



Transformada de Laplace - análise espectral  
no domínio frequência complexa  $s = \alpha + j\omega$   
de sinais no domínio tempo contínuo.



Departamento de Eletrônica e Computação

Centro de Tecnologia

ELC1115 – Sinais e Sistemas

Prof. Fernando DeCastro

## Transformada de Laplace

No Cap III.3 vimos que o espectro  $X(\omega)$  no domínio frequência  $\omega$  de um sinal  $x(t)$  no domínio tempo  $t$  é obtido através da Transformada de Fourier de  $x(t)$ , i.e. ,  $X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ . Vimos também que o sinal  $x(t)$  é obtido através da Transformada Inversa de Fourier do espectro  $X(\omega)$ , i.e.,  $x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\}$ , sendo o operador Transformada de Fourier  $\mathcal{F}\{\cdot\}$  e o operador Transformada Inversa de Fourier  $\mathcal{F}^{-1}\{\cdot\}$  dados conforme abaixo

$$X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (1)$$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (2)$$

A equação (2) constrói  $x(t)$  no domínio tempo  $t$  a partir de suas componentes espectrais  $X(\omega)$  no domínio frequência  $\omega$  através de  $x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\}$ . Ocorre que a integral em (2) não converge para determinados espectros  $X(\omega)$ . Neste contexto, vamos adicionar um grau de liberdade ao domínio frequência de modo a viabilizar mais “tijolos de construção” para  $x(t)$  no domínio frequência e, assim, possibilitar a convergência da integral.

Para tanto, vamos admitir uma dimensão adicional ao domínio frequência. Se  $e^{j\omega t}$  representa uma variação cíclica (senoidal) de frequência  $\omega$  [rad/s] no tempo  $t$  então  $e^{st}$  com  $s = \alpha + j\omega$  representa uma variação cíclica (senoidal) de frequência  $\omega$  [rad/s] no tempo  $t$ , variação que cresce ou decresce exponencialmente no tempo  $t$  de acordo com  $\alpha$ . O domínio frequência  $s$  é definido no plano complexo  $\alpha + j\omega$  e por isto  $s$  é denominado **frequência complexa**.

Note que  $e^{st} = e^{(\alpha+j\omega)t} = e^{\alpha t} e^{j\omega t} = e^{\alpha t}(\cos \omega t + j \sin \omega t) = e^{\alpha t} \cos \omega t + j e^{\alpha t} \sin \omega t$ . Portanto, para  $\alpha > 0$  a variação cíclica (senoidal) de frequência  $\omega$  cresce exponencialmente com o passar do tempo  $t$ . Para  $\alpha < 0$  a variação cíclica (senoidal) de frequência  $\omega$  decresce exponencialmente com o passar do tempo  $t$ . A unidade de  $\alpha$  é [Néper/segundo] abreviada como [Np/s]. Por exemplo, um sinal  $x(t)$  no tempo dado por  $x(t) = e^{st} = e^{\alpha t} e^{j\omega t}$  com  $s = \alpha + j\omega = -2 + j\pi$  [1/s] é um sinal cíclico com período  $T = 2\pi[\text{rad}]/\omega[\frac{\text{rad}}{\text{s}}] = 2\pi[\text{rad}]/\pi[\frac{\text{rad}}{\text{s}}] = 2$  [s]. A cada segundo transcorrido a amplitude do sinal cíclico com período  $T = 2$  [s] é multiplicada por  $e^{-2}$  (ou dividida por  $e^2$ ) significando que o sinal é atenuado de 2 [Np] a cada segundo [s]. Qual a frequência complexa deste sinal? Resposta:  $-2 + j\pi$  [1/s].

## Transformada de Laplace

Substituindo então em (1) e (2)  $j\omega$  por  $s = \alpha + j\omega$ , alterando o limite de integração inferior de (1) de modo ao domínio tempo  $t$  ser sempre positivo para representar apenas sinais causais (que é o tipo de sinal que interessa na prática) e adaptando os limites de integração de (2) para reduzir a sua complexidade computacional (ver Apêndice A) obtemos as equações (3) e (4), respectivamente denominadas Transformada de Laplace e Transformada Inversa de Laplace. Especificamente, o espectro  $X(s)$  no domínio frequência complexa  $s = \alpha + j\omega$  de um sinal  $x(t)$  no domínio tempo  $t$  é obtido através da Transformada de Laplace de  $x(t)$ , i.e.,  $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ . O sinal  $x(t)$  é obtido através da Transformada Inversa de Laplace do espectro  $X(s)$ , i.e.,  $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$ , sendo o operador Transformada de Laplace  $\mathcal{L}\{\cdot\}$  e o operador Transformada Inversa de Laplace  $\mathcal{L}^{-1}\{\cdot\}$  dados conforme abaixo

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (3)$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha_m - j\infty}^{\alpha_m + j\infty} X(s)e^{st} ds \quad (4)$$

$$s = \alpha + j\omega$$

- A equação (3) determina o espectro de frequências complexas  $X(s)$  do sinal  $x(t)$ .
- Visto que  $s = \alpha + j\omega$ , então  $X(s)$  é também de valor complexo, pois  $X(s)$  pode ser interpretada como uma soma ponderada de valores de  $x(t)$  em cada intervalo infinitesimal  $dt$  no domínio tempo, com fatores de ponderação dados por funções de valor complexo  $e^{-st} = e^{-(\alpha + j\omega)t}$ .

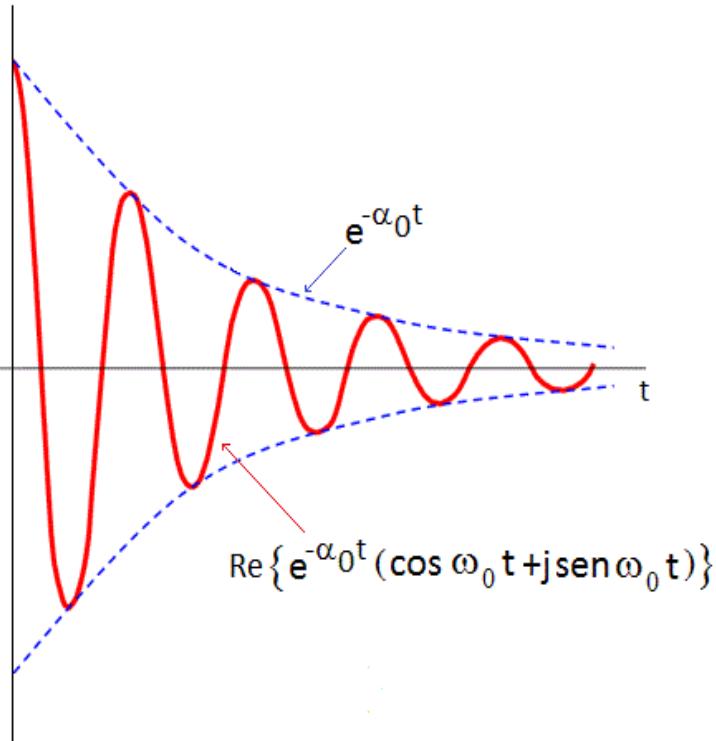
## Transformada de Laplace

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad s = \alpha + j\omega \quad (3)$$

- A variável de integração  $t$  tem a dimensão de tempo, e o expoente de  $e^{-st}$  deve ser uma **grandeza adimensional**, caso contrário estaria em desacordo com a interpretação de (3) como sendo uma soma de valores de  $x(t)$  ao longo de intervalos infinitesimais de tempo.
- Por exemplo, se  $x(t)$  é dado em [Volt] então  $X(s)$  é dado em [Volt x segundo]=[Volt/Hertz].
- Portanto, o parâmetro  $s$  deverá ter a dimensão do inverso do tempo, isto é, **frequência**, ou, equivalentemente, **variação**.
- Sendo assim,  **$s$  é uma grandeza complexa que representa modos de variação** .

## Transformada de Laplace

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad s = \alpha + j\omega \quad (3)$$



- A **parte real**  $\alpha_0$  de uma específica frequência complexa  $s = s_0 = \alpha_0 + j\omega_0$ , pertencente ao conjunto  $s$  de frequências complexas do espectro que representa  $x(t)$ , **está associada à variação exponencial**  $e^{-\alpha_0 t}$  no universo de possíveis variações no tempo da função  $x(t)$ .
- Por outro lado, a **parte imaginária**  $\omega_0$  de  $s_0 = \alpha_0 + j\omega_0$  **está associada à variação oscilatória senoidal**  $e^{-j\omega_0 t} = \cos \omega_0 t - j \sin \omega_0 t$  no universo de possíveis variações no tempo da função  $x(t)$ .

- Portanto, visto que  $e^{-st} = e^{-(\alpha+j\omega)t} = e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} = e^{-\alpha t}(\cos \omega t - j \sin \omega t)$ , a Transformada de Laplace decompõe um sinal no tempo  $x(t)$  em **modos de variação exponenciais (não-oscilatórios)** e **modos de variação senoidais (oscilatórios)**, cada um deles determinado por cada frequência do conjunto  $s$  de frequências complexas.

## Transformada de Laplace

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad s = \alpha + j\omega \quad (3)$$

- O módulo da componente espectral complexa  $X(s_0) = |X(s_0)|e^{j\angle\{X(s_0)\}}$ , i.é.,  $|X(s_0)|$ , representa a intensidade (magnitude) da contribuição daquele modo de variação na frequência complexa  $s_0 = \alpha_0 + j\omega_0$ .
- A fase da componente espectral complexa  $X(s_0) = |X(s_0)|e^{j\angle\{X(s_0)\}}$ , i.é.,  $\angle\{X(s_0)\}$  representa o ângulo associado a quão deslocada no tempo está a contribuição da variação oscilatória  $e^{-j\omega_0 t}$  na frequência  $s_0 = \alpha_0 + j\omega_0$ .
- Por exemplo,  $\angle\{X(s_0)\} = \pi/2$  rad significa que o modo de variação oscilatório no tempo para a frequência  $s_0 = j\omega_0$  é

$$e^{-j\omega_0 t} e^{j(\pi/2)} = e^{-j(\omega_0 t - \pi/2)} = e^{-j\left(\frac{2\pi}{T_0}t - \frac{\pi}{2}\right)} = e^{-j\frac{2\pi}{T_0}\left(t - \frac{T_0}{4}\right)}$$

ou seja, o modo de variação oscilatório no tempo está deslocado  $T_0/4$  segundos, sendo  $T_0$  o período da componente oscilatória senoidal na frequência complexa  $s_0$  definido por  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ .

## Transformada de Laplace

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad s = \alpha + j\omega \quad (3)$$

- Cabe notar, também, que a equação (3) soma ponderando  $x(t)$  ao longo do tempo com a exponencial  $e^{-st}$ , i.é, a equação (3) estabelece o grau de semelhança, ou correlação, entre  $x(t)$  e  $e^{-st}$ .
- Especificamente, (3) procura estabelecer o grau de semelhança entre  $x(t)$  e variações exponenciais e/ou senoidais definidas pela frequência complexa  $s = \alpha + j\omega$ .
- Quanto mais semelhante (correlacionado) for  $x(t)$  com o fator  $e^{-st}$  na frequência  $s = \alpha + j\omega$ , maior será o produto  $x(t)e^{-st}$  e, portanto, maior será o módulo  $|X(s)|$  de  $X(s) = |X(s)|e^{j\angle\{X(s)\}}$ .
- Ainda, o grau de semelhança  $|X(s)|$  na frequência  $s = \alpha + j\omega$  é válido para um deslocamento no tempo da variação senoidal dado por  $\angle\{X(s)\}T/2\pi$  segundos, ou seja, a variação oscilatória na frequência  $s$  é caracterizada por  $e^{-j\omega(t+\angle\{X(s)\}T/2\pi)}$ , sendo  $T = 2\pi/\omega$ .

## Transformada de Laplace

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad s = \alpha + j\omega \quad (3)$$

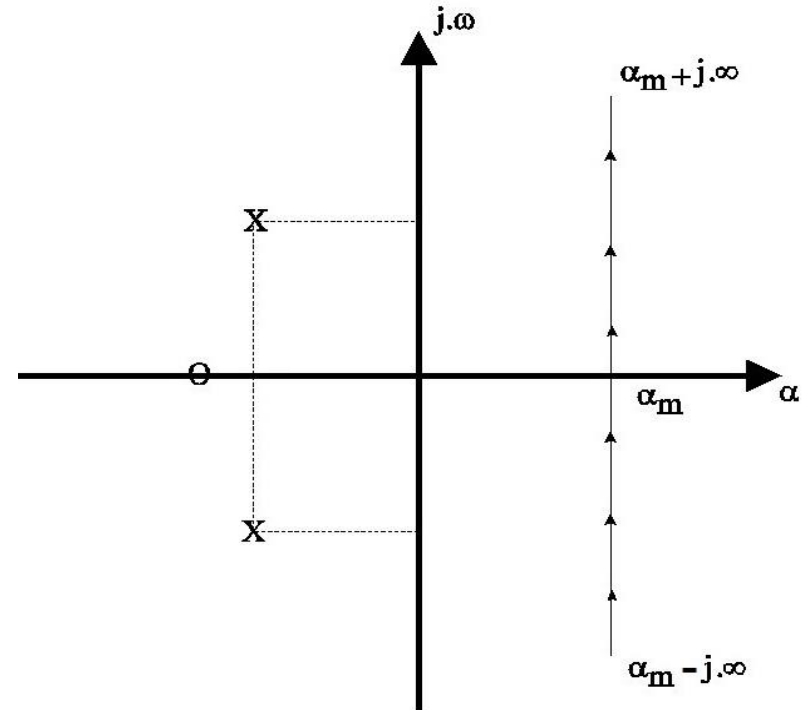
- Neste contexto, o espectro  $X(s)$ , cujo domínio é o plano de frequências complexas  $s = \alpha + j\omega$ , define como  $x(t)$  é construída a partir de variações exponenciais  $e^{\alpha t}$  e senoidais  $e^{j\omega t}$  no domínio tempo.
- Note, portanto, que a Transformada de Laplace é uma generalização da transformada de Fourier, visto que o espectro obtido através da Transformada de Fourier é o espectro das frequências angulares  $\omega$  que constroem  $x(t)$  através de variações senoidais no tempo, enquanto que o espectro obtido através da Transformada de Laplace é o espectro das frequências complexas  $s = \alpha + j\omega$  que constroem  $x(t)$  através de variações exponenciais e senoidais no tempo.



## Transformada de Laplace

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha_m - j\infty}^{\alpha_m + j\infty} X(s)e^{st} ds \quad (4)$$

- É possível mostrar a partir do Teorema de Cauchy (ver Apêndice A) que os limites de integração  $(\alpha_m - j\infty)$  a  $(\alpha_m + j\infty)$  na Transformada de Laplace Inversa dada por (4), muito embora definam um caminho retilíneo, equivalem a “varrer” ponto a ponto o plano complexo  $s = \alpha + j\omega$ .
- Esta varredura total do plano  $s$  é garantida desde que o caminho de integração que inicia em  $s = \alpha_m - j\infty$  e termina em  $s = \alpha_m + j\infty$  em (4) (e que é definido pela reta  $s = \alpha_m$  na figura ao lado) seja tal que a reta  $s = \alpha_m$  esteja à direita do polo de  $X(s)$  mais à direita no plano  $s$ .



Mapa de polos e zeros de  $X(s)$  e contorno de integração para cômputo de (4).

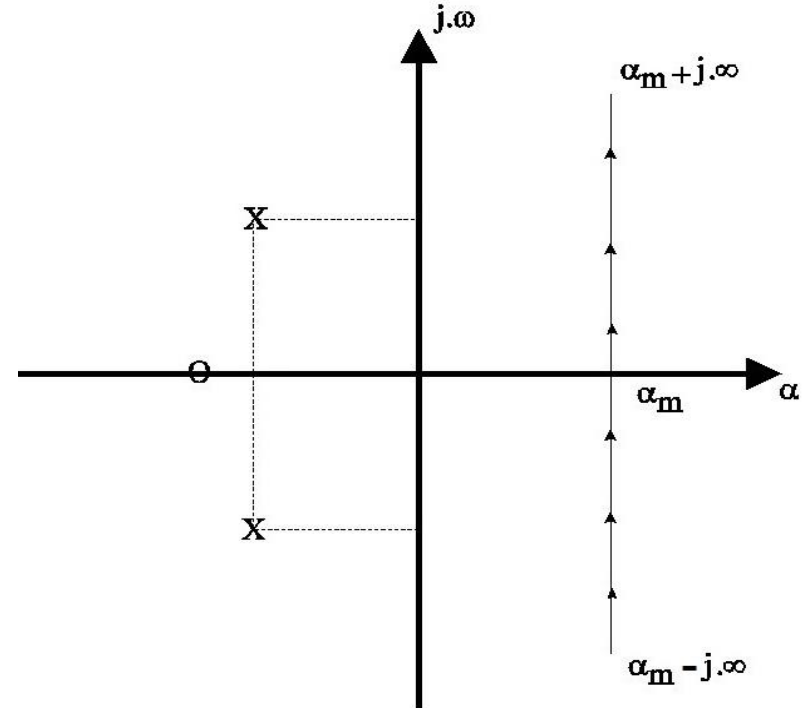
Polo (x): valor de  $s$  tal que  $|X(s)| = \infty$ .

Zero (o): valor de  $s$  tal que  $|X(s)| = 0$ .

# Transformada de Laplace

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha_m - j\infty}^{\alpha_m + j\infty} X(s)e^{st} ds \quad (4)$$

- Sob esta condição, a equação (4) pode ser interpretada como uma “varredura” em todo plano  $s$ , efetuando uma soma ponderada das componentes espectrais  $X(s)$ , com fator de ponderação dado por  $e^{st}$ .
- Em outras palavras, a equação (3) constrói (expande)  $x(t)$  a partir de uma série infinita de termos  $e^{st}$ , ponderados por coeficientes  $X(s)$ , infinitesimalmente distantes entre si no domínio frequência complexa  $s = \alpha + j\omega$ .



Mapa de polos e zeros de  $X(s)$  e contorno de integração para cômputo de (4).

Polo (x): valor de  $s$  tal que  $|X(s)| = \infty$ .

Zero (o): valor de  $s$  tal que  $|X(s)| = 0$ .

# Transformada de Laplace

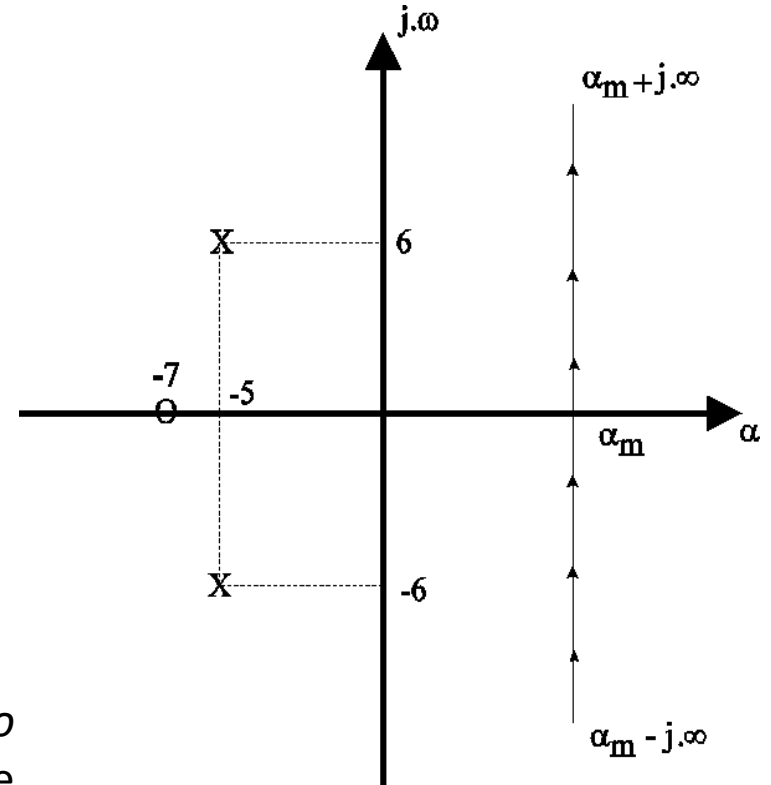
Para finalizar esta análise interpretativa da Transformada de Laplace, consideremos a função  $x(t)$  no domínio tempo e o respectivo espectro de frequências complexas  $X(s)$ , obtido conforme tabela de pares de Transformadas de Laplace<sup>(1)</sup>,

$$x(t) = 1.05e^{-5t} \cos(6t - 18.4^\circ) u(t)$$

$$X(s) = \frac{s+7}{s^2+10s+61}$$

A figura mostra o mapa dos polos e zeros (*pole-zero map*) de  $X(s)$  no plano  $s$ , e um possível caminho de integração ao longo da reta  $s = \alpha_m$  para cômputo da Transformada Inversa de Laplace (equação (4)).

Foi dito “possível” porque qualquer valor de  $\alpha_m$  que localize o caminho retilíneo de integração à direita de todos os polos de  $X(s)$  é válido.



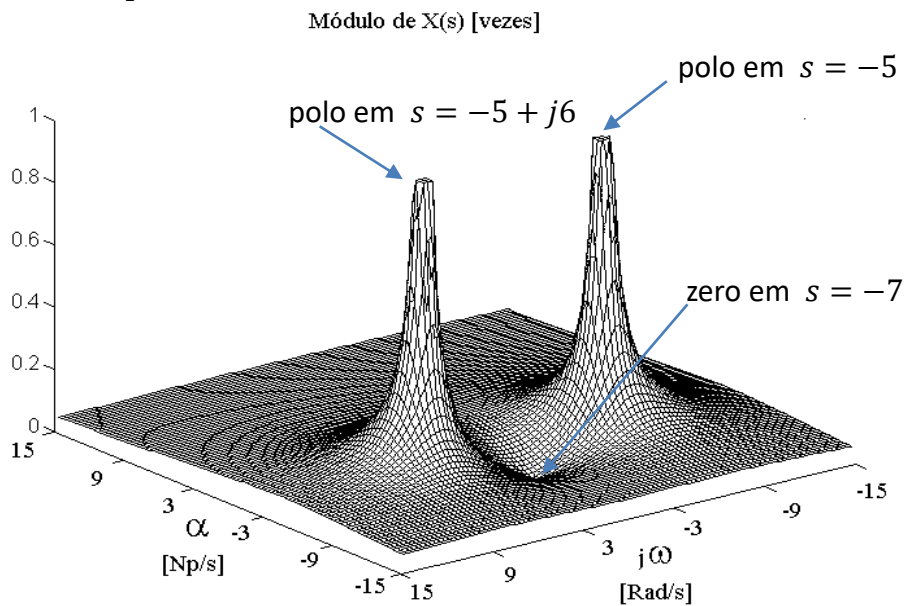
Mapa de polos e zeros de  $X(s)$  e contorno de integração para cômputo de (4).

Polo (x): valor de  $s$  tal que  $|X(s)| = \infty$ .  
Zero (o): valor de  $s$  tal que  $|X(s)| = 0$ .

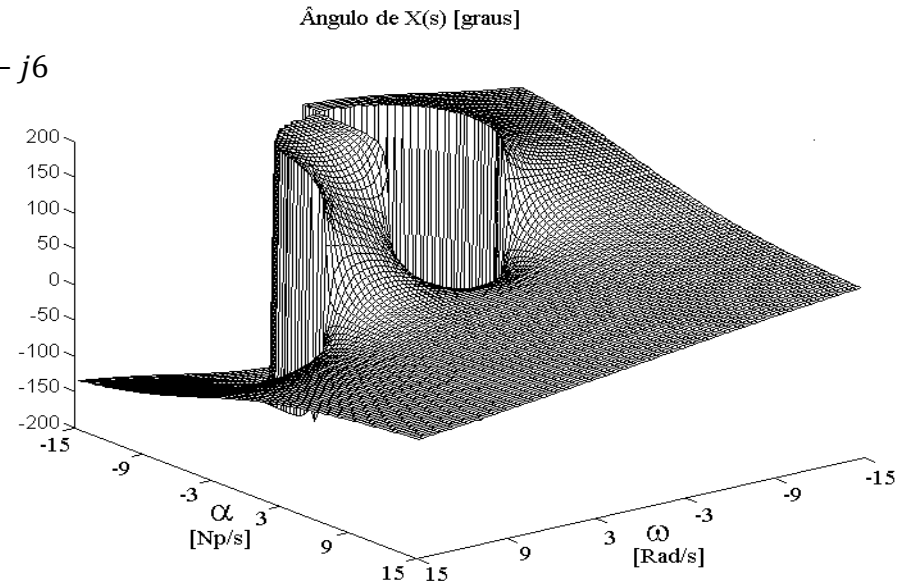
(1) Ver tabela de pares de Transformadas de Laplace, slides 16 a 18.

# Transformada de Laplace

- As figuras abaixo mostram a vista tridimensional da função complexa  $X(s)$  definida sobre o domínio  $s = \alpha + j\omega$  mostrado no mapa de polos e zeros no slide anterior. As figuras respectivamente mostram as superfícies de módulo e ângulo do espectro  $X(s)$ .
- Dado que  $X(s)$  é um número complexo, são necessários dois gráficos tridimensionais para definir  $X(s)$ , um para a superfície da função  $|X(s)|$  e outro para a superfície da função  $\angle\{X(s)\}$ , plotadas contra o plano  $s = \alpha + j\omega$ , que é o conjunto de domínio destas funções.



Módulo do espectro de frequências complexas  $X(s)$  com topo dos polos limitado em 1.0.



Ângulo do espectro de frequências complexas  $X(s)$ .

Propriedades da Transformada de Laplace (resultantes da equação (3))

1	$\mathcal{L}[Af(t)] = AF(s)$
2	$\mathcal{L}[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s)$
3	$\mathcal{L}_{\pm}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s) - f(0_{\pm})$ $f(t) p/ t = 0^-$
4	$\mathcal{L}_{\pm}\left[\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right] = s^2F(s) - sf(0_{\pm}) - \dot{f}(0_{\pm})$
5	$\mathcal{L}_{\pm}\left[\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right] = s^nF(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f^{(k-1)}(0_{\pm})$ $\frac{d}{dt}f(t) p/ t = 0^-$ where $f^{(k-1)} = \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}f(t)$
6	$\mathcal{L}_{\pm}\left[\int f(t) dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{1}{s} \left[ \int f(t) dt \right]_{t=0_{\pm}}$
7	$\mathcal{L}_{\pm}\left[\int \dots \int f(t) (dt)^n\right] = \frac{F(s)}{s^n} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{s^{n-k+1}} \left[ \int \dots \int f(t) (dt)^k \right]_{t=0_{\pm}}$
8	$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{F(s)}{s}$
9	$\int_0^{\infty} f(t) dt = \lim_{s \rightarrow 0} F(s)$ if $\int_0^{\infty} f(t) dt$ exists

**Nota:**

$\mathcal{L}_+\{\cdot\} \rightarrow f(t)$  é causal (definida p/  $t > 0$ )

$\mathcal{L}_-\{\cdot\} \rightarrow f(t)$  é não-causal (definida p/  $t < 0$ ) – fora do escopo deste texto.

Propriedades da Transformada de Laplace (resultantes das equações (3) e (4))

10	$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = F(s + a)$
11	$\mathcal{L}[f(t - \alpha)1(t - \alpha)] = e^{-as}F(s) \quad \alpha \geq 0$
12	$1(t) \equiv u(t) \quad \mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{dF(s)}{ds}$
13	$\mathcal{L}[t^2f(t)] = \frac{d^2}{ds^2}F(s)$
14	$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}F(s) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$
15	$\mathcal{L}\left[\frac{1}{t}f(t)\right] = \int_s^\infty F(s) ds \quad \text{if } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}f(t) \text{ exists}$
16	$\mathcal{L}\left[f\left(\frac{1}{a}\right)\right] = aF(as)$
17	$\mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(t - \tau)f_2(\tau) d\tau\right] = F_1(s)F_2(s)$
18	$\mathcal{L}[f(t)g(t)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p)G(s - p) dp$

Teoremas da Transformada de Laplace (resultantes das equações (3) e (4))

<p><b>Initial value theorem</b></p>	$f(0+) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$
<p><b>Final value theorem</b></p>	$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$
<p><b>Pulse function</b></p> <p style="text-align: right;"><math>1(t) \equiv u(t)</math></p> <p><math>f(t) = \frac{A}{t_0} 1(t) - \frac{A}{t_0} 1(t - t_0)</math></p>	$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{A}{t_0 s} - \frac{A}{t_0 s} e^{-st_0}$
<p><b>Impulse function</b></p> <p><math>g(t) = \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{A}{t_0}, \quad \text{for } 0 &lt; t &lt; t_0</math></p> <p><math>= 0, \quad \text{for } t &lt; 0, t_0 &lt; t</math></p>	$\begin{aligned} \mathcal{L}[g(t)] &= \lim_{t_0 \rightarrow 0} \left[ \frac{A}{t_0 s} (1 - e^{-st_0}) \right] \\ &= \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dt_0} [A(1 - e^{-st_0})]}{\frac{d}{dt_0} (t_0 s)} \\ &= \frac{As}{s} = A \end{aligned}$

Pares de Transformadas  
de Laplace  
(resultantes da equação (3))

$1(t) \equiv u(t)$

	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1	Unit impulse $\delta(t)$	1
2	Unit step $1(t)$	$\frac{1}{s}$
3	$t$	$\frac{1}{s^2}$
4	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{1}{s^n}$
5	$t^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
6	$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$
7	$te^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
8	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$
9	$t^n e^{-at} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
10	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
11	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
12	$\sinh \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$
13	$\cosh \omega t$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$



Pares de Transformadas  
de Laplace  
(resultantes da equação (3))

	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
14	$\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$
15	$\frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
16	$\frac{1}{b-a}(be^{-bt} - ae^{-at})$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$
17	$\frac{1}{ab} \left[ 1 + \frac{1}{a-b}(be^{-at} - ae^{-bt}) \right]$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$
18	$\frac{1}{a^2}(1 - e^{-at} - ate^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)^2}$
19	$\frac{1}{a^2}(at - 1 + e^{-at})$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$
20	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
21	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
22	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t \quad (0 < \zeta < 1)$	$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$
23	$-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t - \phi)$ $\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$ $(0 < \zeta < 1, \quad 0 < \phi < \pi/2)$	$\frac{s}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$

Pares de Transformadas  
de Laplace  
(resultantes da equação (3))

	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
24	$1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \phi)$ $\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}$ $(0 < \zeta < 1, \quad 0 < \phi < \pi/2)$	$\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$
25	$1 - \cos \omega t$	$\frac{\omega^2}{s(s^2 + \omega^2)}$
26	$\omega t - \sin \omega t$	$\frac{\omega^3}{s^2(s^2 + \omega^2)}$
27	$\sin \omega t - \omega t \cos \omega t$	$\frac{2\omega^3}{(s^2 + \omega^2)^2}$
28	$\frac{1}{2\omega} t \sin \omega t$	$\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
29	$t \cos \omega t$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
30	$\frac{1}{\omega_2^2 - \omega_1^2} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) \quad (\omega_1^2 \neq \omega_2^2)$	$\frac{s}{(s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_2^2)}$
31	$\frac{1}{2\omega} (\sin \omega t + \omega t \cos \omega t)$	$\frac{s^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$

## Polos e zeros da função de transferência $H(s)$ de um sistema

Em uma análise similar à feita para Transformada de Fourier (ver slide 32 do Cap III.3 das notas de aula), todo sistema LTI analógico, com uma entrada  $x(t)$  e uma saída  $y(t)$ , é descrito no domínio frequência complexa  $s = \alpha + j\omega$  por uma função de transferência (resposta em frequência)  $H(s)$ , conforme

$$H(s) = P(s)/Q(s)$$

onde  $P(s)$  e  $Q(s)$  são polinômios da variável independente  $s = \alpha + j\omega$ , sendo

$$H(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}/\mathcal{L}\{x(t)\} = Y(s)/X(s) .$$

## Polos e zeros da função de transferência $H(s)$ de um sistema

⇒ **Zeros** são frequências  $s = \alpha + j\omega$  no espectro de frequências complexas  $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$  do sinal de entrada  $x(t)$  em que  $P(s) = 0$ , zerando a razão  $H(s) = P(s)/Q(s)$ , e zerando, portanto, a amplitude do espectro  $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} = H(s)X(s)$  da saída  $y(t)$  nas frequências  $s = \alpha + j\omega$  correspondentes às frequências dos zeros.

Zeros são, portanto, frequências complexas  $s = \alpha + j\omega$  em que o sistema apresenta atenuação infinita.

⇒ **Polos** são frequências  $s = \alpha + j\omega$  no espectro de frequências complexas  $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$  do sinal de entrada  $x(t)$  em que  $Q(s) = 0$ , tornando infinita a razão  $H(s) = P(s)/Q(s)$ , e tornando infinita, portanto, a amplitude do espectro  $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} = H(s)X(s)$  da saída  $y(t)$  nas frequências  $s = \alpha + j\omega$  correspondentes às frequências dos polos.

Polos são, portanto, frequências complexas  $s = \alpha + j\omega$  em que o sistema apresenta ganho infinito.

## Exemplo 1

**Exemplo 1:** Considere o sinal  $x(t) = Ae^{-at}u(t)$ , com  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$  e  $s = \alpha + j\omega$ . **Pede-se:** **(a)** Determine o espectro de frequências complexas  $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ . **(b)** Discuta as condições de existência de  $\mathcal{L}\{x(t)\}$ . **(c)** Confirme o resultado analítico com a função `laplace()` do *software* Matlab.

**Solução:** **(a)** Da equação (3) temos

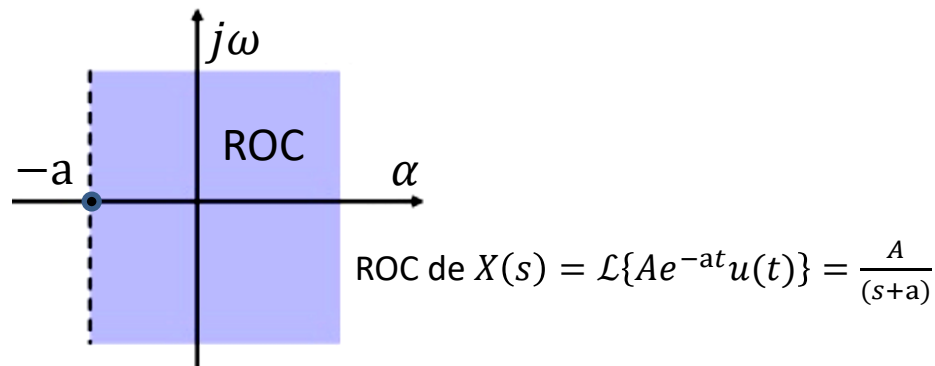
$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt = A \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt = A \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} dt$$

Da equação 259 de <http://www.fccdecastro.com.br/pdf/TOI.pdf> temos que  $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$ . Daí, com  $a = -(s+a)$  e  $x = t$ , obtemos:

$$X(s) = A \left[ \frac{e^{-(s+a)t}}{-(s+a)} \right]_0^{\infty} = A \left[ \frac{e^{-(s+a)\infty} - 1}{-(s+a)} \right] = \frac{A}{(s+a)}$$

Note que o resultado confere com o par 6 na tabela do slide 16.

**(b)** A integral acima somente converge para  $\text{Re}\{s+a\} > 0$ , ou equivalentemente, para  $\text{Re}\{s\} + \text{Re}\{a\} > 0$  ou  $\alpha > -a$ . Portanto, **a ROC (region of convergence)** de  $X(s) = \mathcal{L}\{Ae^{-at}u(t)\} = \frac{A}{(s+a)}$  é o semiplano no plano  $s = \alpha + j\omega$  de frequências complexas definido por  $\alpha > -a$ , conforme mostra a figura abaixo. Note ainda que  $s = -a$  é um polo da função complexa  $X(s)$ , porque, conforme visto na disciplina Variável Complexa, à medida que  $s$  se aproxima de  $-a$  o valor de  $X(s)$  torna-se infinitamente grande.



## Exemplo 1

(c) A função `laplace()` do *software* Matlab é usada conforme abaixo:

```
help laplace
```

```
--- help for sym/laplace ---
```

```
laplace Laplace transform.
```

```
L = laplace(F) is the Laplace transform of the sym F with default independent variable t. The default return is a function of s.
```

```
If F = F(s), then laplace returns a function of z: L = L(z).
```

```
By definition, L(s) = int(F(t)*exp(-s*t),t,0,inf).
```

```
L = laplace(F,z) makes L a function of z instead of the default s:  
laplace(F,z) <=> L(z) = int(F(t)*exp(-z*t),t,0,inf).
```

```
L = laplace(F,w,u) makes L a function of u instead of the default s (integration with respect to w).
```

```
laplace(F,w,u) <=> L(u) = int(F(w)*exp(-u*w),w,0,inf).
```

```
Examples:
```

```
syms a s t w x F(t)
```

```
laplace(t^5) returns 120/s^6
```

```
laplace(exp(a*s)) returns -1/(a-z)
```

```
laplace(sin(w*x),t) returns w/(t^2+w^2)
```

```
laplace(cos(x*w),w,t) returns t/(t^2+x^2)
```

```
laplace(x^(3/2),t) returns (3*pi^(1/2))/(4*t^(5/2))
```

```
laplace(diff(F(t))) returns s*laplace(F(t),t,s) - F(0)
```

```
See also sym/ilaplace, sym/fourier, sym/ztrans, subs.
```

```
>>
```

## Exemplo 1

```
syms x t a A % declara variáveis simbólicas
x = A*exp(-a*t); % define a função no tempo
X = laplace(x) % executa a Transformada de Laplace e mostra resultado
```

X =

$A/(a + s)$

Note que o resultado da função `laplace()` confere com o resultado analítico obtido em (a). Note também que não foi necessário explicitar a função degrau  $u(t)$  porque o Matlab assume que a função  $x(t)$  é causal (definida p/  $t \geq 0$ ) – ver definição no slide anterior:  $L(s) = \int_0^{\infty} F(t) \exp(-s*t) dt$ , que é a implementação no Matlab da equação (3).

## Exemplo 2

**Exemplo 2:** Considere o sinal  $x(t) = 2\delta(t) + te^{-3(t-4)}u(t-4)$ . **Pede-se:** Determine o espectro de frequências complexas  $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$  usando a função `laplace()` do *software* Matlab.

**Solução:** A função `laplace()` do *software* Matlab é usada conforme abaixo.

```
syms x t % declara variáveis simbólicas
x = 2*dirac(t)+t*exp(-3*(t-4))*heaviside(t-4); % define a funcao no tempo
X = laplace(x) % executa a Transformada de Laplace e mostra resultado
```

```
X =
(4*exp(-4*s))/(s + 3) + exp(-4*s)/(s + 3)^2 + 2
```

```
>>
```

Portanto o resultado é  $X(s) = \frac{4e^{-4s}}{s+3} + \frac{e^{-4s}}{(s+3)^2} + 2$



## Transformada de Laplace Inversa através da expansão de $X(s)$ em frações parciais

Dado  $X(s)$ , obter  $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$  através da equação (4) não é uma tarefa trivial:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha_m - j\infty}^{\alpha_m + j\infty} X(s)e^{st} ds \quad s = \alpha + j\omega \quad (4)$$

Ocorre que para a grande maioria dos fins práticos em engenharia  $X(s)$  é uma razão entre dois polinômios  $N(s)$  e  $D(s)$ :

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = k \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} \quad (5)$$

onde  $z_1, z_2, \dots, z_m$  são as raízes de  $N(s)$  e que constituem os zeros de  $X(s)$  e onde  $p_1, p_2, \dots, p_n$  são as raízes de  $D(s)$  e que constituem os polos de  $X(s)$ . Quando  $X(s)$  é dada por uma razão entre dois polinômios  $N(s)$  e  $D(s)$ , é relativamente simples expandir  $X(s)$  em frações parciais, conforme roteiro que segue.

**(A)** Para o caso em que  $m < n$ :

**(A.1)** Para o caso em que não há polos repetidos em  $X(s)$ , reescrever  $X(s)$  na forma:

$$X(s) = \frac{c_1}{(s - p_1)} + \frac{c_2}{(s - p_2)} + \cdots + \frac{c_n}{(s - p_n)} \quad (6)$$

onde os coeficientes  $c_k$ , com  $k = 1, 2, \dots, n$  são dados por

$$c_k = (s - p_k)X(s) \Big|_{s = p_k} \quad (7)$$

e daí a cada termo de  $X(s)$  expandida por (6) aplica-se o par 6 da tabela do slide 16 ( $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+a}\right\} = e^{-at}$ ) de modo a obter  $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$  como uma soma ponderada de exponenciais no domínio tempo.

## Transformada de Laplace Inversa através da expansão de $X(s)$ em frações parciais

**(A.2)** Para o caso em que há polos repetidos em  $X(s)$ , i.e., quando  $D(s)$  apresenta raízes múltiplas, raízes que são representadas no denominador de (5) por um ou mais fatores  $(s - p_i)^r$ , onde  $p_i$  é o  $i$ -ésimo polo múltiplo de  $X(s)$  com multiplicidade  $r$ , é necessário acrescentar à expansão (6) de  $X(s)$  termos na forma de (8) para cada  $i$ -ésimo polo múltiplo  $p_i$  :

$$\frac{\lambda_1}{(s - p_i)} + \frac{\lambda_2}{(s - p_i)^2} + \dots + \frac{\lambda_r}{(s - p_i)^r} \quad (8)$$

onde os coeficientes  $\lambda_k$ , com  $k = 0, 1, \dots, r - 1$  são dados por

$$\lambda_{r-k} = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{ds^k} [(s - p_i)^r X(s)] \Big|_{s = p_i} \quad (9)$$

**(B)** Para o caso em que  $m \geq n$ , efetua-se a divisão de  $N(s)$  por  $D(s)$ :

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = Q(s) + \frac{R(s)}{D(s)} \quad (10)$$

onde o quociente  $Q(s)$  é um polinômio em  $s$  com grau  $m - n$  e o resto  $R(s)$  é um polinômio em  $s$  com grau menor que  $n$ . Desta maneira, temos de (10):

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{Q(s)\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{R(s)}{D(s)}\right\} \quad (11)$$

Como o grau de  $R(s)$  é menor que o de  $D(s)$  então  $\mathcal{L}^{-1}\{R(s)/D(s)\}$  em (11) pode ser determinada pelo procedimento **(A)**.  $\mathcal{L}^{-1}\{Q(s)\}$  pode ser determinada usando o par de transformadas dado pela equação (12) abaixo, que resulta da combinação do par 1 da tabela do slide 16 com a propriedade 5 da tabela do slide 13:

$$\frac{d^k \delta(t)}{dt^k} \leftrightarrow s^k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (12)$$

### Exemplo 3

**Exemplo 3:** Um sistema LTI possui uma função de transferência dada por  $H(s) = \frac{2s + 4}{s^2 + 4s + 3}$ .

**Pede-se:** (a) Determine analiticamente a resposta ao impulso  $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$  deste sistema. (b) Refaça (a) utilizando a função `residue()` do software Matlab. (c) Refaça (a) utilizando a função `ilaplace()` do software Matlab. (d) Refaça (a) e plote  $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$  utilizando a função `impz()` do software Matlab. (e) Determine e plote a resposta  $s(t)$  ao degrau deste sistema utilizando a função `step()` do software Matlab.

**Solução:** (a) Para expandir  $H(s)$  em frações parciais através do roteiro (A.1) do slide 25, precisamos determinar as raízes do denominador de  $H(s)$ , que são:

$$s^2 + 4s + 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} s_1 = -1 \\ s_2 = -3 \end{cases} \quad \left( \begin{array}{l} \text{Bhaskara:} \\ as^2 + bs + c = 0 \rightarrow s_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{array} \right)$$

Daí, da equação (6) temos:

$$H(s) = \frac{2s + 4}{s^2 + 4s + 3} = 2 \frac{s + 2}{(s + 1)(s + 3)} = \frac{c_1}{(s + 1)} + \frac{c_2}{(s + 3)}$$

Da equação (7) temos:

$$c_1 = (s + 1)H(s) \Big|_{s = -1} = 2 \frac{s + 2}{(s + 3)} \Big|_{s = -1} = 1$$

$$c_2 = (s + 3)H(s) \Big|_{s = -3} = 2 \frac{s + 2}{(s + 1)} \Big|_{s = -3} = 1$$

E daí

$$H(s) = \frac{c_1}{(s + 1)} + \frac{c_2}{(s + 3)}$$

Do par 6 da tabela do slide 16 temos que  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+a}\right\} = e^{-at}$ , e daí  $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$  resulta:

$$h(t) = e^{-t} + e^{-3t}, \quad t \geq 0$$

### Exemplo 3

(b) A função `residue()` do *software* Matlab é usada conforme abaixo.

```
>> help residue
```

```
residue Partial-fraction expansion (residues).
```

```
[R,P,K] = residue(B,A) finds the residues, poles and direct term of a partial fraction expansion of the ratio of two polynomials B(s)/A(s).
```

```
If there are no multiple roots,
```

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{R(1)}{s - P(1)} + \frac{R(2)}{s - P(2)} + \dots + \frac{R(n)}{s - P(n)} + K(s)$$

```
Vectors B and A specify the coefficients of the numerator and denominator polynomials in descending powers of s. The residues are returned in the column vector R, the pole locations in column vector P, and the direct terms in row vector K. The number of poles is n = length(A)-1 = length(R) = length(P). The direct term coefficient vector is empty if length(B) < length(A), otherwise length(K) = length(B)-length(A)+1.
```

```
If P(j) = ... = P(j+m-1) is a pole of multiplicity m, then the expansion includes terms of the form
```

$$\frac{R(j)}{s - P(j)} + \frac{R(j+1)}{(s - P(j))^2} + \dots + \frac{R(j+m-1)}{(s - P(j))^m}$$

```
Class support for inputs B,A,R:
```

```
float: double, single
```

```
See also poly, roots, deconv.
```

```
>>
```

### Exemplo 3

```
num = [2 4]; % coeficientes do numerador de H(s) (ordem decrescente das potencias de s)
den = [1 4 3]; % coeficientes do denominador de H(s) (ordem decrescente potencias de s)
[r,p,k] = residue(num,den) % chama a função residue() e mostra resultado
```

```
r =
    1 ← c2
    1 ← c1
p =
   -3 ← p2
   -1 ← p1
k =
    [] ← Q(s) = 0 porque m < n
```

E daí, seguindo o mesmo procedimento do item (a):

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)} + \frac{1}{(s+3)}$$

Do par 6 da tabela do slide 16,  $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$  resulta:

$$h(t) = e^{-t} + e^{-3t}, \quad t \geq 0$$

### Exemplo 3

(c) A função `ilaplace()` do *software* Matlab é usada conforme abaixo.

```
>> help ilaplace
```

```
--- help for sym/ilaplace ---
```

```
ilaplace Inverse Laplace transform.
```

```
F = ilaplace(L) is the inverse Laplace transform of the sym L with default independent variable s. The default return is a function of t. If L = L(t), then ilaplace returns a function of x: F = F(x).
```

```
By definition, F(t) = int(L(s)*exp(s*t),s,c-i*inf,c+i*inf) where c is a real number selected so that all singularities of L(s) are to the left of the line s = c, i = sqrt(-1), and the integration is taken with respect to s.
```

```
F = ilaplace(L,y) makes F a function of y instead of the default t: ilaplace(L,y) <=> F(y) = int(L(y)*exp(s*y),s,c-i*inf,c+i*inf).
```

```
F = ilaplace(L,y,x) makes F a function of x instead of the default t: ilaplace(L,y,x) <=> F(y) = int(L(y)*exp(x*y),y,c-i*inf,c+i*inf), integration is taken with respect to y.
```

```
Examples:
```

```
syms s t w x y f(x)
ilaplace(1/(s-1))           returns exp(t)
ilaplace(1/(t^2+1))        returns sin(x)
ilaplace(t^(-5/2),x)       returns (4*x^(3/2))/(3*pi^(1/2))
ilaplace(y/(y^2 + w^2),y,x) returns cos(w*x)
ilaplace(laplace(f(x),x,s),s,x) returns f(x)
```

```
See also sym/laplace, sym/ifourier, sym/iztrans, subs.
```

```
>>
```

### Exemplo 3

```
syms t s % declara variáveis simbólicas
H = (2*s+4)/(s^2+4*s+3) ; % funcao de transferencia H(s)
h = ilaplace(H) % executa a Transformada Inversa de Laplace de H(s) e mostra resultado

h =

exp(-t) + exp(-3*t)
```

O resultado confere, portanto, com o resultado para  $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$  obtido nos itens (a) e (b):

$$h(t) = e^{-t} + e^{-3t}$$

### Exemplo 3

(d) A função `impulse()` do *software* Matlab é usada conforme segue.

```
>> help impulse  
impulse  Impulse response of dynamic systems.
```

`impulse(SYS)` plots the impulse response of the dynamic system `SYS`. For systems with more than one input, independent impulse commands are applied to each input channel. The time range and number of points are chosen automatically. For continuous-time systems with direct feedthrough, the infinite pulse at  $t=0$  is ignored.

`impulse(SYS,TFINAL)` simulates the impulse response from  $t=0$  to the final time  $t=TFINAL$  (expressed in the time units specified in `SYS.TimeUnit`). For discrete-time models with unspecified sample time, `TFINAL` is interpreted as the number of sampling periods.

`impulse(SYS,T)` uses the time vector `T` for simulation (expressed in the time units of `SYS`). For discrete-time models, `T` should be of the form `Ti:Ts:Tf` where `Ts` is the sample time. For continuous-time models, `T` should be of the form `Ti:dt:Tf` where `dt` is the sampling period for the discrete approximation of `SYS`. The impulse is always assumed to arise at  $t=0$  (regardless of `Ti`).



### Exemplo 3

sendo a especificação do sistema SYS gerada através da função tf():

```
>> help tf
```

```
tf Construct transfer function or convert to transfer function.
```

Construction:

`SYS = tf(NUM,DEN)` creates a continuous-time transfer function SYS with numerator NUM and denominator DEN. SYS is an object of type tf when NUM,DEN are numeric arrays, of type GENSS when NUM,DEN depend on tunable parameters (see REALP and GENMAT), and of type USS when NUM,DEN are uncertain (requires Robust Control Toolbox).

`SYS = tf(NUM,DEN,TS)` creates a discrete-time transfer function with sample time TS (set TS=-1 if the sample time is undetermined).

`S = tf('s')` specifies the transfer function  $H(s) = s$  (Laplace variable).

`Z = tf('z',TS)` specifies  $H(z) = z$  with sample time TS.

You can then specify transfer functions directly as expressions in S or Z, for example,

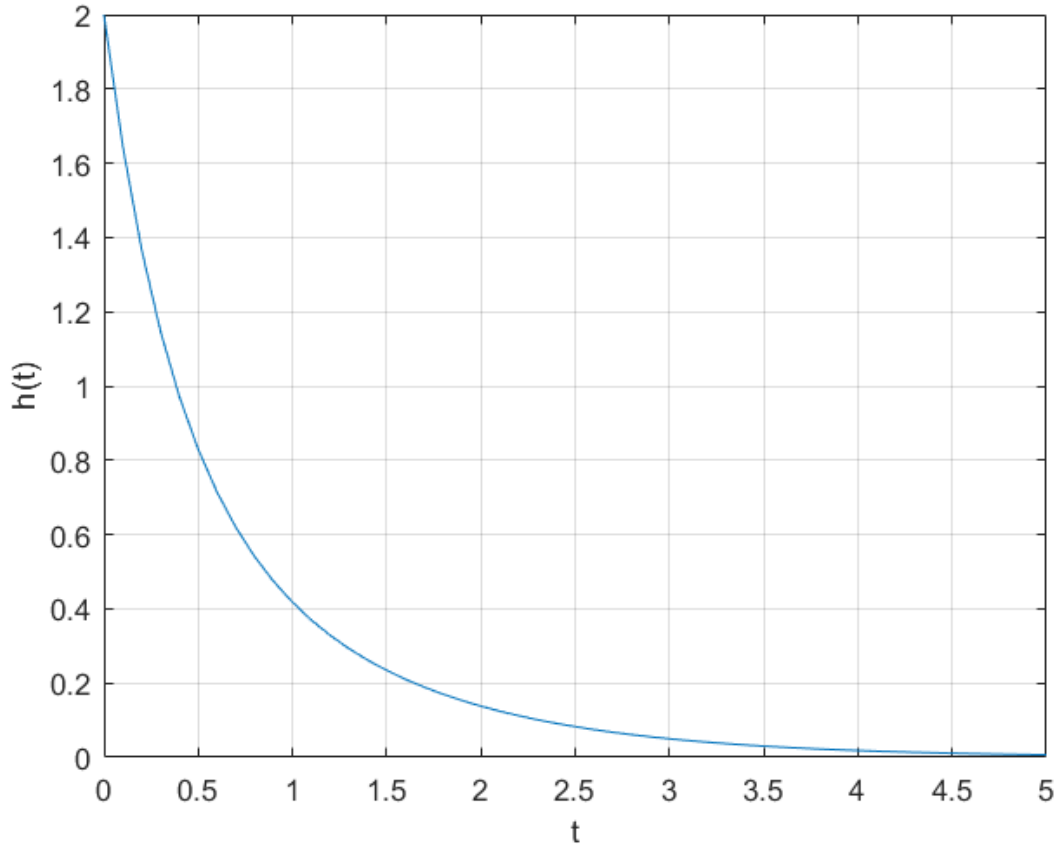
```
s = tf('s'); H = exp(-s)*(s+1)/(s^2+3*s+1)
```

`SYS = tf` creates an empty tf object.

`SYS = tf(M)` specifies a static gain matrix M.

### Exemplo 3

```
num = [2 4] % numerador 2*s+4 da funcao de transferencia H(s)
den = [1 4 3] % denominador (s^2+4*s+3) da funcao de transferencia H(s)
t = 0: 0.1: 5; % tempo t variando de 0 a 5 em passos de 0.1
h = impulse(tf(num,den),t); % determina h(t)
plot(t,h)% plota h(t)
grid on; % coloca grade no plot de h(t)
```



Que é o mesmo gráfico que se obtém ao plotarmos  $h = \exp(-t) + \exp(-3*t)$

(e) A função `step()` do *software* Matlab é usada conforme segue.

```
>> help step
```

```
step Step response of dynamic systems.
```

```
[Y,T] = step(SYS) computes the step response Y of the dynamic system SYS. The time vector T is expressed in the time units of SYS and the time step and final time are chosen automatically. For multi-input systems, independent step commands are applied to each input channel. If SYS has NY outputs and NU inputs, Y is an array of size [LENGTH(T) NY NU] where Y(:, :, j) contains the step response of the j-th input channel.
```

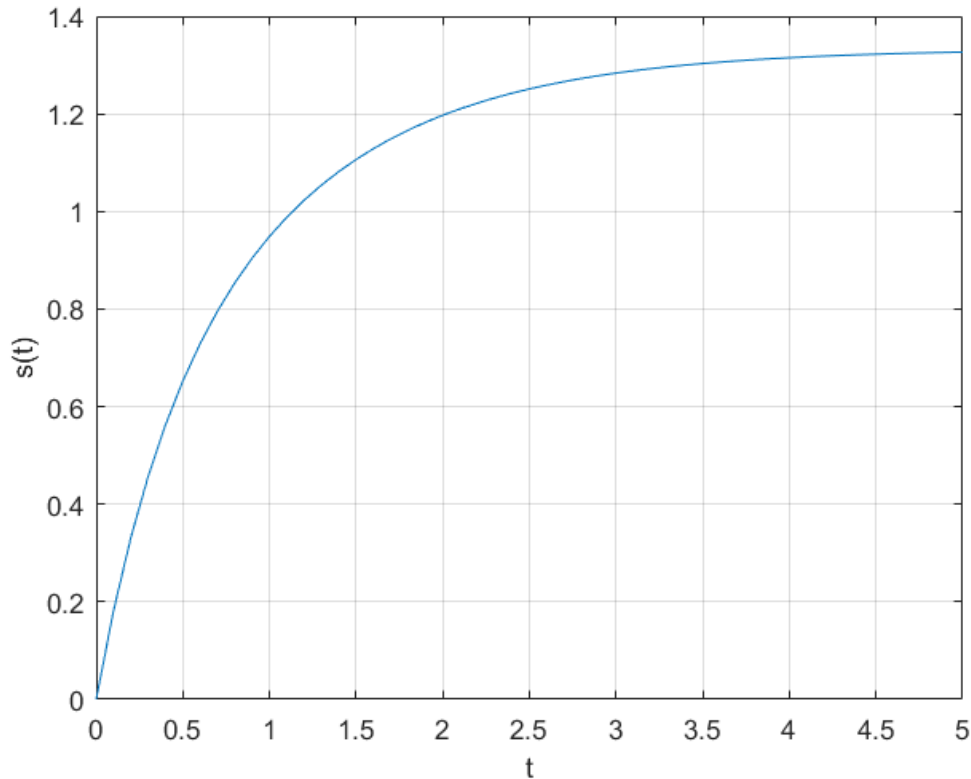
```
[Y,...] = step(SYS,TFINAL) simulates the step response from t=0 to the final time t=TFINAL (expressed in the time units of SYS). For discrete-time models with unspecified sample time, TFINAL is interpreted as the number of sampling periods.
```

```
[Y,...] = step(SYS,T) specifies the time vector T for simulation (in the time units of SYS). For discrete-time models, T should be of the form 0:Ts:Tf where Ts is the sample time. For continuous-time models, T should be of the form 0:dt:Tf where dt is the sampling period for the discrete approximation of SYS.
```

```
[Y,...] = step(SYS,...,OPTIONS) specifies additional options such as the step amplitude or input offset. Use stepDataOptions to create the option set OPTIONS.
```

## Exemplo 3

```
num = [2 4] % numerador 2*s+4 da funcao de transferencia H(s)
den = [1 4 3] % denominador(s^2+4*s+3) da funcao de transferencia H(s)
t = 0: 0.1: 5; % tempo t variando de 0 a 5 em passos de 0.1
s = step(tf(num,den),t); % determina a resposta ao degrau s(t) do sistema
plot(t,s)% plota s(t)
grid on; % coloca grade no plot de s(t)
```



Note que se compararmos o gráfico da resposta ao degrau  $s(t)$  com o gráfico da resposta ao impulso  $h(t)$  obtido no item (d) fica evidenciada a relação  $\frac{d}{dt}s(t) = h(t)$ .

### Exemplo 4

**Exemplo 4:** Um sistema LTI possui uma função de transferência dada por  $H(s) = \frac{5s + 13}{s(s^2 + 4s + 13)}$ .

**Pede-se:** (a) Determine analiticamente a resposta ao impulso  $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$  deste sistema. (b) Refaça (a) utilizando a função `residue()` do software Matlab. (c) Refaça (a) utilizando a função `ilaplace()` do software Matlab. (d) Refaça (a) e plote  $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$  utilizando a função `impz()` do software Matlab. (e) Determine e plote a resposta ao degrau  $s(t)$  deste sistema utilizando a função `step()` do software Matlab.

**Solução:** (a) Para expandir  $H(s)$  em frações parciais através do roteiro (A.1) do slide 25, precisamos determinar as raízes do denominador de  $H(s)$ , que são:

$$s_1 = 0$$

$$s^2 + 4s + 13 = 0 \rightarrow \begin{cases} s_2 = -2 + j3 \\ s_3 = -2 - j3 \end{cases}$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{Bhaskara:} \\ as^2 + bs + c = 0 \rightarrow s_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{array} \right)$$

Daí, da equação (6) temos:

$$H(s) = \frac{5s + 13}{s(s^2 + 4s + 13)} = \frac{5s + 13}{s(s - (-2 + j3))(s - (-2 - j3))} = \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s - (-2 + j3)} + \frac{c_3}{s - (-2 - j3)}$$

Da equação (7) temos:

$$c_1 = sH(s) \Big|_{s=0} = \frac{5s + 13}{s(s^2 + 4s + 13)} \Big|_{s=0} = 1$$

$$c_2 = (s - (-2 + j3))H(s) \Big|_{s = -2 + j3} = \frac{5s + 13}{s(s - (-2 - j3))} \Big|_{s = -2 + j3} = -0.5 - j0.5$$

$$c_3 = (s - (-2 - j3))H(s) \Big|_{s = -2 - j3} = \frac{5s + 13}{s(s - (-2 + j3))} \Big|_{s = -2 - j3} = -0.5 + j0.5$$

### Exemplo 4

E daí

$$H(s) = \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s - (-2 + j3)} + \frac{c_3}{s - (-2 - j3)} = \frac{c_1}{s} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{e^{-135^\circ}}{s - (-2 + j3)} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{e^{+135^\circ}}{s - (-2 - j3)} \quad (13)$$

Qualquer sistema LTI fisicamente realizável pode apresentar polos complexos em sua função de transferência  $H(s)$ . Quando ocorrem polos complexos em  $H(s)$ , estes sempre ocorrerão em pares complexos conjugados, como é o caso da  $H(s)$  acima. Nestes casos os coeficientes  $c_k$  respectivos aos polos complexos na expansão de  $H(s)$  em frações parciais através da equação (6) também serão complexos conjugados. Esta é uma situação usual que resulta em uma cossenoide exponencialmente amortecida para a resposta  $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$  correspondente a estes polos complexos conjugados, conforme análise que segue. A forma geral para a expansão  $H_c(s)$  de cada par de polos complexos conjugados através da equação (6) é:

$$H_c(s) = \frac{Ae^{j\theta}}{s - (\alpha + j\omega)} + \frac{Ae^{-j\theta}}{s - (\alpha - j\omega)} \quad (14)$$

Do par 6 da tabela do slide 16 temos que  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+a}\right\} = e^{-at}$ , e daí  $h_c(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H_c(s)\}$ , com  $a = -(\alpha + j\omega)$  para o 1º termo de (14) e com  $a = -(\alpha - j\omega)$  para o 2º termo de (14), resulta:

$$\begin{aligned} h_c(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{H_c(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Ae^{j\theta}}{s - (\alpha + j\omega)} + \frac{Ae^{-j\theta}}{s - (\alpha - j\omega)}\right\} = Ae^{j\theta} e^{(\alpha + j\omega)t} + Ae^{-j\theta} e^{(\alpha - j\omega)t} = \\ &= 2Ae^{at} \frac{(e^{j(\omega t + \theta)} + e^{-j(\omega t + \theta)})}{2} = 2Ae^{at} \cos(\omega t + \theta) \end{aligned} \quad (15)$$

Aplicando (15) aos 2º e 3º termos de (13) e aplicando o par 2 do slide 16 ( $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = u(t)$ ) ao 1º termo de 13, temos:

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = u(t) + \frac{2}{\sqrt{2}} e^{-2t} \overset{\text{Ver Apêndice C}}{\cos(3t - 135^\circ)} = u(t) + \frac{2}{\sqrt{2}} e^{-2t} [\cos(3t) \cos(-135^\circ) - \sin(3t) \sin(-135^\circ)] = \\ &= u(t) + \frac{2}{\sqrt{2}} e^{-2t} \left[ \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) \cos(3t) - \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) \sin(3t) \right] = u(t) - e^{-2t} [\cos(3t) - \sin(3t)], \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (16)$$

## Exemplo 4

Note que a forma geral para a expansão  $H_c(s)$  de cada par de polos complexos conjugados, equação (14), pode ser simplificada para a forma em que há um polinômio do 2º grau no denominador, **caracterizando uma resposta de 2ª ordem**. Se fizermos  $(s - (\alpha + j\omega))(s - (\alpha - j\omega))$  como denominador comum e efetuarmos as simplificações algébricas pertinentes obtemos:

$$H_c(s) = \frac{Ae^{j\theta}}{s - (\alpha + j\omega)} + \frac{Ae^{-j\theta}}{s - (\alpha - j\omega)} = 2A \frac{s \cos \theta - (\omega \sin \theta + \alpha \cos \theta)}{s^2 - 2\alpha s + (\omega^2 + \alpha^2)} \quad (17)$$

(b)

```
num = [5 13]; % coeficientes do numerador de H(s) (ordem decrescente das potencias de s)
den = [1 4 13 0]; % coeficientes do denominador de H(s) (ordem decrescente potencias de s)
[r,p,k] = residue(num,den) % chama a função residue() e mostra resultado
```

r =

```
-0.5000 - 0.5000i
-0.5000 + 0.5000i
 1.0000 + 0.0000i
```

Os coeficientes  $c_k$  obtidos da função residue() conferem, portanto, com os coeficientes  $c_k$  na expansão em frações parciais do item (a), conforme equação (13) do slide anterior.

p =

```
-2.0000 + 3.0000i
-2.0000 - 3.0000i
 0.0000 + 0.0000i
```

$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$  é obtida aplicando ao 1º termo de (13) o par 2 da tabela do slide 16 ( $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = u(t)$ ) e aplicando (15) aos 2º e 3º termos de (13), resultando

k =

$$h(t) = u(t) - e^{-2t}[\cos(3t) - \sin(3t)], \quad t \geq 0.$$

[]

## Exemplo 4

(c)

```
syms t s % declara variáveis simbólicas
H = (5*s+13)/(s*(s^2+4*s+13)); % função de transferência H(s)
h = ilaplace(H) % executa a Transformada Inversa de Laplace de H(s) e mostra resultado
```

h =

```
1 - exp(-2*t)*(cos(3*t) - sin(3*t))
```

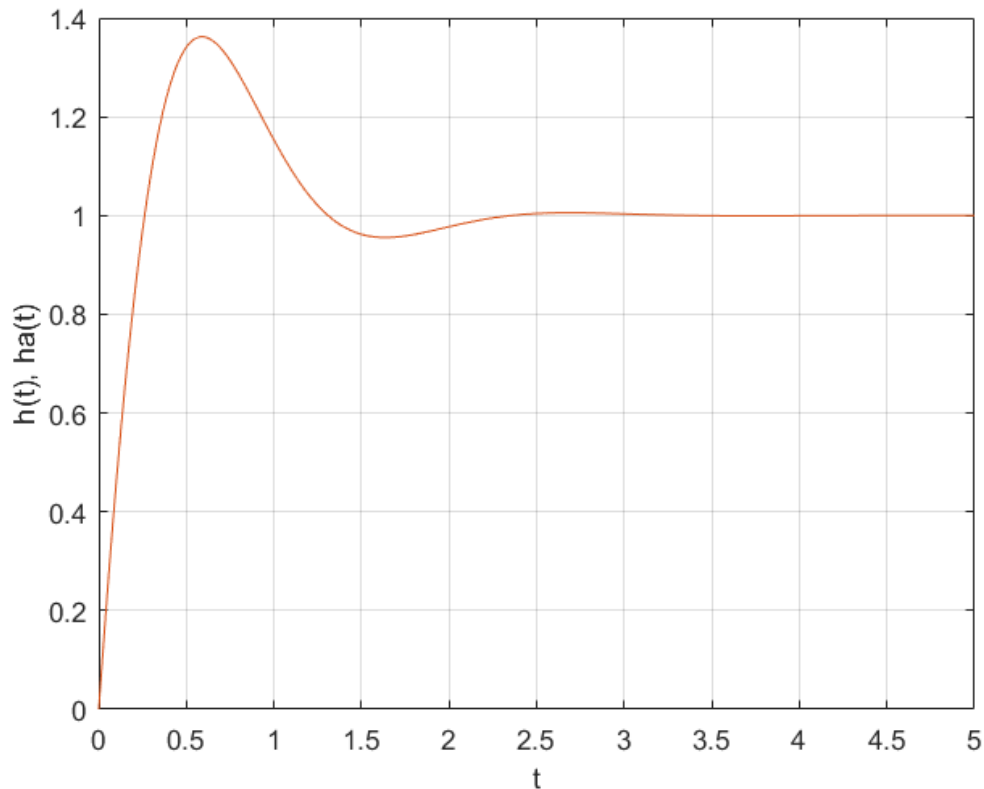
O resultado confere, portanto, com o resultado para  $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$  obtido nos itens (a) e (b).



## Exemplo 4

(d)

```
num = [5 13]; % numerador (5*s+13) da funcao de transferencia H(s)
den = [1 4 13 0]; % denominador(s*(s^2+4*s+13)) da funcao de transferencia H(s)
t = 0: 0.01: 5; % tempo t variando de 0 a 5 em passos de 0.01
h = impulse(tf(num,den),t); % determina h(t)
ha = 1 - exp(-2*t).*(cos(3*t) - sin(3*t)); % resposta ha(t) obtida no item (a)
plot(t,h,t,ha)% plota h(t) e ha(t) no mesmo gráfico
grid on; % coloca grade no plot de h(t) e ha(t)
```

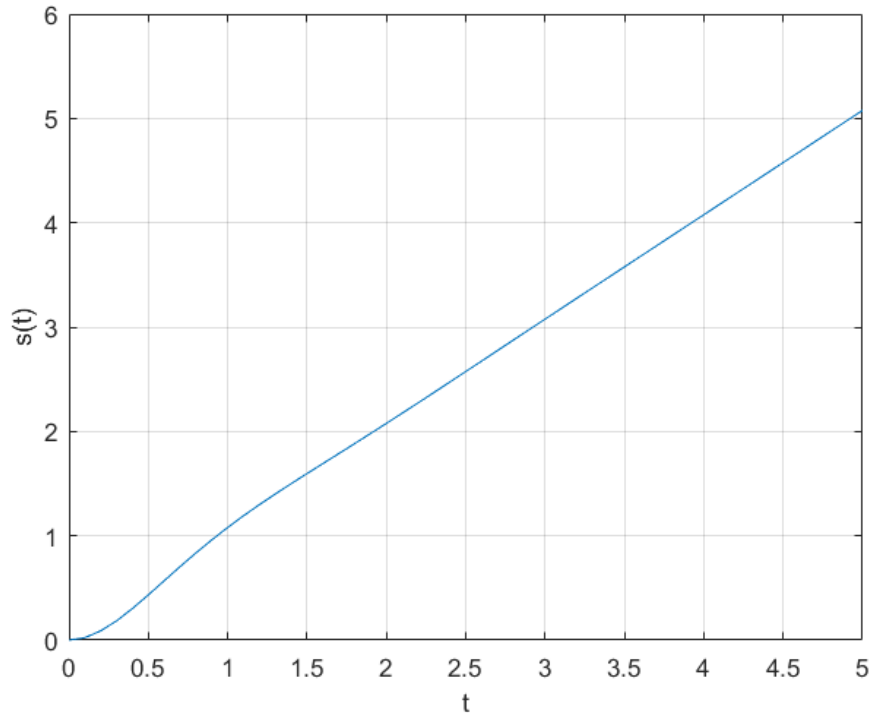


O resultado confere, portanto, com o resultado para  $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$  obtido nos itens (a), (b) e (c).

## Exemplo 4

(e)

```
num = [5 13]; % numerador (5*s+13) da funcao de transferencia H(s)
den = [1 4 13 0]; % denominador(s*(s^2+4*s+13)) da funcao de transferencia H(s)
t = 0: 0.1: 5; % tempo t variando de 0 a 5 em passos de 0.1
s = step(tf(num,den),t); % determina a resposta ao degrau s(t) do sistema
plot(t,s)% plota s(t)
grid on; % coloca grade no plot de s(t)
```



## Exemplo 5

**Exemplo 5:** Um sistema LTI possui uma função de transferência dada por  $H(s) = \frac{s^2 + 2s + 5}{(s + 3)(s + 5)^2}$ .

**Pede-se:** **(a)** Determine analiticamente a resposta ao impulso  $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$  deste sistema. **(b)** Refaça (a) utilizando a função `residue()` do software Matlab. **(c)** Refaça (a) utilizando a função `ilaplace()` do software Matlab. **(d)** Refaça (a) e plote  $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$  utilizando a função `impz()` do software Matlab. **(e)** Determine e plote a resposta ao degrau  $s(t)$  deste sistema utilizando a função `step()` do software Matlab.

**Solução:** **(a)**  $H(s)$  possui um polo em  $s = -3$  e um polo repetido em  $s = -5$  com multiplicidade  $r = 2$ . De (6) e (8) temos

$$H(s) = \frac{s^2 + 2s + 5}{(s + 3)(s + 5)^2} = \frac{c_1}{(s + 3)} + \frac{\lambda_1}{(s + 5)} + \frac{\lambda_2}{(s + 5)^2} \quad (18)$$

Da equação (7) e da equação (9) temos:

$$c_k = (s - p_k)X(s) \Big|_{s = p_k}$$

$$c_1 = (s + 3)H(s) \Big|_{s = -3} = \frac{s^2 + 2s + 5}{(s + 5)^2} \Big|_{s = -3} = 2$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{0!} \frac{d^0}{ds^0} [(s + 5)^2 H(s)] \Big|_{s = -5} = \frac{s^2 + 2s + 5}{(s + 3)} \Big|_{s = -5} = -10$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{1!} \frac{d^1}{ds^1} [(s + 5)^2 H(s)] \Big|_{s = -5} = \frac{d}{ds} \left[ \frac{s^2 + 2s + 5}{(s + 3)} \right] \Big|_{s = -5} = \left[ \frac{s^2 + 6s + 1}{(s + 3)^2} \right] \Big|_{s = -5} = -1$$

$$\lambda_{r-k} = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{ds^k} [(s - p_i)^r X(s)] \Big|_{s = p_i} \quad k = 0, 1, \dots, r - 1$$

Substituindo estes resultados em (18), temos:

$$H(s) = \frac{2}{(s + 3)} + \frac{-1}{(s + 5)} + \frac{-10}{(s + 5)^2} \quad (19)$$

Dos pares 6 e 7 da tabela do slide 16 temos que  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+a}\right\} = e^{-at}$  e  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+a)^2}\right\} = te^{-at}$  e daí  $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$  resulta:

$$h(t) = 2e^{-3t} - e^{-5t} - 10te^{-5t}, \quad t \geq 0 \quad (20)$$

## Exemplo 5

(b)

```
num = [1 2 5]; % coeficientes do numerador de H(s) (ordem decrescente das potencias de s)
den = conv([1 3],conv([1 5],[1 5])); % coeficientes do denominador de H(s)
%(em ordem decrescente das potencias de s)
% Note que a função conv() faz a multiplicacao (s+3)((s+5)(s+5))
[r,p,k] = residue(num,den) % chama a funcao residue() e mostra resultado
```

```
r =
-1.0000
-10.0000
 2.0000
```

```
p =
-5.0000
-5.0000
-3.0000
```

```
k =
[]
>>
```

Os coeficientes  $c_k$  obtidos da função `residue()` conferem, portanto, com os coeficientes  $c_k$  na expansão em frações parciais do item (a), conforme equação (19) do slide anterior.

$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$  é obtida dos pares 6 e 7 da tabela do slide 16 ( $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+a}\right\} = e^{-at}$  e  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+a)^2}\right\} = te^{-at}$ ) aplicados à equação (19), resultando:

$$h(t) = 2e^{-3t} - e^{-5t} - 10te^{-5t}, \quad t \geq 0$$

## Exemplo 5

(c)

```
syms t s % declara variáveis simbólicas
H = (s^2+2*s+5)/((s+3)*(s+5)^2); % funcao de transferencia H(s)
h = ilaplace(H) % executa a Transformada Inversa de Laplace de H(s) e mostra resultado
```

h =

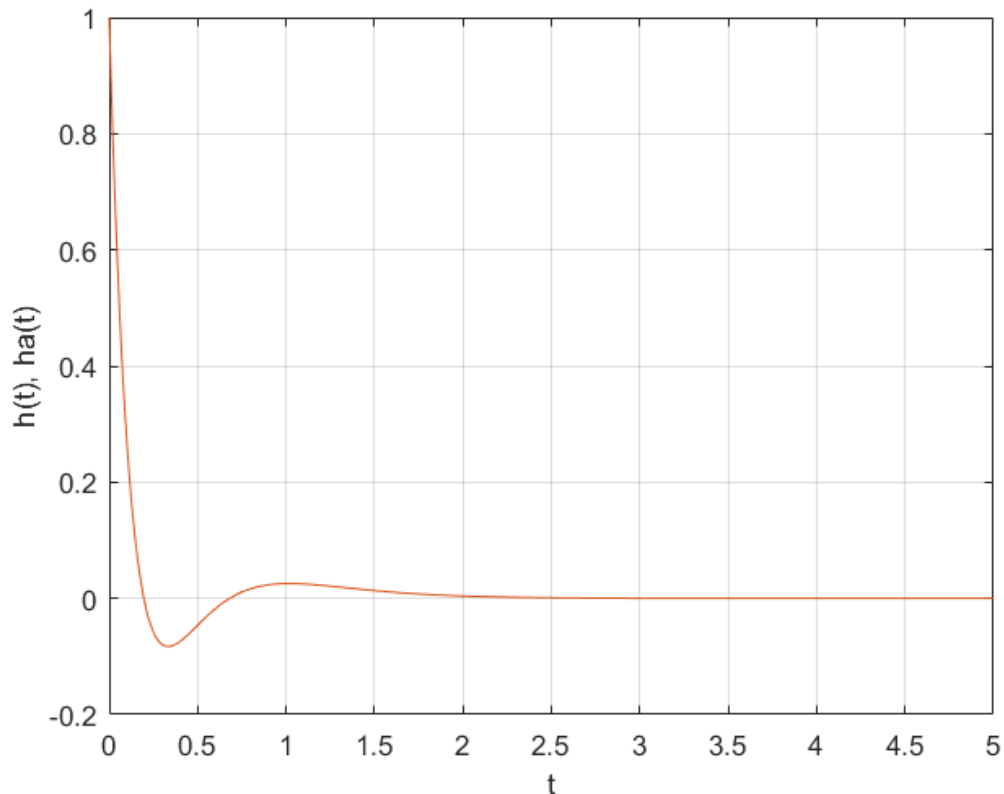
$$2\exp(-3t) - \exp(-5t) - 10t\exp(-5t)$$

O resultado confere, portanto, com o resultado para  $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$  obtido nos itens (a) e (b).

## Exemplo 5

(d)

```
num = [1 2 5]; % coeficientes do numerador de H(s) (ordem decrescente das potencias de s)
den = conv([1 3],conv([1 5],[1 5])); % coeficientes do denominador de H(s)
% Note que a função conv() faz a multiplicacao (s+3)((s+5)(s+5))
t = 0: 0.01: 5; % tempo t variando de 0 a 5 em passos de 0.01
h = impulse(tf(num,den),t); % determina h(t)
ha = 2*exp(-3*t) - exp(-5*t)-10*t.*exp(-5*t); % resposta ha(t) obtida no item (a)
plot(t,h,t,ha) % plota h(t) e ha(t) no mesmo gráfico
grid on; % coloca grade no plot de h(t) e ha(t)
```

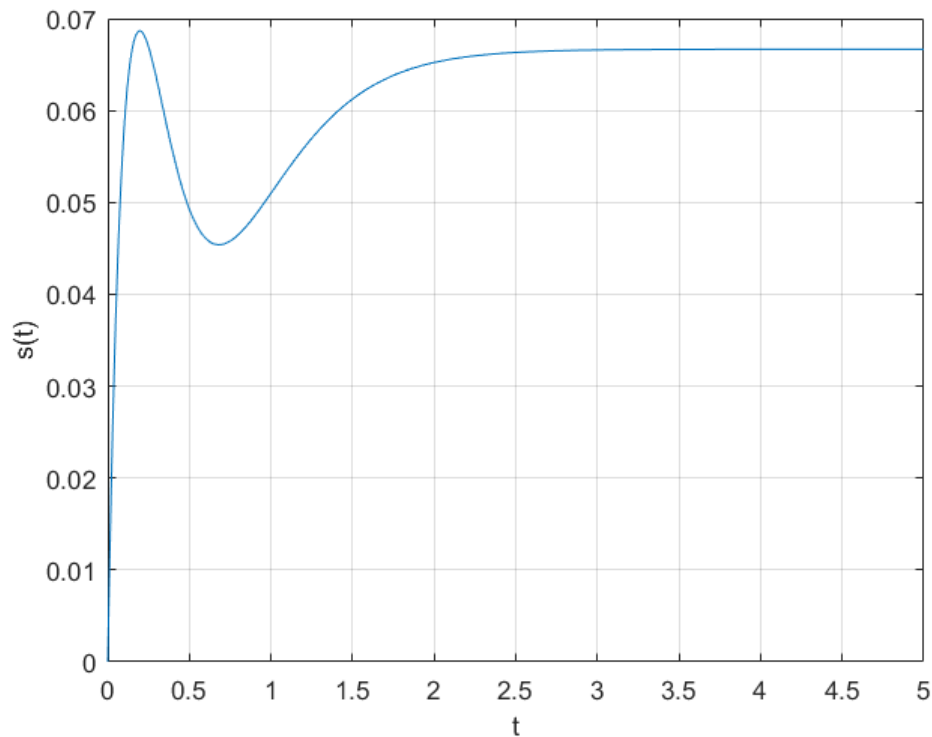


O resultado confere, portanto, com o resultado para  $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$  obtido nos itens (a), (b) e (c).

## Exemplo 5

(e)

```
num = [1 2 5]; % coeficientes do numerador de H(s) (ordem decrescente das potencias de s)
den = conv([1 3],conv([1 5],[1 5])); % coeficientes do denominador de H(s)
% Note que a função conv() faz a multiplicacao (s+3)((s+5)(s+5))
t = 0: 0.01: 5; % tempo t variando de 0 a 5 em passos de 0.1
s = step(tf(num,den),t); % determina a resposta ao degrau s(t) do sistema
plot(t,s)% plota s(t)
grid on; % coloca grade no plot de s(t)
```



## Exemplo 6

**Exemplo 6:** Um sistema LTI possui uma função de transferência dada por  $H(s) = \frac{s^2 + 6s + 7}{s^2 + 3s + 2}$ .

**Pede-se:** (a) Determine analiticamente a resposta ao impulso  $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$  deste sistema. (b) Refaça (a) utilizando a função `residue()` do software Matlab. (c) Refaça (a) utilizando a função `ilaplace()` do software Matlab. (d) Refaça (a) e plote  $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$  utilizando a função `impz()` do software Matlab. (e) Determine e plote a resposta ao degrau  $s(t)$  deste sistema utilizando a função `step()` do software Matlab.

**Solução:** (a)  $m \geq n$  para esta  $H(s)$ , então é necessário adotar o roteiro (B) do slide 26. De (10), dividindo o polinômio  $N(s)$  do numerador de  $H(s)$  pelo polinômio  $D(s)$  do denominador:

$$H(s) = \frac{s^2 + 6s + 7}{s^2 + 3s + 2} = 1 + \frac{3s + 5}{s^2 + 3s + 2} = 1 + \underbrace{\frac{3s + 5}{(s + 1)(s + 2)}}_{H_1(s)}$$

Expandindo  $H_1(s)$  em frações parciais através de (6) e (7):

$$H_1(s) = \frac{3s + 5}{(s + 1)(s + 2)} = \frac{c_1}{(s + 1)} + \frac{c_2}{(s + 2)}$$

$$c_1 = (s + 1)H_1(s) \Big|_{s = -1} = \frac{3s + 5}{(s + 2)} \Big|_{s = -1} = 2$$

$$c_2 = (s + 2)H_1(s) \Big|_{s = -2} = \frac{3s + 5}{(s + 1)} \Big|_{s = -2} = 1$$

$$H(s) = 1 + \frac{2}{(s + 1)} + \frac{1}{(s + 2)} \tag{21}$$

Dos pares 6 e 1 da tabela do slide 16 temos que  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+a}\right\} = e^{-at}$  e  $\mathcal{L}^{-1}\{1\} = \delta(t)$ , e daí  $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$  resulta:

$$h(t) = \delta(t) + 2e^{-t} + e^{-2t}, \quad t \geq 0 \tag{22}$$



## Exemplo 6

(b)

```
num = [1 6 7]; % coeficientes do numerador de H(s) (ordem decrescente das potencias de s)
den = [1 3 2]; % coeficientes do denominador de H(s) (ordem decrescente potencias de s)
[r,p,k] = residue(num,den) % chama a funcao residue() e mostra resultado
```

```
r =
```

```
1
2
```

Os coeficientes  $c_k$  obtidos da função `residue()` conferem, portanto, com os coeficientes  $c_k$  na expansão em frações parciais do item (a), conforme equação (21) do slide anterior.

```
p =
```

```
-2
-1
```

$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$  é obtida dos pares 6 e 1 da tabela do slide 16 ( $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+a}\right\} = e^{-at}$  e  $\mathcal{L}^{-1}\{1\} = \delta(t)$ ) aplicados à equação (21), resultando:

```
k =
```

```
1
```

$$h(t) = \delta(t) + 2e^{-t} + e^{-2t}, \quad t \geq 0$$

```
>>
```

## Exemplo 6

(c)

```
syms t s % declara variáveis simbólicas
H = (s^2+6*s+7)/(s^2+3*s+2); % funcao de transferencia H(s)
h = ilaplace(H) % executa a Transformada Inversa de Laplace de H(s) e mostra
resultado
```

```
h =
```

```
2*exp(-t) + exp(-2*t) + dirac(t)
```

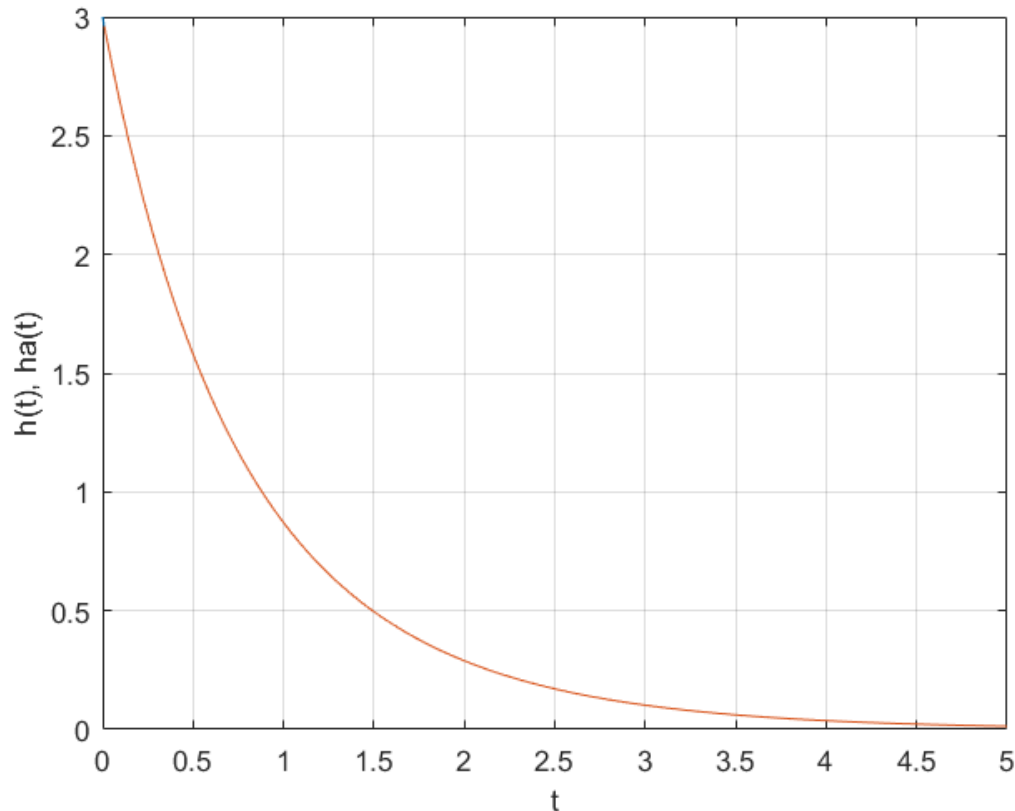
```
>>
```

O resultado confere, portanto, com o resultado para  $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$  obtido nos itens (a) e (b).

## Exemplo 6

(d)

```
num = [1 6 7]; % coeficientes do numerador de H(s) (ordem decrescente das potencias de s)
den = [1 3 2]; % coeficientes do denominador de H(s) (ordem decrescente potencias de s)
t = 0: 0.01: 5; % tempo t variando de 0 a 5 em passos de 0.01
h = impulse(tf(num,den),t); % determina h(t)
ha = 2*exp(-t) + exp(-2*t) + dirac(t); % resposta ha(t) obtida no item (a)
plot(t,h,t,ha)% plota h(t) e ha(t) no mesmo gráfico
grid on; % coloca grade no plot de h(t) e ha(t)
```

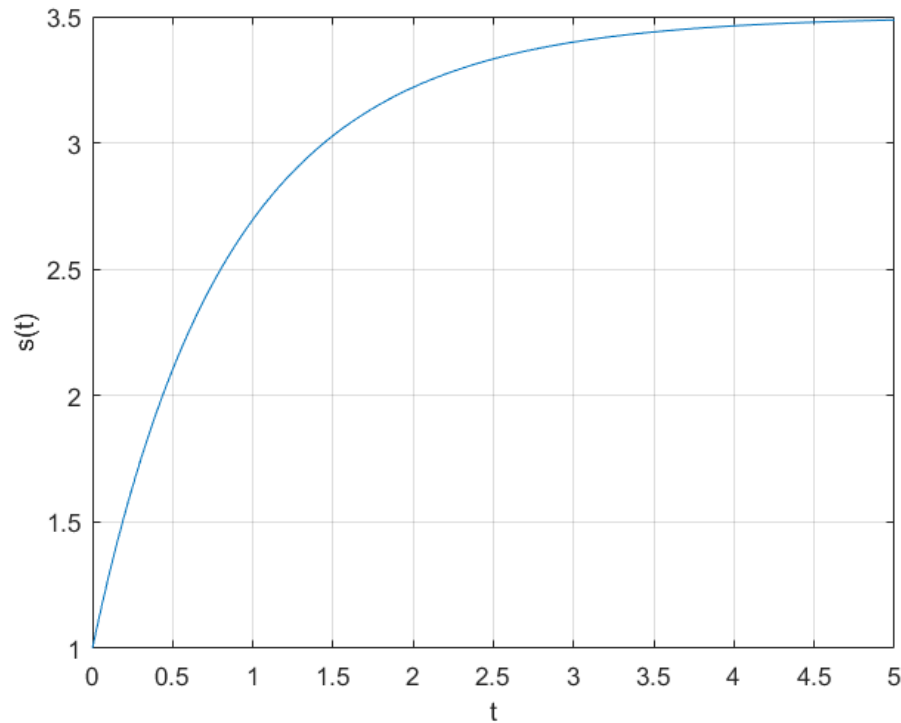


O resultado confere, portanto, com o resultado para  $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$  obtido nos itens (a), (b) e (c).

## Exemplo 6

(e)

```
num = [1 6 7]; % coeficientes do numerador de H(s) (ordem decrescente das potencias de s)
den = [1 3 2]; % coeficientes do denominador de H(s) (ordem decrescente potencias de s)
t = 0: 0.01: 5; % tempo t variando de 0 a 5 em passos de 0.1
s = step(tf(num,den),t); % determina a resposta ao degrau s(t) do sistema
plot(t,s)% plota s(t)
grid on; % coloca grade no plot de s(t)
```



### Exemplo 7

**Exemplo 7:** Um sistema LTI possui uma função de transferência dada por  $H(s) = \frac{s^3 + 6s^2 + 12s + 11}{s^2 + 4s + 3}$ .

**Pede-se: (a)** Determine analiticamente a resposta ao impulso  $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$  deste sistema. **(b)** Refaça (a) utilizando a função `ilaplace()` e plote usando a função `ezplot()` do software Matlab.

**Solução: (a)**  $m \geq n$  para esta  $H(s)$ , então é necessário adotar o roteiro (B) do slide 26. De (10), dividindo o polinômio  $N(s)$  do numerador de  $H(s)$  pelo polinômio  $D(s)$  do denominador:

$$\begin{array}{r}
 s + 2 \\
 s^2 + 4s + 3 \overline{) s^3 + 6s^2 + 12s + 11} \\
 \underline{-(s^3 + 4s^2 + 3s)} \phantom{+ 11} \\
 2s^2 + 9s + 11 \\
 \underline{-(2s^2 + 8s + 6)} \\
 s + 5
 \end{array}
 \qquad
 H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = Q(s) + \frac{R(s)}{D(s)} = \underbrace{s + 2}_{Q(s)} + \frac{\overbrace{s + 5}^{R(s)}}{\underbrace{s^2 + 4s + 3}_{D(s)}}$$

De (6), (7) e (12) e do par 6 da tabela do slide 16 ( $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+a}\right\} = e^{-at}$ ) temos:

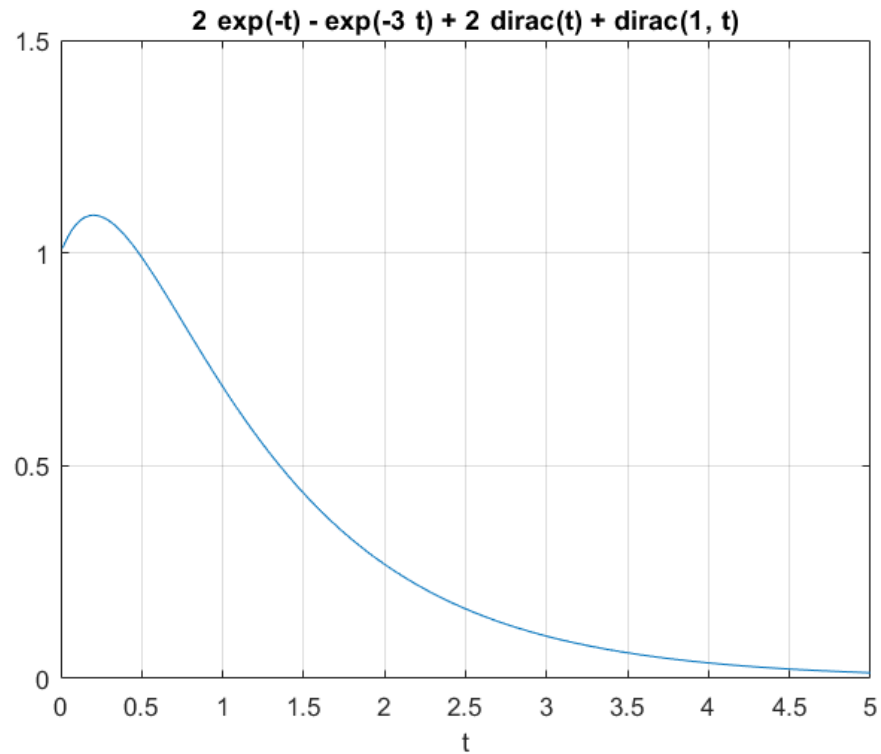
$$H(s) = s + 2 + \frac{2}{s + 1} - \frac{1}{s + 3}$$

$$h(t) = \frac{d}{dt}\delta(t) + 2\delta(t) + 2e^{-t} - e^{-3t}, \quad t \geq 0$$

## Exemplo 7

(b)

```
syms H s % declara variáveis simbólicas
H = (s^3+6*s^2+12*s+11)/(s^2+4*s+3); % funcao de transferencia H(s)
h = ilaplace(H) % executa a Transformada Inversa de Laplace de H(s) e mostra resultado
ezplot(h,[0,5]); % plota h de 0 a 5;
axis([0 5 0 1.5]); % ajusta eixo horizontal p/ o intervalo [0 5] e
% ajusta o eixo vertical para o intervalo [0 1.5]
grid on; % coloca grid no grafico
```



## Exemplo 8

**Exemplo 8:** O sinal de excitação aplicado na entrada de um sistema LTI é  $x(t) = e^{-t}u(t)$  e a resposta na saída do sistema é o sinal  $y(t) = 2 - 3e^{-t} + e^{-2t} \cos 2t$ ,  $t \geq 0$ . Determine analiticamente para este sistema a função de transferência  $H(s)$  no domínio frequência complexa  $s$ .

**Solução:**

Dos pares 2 e 6 na tabela do slide 16 e do par 21 na tabela do slide 17:

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \frac{1}{s+1}$$

$$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{2}{s} - \frac{3}{s+1} + \frac{s+2}{(s+2)^2 + 4}$$

$$\begin{aligned} H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} &= \frac{\frac{2}{s} - \frac{3}{s+1} + \frac{s+2}{(s+2)^2 + 4}}{\frac{1}{s+1}} \\ &= \frac{2(s+1)}{s} - 3 + \frac{(s+1)(s+2)}{(s+2)^2 + 4} \\ &= \frac{[2(s+1) - 3s][(s+2)^2 + 4] + s(s+1)(s+2)}{s[(s+2)^2 + 4]} \\ &= \frac{s^2 + 2s + 16}{s^3 + 4s^2 + 8s} \end{aligned}$$

## Exemplo 9

**Exemplo 9:** O sinal de excitação aplicado na entrada de um sistema LTI é  $x(t) = e^{-2t}u(t)$  e a função de transferência do sistema é

$$H(s) = \frac{s^2 + 2s + 16}{s^3 + 4s^2 + 8s}$$

Determine a resposta  $y(t)$  deste sistema usando a função `lsim()` do software Matlab.

### Solução:

```
>> help lsim
```

```
lsim Simulate time response of dynamic systems to arbitrary inputs.
```

```
lsim(SYS,U,T) plots the time response of the dynamic system SYS to the input signal described by U and T. The time vector T is expressed in the time units of SYS and consists of regularly spaced time samples. The matrix U has as many columns as inputs in SYS and its i-th row specifies the input value at time T(i). For example,
```

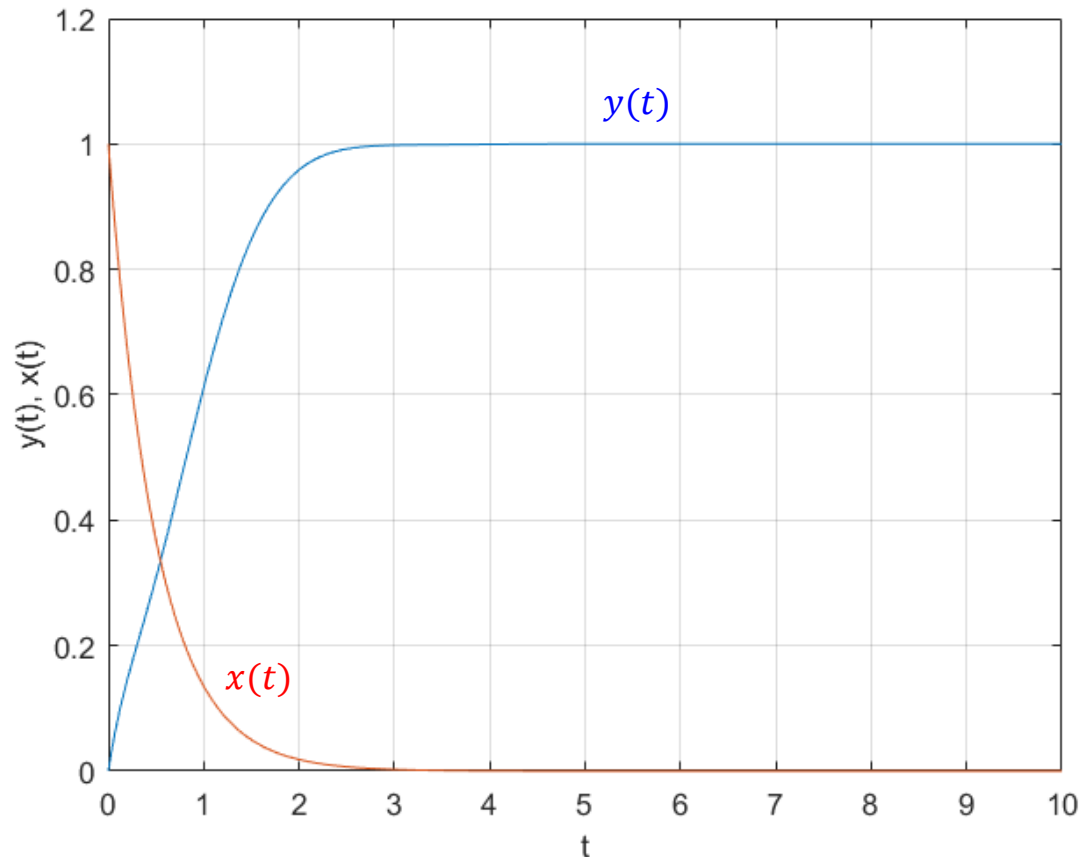
```
    t = 0:0.01:5;    u = sin(t);    lsim(sys,u,t)
```

```
simulates the response of a single-input model SYS to the input u(t)=sin(t) during 5 time units.
```



## Exemplo 9

```
num = [1 2 16]; %numerador de H(s)
den = [1 4 8 0]; % denominador de H(s)
H = tf (num, den); % gera H(s)
t = 0:10/300:10; % tempo t inicia em 0 e vai ate 10 em passos de 10/300
x = exp(-2*t); % define excitacao x
y = lsim(H,x,t); % calcula resposta y a partir de x e H(s)
plot(t,y,t,x); % plota y e x
grid on; % coloca grade no grafico
xlabel('t'); % label do eixo x
ylabel('y(t), x(t)'); % label do eixo y
```



## Exemplo 10

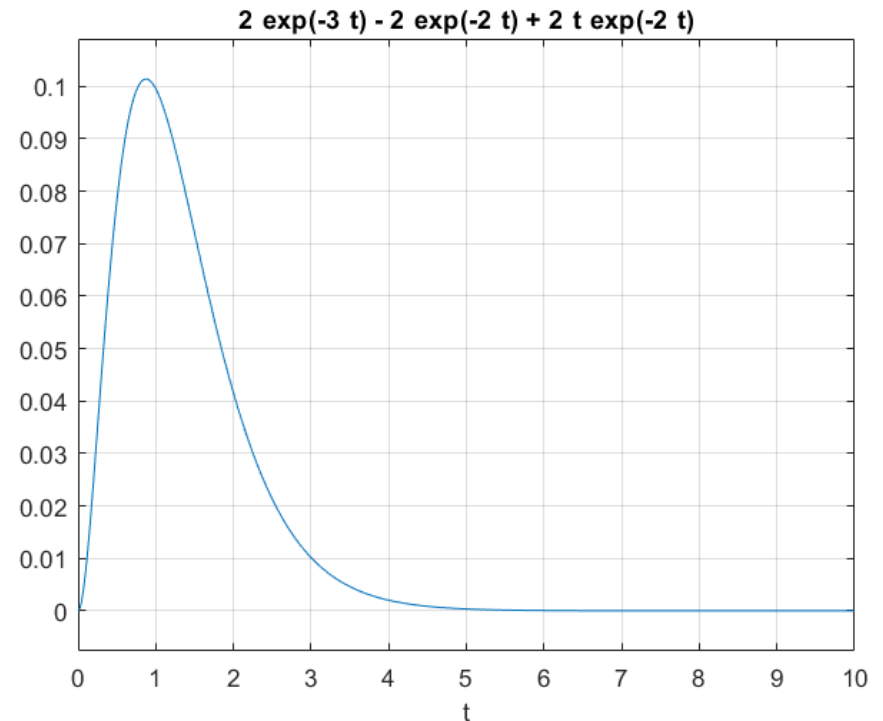
**Exemplo 10:** O sinal de excitação aplicado na entrada de um sistema LTI é  $x(t) = e^{-3t}u(t)$  e a função de transferência do sistema é

$$H(s) = \frac{2}{s^2 + 4s + 4}$$

Determine a resposta  $y(t)$  deste sistema usando as funções `laplace()` e `ilaplace()` e plote usando a função `ezplot()` do software Matlab.

### Solução:

```
syms s t x H X Y % declara variaveis simbolicas
x = exp(-3*t); % define excitacao x(t)
H = 2/(s^2+4*s+4); % define funcao de transferencia H(s)
X = laplace(x); % determina o espectro X(s) de frequencias complexas de x(t)
Y = H*X; % determina o espectro Y(s) de frequencias complexas de y(t)
y = ilaplace(Y) % determina y(t)
ezplot(y, [0,10]); % plota y(t) de 0 a 10
grid on; % coloca grade no plot
```



## Exemplo 11

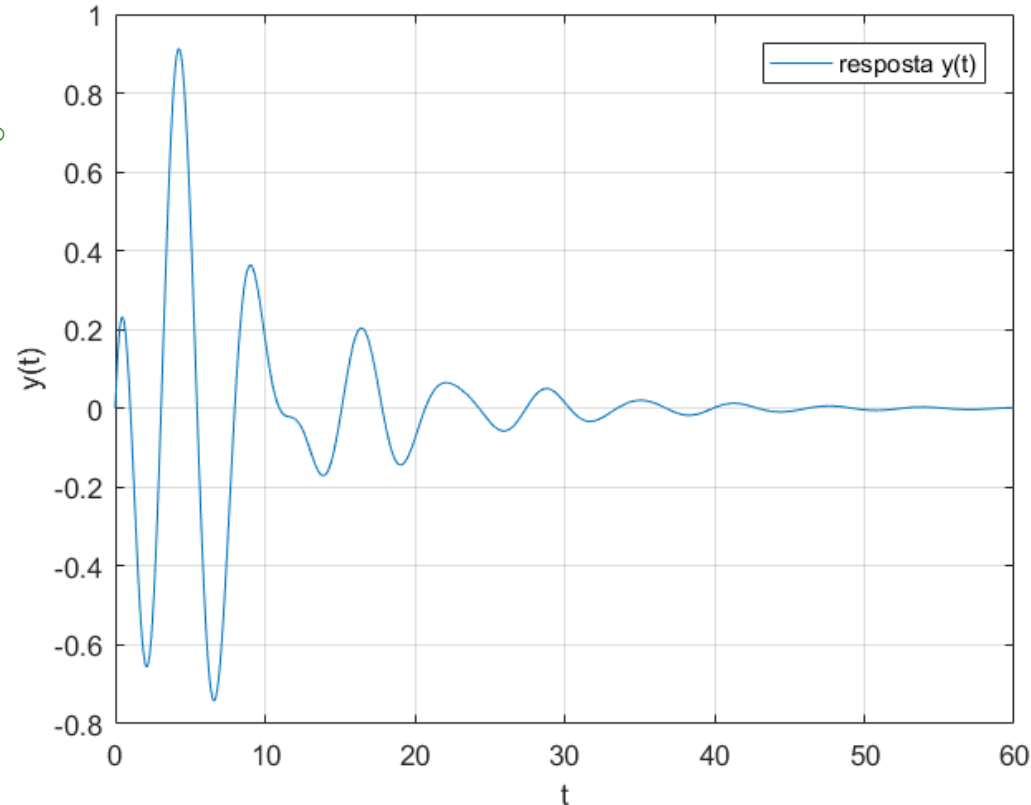
**Exemplo 11:** O sinal de excitação aplicado na entrada de um sistema LTI é  $x(t) = e^{-0.1t} \cos(t) u(t)$ ,  $0 \leq t \leq 60$ , e a função de transferência do sistema é

$$H(s) = \frac{s^2 - 1}{s^3 + 2s^2 + 3s + 4}$$

Determine a resposta  $y(t)$  deste sistema usando a função `lsim()` do software Matlab.

### Solução:

```
num = [1 0 -1]; % numerador de H(s)
den = [1 2 3 4]; % denominador de H(s)
H = tf(num,den); % define H(s)
t = 0:.1:60; % tempo de 0 a 60 em passos de 0.1
x = exp(-0.1*t).*cos(t); % excitacao x
y = lsim(H,x,t); % determina resposta y
plot(t,y); % plota y
legend('resposta y(t)') % legenda do grafico
grid on; % coloca grade no grafico
xlabel('t'); % label eixo x
ylabel('y(t)'); % label eixo y
```



## Exemplo 12

**Exemplo 12:** O sinal de excitação aplicado na entrada de um sistema LTI é  $x(t) = 2e^{-t}$ , e a equação diferencial que estabelece a relação entre saída  $w(t)$  e entrada  $x(t)$  é dada por

$$\frac{d^2w(t)}{dt^2} + 7\frac{dw(t)}{dt} + 12w(t) = 12x(t) \quad (23)$$

Sabendo que  $w(0^-) = 5$  e  $\frac{d}{dt}w(0^-) = \dot{w}(0^-) = 0$ , determine analiticamente a resposta  $w(t)$  deste sistema.

**Solução:** Das propriedades 3 e 4 do slide 13 temos que

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}w(t)\right\} = sW(s) - w(0^-) \quad = \dot{w}(0^-) \quad (24)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2}{dt^2}w(t)\right\} = s^2W(s) - sw(0^-) - \frac{d}{dt}w(0^-) \quad (25)$$

E daí, usando (24) e (25) e aplicando a Transformada de Laplace em  $x(t) = 2e^{-t}$  e em (23), temos:

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\{2e^{-t}u(t)\} = \frac{2}{s+1}$$

$$W(s) = \mathcal{L}\{w(t)\}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dw(t)}{dt}\right\} = sW(s) - w(0^-) = sW(s) - 5$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2w(t)}{dt^2}\right\} = s^2W(s) - sw(0^-) - \dot{w}(0^-) = s^2W(s) - 5s \quad 0 \text{ (condição inicial dada no enunciado)}$$

$$[s^2W(s) - 5s] + 7[sW(s) - 5] + 12W(s) = \frac{24}{s+1}$$

ou

$$[s^2 + 7s + 12]W(s) = 5s + 35 + \frac{24}{s+1} = \frac{5s^2 + 40s + 59}{s+1}$$

## Exemplo 12

que simplifica para

$$W(s) = \frac{5s^2 + 40s + 59}{(s+1)(s^2 + 7s + 12)} = \frac{5s^2 + 40s + 59}{(s+1)(s+3)(s+4)}$$

Expandindo em frações parciais através de (6) e (7):

$$\frac{5s^2 + 40s + 59}{(s+1)(s+3)(s+4)} \equiv \frac{k_1}{(s+1)} + \frac{k_2}{(s+3)} + \frac{k_3}{(s+4)}$$

$$k_1 = \left[ (s+1) \frac{5s^2 + 40s + 59}{(s+1)(s+3)(s+4)} \right]_{s=-1} = \frac{5 - 40 + 59}{(2)(3)} = 4$$

$$k_2 = \left[ (s+3) \frac{5s^2 + 40s + 59}{(s+1)(s+3)(s+4)} \right]_{s=-3} = \frac{45 - 120 + 59}{(-2)(1)} = 8$$

$$k_3 = \left[ (s+4) \frac{5s^2 + 40s + 59}{(s+1)(s+3)(s+4)} \right]_{s=-4} = \frac{80 - 160 + 59}{(-3)(-1)} = -7$$

$$W(s) \equiv \frac{4}{(s+1)} + \frac{8}{(s+3)} - \frac{7}{(s+4)}$$

$w(t) = \mathcal{L}^{-1}\{W(s)\}$  é obtida do par 6 do slide 16 ( $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+a}\right\} = e^{-at}$ ), resultando:

$$w(t) \equiv [4e^{-t} + 8e^{-3t} - 7e^{-4t}]u(t)$$

## Transformada de Laplace aplicada a circuitos lineares

Passamos agora a estudar como determinar tensões e correntes em um circuito linear usando a Transformada de Laplace. A abordagem é semelhante à descrita no Cap II.2 específica para fasores de sinais senoidais, com a diferença de que aqui os sinais não são restritos à sinais senoidais mas devem ser nulos para  $t < 0$ . Conforme visto na disciplina Circuitos Elétricos, as relações  $V - I$  e  $I - V$  no domínio do tempo para os três elementos básicos – resistor  $R$ , indutor  $L$  e capacitor  $C$  – de um circuito linear são:

$$v_R(t) = Ri_R(t), \quad i_R(t) = v_R(t)/R \quad (26)$$

$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}, \quad i_L(t) = (1/L) \int_0^t v_L(t) dt + i_L(0^-) \quad (27)$$

$$v_C(t) = (1/C) \int_0^t i_C(t) dt + v_C(0^-), \quad i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} \quad (28)$$

Da propriedade 3 do slide 13 temos que a Transformada de Laplace das expressões diferenciais em (27) e (28) resulta em

$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \xrightarrow{\mathcal{L}} V_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0^-) \quad (29)$$

$$i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} \xrightarrow{\mathcal{L}} I_C(s) = sCV_C(s) - Cv_C(0^-) \quad (30)$$

Notando que (29) e (30) podem ser algebricamente rearranjadas para representar as expressões integrais em (27) e (28):

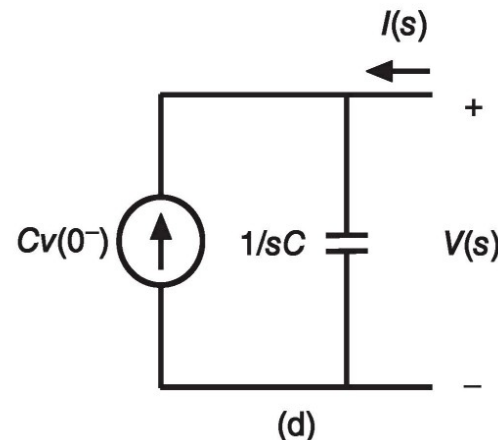
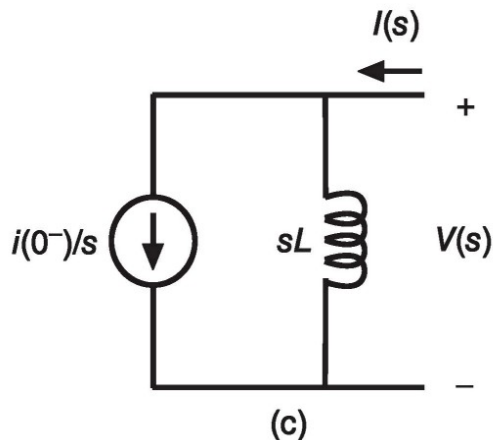
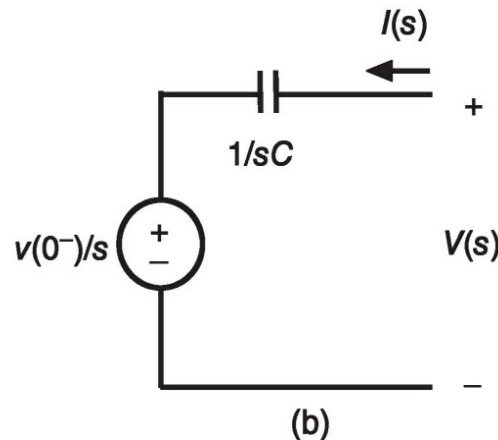
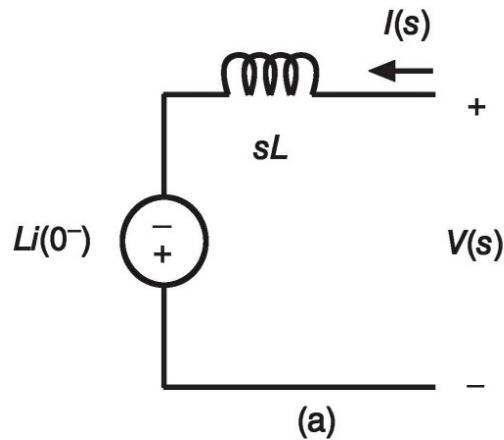
$$I_L(s) = V_L(s)/sL + i_L(0^-)/s \quad (31)$$

$$V_C(s) = I_C(s)/sC + v_C(0^-)/s \quad (32)$$

A tabela no próximo slide resume estes resultados.

## s-Domain Impedance of Linear Circuit Elements

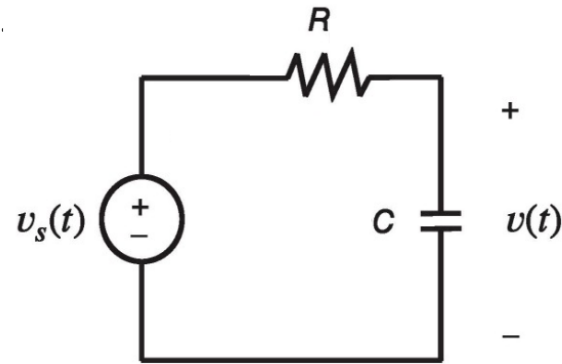
Device	Impedance $Z(s)$	V-I Transform	I-V Transform
Resistor	$R$	$V(s) = RI(s)$	$I(s) = V(s)/R$
Inductor	$sL$	$V(s) = sLI(s) - Li(0^-)$	$I(s) = V(s)/sL + i(0^-)/s$
Capacitor	$1/sC$	$V(s) = I(s)/sC + v(0^-)/s$	$I(s) = sCV(s) - Cv(0^-)$



Modelos de elementos de circuito no domínio frequência complexa  $s$  com estado inicial não nulo. (a) Modelo série p/ indutor. (b) Modelo série p/ capacitor. (c) Modelo paralelo p/ indutor. (d) Modelo paralelo p/ capacitor. Note que se o estado inicial é nulo e o regime for permanente senoidal, então  $s$  pode ser substituído por  $j\omega$  e todas as tensões e correntes passam a ser fasores.

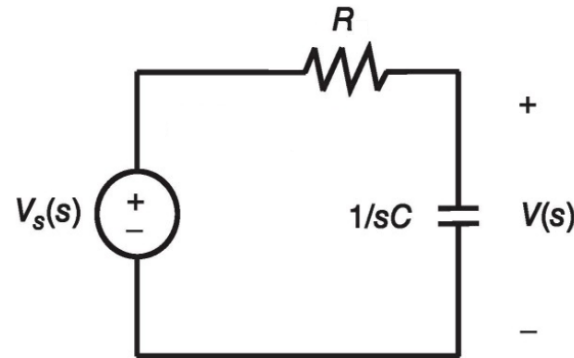
### Exemplo 13

**Exemplo 13:** Considere o circuito RC abaixo.



Sabendo que a tensão inicial no capacitor  $C$  é nula, **pede-se:** **(a)** Determine analiticamente a resposta  $v(t)$  para uma excitação  $v_s(t) = \delta(t)$ . **(b)** Determine analiticamente a resposta  $v(t)$  para uma excitação  $v_s(t) = u(t)$ .

**Solução:** **(a)** Aplicando a Transformada de Laplace no circuito acima temos (ver tabela no slide anterior)



Aplicando a técnica do divisor de tensão no circuito acima temos

$$V(s) = \frac{1/sC}{1/sC + R} V_s(s) = \frac{1/RC}{s + 1/RC} V_s(s) \quad (33)$$

Note de (33) que a função de transferência  $H(s) = V(s)/V_s(s)$  apresenta um único polo em  $s = -1/RC$ , e, por esta razão, este tipo de sistema é denominado de **sistema de 1ª ordem**.



### Exemplo 13

A Transformada de Laplace da excitação  $v_s(t) = \delta(t)$  é  $V_s(s) = \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$ . Para esta excitação temos então:

$$V(s) = H(s)V_s(s) = \frac{1/RC}{s + 1/RC}$$

$v(t) = \mathcal{L}^{-1}\{V(s)\}$  é obtida do par 6 do slide 16 ( $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+a}\right\} = e^{-at}$ ), resultando:

$$v(t) = h(t) = (1/RC) \exp(-t/RC)u(t) \quad (34)$$

**(b)** A Transformada de Laplace da excitação  $v_s(t) = u(t)$  é  $V_s(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} = 1/s$ . Para esta excitação temos então:

$$V(s) = H(s)V_s(s) = \frac{1/RC}{s(s + 1/RC)}$$

Expandindo em frações parciais através de (6) e (7):

$$V(s) = \frac{1/RC}{s(s + 1/RC)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s + 1/RC}$$

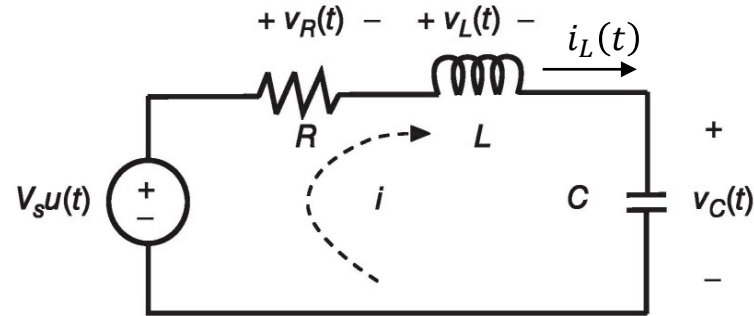
$$A_1 = \left. \frac{1/RC}{s + 1/RC} \right|_{s=0} = 1, \quad A_2 = \left. \frac{1/RC}{s} \right|_{s=-1/RC} = -1$$

$v(t) = \mathcal{L}^{-1}\{V(s)\}$  é obtida do par 6 do slide 16 ( $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+a}\right\} = e^{-at}$ ), resultando:

$$v(t) = u(t) - \exp(-t/RC) u(t) = [1 - \exp(-t/RC)] u(t) \quad (35)$$

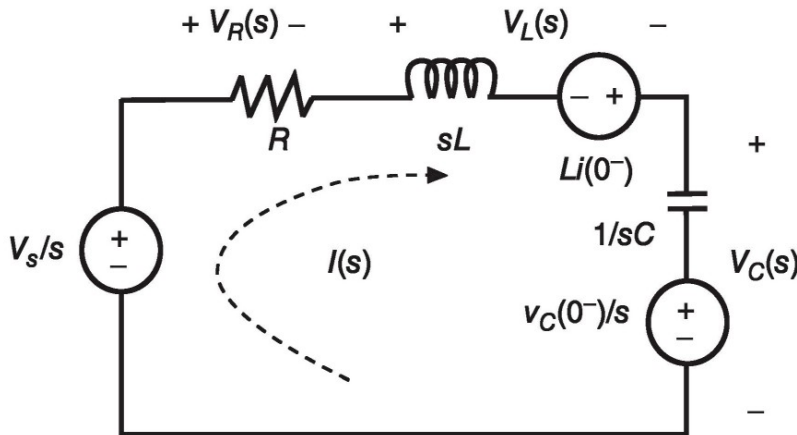
## Exemplo 14

**Exemplo 14:** Considere o circuito RLC abaixo, excitado por um degrau unitário de amplitude  $V_s$  e com condições iniciais  $i_L(0^-)$  e  $v_C(0^-)$ .



**Pede-se:** (a) Determine analiticamente a expressão algébrica para  $V_C(s)$ . Para  $V_s = 1V$ ,  $i_L(0^-) = 3A$ ,  $v_C(0^-) = -1.0V$ ,  $L = 1H$ ,  $C = 1F$  determine e plote  $v_C(t) = \mathcal{L}^{-1}\{V_C(s)\}$  para (b)  $R = 0.3\Omega$ , (c)  $R = 0.5\Omega$ , (d)  $R = 1.0\Omega$ , (e)  $R = 2.0\Omega$ , (f)  $R = 4.0\Omega$ . Use as funções `ilaplace()` e `ezplot()` do software Matlab para a solução dos itens (b) a (f).

**Solução:** (a) Aplicando a Transformada de Laplace no circuito acima temos (ver tabela no slide 63):



Aplicando a lei de Kirchhoff para tensões ao circuito ao lado:

$$RI(s) + sLI(s) - Li(0^-) + I(s)/sC + v_C(0^-)/s = V_s/s$$

Isolando  $I(s)$ :

$$I(s) = \frac{si(0^-) + V_s/L - v_C(0^-)/L}{s^2 + (R/L)s + 1/LC} \quad (36)$$

Do circuito ao lado:

$$V_C(s) = I(s) \frac{1}{sC} + \frac{v_C(0^-)}{s} \quad (37)$$

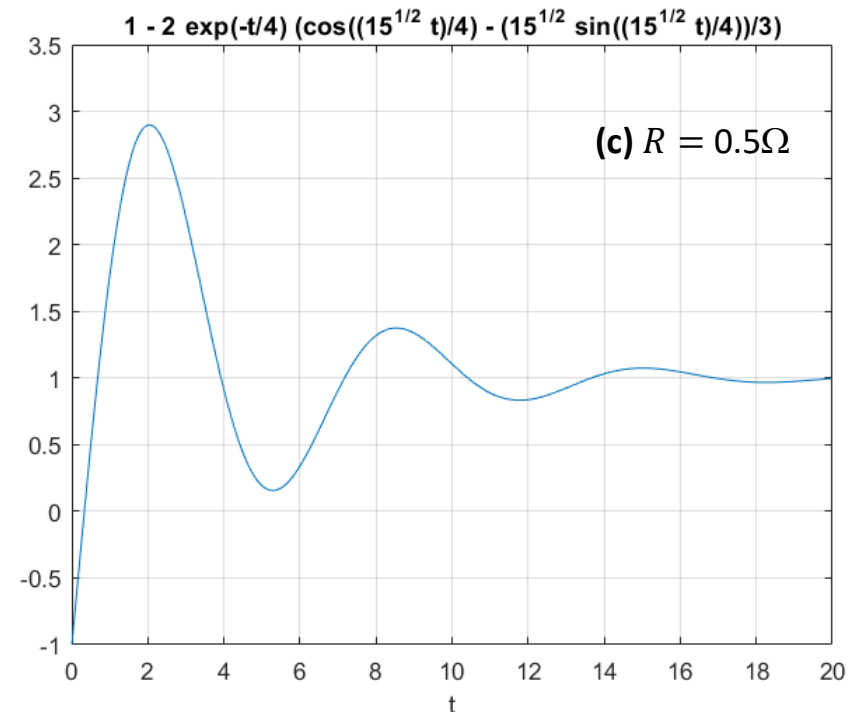
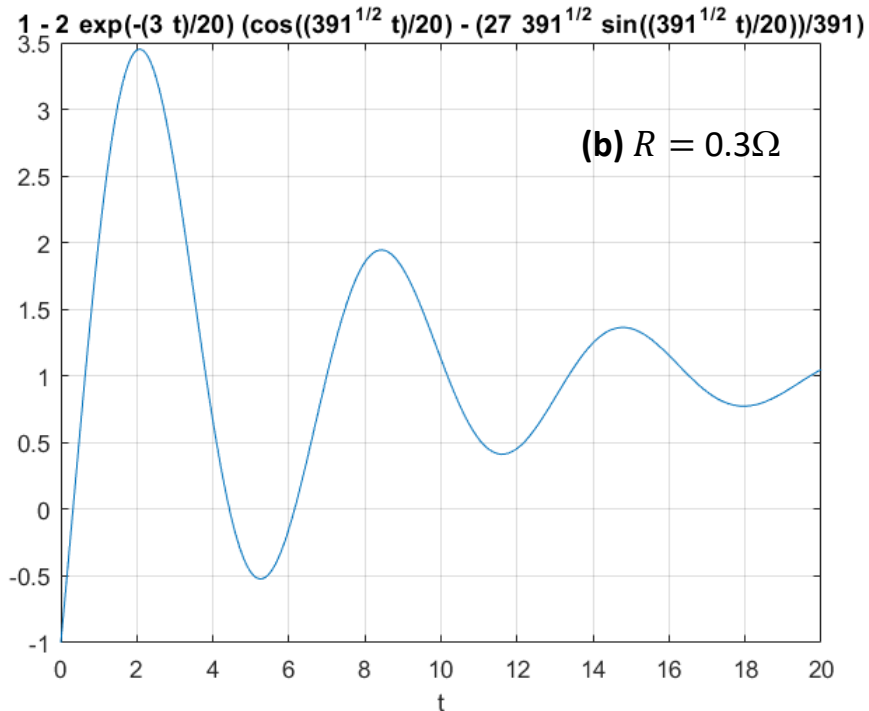
Substituindo (36) em (37):

$$V_C(s) = \frac{1}{sC} \left[ \frac{si_L(0^-) + V_s/L - v_C(0^-)/L}{s^2 + (R/L)s + 1/LC} \right] + \frac{v_C(0^-)}{s} \quad (38)$$

## Exemplo 14

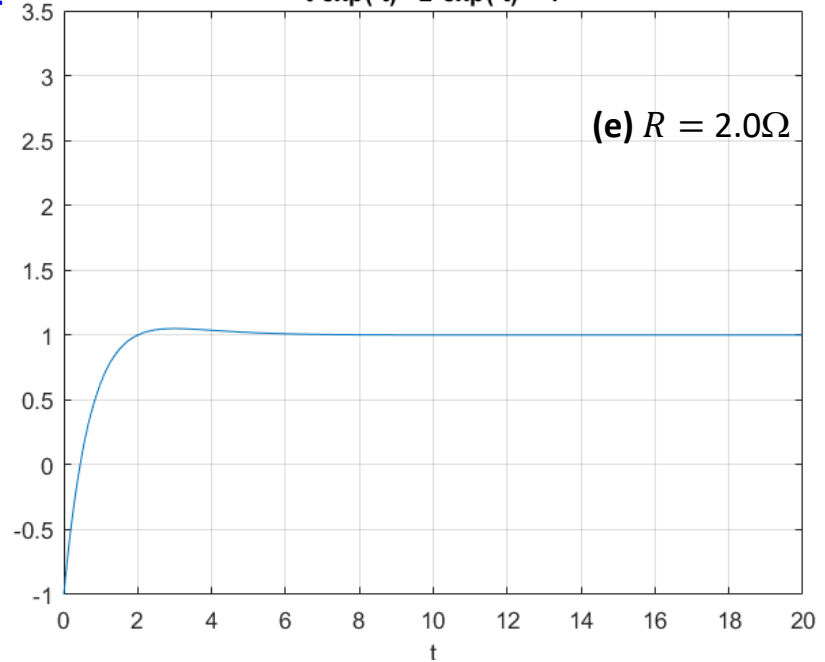
```
vC0=-1.0; % tensao inicial no capacitor
iL0=3.0; % corrente inicial no indutor
Vs=1.0; % amplitude do degrau de excitacao
L=1; % valor do indutor
C=1; % valor do capacitor
R=0.3; % valor do resistor

syms s t vC VC % declara variaveis simbolicas
VC = (s*iL0+(Vs/L)-(vC0/L))/((s*C)*(s^2+(R/L)*s+(1/(L*C))))+(vC0/s); % define VC(s)
vC = ilaplace(VC) % determina vC(t) e mostra
ezplot(vC, [0,20]); % plota vC(t) de 0 a 20
axis([0 20 -1 3.5]); % ajusta eixo horizontal p/ o intervalo [0 20] e
% ajusta o eixo vertical para o intervalo [-1 3.5]
grid on; % coloca grade no plot
```



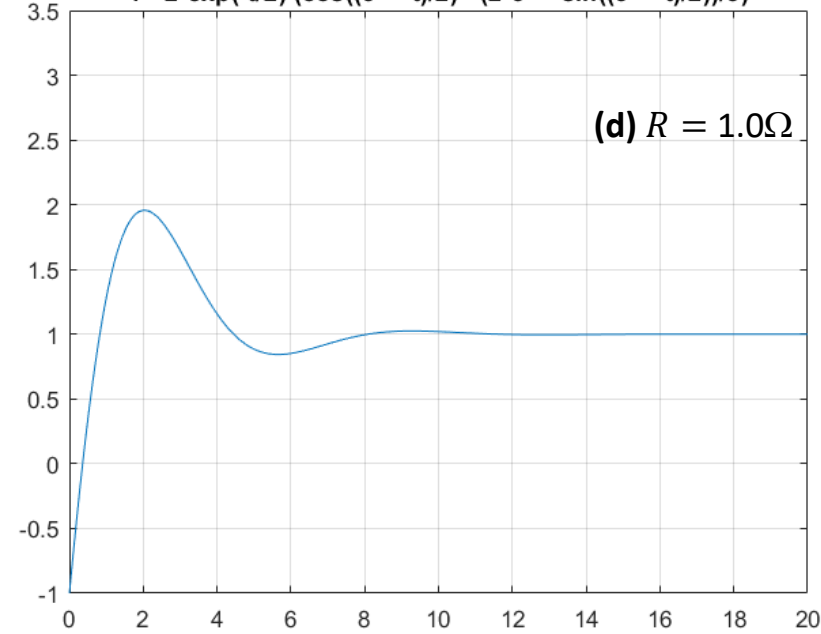
## Exemplo 14

$$t \exp(-t) - 2 \exp(-t) + 1$$



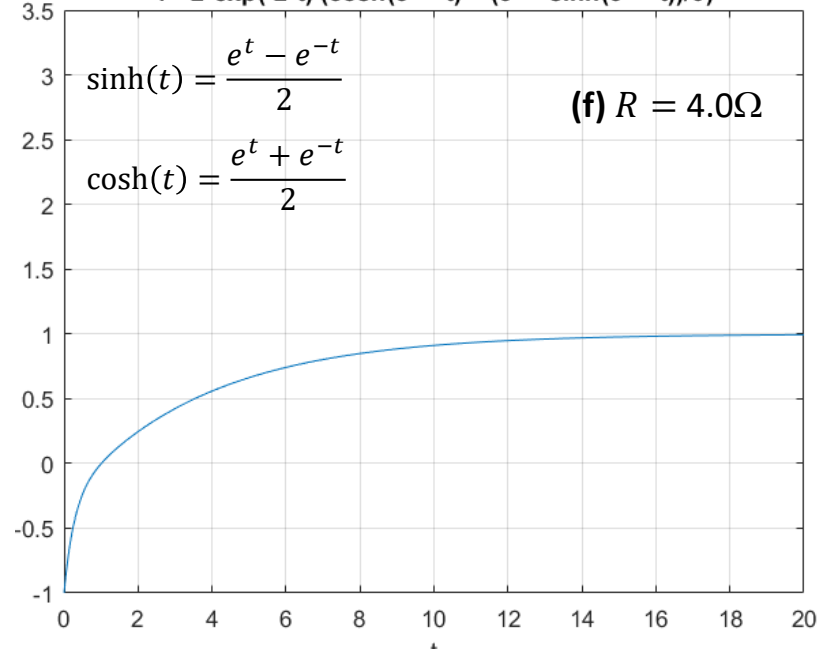
$$1 - 2 \exp(-t/2) (\cos((3^{1/2} t)/2) - (2 \cdot 3^{1/2} \sin((3^{1/2} t)/2))/3)$$

(d)  $R = 1.0 \Omega$



$$1 - 2 \exp(-2 t) (\cosh(3^{1/2} t) + (3^{1/2} \sinh(3^{1/2} t))/6)$$

(f)  $R = 4.0 \Omega$

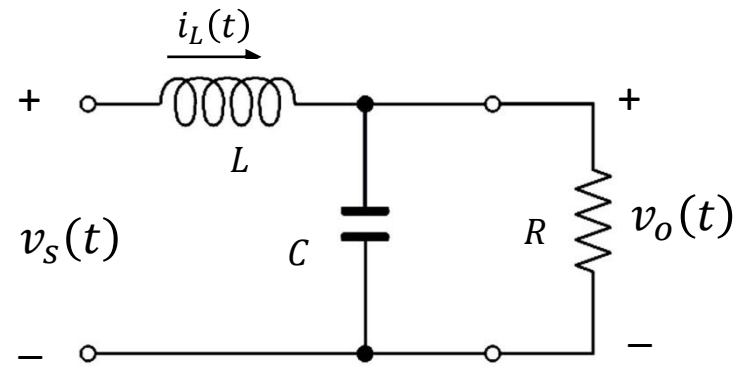
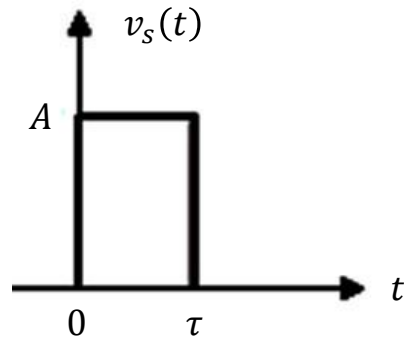


Note no denominador de (36) e (38) o polinômio de 2º grau  $s^2 + (R/L)s + 1/LC$ , cujas 2 raízes são os 2 polos deste **sistema de 2ª ordem**. De acordo com a natureza dos polos fica caracterizada a resposta no tempo. Por exemplo, em (b), (c) e (d) a resposta é **sub-amortecida** (oscilatória – 2 polos complexos conjugados no semiplano  $s$  esquerdo), em (e) a resposta é **criticamente amortecida** (resposta mais rápida no tempo sem ser oscilatória – 2 polos reais iguais no semiplano  $s$  esquerdo - ver par 7 na tabela do slide 16) e em (f) a resposta é **super amortecida** (2 polos reais distintos no semiplano  $s$  esquerdo).

Das expressões  $p/v_C(t) = \mathcal{L}^{-1}\{V_C(s)\}$  na legenda dos gráficos, da tabela nos slides 16 a 18 e da equação (15) é possível identificar a frequência  $s_p$  dos polos. Em (d)  $s_{p1,p2} = -0.5 \pm j\sqrt{3}/2$ , em (e)  $s_{p1,p2} = -1.0$  e em (f)  $s_{p1} = -2.0$  e  $s_{p2} = -\sqrt{3}$  [1/segundo].

## Homework 1

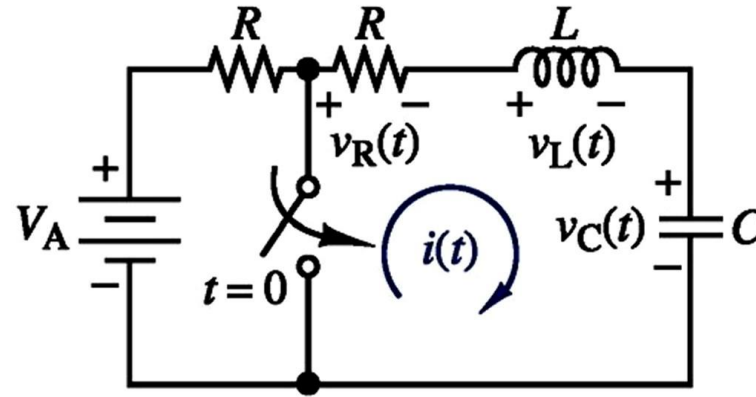
Considere o circuito RLC abaixo, excitado por um pulso  $v_s(t) = A(u(t) - u(t - \tau))$  de amplitude  $A$  e duração  $\tau$  e com condições iniciais  $i_L(0^-) = 0$  e  $v_o(0^-) = 0$ .



**Pede-se:** (a) Determine analiticamente a expressão algébrica para  $V_o(s)$ . Para  $A = 1V$ ,  $\tau = 1s$ ,  $L = 1H$  e  $C = 1F$  determine e plote  $v_o(t) = \mathcal{L}^{-1}\{V_o(s)\}$  para (b)  $R = 0.3\Omega$ , (c)  $R = 0.5\Omega$ , (d)  $R = 1.0\Omega$ , (e)  $R = 2.0\Omega$ , (f)  $R = 4.0\Omega$ . Use as funções `ilaplace()` e `ezplot()` do software Matlab para a solução dos itens (b) a (f).

## Homework 2

Considere o circuito RLC abaixo em que a chave está aberta desde  $t = -\infty$ . Em  $t = 0$  a chave é fechada.



**Pede-se:** (a) Determine analiticamente a expressão algébrica de  $V_C(s)$ . (b) Para  $V_A = 10\text{V}$ ,  $L = 1\text{H}$ ,  $C = 5\mu\text{F}$  e  $R = 400\Omega$  determine e plote  $i(t) = \mathcal{L}^{-1}\{I(s)\}$  com  $t \geq 0$ . Use as funções `ilaplace()` e `ezplot()` do software Matlab para a solução do item (b).

### Homework 3

O sinal de excitação aplicado na entrada de um sistema LTI é  $x(t) = 2e^{-t}\cos(3t)$ , e a equação diferencial que estabelece a relação entre saída  $y(t)$  e entrada  $x(t)$  é dada por

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + \frac{d}{dt}y(t) + 100y(t) = x(t)$$

Sabendo que  $y(0^-) = 5$  e  $\frac{d}{dt}y(0^-) = -1$ , determine analiticamente a resposta  $y(t)$  deste sistema.

## Homework 4

A função de transferência de um sistema é

$$H(s) = \frac{100}{s^2 + Ks + 100}$$

**Pede-se:** Determine analiticamente e plote a resposta ao impulso e o mapa de polos e zeros (ver slide 11) deste sistema para **(a)**  $K=1$  **(b)**  $K=20$  **(c)**  $K=100$ .



## Apêndice A - Reconstrução de $x(t)$ a partir de suas componentes espectrais no plano $s = \alpha + j\omega$

Seja uma função no tempo  $x(t)$  com instante inicial em  $t = 0$ , e seja  $X(s)$  seu espectro de frequências complexas, onde  $s = \alpha + j\omega$ . Seja  $x(t)$  construída a partir de seu espectro  $X(s)$  através da expressão

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{s=\alpha+j\omega} X(s)e^{st} ds \quad (\text{A.1})$$

Interpretando a integral (A.1): A integral “varre” todo plano complexo  $s = \alpha + j\omega$  “procurando” as infinitas e infinitesimalmente distantes entre si componentes espectrais  $X(s)$  no intuito de restituir a cada uma delas a variação temporal, ponderando-as com a exponencial no tempo  $e^{st}$ , de mesma frequência complexa  $s = \alpha + j\omega$  que a componente espectral sendo ponderada.

Ocorre que o custo computacional de (C.1) é altíssimo, visto que implica na varredura ponto a ponto de todo o plano complexo  $s = \alpha + j\omega$ . No sentido de reduzir este custo computacional vamos definir uma estratégia de “varredura” do plano  $s = \alpha + j\omega$  que evite esta situação, mas que seja equivalente.

## Apêndice A - Reconstrução de $x(t)$ a partir de suas componentes espectrais no plano $s = \alpha + j\omega$

Uma maneira de “varrer” o plano  $s$  seria particioná-lo em infinitos contornos retangulares de dimensões infinitesimais, como mostra a Figura A.1.

Note que as fronteiras de cada quatro contornos adjacentes se anulam devido aos sentidos contrários de integração nas fronteiras, resultando em um contorno equivalente que envolve os quatro originais.

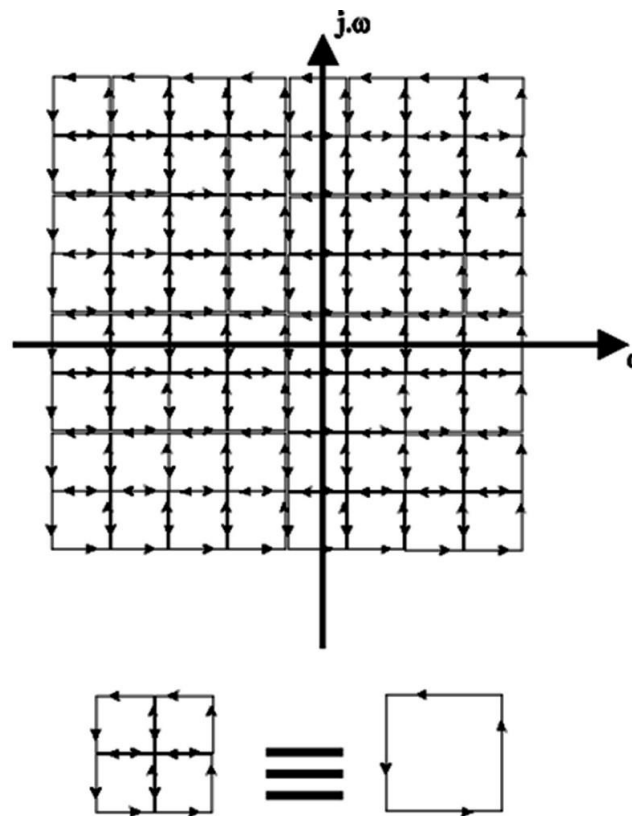


Figura A.1: Plano  $s = \alpha + j\omega$  subdividido em infinitos contornos retangulares de dimensões infinitesimais. Cada quatro contornos adjacentes equivalem a um contorno envolvendo os quatro originais.

## Apêndice A - Reconstrução de $x(t)$ a partir de suas componentes espectrais no plano $s = \alpha + j\omega$

Se cada quatro contornos adjacentes resultam em um único contorno de dimensões equivalentes à soma dos quatro originais, podemos aplicar este procedimento em todo plano  $s = \alpha + j\omega$  e executar a “varredura” à procura de componentes espectrais simplesmente executando a integral (A.1) ao longo de um caminho retangular de lados tendendo ao infinito, conforme mostra a Figura A.2.

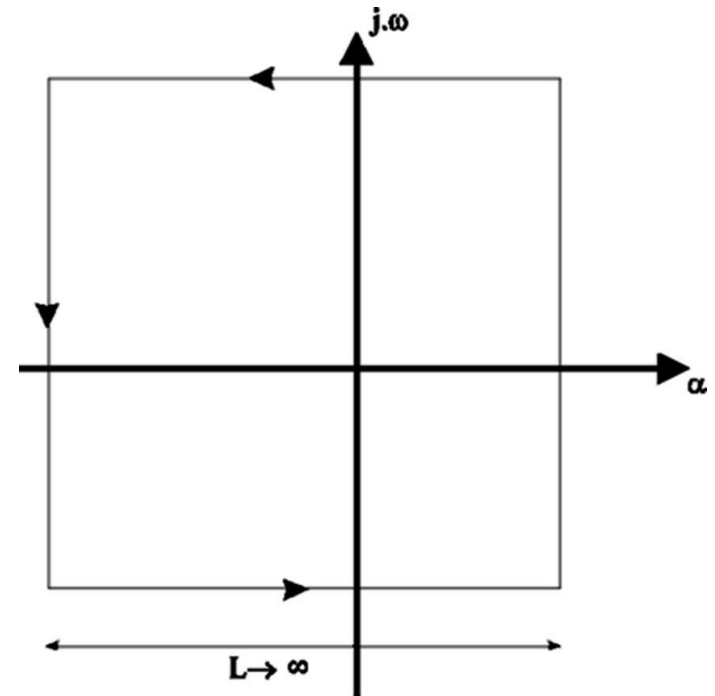


Figura A.2: Varredura do todo plano  $s$  realizada pela integração ao longo de um contorno retangular de lados  $L$  tendendo ao infinito.

Mas se os lados do contorno retangular tendem ao infinito, um observador “sentado” no plano  $s = \alpha + j\omega$  localizado em qualquer posição finita não poderá distinguir as fronteiras do contorno da Figura A.2.

Sendo assim, a forma do contorno não importa, desde que suas fronteiras estejam no infinito. Portanto o contorno de integração da integral definida pela Equação (A.1) pode ser o mostrado na Figura A.3.

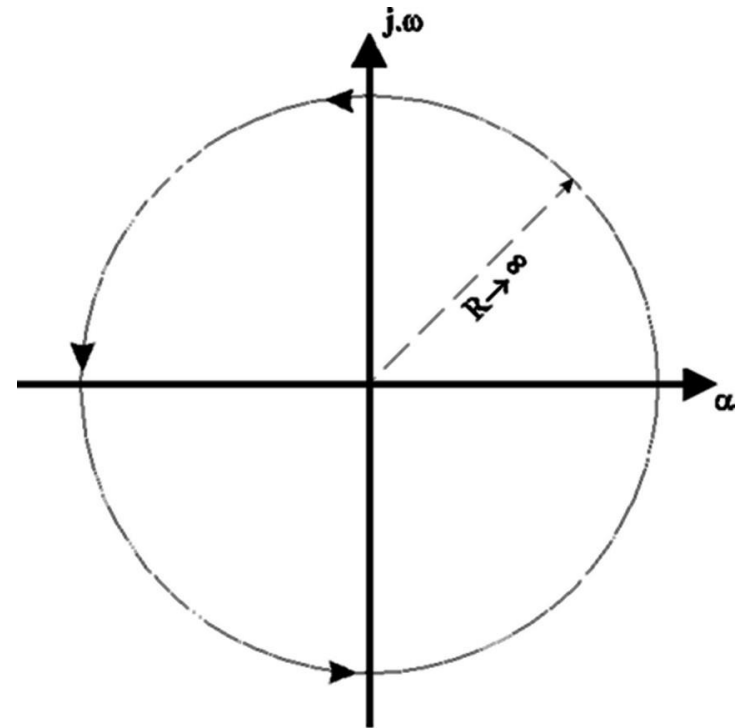


Figura A.3: Varredura do todo plano  $s = \alpha + j\omega$  realizada pela integração ao longo de um contorno circular de raio tendendo ao infinito.

## Apêndice A - Reconstrução de $x(t)$ a partir de suas componentes espectrais no plano $s = \alpha + j\omega$

Mas sabemos do Teorema de Cauchy visto na disciplina Variável Complexa que a integral de uma função complexa ao longo de um caminho fechado definido sobre o plano complexo de domínio da função é nula se o caminho fechado não engloba pelo menos um polo ou singularidade da função complexa.

Sendo assim, vamos dividir o contorno da Figura A.3 em dois contornos C1 e C2, separados pela fronteira em  $s = \alpha_m$ , de tal forma que todos os polos de  $X(s)$  estejam à esquerda da fronteira  $s = \alpha_m$ , conforme mostra a Figura A.4.

Pelo Teorema de Cauchy, a integral (A.1) é nula ao longo do contorno C2.

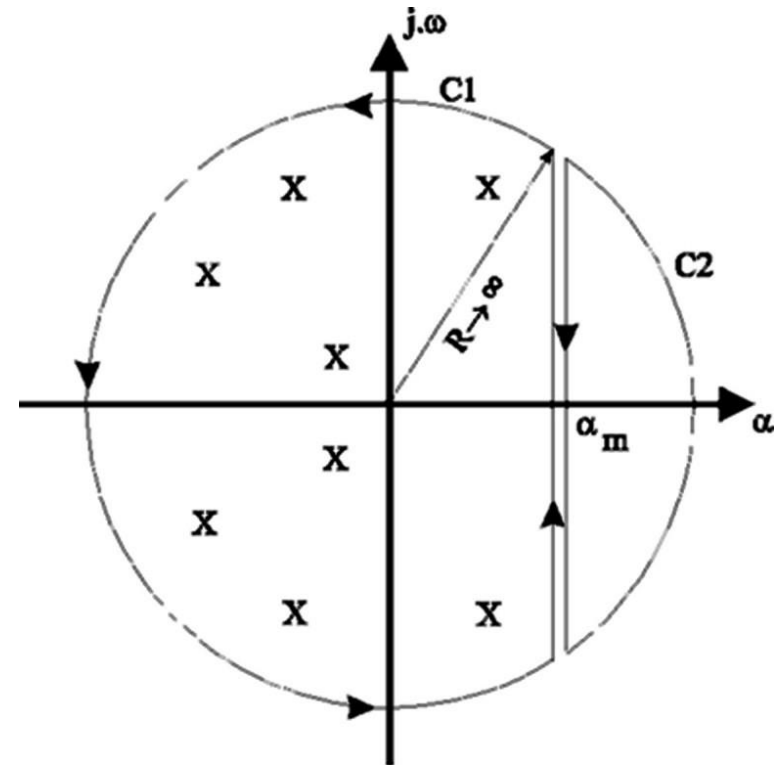


Figura A.4: Varredura do todo plano  $s$  realizada pela integração ao longo dos contornos C1 e C2. Todos os polos de  $X(s)$  estão à esquerda da fronteira  $s = \alpha_m$ .

## Apêndice A - Reconstrução de $x(t)$ a partir de suas componentes espectrais no plano $s = \alpha + j\omega$

Se fizermos o raio do contorno C1 tender efetivamente ao infinito na Figura A.4 teremos o contorno definido na Figura A.5.

Note que este simples caminho de integração na Figura A.5 “varre” todo plano complexo  $s = \alpha + j\omega$  da mesma forma que os múltiplos caminhos de integração da integral (A.1), mas obviamente com um custo computacional radicalmente menor.

Os múltiplos caminhos de integração em (A.1) podem então serem substituídos pelo simples caminho retilíneo, que inicia em  $s = \alpha_m - j\infty$  e termina em  $s = \alpha_m + j\infty$ :

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha_m - j\infty}^{\alpha_m + j\infty} X(s)e^{st} ds \quad (\text{A.2})$$

O custo computacional de (A.2) é menor porque (A.1) faz a varredura ao longo de um plano e (A.2) faz a varredura ao longo de uma reta.

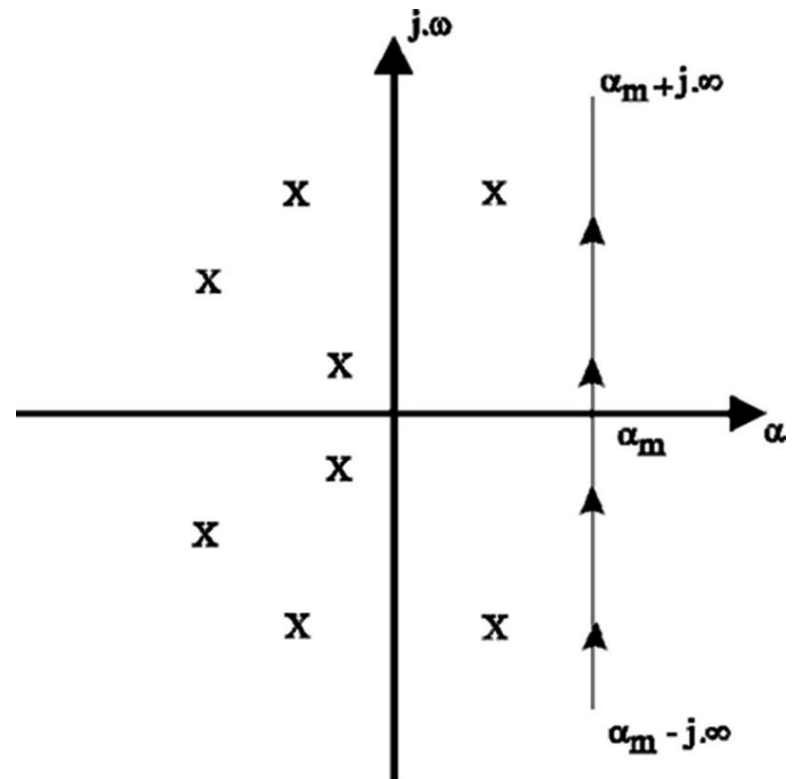


Figura A.5: Varredura do todo plano  $s = \alpha + j\omega$  “à procura” de componentes espectrais realizada pela integração ao longo do caminho definido pela reta  $s = \alpha_m$ . A reta  $s = \alpha_m$  está à direita de todos os polos de  $X(s)$ .

<b>Operation</b>	<b>Formula</b>
Rectangular to Polar Conversion	$z = x + jy = re^{j\theta}$ where $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ and $\theta = \arctan(y/x)$
Polar to Rectangular Conversion	$z = re^{j\theta} = r [\cos(\theta) + j\sin(\theta)] = x + jy$ where $x = r \cos(\theta)$ and $y = r \sin(\theta)$
Add: $z_3 = z_1 + z_2$	$(x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$
Subtract: $z_3 = z_1 - z_2$	$(x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$
Multiply: $z_3 = z_1 z_2$ (polar form)	$(x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + y_1 x_2)$ $r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$
Divide: $z_3 = z_1 / z_2$  (polar form)	$\frac{(x_1 x_2 - y_1 y_2) - j(x_1 y_2 - y_1 x_2)}{x_2^2 + y_2^2}$ $\frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$

## Apêndice C:

<i>Relationship</i>	<i>Relationship</i>
$\sin u = \cos(u - \pi/2)$	$\cos u = \sin(u + \pi/2)$
$\cos(-u) = \cos u$	$\sin(-u) = -\sin(u)$
$\sin^2 u + \cos^2 u = 1$	$\cos^2 u = \frac{1}{2}(1 + \cos 2u)$
$\sin^2 u = \frac{1}{2}(1 - \cos 2u)$	$\cos(u \pm v) = \cos u \cos v \mp \sin u \sin v$
$\sin(u \pm v) = \sin u \cos v \pm \cos u \sin v$	$\cos u \cos v = \frac{1}{2}[\cos(u - v) + \cos(u + v)]$
$\sin u \sin v = \frac{1}{2}[\cos(u - v) - \cos(u + v)]$	$\sin u \cos v = \frac{1}{2}[\sin(u - v) + \sin(u + v)]$
$\cos u = \frac{1}{2}[e^{ju} + e^{-ju}]$	$\sin u = \frac{1}{2j}[e^{ju} - e^{-ju}]$
$e^{ju} = \cos u + j \sin u$	