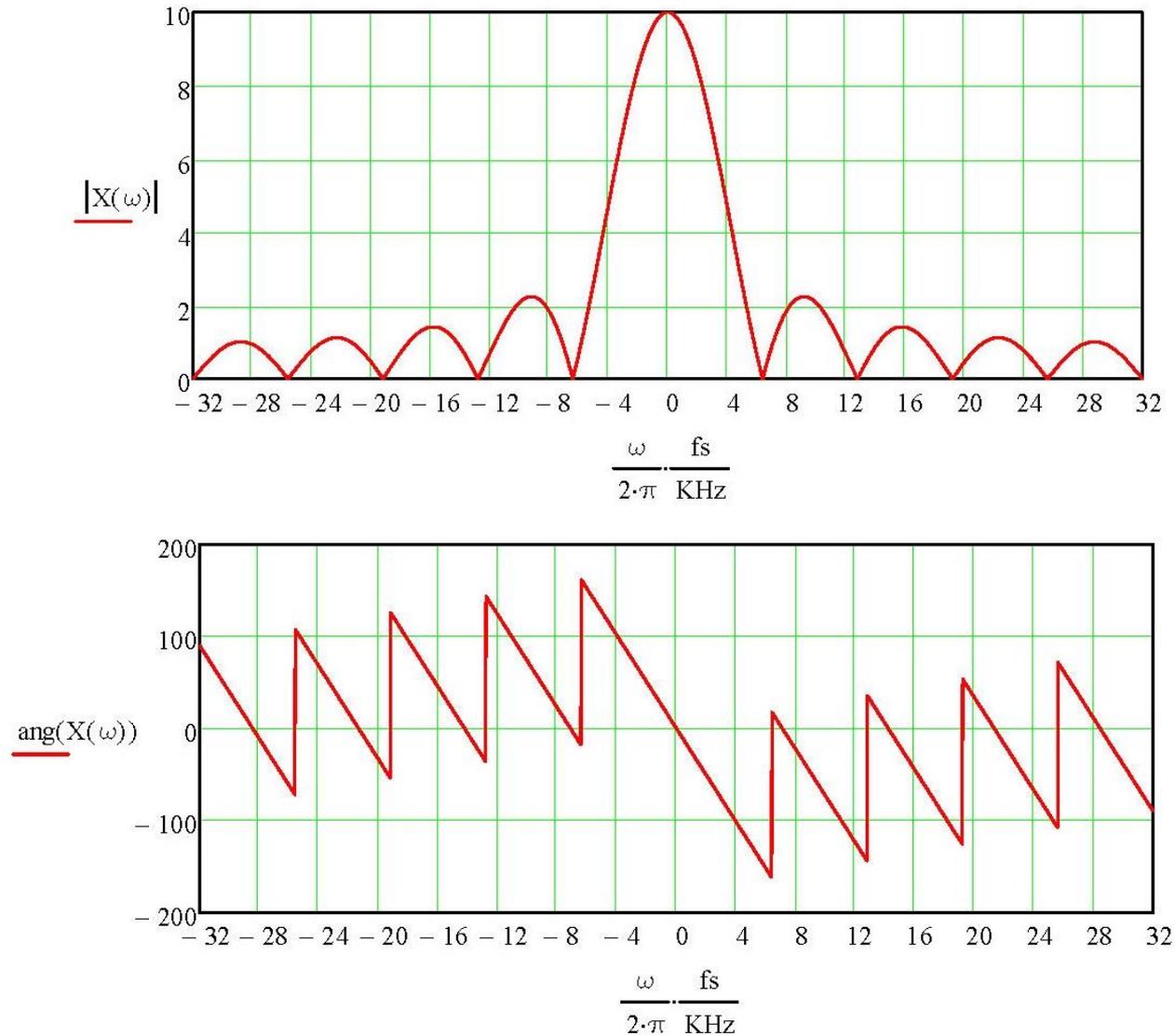
Note que a magnitude do espectro $X(\omega)$ de um pulso retangular é uma função $\text{sinc}(\omega)$.

Os gráficos de módulo e fase de $X(\omega) = F\{x[n]\}$ no intervalo $-\pi \leq \omega \leq \pi$ são:



DTFT - exemplos

(c) Gráficos obtidos em (b) com o eixo da abscissa representando o intervalo de frequências analógicas $-f_s/2 \leq f \leq f_s/2$:



(d) Repetindo (a), (b) e (c) para $\Delta t = 5/f_s$:

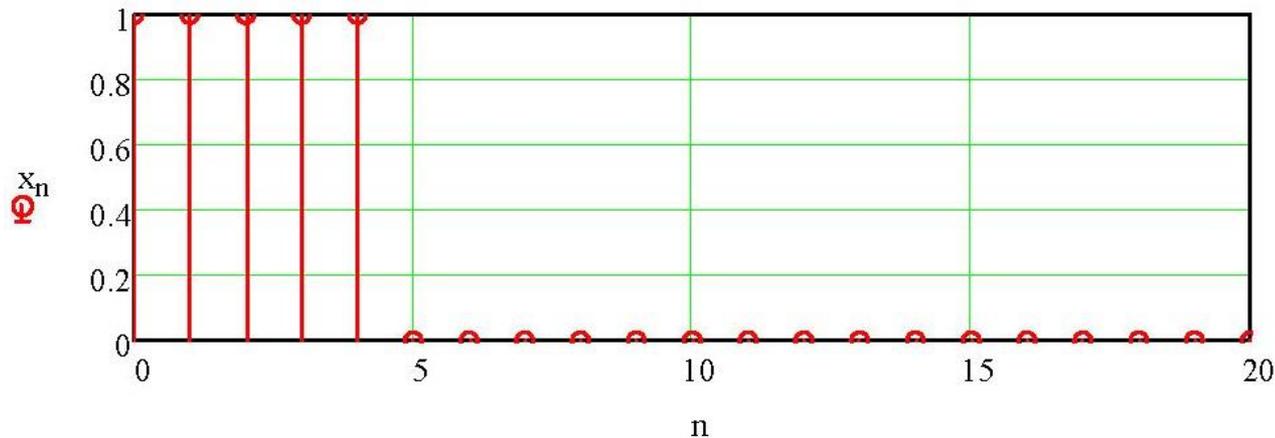
$$\Delta t := \frac{5}{f_s} \quad \rightarrow \quad \Delta t = 0.078 \cdot \text{ms} \quad \rightarrow \quad \text{duração do pulso } x(t)$$

$$T_s := \frac{1}{f_s} \quad \rightarrow \quad T_s = 0.016 \cdot \text{ms} \quad \rightarrow \quad \text{intervalo entre as amostras da sequência } x[n]$$

$$N := \text{round}\left(\frac{\Delta t}{T_s}\right) \quad \rightarrow \quad N = 5 \quad \rightarrow \quad \text{número de amostras do pulso representado por } x[n]$$

Portanto, para $n := 0, 1 \dots 20$, a sequência $x[n]$ na saída do A/D é representada por:

$$x_n := \text{if}[(n \geq 0) \cdot (n < N), A, 0] \quad \text{sendo } A = 1 \quad \text{e } N = 5, \quad \text{o que resulta no gráfico:}$$



DTFT - exemplos

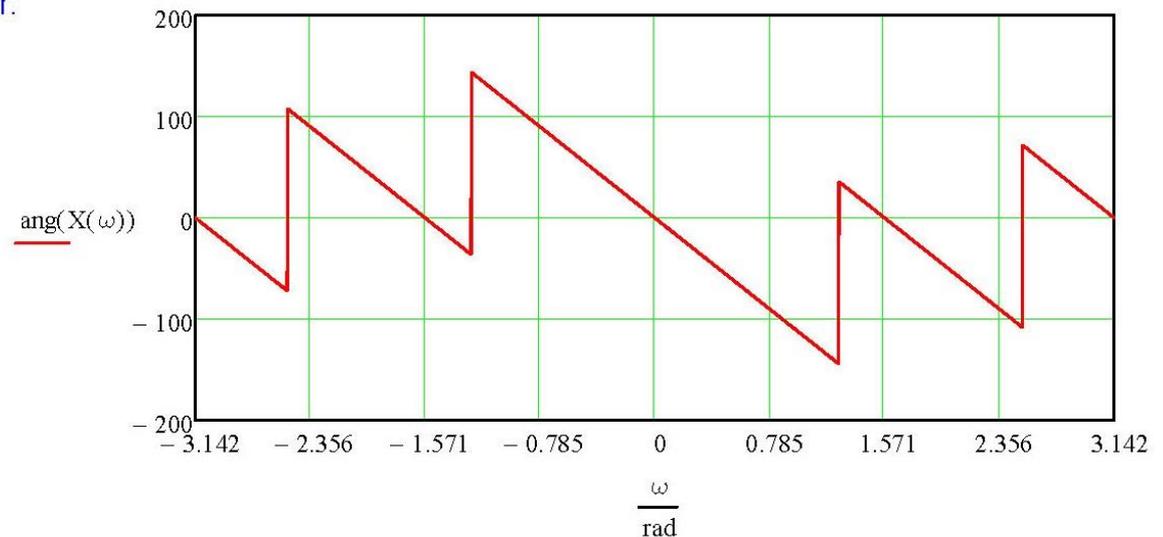
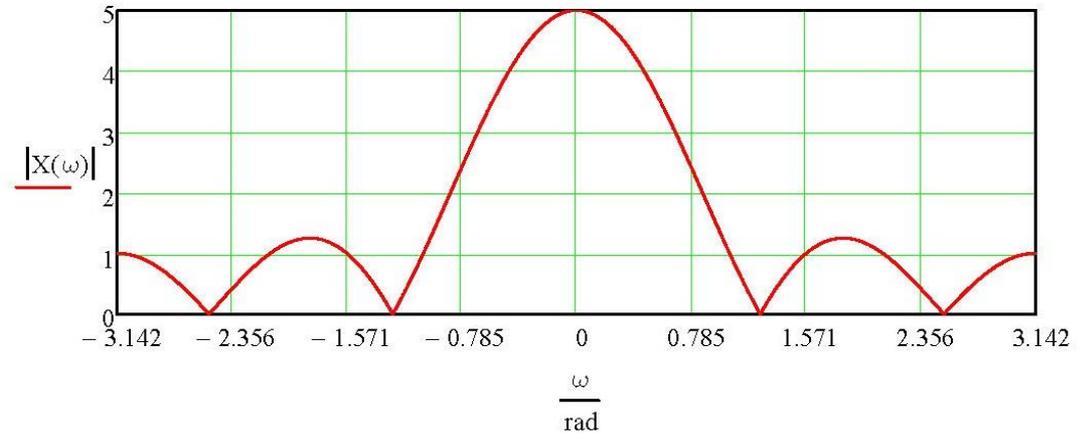
Os gráficos de módulo e fase de $X(\omega)=F\{x[n]\}$ no intervalo $-\pi \leq \omega \leq \pi$ são:

(ver slide 17)



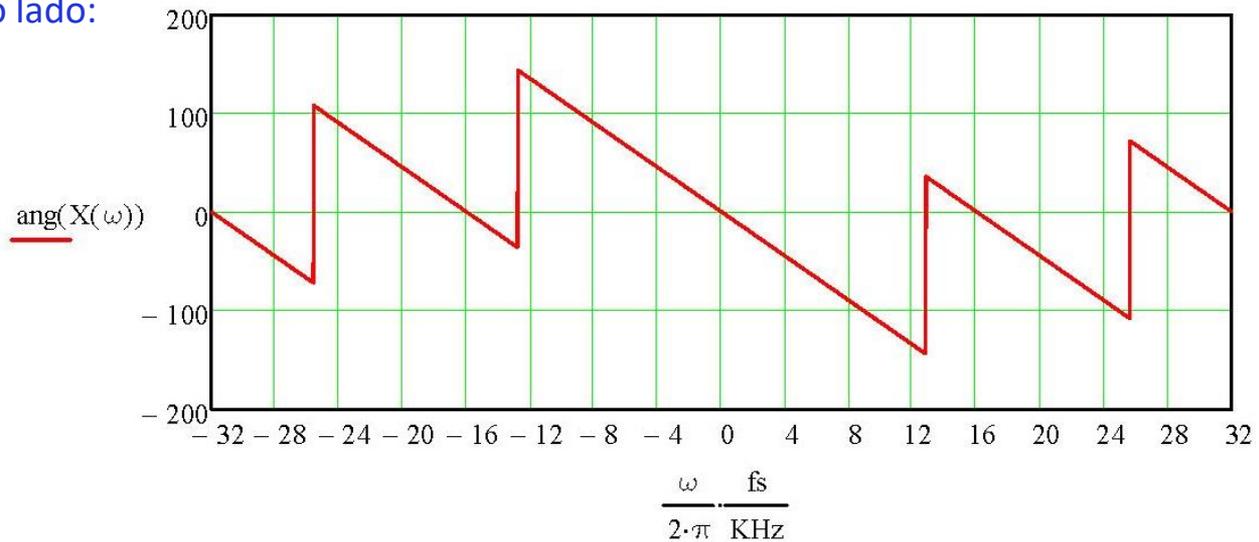
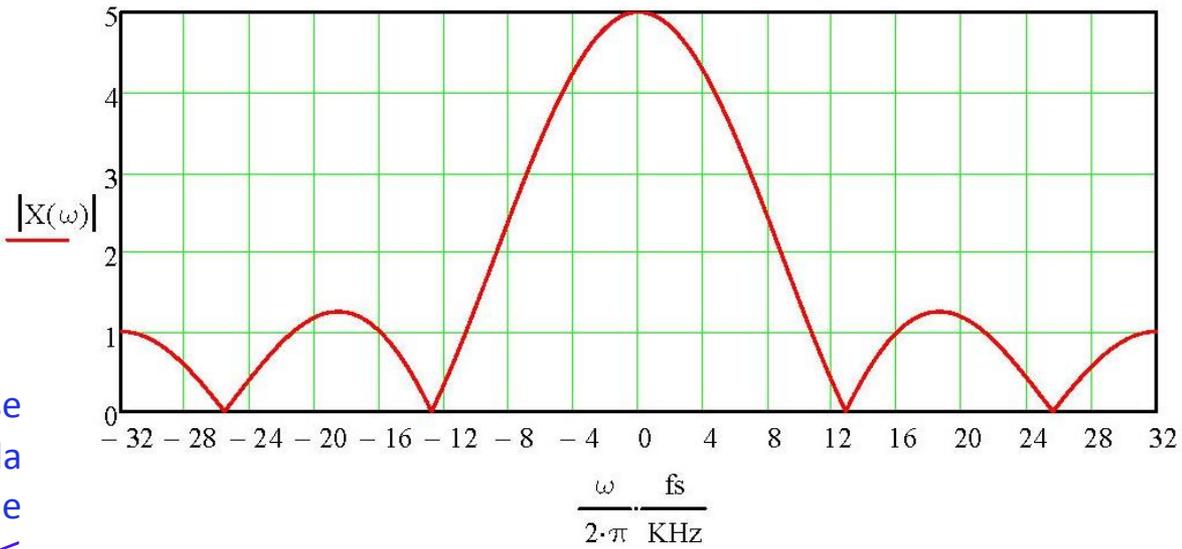
Do par 9 da tabela de Pares de Transformadas de Fourier, com $M := N - 1$, temos que a Transformada de Fourier da sequência $x[n]$ acima definida, isto é, $X(\omega)=F\{x[n]\}$, é dada por:

$$X(\omega) := \frac{A \cdot \sin\left[\omega \cdot \left(\frac{M+1}{2}\right)\right]}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot \frac{M}{2}}$$



DTFT - exemplos

Os gráficos de módulo e fase de $X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n]\}$ com o eixo da abscissa representando o intervalo de frequências analógicas $-f_s/2 \leq f \leq f_s/2$, são conforme apresentados ao lado:



(e) Repetindo (a), (b) e (c) para $\Delta t = 2/f_s$:

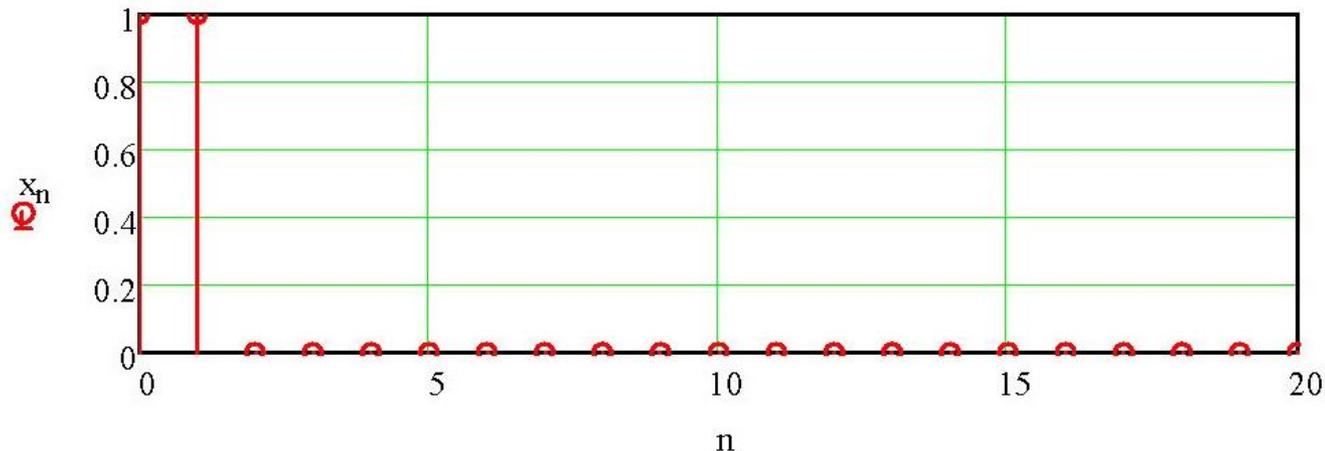
$$\Delta t := \frac{2}{f_s} \quad \rightarrow \quad \Delta t = 0.031 \cdot \text{ms} \quad \rightarrow \quad \text{duração do pulso } x(t)$$

$$T_s := \frac{1}{f_s} \quad \rightarrow \quad T_s = 0.016 \cdot \text{ms} \quad \rightarrow \quad \text{intervalo entre as amostras da sequência } x[n]$$

$$N := \text{round}\left(\frac{\Delta t}{T_s}\right) \quad \rightarrow \quad N = 2 \quad \rightarrow \quad \text{número de amostras do pulso representado por } x[n]$$

Portanto, para $n := 0, 1 \dots 20$, a sequência $x[n]$ na saída do A/D é representada por:

$$x_n := \text{if}[(n \geq 0) \cdot (n < N), A, 0] \quad \text{sendo } A = 1 \quad \text{e } N = 2 \quad , \quad \text{o que resulta no gráfico:}$$



DTFT - exemplos

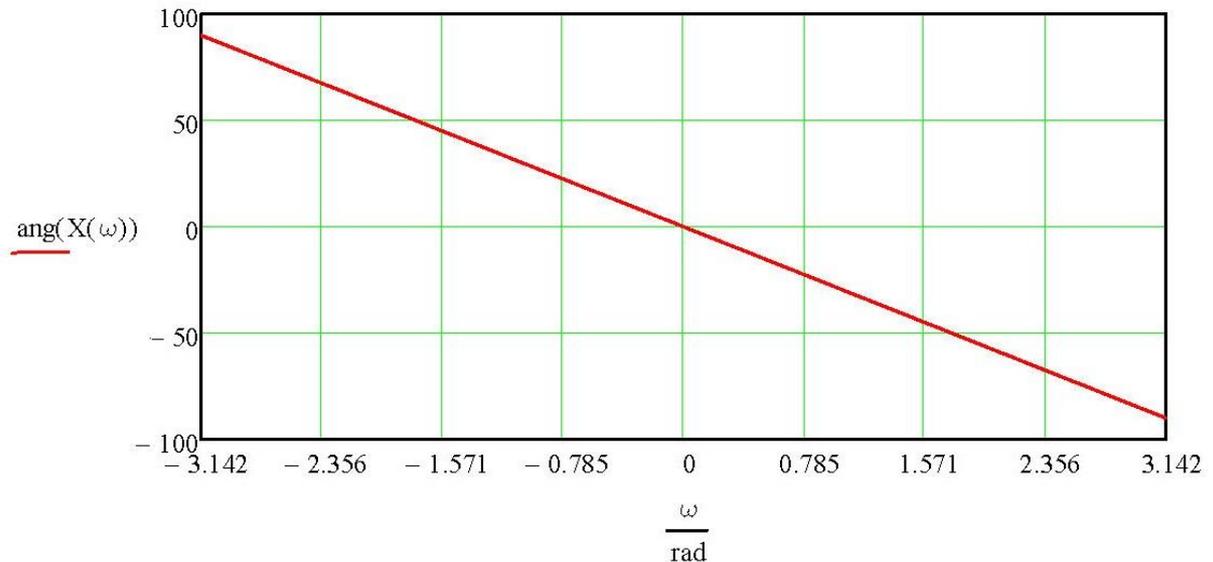
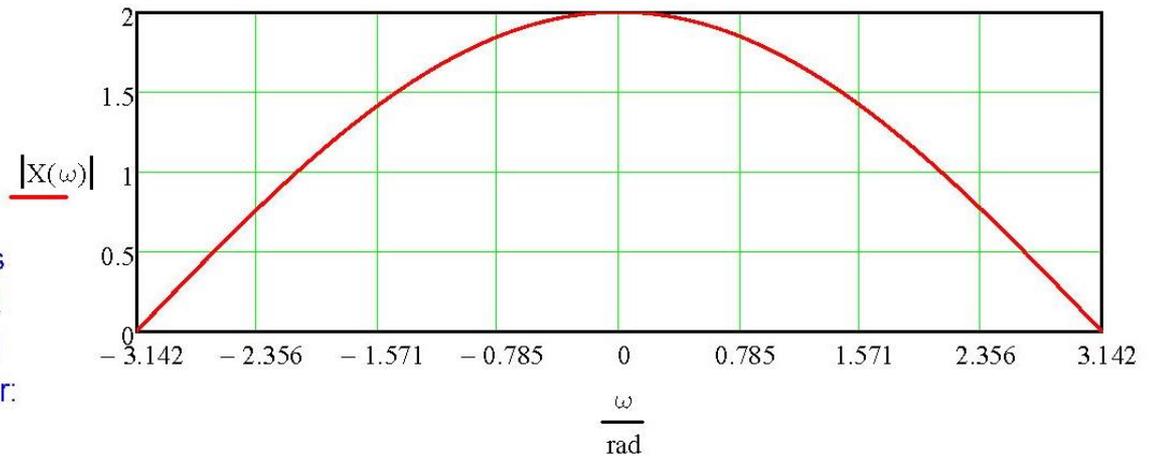
Os gráficos de módulo e fase de $X(\omega)=F\{x[n]\}$ no intervalo $-\pi \leq \omega \leq \pi$ são:

(ver slide 17)



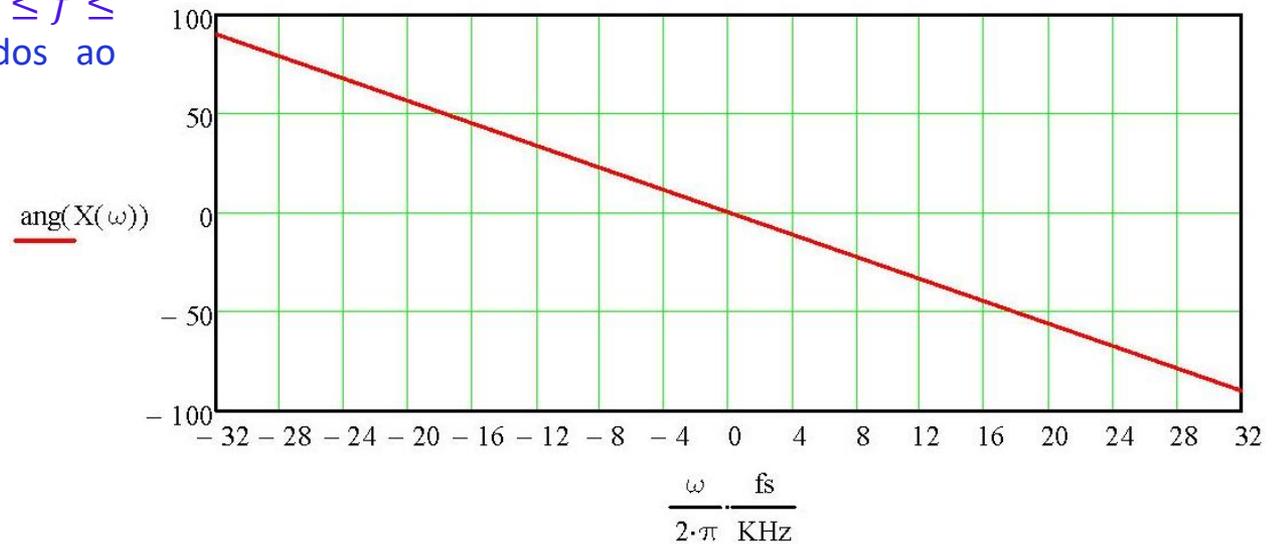
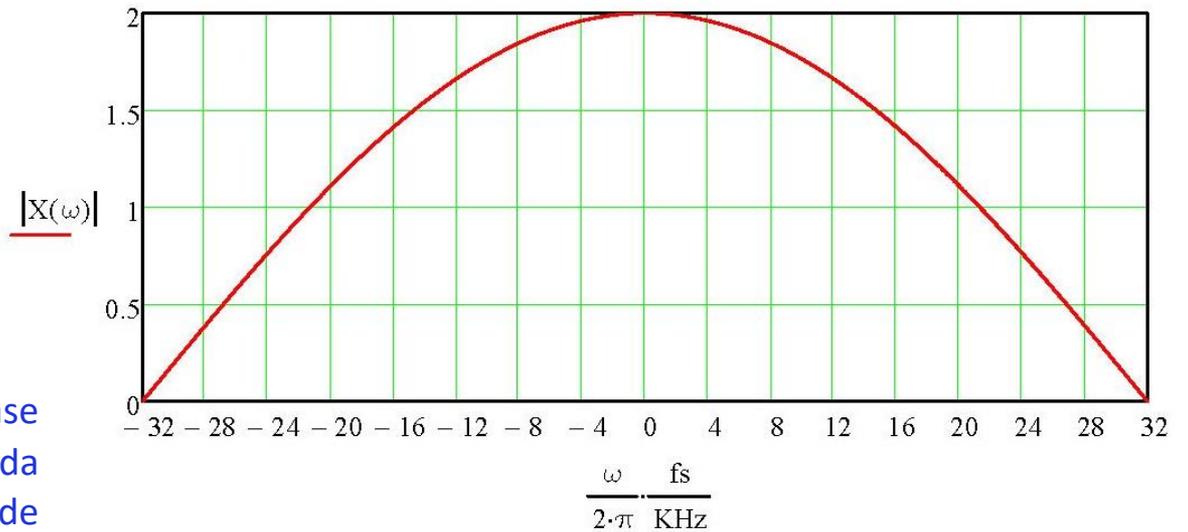
Do par 9 da tabela de Pares de Transformadas de Fourier, com $M := N - 1$, temos que a Transformada de Fourier da sequência $x[n]$ acima definida, isto é, $X(\omega)=F\{x[n]\}$, é dada por:

$$X(\omega) := \frac{A \cdot \sin\left[\omega \cdot \left(\frac{M+1}{2}\right)\right]}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot \frac{M}{2}}$$



DTFT - exemplos

Os gráficos de módulo e fase de $X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n]\}$ com o eixo da abscissa representando o intervalo de frequências analógicas $-f_s/2 \leq f \leq f_s/2$, são conforme apresentados ao lado:



(f) Repetindo (a), (b) e (c) para $\Delta t = 1/f_s$:

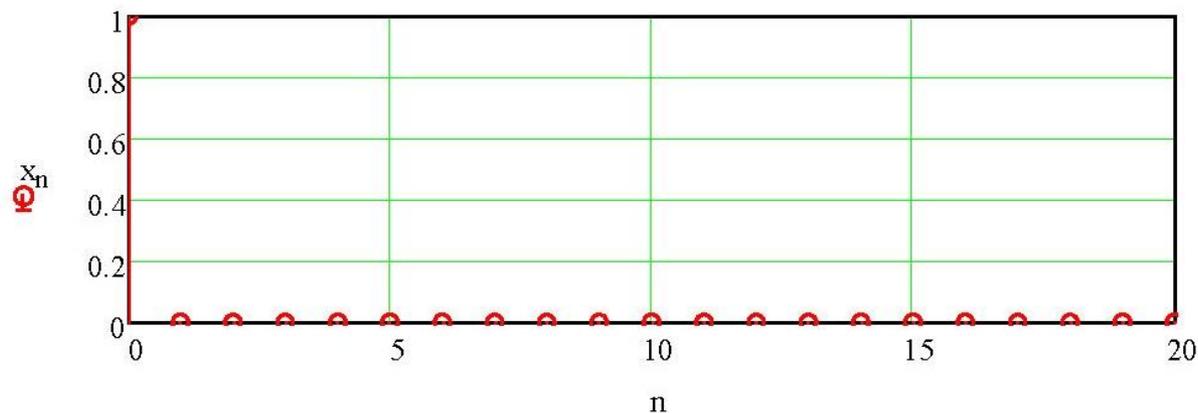
$$\Delta t := \frac{1}{f_s} \rightarrow \Delta t = 0.016 \cdot \text{ms} \rightarrow \text{duração do pulso } x(t)$$

$$T_s := \frac{1}{f_s} \rightarrow T_s = 0.016 \cdot \text{ms} \rightarrow \text{intervalo entre as amostras da sequência } x[n]$$

$$N := \text{round}\left(\frac{\Delta t}{T_s}\right) \rightarrow N = 1 \rightarrow \text{número de amostras do pulso representado por } x[n]$$

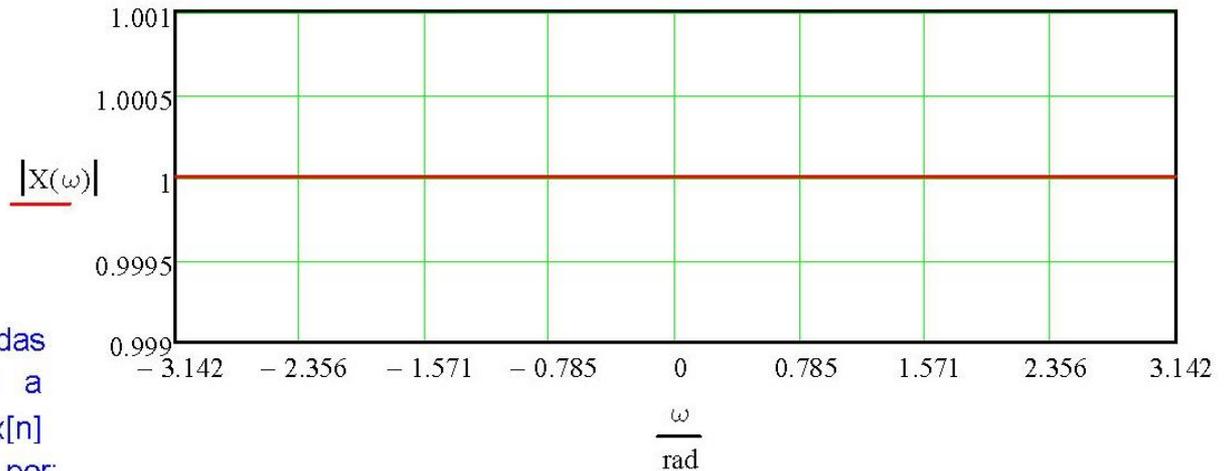
Portanto, para $n := 0, 1 \dots 20$, a sequência $x[n]$ na saída do A/D é representada por:

$$x_n := \text{if}[(n \geq 0) \cdot (n < N), A, 0] \quad \text{sendo } A = 1 \quad \text{e } N = 1, \text{ o que resulta no gráfico:}$$



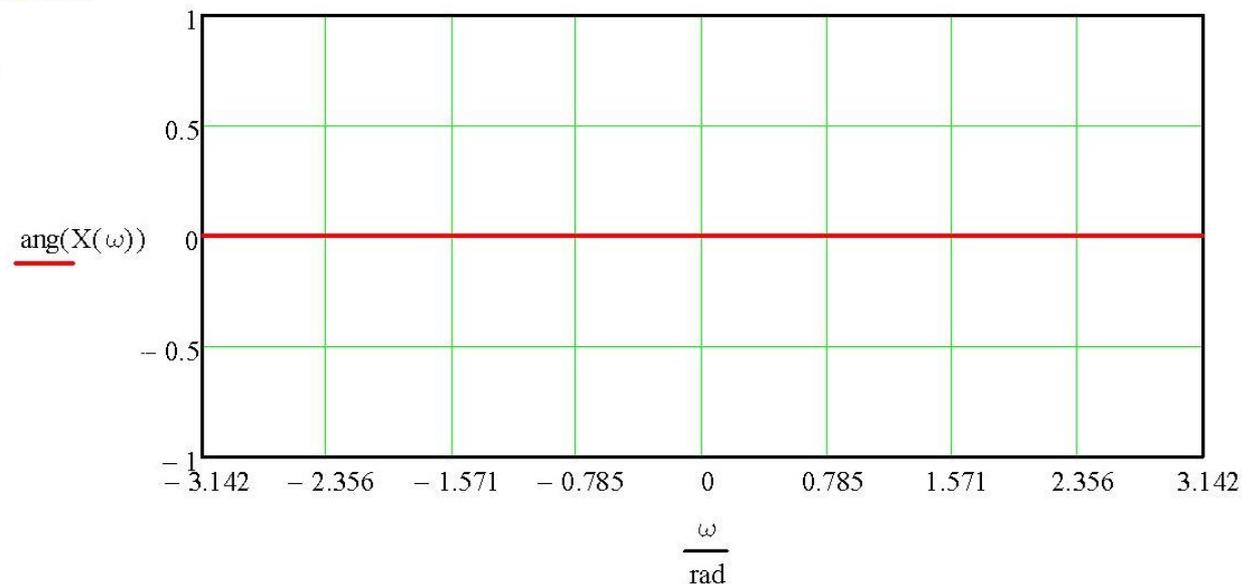
DTFT - exemplos

Os gráficos de módulo e fase de $X(\omega)=F\{x[n]\}$ no intervalo $-\pi \leq \omega \leq \pi$ são:



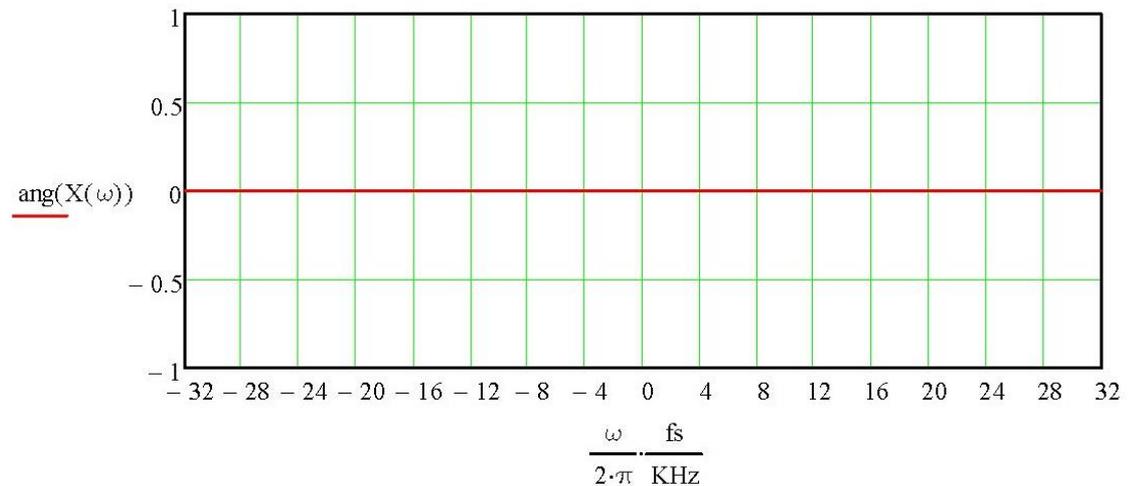
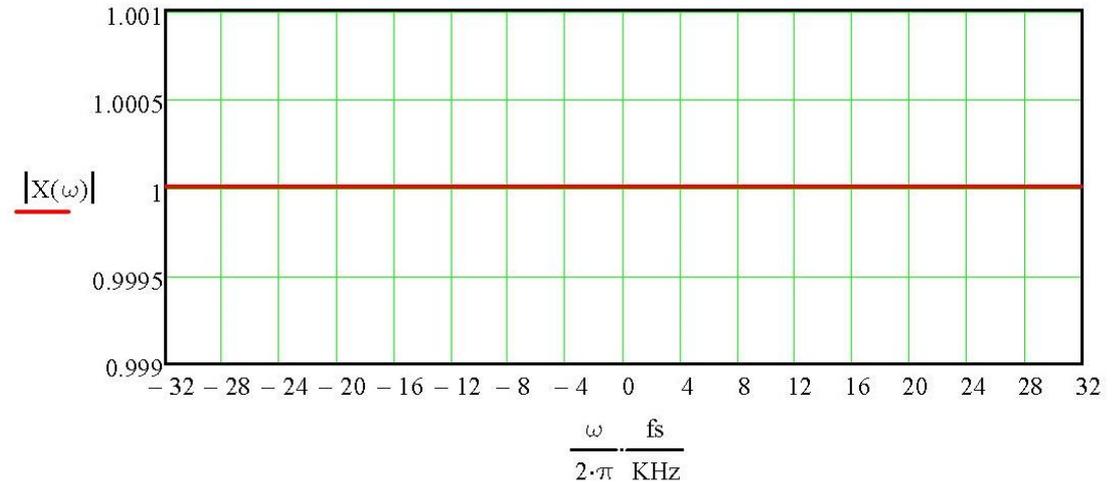
Do par 9 da tabela de Pares de Transformadas de Fourier, com $M := N - 1$, temos que a Transformada de Fourier da seqüência $x[n]$ acima definida, isto é, $X(\omega)=F\{x[n]\}$, é dada por:

$$X(\omega) := \frac{A \cdot \sin\left[\omega \cdot \left(\frac{M+1}{2}\right)\right]}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot \frac{M}{2}}$$



DTFT - exemplos

Os gráficos de módulo e fase de $X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n]\}$ com o eixo da abscissa representando o intervalo de frequências analógicas $-f_s/2 \leq f \leq f_s/2$, são conforme apresentados ao lado:



(g) Conclusões a partir dos resultados encontrados de (a)-(f):

Quanto menor for a duração Δt do pulso no domínio tempo contínuo antes do conversor A/D menor será a magnitude (=módulo = amplitude) do espectro $X(e^{j\omega})$ no domínio frequência digital ω após o conversor A/D . Simultaneamente, maiores serão as magnitudes das componentes espectrais de alta frequência no domínio frequência ω necessárias para construir o pulso no domínio tempo.

Ou seja, quanto mais rápida for a variação no tempo do sinal (= quanto mais estreito for um pulso de duração Δt), mais largo será o espectro $X(e^{j\omega})$ resultante no domínio frequência digital ω .

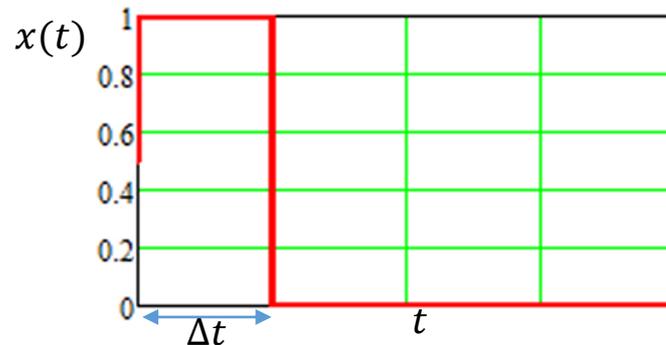
No limite, quando o pulso se torna um impulso, conforme descrito no item (f), $X(e^{j\omega})$ resulta em uma constante, indicando que todas as frequências ω no intervalo $-\pi < \omega < \pi$ são necessárias para construir no domínio tempo uma variação tão rápida como é o impulso.

Por exemplo, conforme discutido no Cap I das notas de aula, descargas elétricas atmosféricas (relâmpagos) interferem as comunicações de rádio em uma ampla faixa de frequências. Isto ocorre porque um relâmpago pode ser aproximado por um impulso, e, portanto, o espectro resultante é extremamente largo, interferindo os sinais de rádio nas faixas de VLF, LF, MF, HF e VHF.

Homework

Um conversor A/D com frequência de amostragem $f_s = 32\text{kHz}$ digitaliza um sinal analógico $x(t)$ que é um pulso retangular de amplitude $A = 1$, iniciando em $t = 0$ e de duração Δt , conforme mostra a figura.

Seja $x[n]$ a sequência na saída do conversor A/D resultante da digitalização de $x[t]$.



Pede-se:

- Plote o gráfico da sequência $x[n]$ para $\Delta t = 8/f_s$ no intervalo $0 \leq n \leq 20$;
- Plote o gráfico do módulo e da fase do espectro $X(e^{j\omega})$ de frequências angulares digitais de $x[n]$ no intervalo $-\pi \leq \omega \leq \pi$;
- Plote os gráficos obtidos em (b) com o eixo da abscissa representando o intervalo de frequências analógicas $-f_s/2 \leq f \leq f_s/2$;
- Repita (a), (b) e (c) para $\Delta t = 8/f_s$;
- Repita (a), (b) e (c) para $\Delta t = 4/f_s$;
- Repita (a), (b) e (c) para $\Delta t = 2/f_s$;
- Estabeleça conclusões a partir dos resultados encontrados de (a)-(f).

Apêndice A:

| Operation | Formula |
|---|--|
| Rectangular to Polar Conversion | $z = x + jy = re^{j\theta}$ where $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ and $\theta = \arctan(y/x)$ |
| Polar to Rectangular Conversion | $z = re^{j\theta} = r [\cos(\theta) + j\sin(\theta)] = x + jy$ where $x = r \cos(\theta)$ and $y = r \sin(\theta)$ |
| Add: $z_3 = z_1 + z_2$ | $(x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$ |
| Subtract: $z_3 = z_1 - z_2$ | $(x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$ |
| Multiply: $z_3 = z_1 z_2$ (polar form) | $(x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + y_1 x_2)$ $r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$ |
| Divide: $z_3 = z_1 / z_2$ (polar form) | $\frac{(x_1 x_2 - y_1 y_2) - j(x_1 y_2 - y_1 x_2)}{x_2^2 + y_2^2}$ $\frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$ |

Apêndice B:

| <i>Relationship</i> | <i>Relationship</i> |
|--|--|
| $\sin u = \cos(u - \pi/2)$ | $\cos u = \sin(u + \pi/2)$ |
| $\cos(-u) = \cos u$ | $\sin(-u) = -\sin(u)$ |
| $\sin^2 u + \cos^2 u = 1$ | $\cos^2 u = \frac{1}{2}(1 + \cos 2u)$ |
| $\sin^2 u = \frac{1}{2}(1 - \cos 2u)$ | $\cos(u \pm v) = \cos u \cos v \mp \sin u \sin v$ |
| $\sin(u \pm v) = \sin u \cos v \pm \cos u \sin v$ | $\cos u \cos v = \frac{1}{2}[\cos(u - v) + \cos(u + v)]$ |
| $\sin u \sin v = \frac{1}{2}[\cos(u - v) - \cos(u + v)]$ | $\sin u \cos v = \frac{1}{2}[\sin(u - v) + \sin(u + v)]$ |
| $\cos u = \frac{1}{2}[e^{ju} + e^{-ju}]$ | $\sin u = \frac{1}{2j}[e^{ju} - e^{-ju}]$ |
| $e^{ju} = \cos u + j \sin u$ | |

Apêndice C:

| Name | Sum | Condition |
|------------------------|--|------------------|
| Finite on $[N_1, N_2]$ | $\sum_{k=N_1}^{N_2} a^k = \frac{a^{N_1} - a^{N_2+1}}{1-a}$ | none |
| Finite on $[0, N-1]$ | $\sum_{k=0}^N a^k = \frac{1-a^{N+1}}{1-a}$ | none |
| Infinite | $\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}$ | $ a < 1$ |