



Análise da resposta transitória de sistemas de 1ª e 2ª ordem. Estabilidade (BIBO). Atraso de transporte. Diagramas de Bode.



Departamento de Eletrônica e Computação

Centro de Tecnologia

ELC1115 – Sinais e Sistemas

Prof. Fernando DeCastro

Resposta transitória de sistemas de 1ª e 2ª ordem

Conforme vimos no Cap IV das notas de aula, para a grande maioria dos fins práticos em engenharia a função de transferência $H(s)$ de um sistema LTI realizável é uma razão entre dois polinômios $N(s)$ e $D(s)$:

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = k \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} \quad (1)$$

onde z_1, z_2, \dots, z_m são as raízes de $N(s)$ e que constituem os zeros de $H(s)$ e onde p_1, p_2, \dots, p_n são as raízes de $D(s)$ e que constituem os polos de $H(s)$. Vimos também que para o caso em que $m < n$, qualquer $H(s)$ na forma de (1) que não tenha polos repetidos pode ser expandida em frações parciais conforme (2) e (3):

$$H(s) = \frac{c_1}{(s - p_1)} + \frac{c_2}{(s - p_2)} + \cdots + \frac{c_n}{(s - p_n)} \quad (2)$$

onde os coeficientes c_k , com $k = 1, 2, \dots, n$ são dados por

$$c_k = (s - p_k)H(s) \Big|_{s = p_k} \quad (3)$$

de modo que é trivial aplicar $\mathcal{L}^{-1}\{\cdot\}$ a cada termo de $H(s)$ expandida por (2) através de $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+a}\right\} = e^{-at}$, para efeito de assim determinar a resposta ao impulso $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$ como uma soma ponderada de exponenciais e^{-at} .

Vimos também no Cap IV que qualquer sistema LTI fisicamente realizável quando apresenta um polo complexo em sua $H(s)$ forçosamente também apresentará o seu conjugado, de modo que os polos sempre ocorrerão em pares complexos conjugados. Neste caso os coeficientes c_k respectivos aos polos complexos na expansão de $H(s)$ em frações parciais através de (2) também serão complexos conjugados, conforme $H_c(s)$ e $h_c(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H_c(s)\}$ abaixo, equações que representam o tratamento a ser dado a cada par de polos complexos conjugados em (2) para efeito de determinar $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$:

$$H_c(s) = \frac{Ae^{j\theta}}{s - (\alpha + j\omega)} + \frac{Ae^{-j\theta}}{s - (\alpha - j\omega)} \quad (4)$$

$$h_c(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H_c(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Ae^{j\theta}}{s - (\alpha + j\omega)} + \frac{Ae^{-j\theta}}{s - (\alpha - j\omega)}\right\} = 2Ae^{\alpha t} \cos(\omega t + \theta) \quad (5)$$

Resposta transitória de sistemas de 1ª e 2ª ordem

Vimos ainda no Cap IV que, para o caso em que há polos repetidos em $H(s)$, i.e., quando $D(s)$ apresenta raízes múltiplas, raízes que são representadas no denominador de (1) por um ou mais fatores $(s - p_i)^r$, onde p_i é o i -ésimo polo múltiplo de $H(s)$ com multiplicidade r , é necessário acrescentar à expansão (2) de $H(s)$ termos na forma de (6) para cada i -ésimo polo múltiplo p_i :

$$\frac{\lambda_1}{(s - p_i)} + \frac{\lambda_2}{(s - p_i)^2} + \dots + \frac{\lambda_r}{(s - p_i)^r} \quad (6)$$

onde os coeficientes λ_k , com $k = 0, 1, \dots, r - 1$, são dados por

$$\lambda_{r-k} = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{ds^k} [(s - p_i)^r X(s)] \Big|_{s = p_i} \quad (7)$$

Para o caso em que $m \geq n$ em (1), efetua-se a divisão de $N(s)$ por $D(s)$:

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = Q(s) + \frac{R(s)}{D(s)} \quad (8)$$

onde o quociente $Q(s)$ é um polinômio em s com grau $m - n$ e o resto $R(s)$ é um polinômio em s com grau menor que n . Desta maneira, temos de (8):

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{Q(s)\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{R(s)}{D(s)}\right\} \quad (9)$$

Como o grau de $R(s)$ é menor que o de $D(s)$ então $\mathcal{L}^{-1}\{R(s)/D(s)\}$ em (9) é determinada através de (2). $\mathcal{L}^{-1}\{Q(s)\}$ é determinado através de (10) :

$$\frac{d^k \delta(t)}{dt^k} \leftrightarrow s^k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (10)$$

Resposta transitória de sistemas de 1ª e 2ª ordem

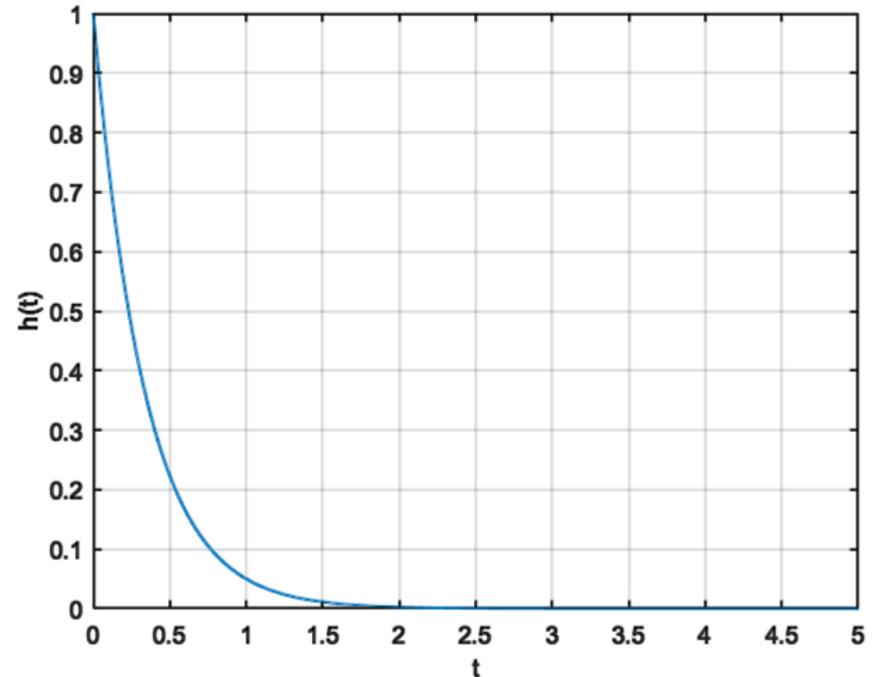
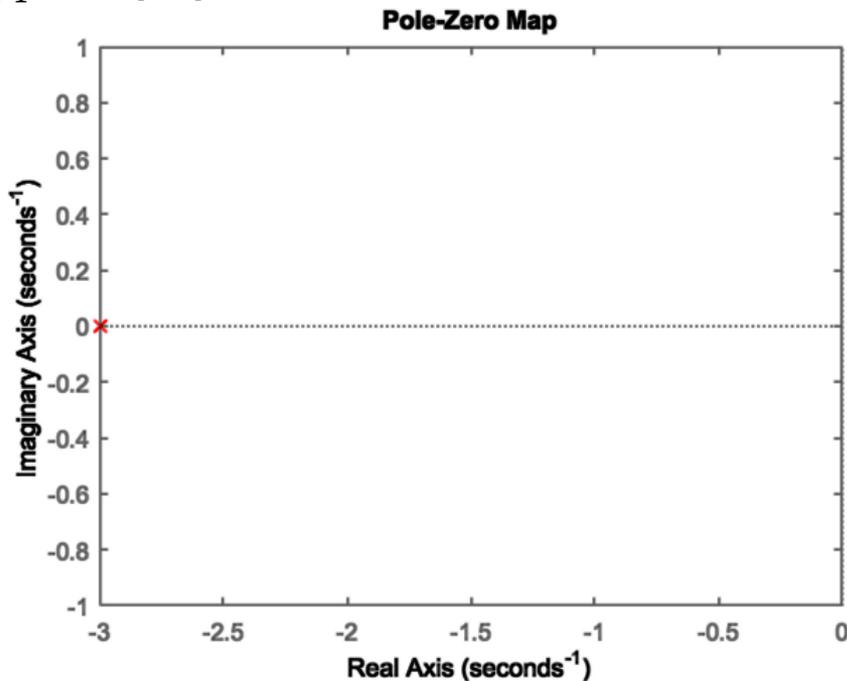
Sistemas de 1ª ordem: Um sistema de 1ª ordem apresenta um único polo em sua $H(s)$, de modo que (1) e (2) simplificam-se para:

$$H(s) = k \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)} = \frac{c_1}{(s - p_1)} \quad (11)$$

com c_1 dado por (3). O polo p_1 é forçosamente um polo real, porque se fosse complexo teria que ocorrer simultaneamente um polo complexo conjugado, o que é inviável dado que o sistema é de 1ª ordem. Portanto, dado que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+a}\right\} = e^{-at}$, a **resposta ao impulso $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$ de um sistema de 1ª ordem sempre será uma exponencial da forma**

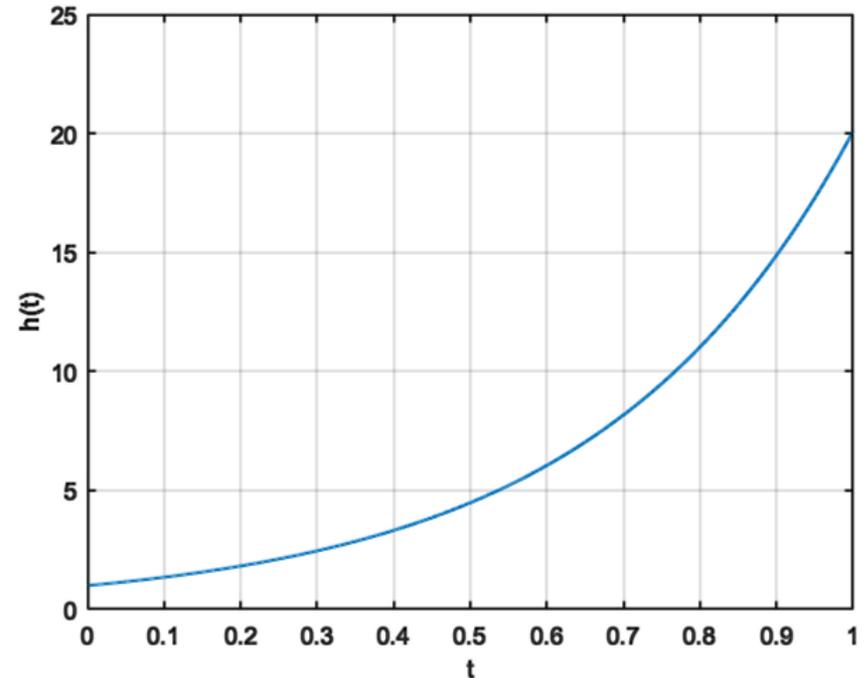
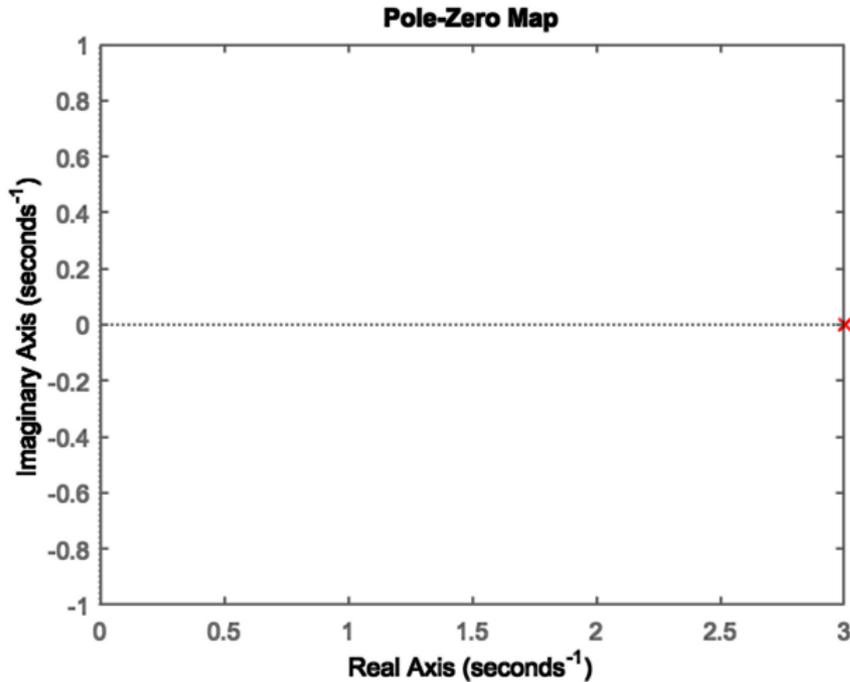
$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{c_1}{(s - p_1)}\right\} = c_1 e^{p_1 t} \quad (12)$$

Por exemplo, as figuras abaixo mostram o mapa de polos ('x') e zeros ('o') no plano de frequências complexas $s = \alpha + j\omega$ e a resposta ao impulso $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$ para um sistema de 1ª ordem cuja $H(s)$ é dada por (11) com $c_1 = 1$ e com polo $p_1 = -3$ [1/s]:



Resposta transitória de sistemas de 1ª e 2ª ordem

Em particular, note que quando o polo p_1 de $H(s)$ está no semiplano direito do plano de frequências complexas $s = \alpha + j\omega$ a resposta ao impulso $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$ é uma exponencial que cresce indefinidamente com o transcorrer do tempo, e, neste sentido, o sistema é instável porque sua saída não converge para uma resposta definida. Por exemplo, as figuras abaixo mostram o mapa de polos ('x') e zeros ('o') no plano de frequências complexas $s = \alpha + j\omega$ e a resposta ao impulso $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$ para um sistema de 1ª ordem cuja $H(s)$ é dada por (11) com $c_1 = 1$ e com polo $p_1 = 3$ [1/s]:



Resposta transitória de sistemas de 1ª e 2ª ordem

Sistemas de 2ª ordem: Um sistema de 2ª ordem apresenta dois polos em sua $H(s)$, de modo que (1) e (2) simplificam-se para:

$$H(s) = k \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2)} = \begin{cases} \frac{c_1}{(s - p_1)} + \frac{c_2}{(s - p_2)} & p_1 \neq p_2 \\ \frac{\lambda_1}{(s - p_1)} + \frac{\lambda_2}{(s - p_1)^2} & p_1 = p_2 \end{cases} \quad (13)$$

com c_1 e c_2 sendo dados por (3) e com λ_1 e λ_2 sendo dados por (7).

Note que o denominador de $H(s)$ em (13) é um termo quadrático da forma $(s - p_1)(s - p_2) = s^2 - (p_1 + p_2)s + p_1p_2$. E conforme brevemente discutimos no exemplo 14 no slide 66 do Cap IV das notas de aula, dependendo de os polos p_1 e p_2 serem reais e distintos ou reais e iguais ou complexos conjugados a resposta ao impulso $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$ resultará super-amortecida (*overdamped*), criticamente amortecida (*critically damped*) ou sub-amortecida (*underdamped*).

Para não restringir a análise a sistemas elétricos, vamos considerar um sistema genérico de 2ª ordem cuja relação entre sua entrada $x(t)$ e sua saída $y(t)$ é descrita pela equação diferencial

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 2\zeta\omega_o \frac{d}{dt}y(t) + \omega_o^2 y(t) = x(t) \quad (14)$$

e cuja função de transferência $H(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}/\mathcal{L}\{x(t)\}$ resultante da aplicação de $\mathcal{L}\{\cdot\}$ à (14) é

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_o s + \omega_o^2} \quad (15)$$

onde ζ (letra grega zeta) é o **fator de amortecimento** e ω_o é a **frequência de ressonância** do sistema. Os polos s_1 e s_2 , que são as raízes do denominador de (15), são dados por

$$s_1, s_2 = -\zeta\omega_o \pm \omega_o \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (16)$$

Resposta transitória de sistemas de 1ª e 2ª ordem

Quando a $H(s)$ do sistema de 2ª ordem está na forma da equação (15), o fator de amortecimento ζ é o parâmetro que controla a localização dos polos s_1 e s_2 no plano de frequências complexas $s = \alpha + j\omega$, e portanto define se os polos serão reais e distintos ou reais e iguais ou complexos conjugados. Conforme já discutimos, a localização dos polos s_1 e s_2 dada por (16) define se a resposta ao impulso $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$ do sistema resultará super-amortecida (*overdamped*), criticamente amortecida (*critically damped*) ou sub-amortecida (*underdamped*):

$$\text{overdamped: } \zeta > 1 \implies s_1, s_2 = -\zeta\omega_o \pm \omega_o\zeta_d \quad (17)$$

$$\text{underdamped: } \zeta < 1 \implies s_1, s_2 = -\zeta\omega_o \pm j\omega_d \quad (18)$$

$$\text{critically damped: } \zeta = 1 \implies s_1 = s_2 = -\zeta\omega_o \quad (19)$$

onde, por conveniência, definimos $\omega_d \equiv \omega_o\sqrt{1-\zeta^2}$ e $\zeta_d \equiv \sqrt{\zeta^2-1}$.

• Para um sistema **underdamped** temos $H(s) = \frac{1}{(s + \zeta\omega_o + j\omega_d)(s + \zeta\omega_o - j\omega_d)} = \frac{1}{(s + \zeta\omega_o)^2 + \omega_d^2}$ (20)

$$\exp(-\alpha t) \sin(\beta t) u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\beta}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} \quad (21)$$

E daí a resposta ao impulso $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$ do sistema para $\zeta < 1$ resulta

$$h(t) = (1/\omega_d) \exp(-\zeta\omega_o t) \sin(\omega_d t) u(t) \quad (22)$$

• Para um sistema **critically damped** temos $H(s) = \frac{1}{(s + \zeta\omega_o)^2}$ (23)

E daí, dado que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+a)^2}\right\} = te^{-at}$, a resposta ao impulso $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$ do sistema para $\zeta = 1$ resulta

$$h(t) = t \exp(-\omega_o t) u(t) \quad (24)$$

Resposta transitória de sistemas de 1ª e 2ª ordem

• Para um sistema **overdamped** temos

$$H(s) = \frac{A}{s + \omega_o(\zeta + \zeta_d)} + \frac{B}{s + \omega_o(\zeta - \zeta_d)} \quad (25)$$

$$A = \frac{1}{s + \omega_o(\zeta - \zeta_d)} \Big|_{s = -\omega_o(\zeta + \zeta_d)} = -\frac{1}{2\omega_o\zeta_d} \quad (26)$$

$$B = \frac{1}{s + \omega_o(\zeta + \zeta_d)} \Big|_{s = -\omega_o(\zeta - \zeta_d)} = \frac{1}{2\omega_o\zeta_d} \quad (27)$$

E daí, dado que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+a}\right\} = e^{-at}$, a resposta ao impulso $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$ do sistema para $\zeta > 1$ resulta

$$h(t) = (1/2\omega_o\sqrt{\zeta^2 - 1})[\exp(-\omega_o(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})t) - \exp(-\omega_o(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})t)]u(t) \quad (28)$$

Exemplo 1

Exemplo 1: Considere um sistema de 2ª ordem cuja relação entre sua entrada $x(t)$ e sua saída $y(t)$ é descrita pela equação diferencial

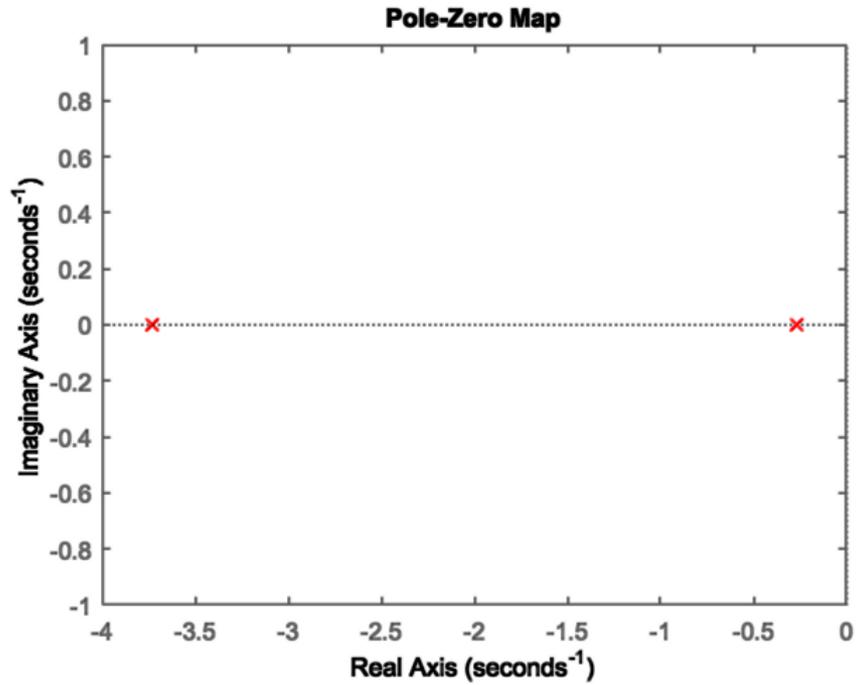
$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 2\zeta\omega_o \frac{d}{dt}y(t) + \omega_o^2 y(t) = x(t)$$

com $\omega_o = 1$ [rad/s]. **Pede-se:** Utilizando a função `pzplot()` do software Matlab plote o mapa de polos ('x') e zeros ('o') no plano de frequências complexas $s = \alpha + j\omega$ e utilizando a função `impulse()` do software Matlab plote a resposta ao impulso $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$ para as seguintes situações operacionais de amortecimento **(a)** $\zeta = 2$, **(b)** $\zeta = 1$, **(c)** $\zeta = 0.25$ e **(d)** $\zeta = -0.25$. Avalie a situação do amortecimento de cada resposta $h(t)$.

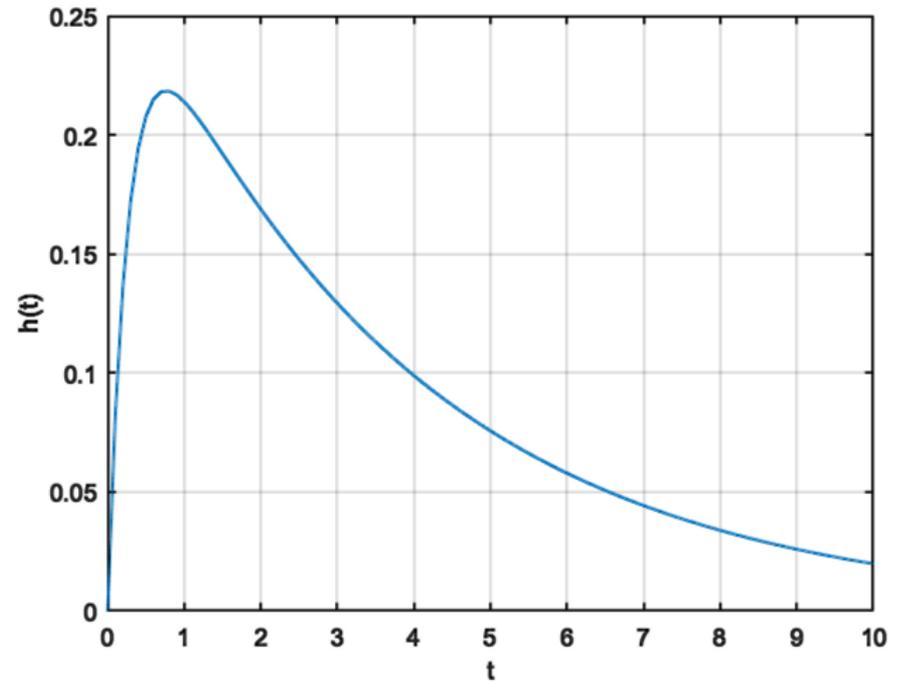
Solução:

```
% pole zero map e h(t) de um sistema de 2a ordem
wo=1; %frequencia de ressonancia
Zeta=-0.25; % fator de amortecimento
numH=1; % numerador de H(s)
denH=[1 2*Zeta*wo wo^2]; % denominador de H(s)
H=tf(numH,denH); % define H(s)
poles=pole(H) % determina e mostra os polos de H(s)
zeros=zero(H) % determina e mostra os zeros de H(s)
figure(1); % figura 1 irá mostrar pzplot()
pzplot(H,'r') % plota o mapa de polos e zeros
t = 0: 0.1: 10; % tempo t variando de 0 a 10 em passos de 0.1
h = impulse(H,t); % determina h(t)
figure(2); % figura 2 irá mostrar plot()
plot(t,h)% plota h(t)
xlabel('t'); % label eixo horizontal
ylabel('h(t)'); % label eixo vertical
grid on; % coloca grade no plot de h(t)
```

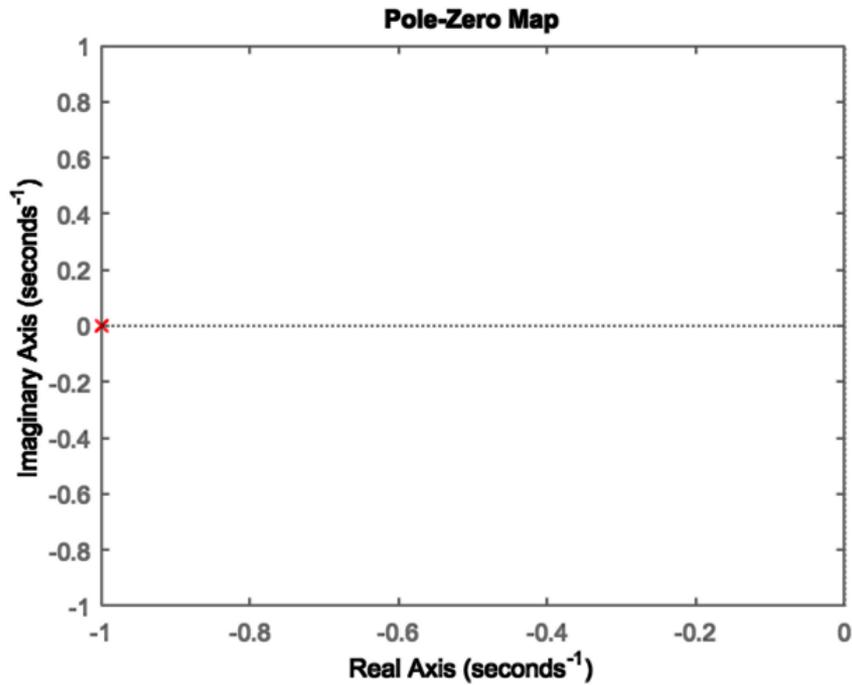
Exemplo 1



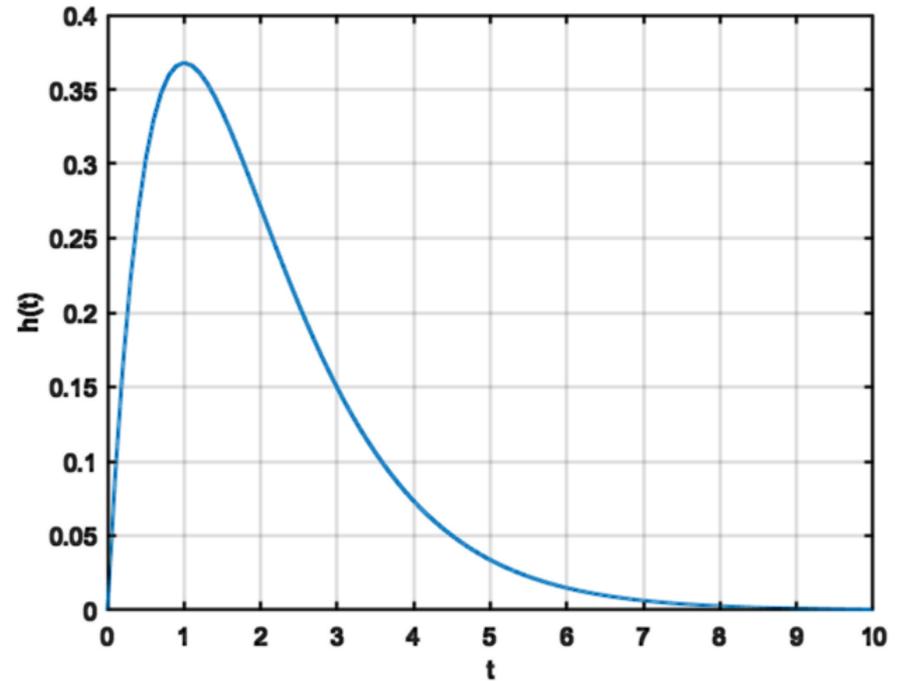
(a) $\zeta = 2$ (*overdamped*)



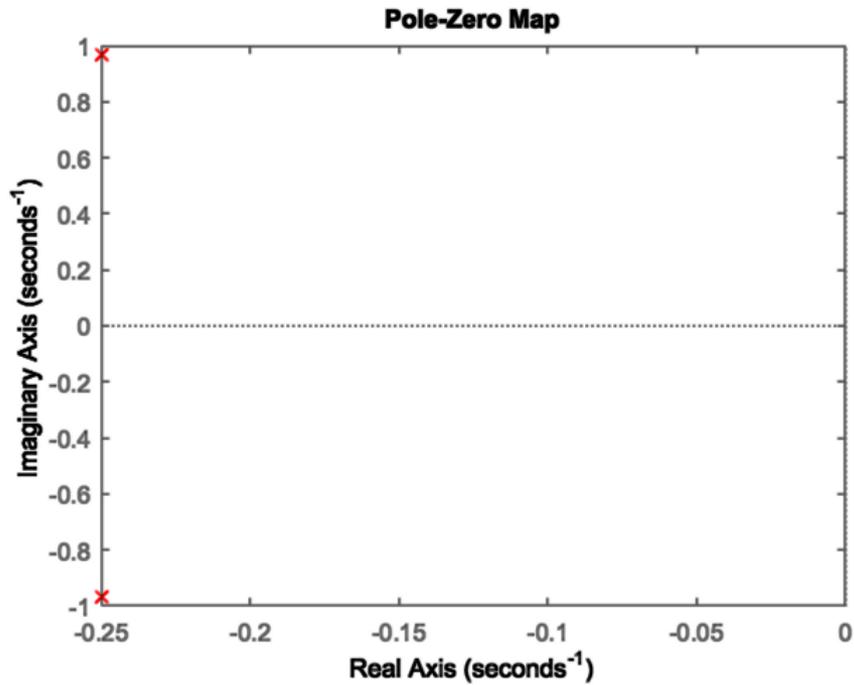
Exemplo 1



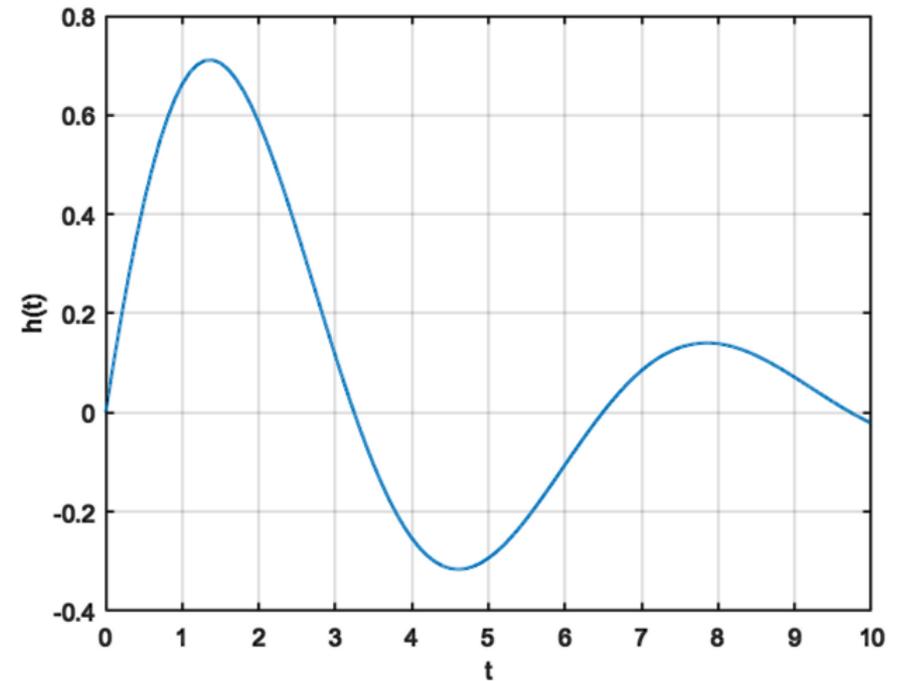
(b) $\zeta = 1$ (*critically damped*)



Exemplo 1

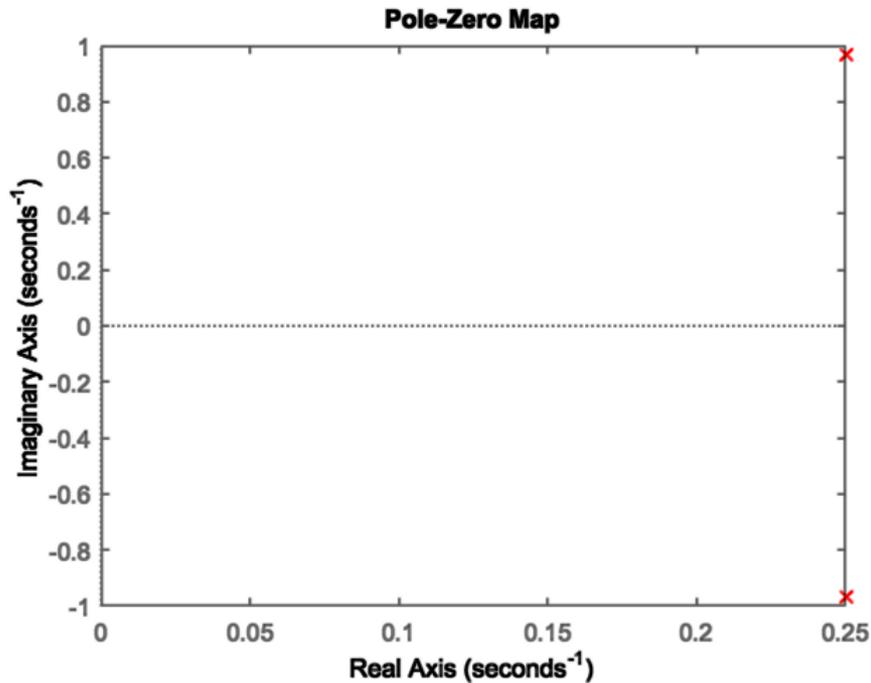


(c) $\zeta = 0.25$ (*underdamped*)

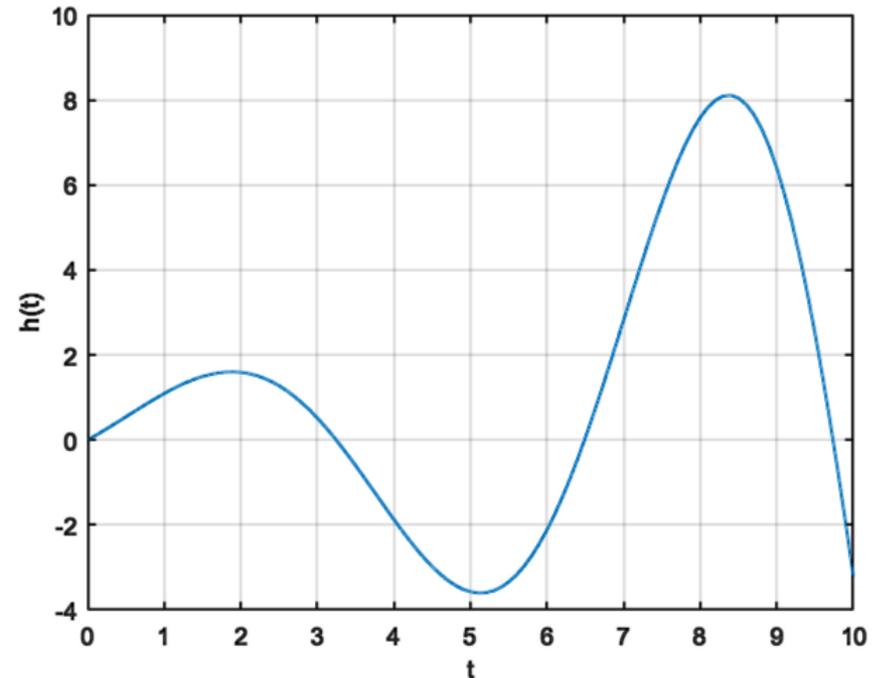


Exemplo 1

(c) $\zeta = -0.25$ (*unstable*)



Note que se um ou mais polos de $H(s)$ estão no semiplano direito do plano de frequências complexas $s = \alpha + j\omega$ ('x' no mapa de polos e zeros) a resposta ao impulso $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$ cresce exponencialmente com o transcorrer do tempo até um valor infinito, e, neste sentido, o sistema é instável porque sua saída não converge para uma resposta definida.



Na prática, o valor infinito é limitado de alguma forma pelo sistema. Se o sistema for analógico, o valor é limitado à sua tensão de alimentação ou à saturação da transmitância de algum dispositivo interno, situação que o sinal é limitado mas é completamente distorcido pela não linearidade da transmitância do sistema.

Se o sistema for digital, o valor é limitado pela ocorrência de *overflow* nos registradores do processador do sistema, conforme veremos adiante quando estudarmos a Transformada Z

Resposta transitória de sistemas de ordem maior que 2

A função de transferência $H(s)$ de qualquer um sistema LTI realizável de ordem maior que 2 é uma razão entre dois polinômios $N(s)$ e $D(s)$, da mesma forma que para sistemas de 1ª e 2ª ordem conforme vimos nos slides anteriores.

Portanto, uma $H(s)$ de ordem maior que 2 pode ser expandida em frações parciais através de (2), com a inclusão de termos na forma de (4) para representar polos complexos conjugados e com a inclusão de termos na forma de (6) para representar polos repetidos.

Assim, a resposta no tempo correspondente a cada termo que ocorre na expansão em frações parciais da $H(s)$ de um sistema de ordem maior que 2 não será diferente da resposta no tempo dos termos que ocorrem na expansão em frações parciais da $H(s)$ de sistemas de 1ª e 2ª ordem. A diferença na expansão em frações parciais da $H(s)$ de um sistema de ordem maior que 2 é que haverão múltiplos termos superpostos na composição da resposta, no entanto todos estes termos serão termos de 1ª e/ou 2ª ordem, cuja abordagem para obter a resposta no tempo é simples conforme já discutido em slides anteriores.

Da discussão acima infere-se que **a resposta transitória de um sistema LTI sempre ocorre na frequência dos polos de sua função de transferência $H(s)$, e que, conforme visto no Exemplo 1, em ocorrendo polos no semiplano direito do plano de frequências complexas $s = \alpha + j\omega$ a resposta transitória cresce exponencialmente com o transcorrer do tempo até um valor infinito, caracterizando o sistema como instável porque sua saída não converge para uma resposta definida.**

Estabilidade de sistemas LTI

Um sistema representado por uma função de transferência $H(s)$ é dito ser **estável** se todo sinal de entrada limitado em amplitude produzir um sinal de resposta também limitado (critério de estabilidade BIBO – *bounded input bounded output*). Um sinal $f(t)$ é limitado em amplitude se $|f(t)| < K < \infty$ para todos os instantes t sendo K uma constante de valor finito. Em outras palavras, um sinal é limitado em amplitude se sua magnitude tiver uma amplitude máxima finita. Interpretando essa definição em termos de polos da função de transferência, conforme discutimos nos slides anteriores, fica evidenciado que um circuito ou sistema é estável se e somente se todos os polos da função de transferência estiverem no semiplano esquerdo do plano $s = \alpha + j\omega$.

Por exemplo, conforme vimos nos slides anteriores, se algum polo estivesse no semiplano direito do plano $s = \alpha + j\omega$, a resposta conteria um termo exponencialmente crescente. Ou, se houvesse algum polo localizado no eixo imaginário $j\omega$ com multiplicidade $r = 2$ ou superior, a resposta correspondente no tempo conteria um termo ilimitado proporcional a $t^{r-1}u(t)$ para $r \geq 2$ (ver par 4 na tabela do slide 16 do Cap IV das notas de aula). E, finalmente, se houvesse um par de polos conjugados no eixo imaginário $j\omega$ com multiplicidade $r = 2$ (ver par 29 na tabela do slide 18 do Cap IV das notas de aula), a excitação do polo por uma entrada da mesma frequência ω produziria uma resposta correspondente proporcional a $t \cos(\omega t + \theta)$, que cresce com o transcorrer do tempo até um valor infinito – um comportamento instável, portanto, de acordo com o critério BIBO.

Em termos de circuitos elétricos, a violação do critério BIBO significa, por exemplo, a situação de uma fonte de corrente unitária em paralelo com um capacitor de 1 F, que produziria uma tensão proporcional a $tu(t)$. Essa tensão cresce sem limite e destruiria o capacitor e possivelmente também o circuito adjacente, se não houver algum dispositivo ou processo que limite a tensão.

Nem sempre a violação do critério BIBO, caracterizando o sistema como instável, é considerada uma situação operacional indesejável. Por exemplo, osciladores eletrônicos (ver <https://www.electronics-tutorials.ws/oscillator/oscillators.html>) são sistemas que, através de realimentação, deliberadamente estabelecem polos complexos conjugados sobre o eixo $j\omega$ para efeito de gerar um sinal senoidal na frequência dos polos sem haver explicitamente qualquer excitação ao sistema. A não necessidade de excitação de entrada em sistemas deste tipo é explicada pelo sempre presente ruído térmico (*white noise*) em todo e qualquer elemento ou estrutura condutora no hardware de dispositivos eletrônicos, o que excita o modo de variação na frequência dos polos, colocando o sistema em oscilação.

Por outro lado, em sistemas de geração e transmissão de energia elétrica, é indesejável que os polos da $H(s)$ do sistema estejam muito próximos ao eixo $j\omega$, porque isto acarreta um fator de amortecimento ζ próximo de zero, tornando lenta a resposta do fator $e^{-(\zeta\omega_o t)}$ na resposta global do sistema a qualquer eventual perturbação, o que causa longas oscilações de tensão na energia fornecida aos consumidores - ver equações (18) e (22).

Sistemas com atraso de transporte (*transport delay*)

Um sistema que impõe um atraso τ ao sinal por ele transportado, como por exemplo um *buffer* de dados na entrada de um sistema de telecomunicações na forma de uma fila FIFO (*first in first out*), é modelado a partir da propriedade 11 na tabela do slide 14 do Cap IV das notas de aula, resultando na função de transferência:

$$H(s) = e^{-\tau s} \quad (29)$$

Ocorre que a $H(s)$ definida por (29) não é uma razão entre dois polinômios $N(s)$ e $D(s)$, o que inviabiliza determinar seus polos e zeros, inviabiliza a expansão em frações parciais e inviabiliza determinar a equação diferencial correspondente no domínio tempo para efeito de implementação em hardware analógico. Uma possível solução é reescrever (29) na forma

$$H(s) = e^{-\tau \cdot s} = \frac{e^{-\frac{\tau}{2} \cdot s}}{e^{\frac{\tau}{2} \cdot s}} \quad (30)$$

e expandir o numerador e denominador de (30) em série de potências:

$$e^{-\frac{\tau}{2} \cdot s} \text{ series, } s \rightarrow 1 - \frac{\tau \cdot s}{2} + \frac{\tau^2 \cdot s^2}{8} - \frac{\tau^3 \cdot s^3}{48} + \frac{\tau^4 \cdot s^4}{384} - \frac{\tau^5 \cdot s^5}{3840} \quad (31)$$

$$e^{\frac{\tau}{2} \cdot s} \text{ series, } s \rightarrow 1 + \frac{\tau \cdot s}{2} + \frac{\tau^2 \cdot s^2}{8} + \frac{\tau^3 \cdot s^3}{48} + \frac{\tau^4 \cdot s^4}{384} + \frac{\tau^5 \cdot s^5}{3840} \quad (32)$$

Na prática, é usual truncar a expansão em série aos primeiros termos, resultando assim aproximações de 1ª e 2ª ordem:

$$H1(s) = \frac{1 - \frac{\tau \cdot s}{2}}{1 + \frac{\tau \cdot s}{2}} \quad (33)$$

$$H2(s) = \frac{1 - \frac{\tau \cdot s}{2} + \frac{\tau^2 \cdot s^2}{8}}{1 + \frac{\tau \cdot s}{2} + \frac{\tau^2 \cdot s^2}{8}} \quad (34)$$

Exemplo 2

Exemplo 2: Considere um sistema com atraso de transporte definido pela função de transferência abaixo:

$$G(s) = \frac{e^{-10 \cdot s}}{5 \cdot s + 1}$$

Pede-se: Expressar $G(s)$ na forma de razão entre dois polinômios $N(s)$ e $D(s)$ usando aproximações por expansão em série de potências de **(a)** 1ª ordem e **(b)** 2ª ordem.

Solução: As aproximações de 1ª e 2ª ordem para o atraso de transporte $H(s) = e^{-10s}$ são obtidas de (33) e (34) com $\tau = 10$:

$$H1(s) = e^{-10 \cdot s} = \frac{1 - \frac{10 \cdot s}{2}}{1 + \frac{10 \cdot s}{2}} \quad H2(s) = e^{-10 \cdot s} = \frac{1 - \frac{10 \cdot s}{2} + \frac{10^2 \cdot s^2}{8}}{1 + \frac{10 \cdot s}{2} + \frac{10^2 \cdot s^2}{8}}$$

(a) Substituindo $H1(s)$ em $G(s)$ temos:

$$G1(s) = \frac{1 - \frac{10 \cdot s}{2}}{1 + \frac{10 \cdot s}{2}} \cdot \frac{1}{5 \cdot s + 1}$$

Simplificando:

$$G1(s) = \frac{5 \cdot s - 1}{(5 \cdot s + 1)^2}$$

Colocando na forma $N(s)/D(s)$:

$$G1(s) = \frac{5 \cdot s - 1}{25 \cdot s^2 + 10 \cdot s + 1}$$

Exemplo 2

(b) Substituindo $H_2(s)$ em $G(s)$ temos:

$$G_2(s) = \frac{1 - \frac{10 \cdot s}{2} + \frac{10^2 \cdot s^2}{8}}{1 + \frac{10 \cdot s}{2} + \frac{10^2 \cdot s^2}{8}} = \frac{5 \cdot s + 1}{5 \cdot s + 1}$$

Simplificando:

$$G_2(s) = \frac{25 \cdot s^2 - 10 \cdot s + 2}{(5 \cdot s + 1) \cdot (25 \cdot s^2 + 10 \cdot s + 2)}$$

Colocando na forma $N(s)/D(s)$:

$$G_2(s) = \frac{25 \cdot s^2 - 10 \cdot s + 2}{125 \cdot s^3 + 75 \cdot s^2 + 20 \cdot s + 2}$$

Diagramas de Bode

Dado um sistema caracterizado por sua função de transferência $H(s)$, frequentemente estaremos interessados na sua resposta em frequência sob regime permanente senoidal, quando o sistema é excitado por uma cossenoide de frequência ω e $H(s)$ se torna $H(j\omega)$, conforme Cap I das notas de aula em que discutimos o conceito de função de transferência e apresentamos no slide 31 os gráficos de módulo e fase da $H(j\omega)$ de um amplificador hipotético, sendo $\omega = 2\pi f$. Nesta situação, é conveniente usar uma escala logarítmica em dB (decibel) para plotar a magnitude da resposta de frequência. A razão principal para tanto é que a magnitude da resposta em frequência pode ter uma ampla faixa dinâmica, cobrindo muitas ordens de magnitude, conforme discutimos no Cap I. Para certos sistemas, algumas frequências ω podem ser amplificadas por um fator de 1000, enquanto outras podem ser atenuadas por um fator de 10^{-4} . Outra razão é que, usando uma escala em dB, podemos adicionar, em vez de multiplicar, as magnitudes da função de transferência de blocos em cascata. Para um sistema com entrada $x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\}$, saída $y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(\omega)\}$ e função de transferência $H(j\omega) = Y(\omega)/X(\omega)$, define-se o ganho em dB do sistema \times frequência ω através da relação

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} |H(j\omega)| = 20 \log_{10} \frac{|Y(\omega)|}{|X(\omega)|} \quad (35)$$

Note que quando o sistema é excitado por uma cossenoide de frequência ω e $H(s)$ se torna $H(j\omega)$, substitui-se a Transformada de Laplace $\mathcal{L}\{\cdot\}$ pela Transformada de Fourier $\mathcal{F}\{\cdot\}$, dado que $\alpha = 0$ em $s = \alpha + j\omega$ nesta situação. A tabela abaixo mostra para alguns ganhos G típicos o seu valor G_{dB} expresso em dB.

$G = 10^{\frac{G_{\text{dB}}}{20}}$	$G_{\text{dB}} = 20 \log_{10} G$
0	$-\infty$ dB
0.01	-40 dB
0.1	-20 dB
1	0 dB
10	20 dB
100	40 dB
1000	60 dB

Diagramas de Bode – Exemplo 3

Além de expressar a magnitude da resposta de frequência em uma escala logarítmica em dB (decibel), adicionalmente, é também conveniente usar uma escala logarítmica para a frequência $\omega = 2\pi f$, porque assim a curva do gráfico da resposta em frequência tem o seu eixo de domínio ω estendido ao longo de uma ampla faixa de frequência, o que permite identificar comportamentos críticos eventuais, como ressonâncias, que ficariam ocultos caso esta abordagem não fosse utilizada.

Um **gráfico de Bode** é a combinação de um gráfico de magnitude e um gráfico de fase usando escalas logarítmicas para a magnitude e para a frequência $\omega = 2\pi f$, sendo usada uma escala linear (em radianos ou graus) para a fase. Somente frequências positivas são normalmente consideradas. Como já mencionado acima, o gráfico de Bode é bastante útil, pois a resposta em frequência global de sistemas em cascata é simplesmente a soma gráfica dos diagramas de Bode dos sistemas individuais. Em particular, essa propriedade é usada para esboçar manualmente um gráfico Bode de uma função de transferência racional na forma de polo-zero (ver equação (1)), considerando cada fator de primeira ordem correspondente a um polo ou a um zero como um sistema individual com seu próprio gráfico de Bode.

Exemplo 3: Considere um sistema de 1ª ordem definido pela função de transferência:

$$H(s) = \frac{1}{s+2} \quad (36)$$

Pede-se: Plote os gráficos de Bode da magnitude $|H(j\omega)|$ em dB e da fase $\angle H(j\omega)$ da resposta em frequência deste sistema.

Solução: Substituindo s por $j\omega$ temos:

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 2} \quad (37)$$

É conveniente para efeito de análise reescrever (37) como o produto de dois fatores: um fator que é um ganho simples e um fator que é uma função de transferência de primeira ordem com ganho unitário (0 dB) em DC ($\omega = 0$):

$$H(j\omega) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\left(\frac{j\omega}{2}\right) + 1} \right) \quad (38)$$

Diagramas de Bode – Exemplo 3

Note que para a frequência $\omega = 2$ [rad/s] (denominada de frequência de quebra ou frequência de canto – *break frequency* ou *corner frequency*) o módulo do fator $\left(\frac{1}{\frac{j\omega}{2}+1}\right)$ em (38) resulta $\left|\frac{1}{j+1}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ou, de (35), -3dB . Portanto, o ganho $|H(j\omega)|$ $_{\text{dB}}$ sofre uma queda de 3dB no *break frequency* em relação ao ganho em DC ($\omega = 0$). O gráfico de Bode de magnitude para o sistema caracterizado por (38) é

$$\begin{aligned} |H(j\omega)| \bigg|_{\text{dB}} &= 20 \log_{10} |H(j\omega)| = 20 \log_{10} \left| \frac{1}{2} \right| + 20 \log_{10} \left| \frac{1}{\frac{j\omega}{2} + 1} \right| \text{ dB} \\ &= -20 \log_{10} 2 - 20 \log_{10} \left| \frac{j\omega}{2} + 1 \right| \text{ dB} \\ &= -6 \text{ dB} - 20 \log_{10} \left| \frac{j\omega}{2} + 1 \right| \text{ dB} \end{aligned} \quad (39)$$

Note de (39) que para frequências muito abaixo do *break frequency* em $\omega = 2$ [rad/s] (i.e., para $\omega \ll 2$), a função de transferência $|H(j\omega)|$ $_{\text{dB}}$ resulta

$$20 \log_{10} |H(j\omega)| \approx -6 \text{ dB} - 20 \log_{10} |1| \text{ dB} = -6 \text{ dB} \quad (40)$$

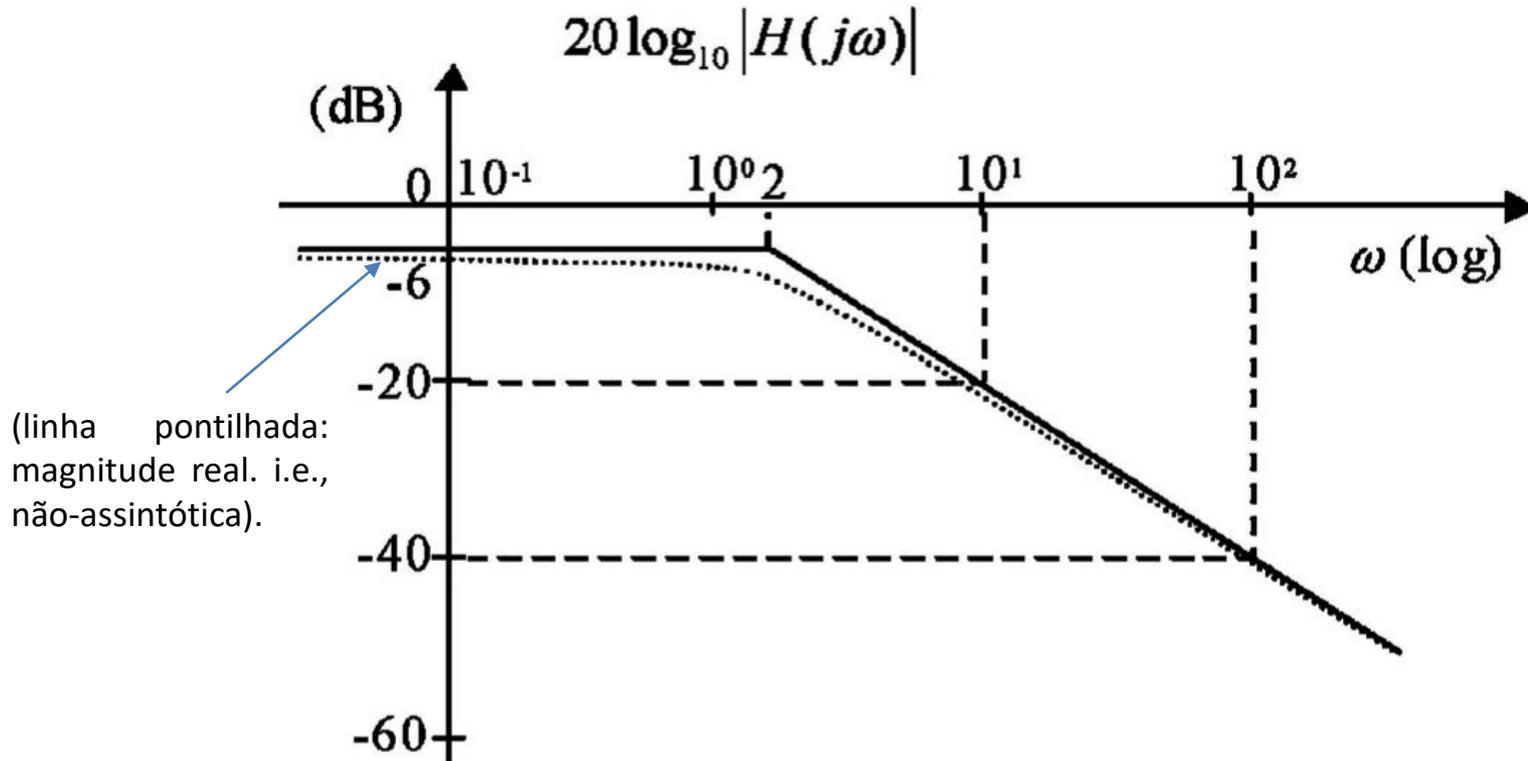
E para frequências muito acima do *break frequency* em $\omega = 2$ [rad/s] (i.e., para $\omega \gg 2$), a função de transferência $|H(j\omega)|$ $_{\text{dB}}$ resulta

$$\begin{aligned} 20 \log_{10} |H(j\omega)| &\approx -6 \text{ dB} - 20 \log_{10} \left| \frac{\omega}{2} \right| \text{ dB} \\ &= -6 \text{ dB} - 20 \log_{10} |\omega| \text{ dB} + 20 \log_{10} 2 \text{ dB} \\ &= -20 \log_{10} |\omega| \text{ dB}. \end{aligned} \quad (41)$$

Note que para $\omega = 10$ [rad/s] a equação (41) resulta -20 dB, para $\omega = 100$ [rad/s] resulta -40 dB, e assim por diante. A inclinação da reta assintótica representada por (41) é, portanto, -20 dB por década de frequência (uma década é um aumento de um fator de 10).

Diagramas de Bode – Exemplo 3

A reta assintótica de declividade -20dB/década representada por (41) e a reta assintótica de declividade 0dB/década representada por (40) interceptam-se no *break frequency* em $\omega = 2$ [rad/s]. Esta condição estabelece pontos de amarração no gráfico assintótico de $|H(j\omega)|$ em dB, permitindo que se possa esboçá-lo conforme abaixo:



Diagramas de Bode – Exemplo 3

De (38), o gráfico de Bode para a fase $\angle H(j\omega)$, tem como base a equação:

$$\angle H(j\omega) = \angle \frac{1}{2} \frac{1}{j\omega/2 + 1} = \angle \frac{1}{j\omega/2 + 1} = \arctan\left(\frac{-\frac{\omega}{2}}{1}\right) \quad (42)$$

A inspeção de (42) mostra que $\angle H(j\omega) = 0$ [rad] para $\omega = 0$ [rad/s] e que $\angle H(j\omega) = \pi$ [rad] para $\omega = \infty$ [rad/s]. Usando estes dois pontos e o *break frequency* em $\omega = 2$ [rad/s] para aproximar $\angle H(j\omega)$ através de 3 retas assintóticas (com escala logarítmica no domínio frequência) temos:

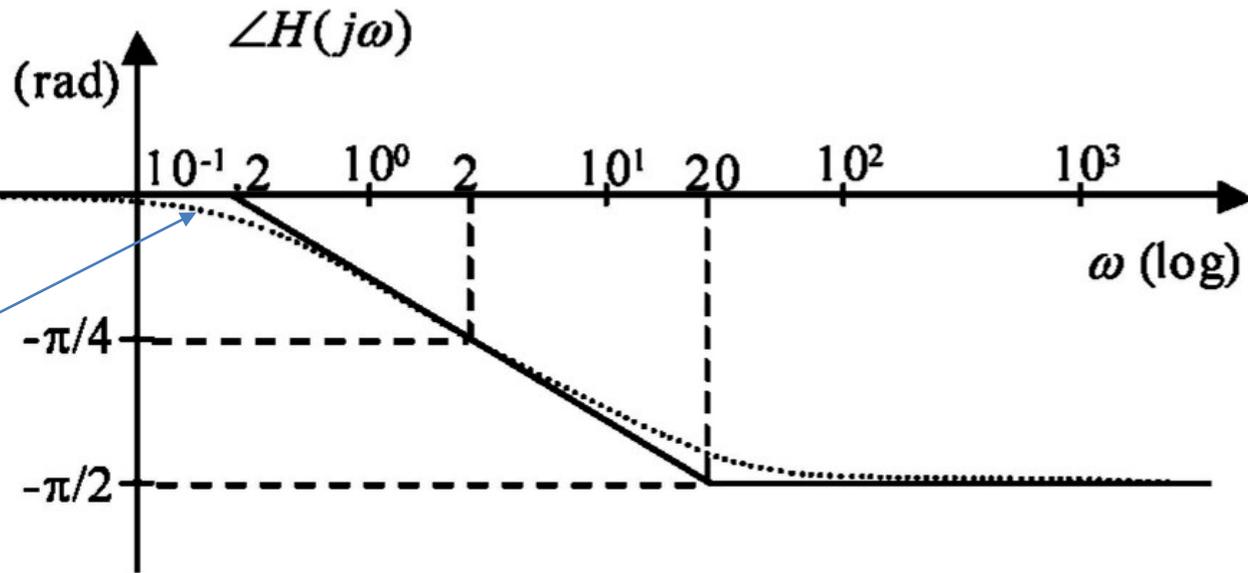
$$\angle H(j\omega) \cong \begin{cases} 0, & \omega \leq \frac{2}{10} \\ -\frac{\pi}{4} \left[\log_{10}\left(\frac{\omega}{2}\right) + 1 \right], & \frac{2}{10} < \omega < 20 \\ -\frac{\pi}{2}, & \omega \geq 20 \end{cases} \quad (43)$$

A aproximação da fase $\angle H(j\omega)$ dada por (43) deve ser interpretada conforme segue:

- Para frequências inferiores a uma década abaixo do *break frequency*, a fase de $H(j\omega)$ é uma reta assintótica de valor 0 [rad] e de declividade 0 [rad/década].
- Para frequências superiores a uma década acima do *break frequency*, a fase de $H(j\omega)$ é uma reta assintótica de valor $-\pi/2$ [rad] e de declividade 0 [rad/década].
- No intervalo de frequências entre uma década abaixo a uma década acima do *break frequency* a fase de $H(j\omega)$ é uma reta assintótica que varia de 0 [rad] a $-\pi/2$ [rad] com uma declividade de $-\pi/4$ [rad/década].

A figura no próximo slide mostra o gráfico de $\angle H(j\omega)$, graficamente gerada tendo como base a aproximação assintótica dada pela equação (43).

Diagramas de Bode – Exemplo 3

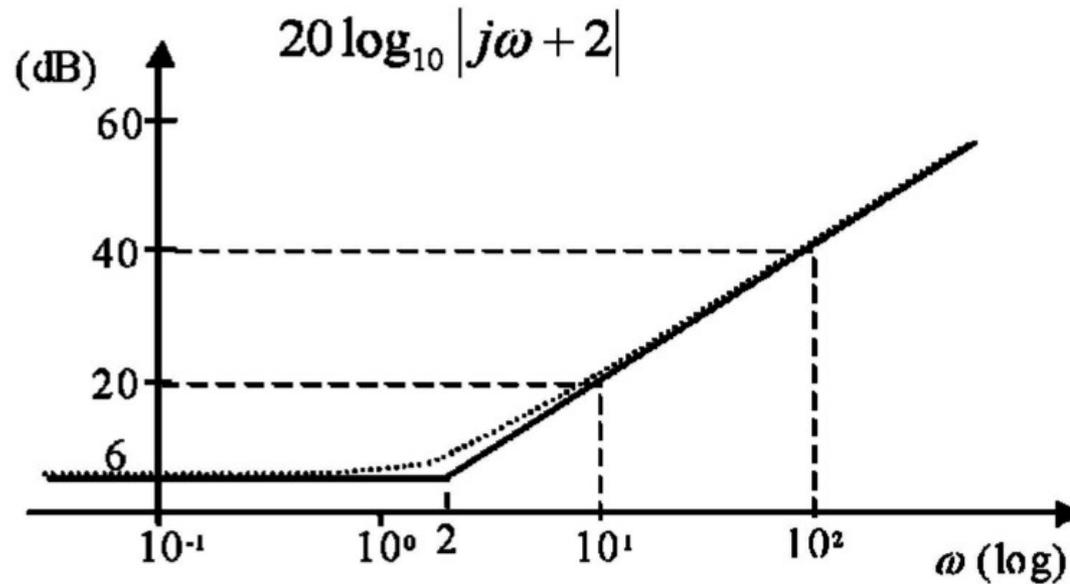


(linha pontilhada: fase real, i.e., não-assintótica).

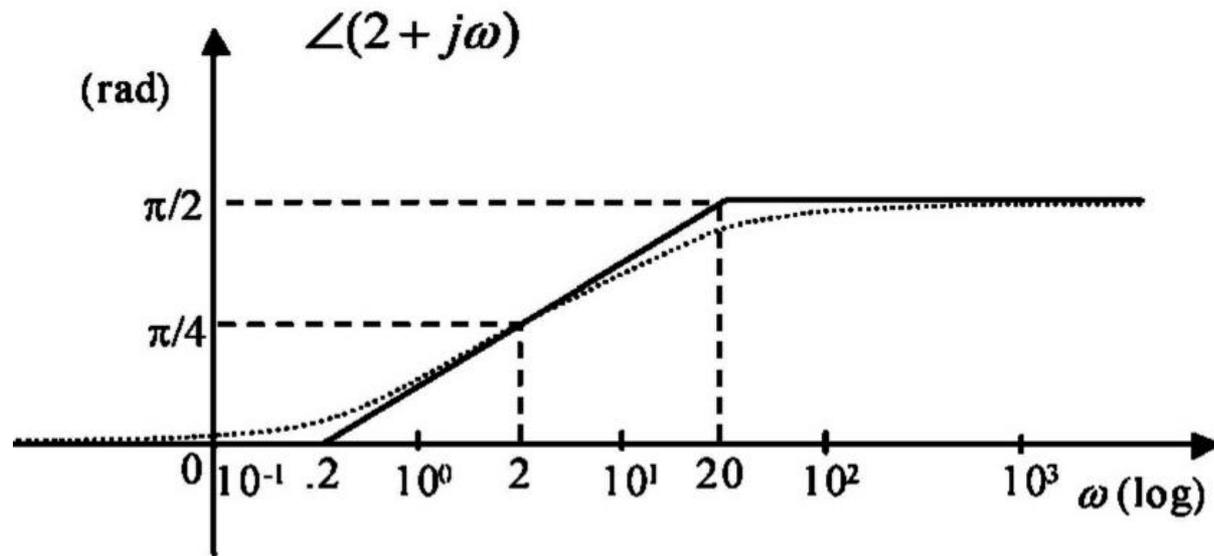
$$\angle H(j\omega) \cong \begin{cases} 0, & \omega \leq \frac{2}{10} \\ -\frac{\pi}{4} \left[\log_{10} \left(\frac{\omega}{2} \right) + 1 \right], & \frac{2}{10} < \omega < 20 \\ -\frac{\pi}{2}, & \omega \geq 20 \end{cases} \quad (43)$$

Diagramas de Bode – Exemplo 3

Observe que para um sistema com $H(s) = s + 2$ (função de transferência inversa do sistema dado no enunciado), os gráficos de Bode da magnitude $|H(j\omega)|$ em dB e da fase $\angle H(j\omega)$ da resposta em frequência para este sistema são simplesmente e respectivamente os mesmos gráficos de magnitude e fase resultantes para o sistema dado no enunciado (ver gráficos nos slides 22 e 24) mas girados em torno do eixo da frequência ω , conforme mostrado abaixo e no slide que segue:



Diagramas de Bode – Exemplo 3



Diagramas de Bode – Exemplo 4

Exemplo 4: Considere um sistema de 2ª ordem definido pela função de transferência:

$$H(s) = \frac{s + 100}{(s^2 + 11s + 10)} = 10 \frac{\frac{s}{100} + 1}{(s + 1)\left(\frac{s}{10} + 1\right)} \quad (44)$$

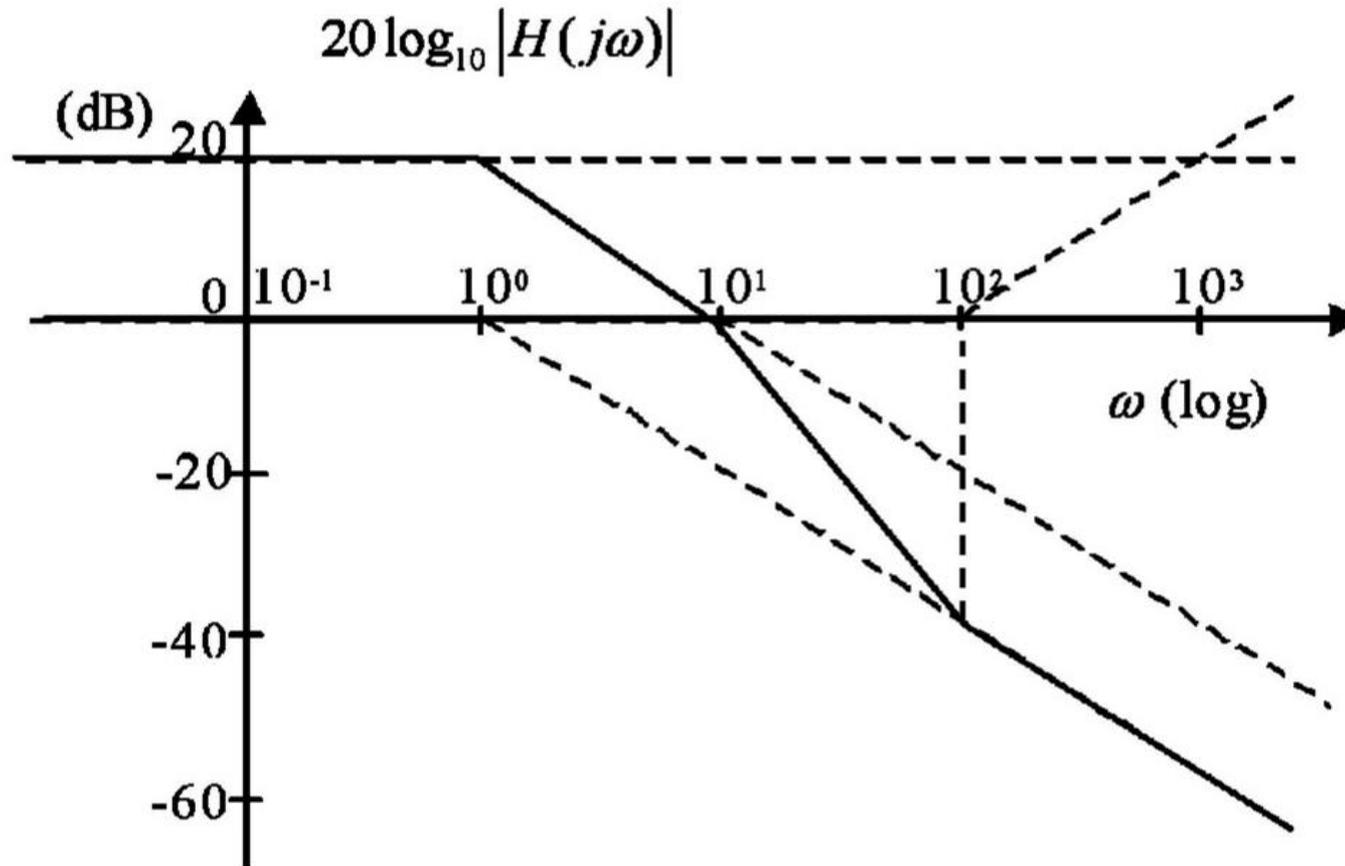
Pede-se: Plote os gráficos de Bode da magnitude $|H(j\omega)|$ em dB e da fase $\angle H(j\omega)$ da resposta em frequência deste sistema.

Solução: Substituindo s por $j\omega$ e reescrevendo (44) como o produto de dois fatores: um fator que é um ganho simples e um fator composto por fatores de 1ª ordem na forma $\left(\frac{j\omega}{\omega_b} + 1\right)$ com ganho unitário (0 dB) em DC ($\omega = 0$), sendo ω_b o *break frequency* de cada fator de 1ª ordem:

$$H(j\omega) = 10 \frac{\frac{j\omega}{100} + 1}{(j\omega + 1)\left(\frac{j\omega}{10} + 1\right)} \quad (45)$$

O conjunto de *break frequencies* de (45) é $\{1, 10 \text{ e } 100\}$ [rad/s]. Para plotar o gráfico $|H(j\omega)|$ em dB podemos esboçar as assíntotas de cada fator de primeira ordem da equação (45) no mesmo gráfico de magnitude (como linhas tracejadas), conforme fizemos na solução do Exemplo 3. A seguir, adiciona-se as assíntotas representadas pelas linhas tracejadas, conforme mostra a figura no próximo slide, construindo o conjunto de retas interligadas representadas pela linha cheia. Este conjunto resultante de retas interligadas representadas pela linha cheia é o gráfico de Bode assintótico para a curva de magnitude da resposta em frequência deste sistema.

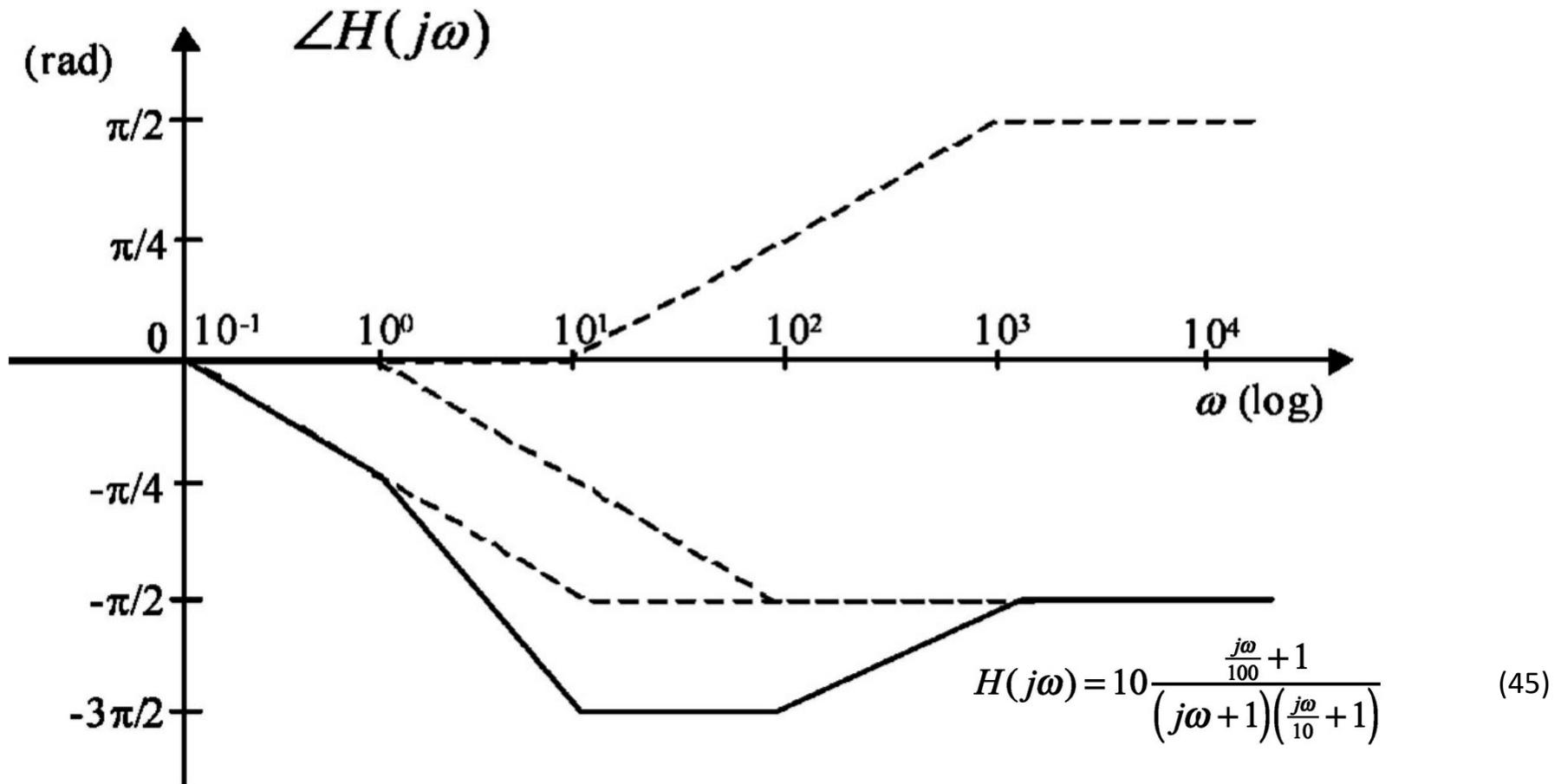
Diagramas de Bode – Exemplo 4



$$H(j\omega) = 10 \frac{\frac{j\omega}{100} + 1}{(j\omega + 1)(\frac{j\omega}{10} + 1)} \quad (45)$$

Diagramas de Bode – Exemplo 4

De mesma forma, para o gráfico da fase $\angle H(j\omega)$ podemos esboçar as assíntotas de fase (ver equação (43)) para cada fator de primeira ordem na equação (45), conforme fizemos na solução do Exemplo 3, plotando todas as assíntotas no mesmo gráfico de fase (como linhas tracejadas), conforme mostra a figura abaixo. A seguir, adiciona-se as assíntotas representadas pelas linhas tracejadas, construindo o conjunto de retas interligadas representadas pela linha cheia. Este conjunto resultante de retas interligadas representadas pela linha cheia é o gráfico de Bode assintótico para a curva de fase da resposta em frequência deste sistema.



Exemplo 5: Refaça o Exemplo 4 utilizando a função `bode()` do software Matlab.

Solução: A função `bode()` é usada conforme abaixo

```
>> help bode
```

```
bode Bode frequency response of dynamic systems.
```

```
bode(SYS) draws the Bode plot of the dynamic system SYS. The frequency range and number of points are chosen automatically.
```

```
bode(SYS,{WMIN,WMAX}) draws the Bode plot for frequencies between WMIN and WMAX in radians/TimeUnit (relative to the time units specified in SYS.TimeUnit, the default being seconds).
```

```
bode(SYS,W) uses the vector W of frequencies (in radians/TimeUnit) to evaluate the frequency response. See LOGSPACE to generate logarithmically spaced frequency vectors.
```

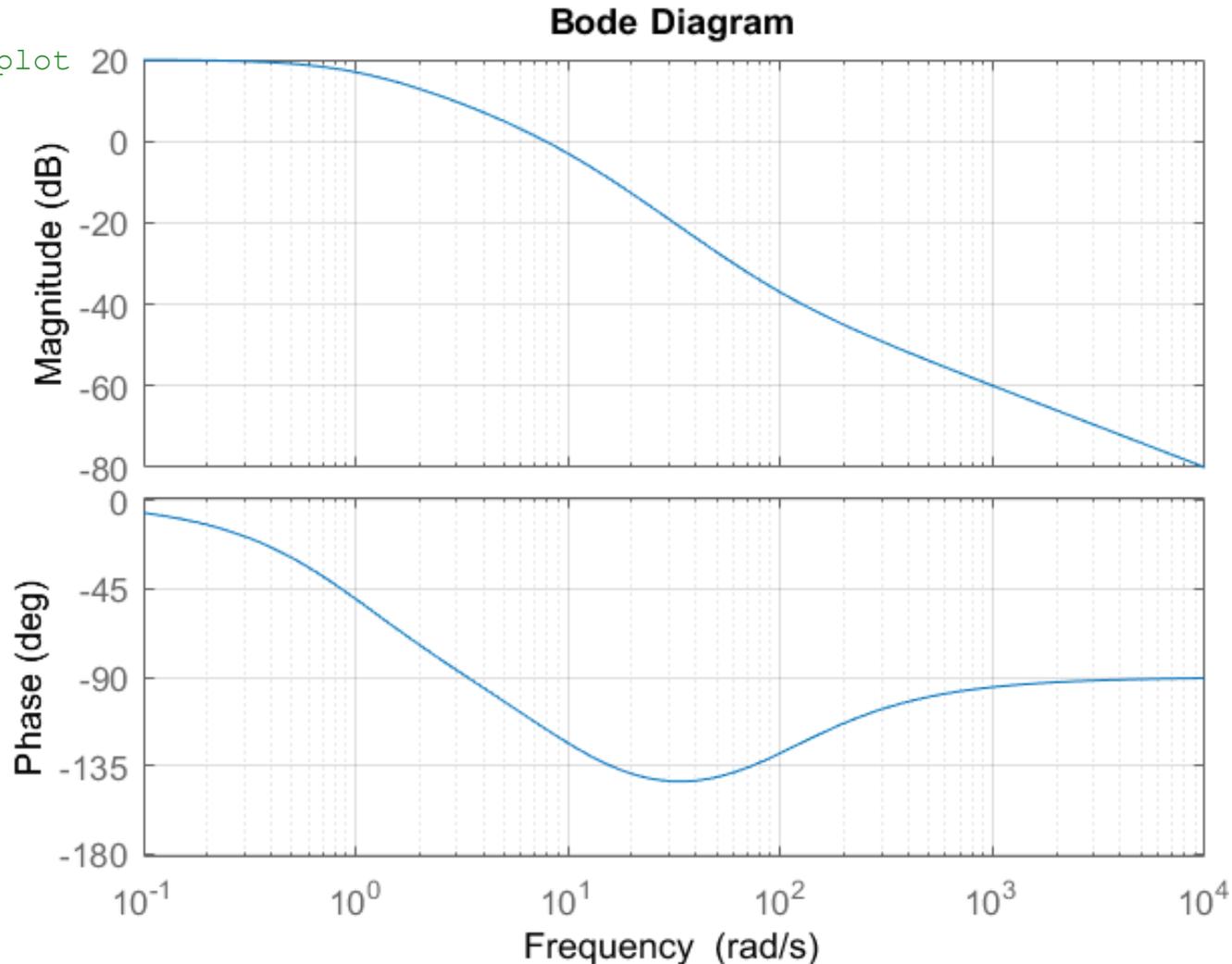
```
[MAG,PHASE] = bode(SYS,W) and [MAG,PHASE,W] = bode(SYS) return the response magnitudes and phases in degrees (along with the frequency vector W if unspecified). No plot is drawn on the screen.
```

```
If SYS has NY outputs and NU inputs, MAG and PHASE are arrays of size [NY NU LENGTH(W)] where MAG(:, :, k) and PHASE(:, :, k) determine the response at the frequency W(k). To get the magnitudes in dB, type MAGDB = 20*log10(MAG). The frequencies W are in rad/TimeUnit.
```

```
>>
```

Diagramas de Bode – Exemplo 5

```
% bodeplot.m Bode plot de H(s)
num=[1 100]; % numerador de H(s)
den=[1 11 10]; % denominador de H(s)
sys=tf(num,den); % define sistema sys a partir de H(s)
w=logspace(-1,4,200); % gera 200 pontos no dominio frequencia
%logaritmico entre 10^-1 rad/s e 10^4 rad/s
bode(sys,w) % Bode plot
grid on; % coloca grid no plot
```



Diagramas de Bode – Exemplo 6

Exemplo 6: Considere um sistema de 2ª ordem definido pela função de transferência:

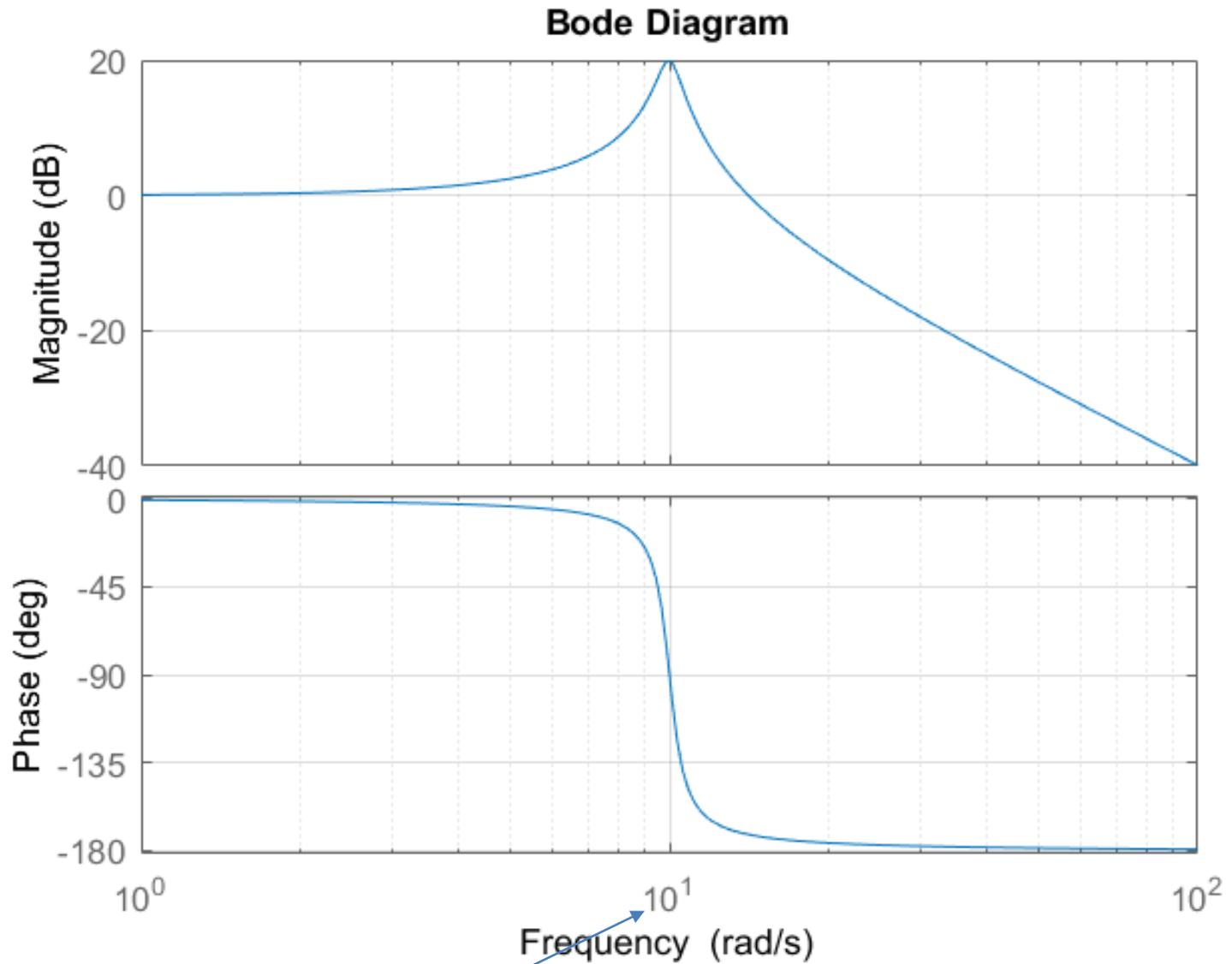
$$H(s) = \frac{100}{s^2 + s + 100} = \frac{100}{[s - (-0.5 + j9.987)][s - (-0.5 - j9.987)]}$$

Pede-se: Plote os gráficos de Bode da magnitude $|H(j\omega)|$ $\Big|_{\text{dB}}$ e da fase $\angle H(j\omega)$ da resposta em frequência deste sistema utilizando a função `bode()` do software Matlab.

Solução:

```
% bodeplot.m Bode plot de H(s)
num=[100]; % numerador de H(s)
den=[1 1 100]; % denominador de H(s)
sys=tf(num,den); % define sistema sys a partir de H(s)
w=logspace(0,2,200); % gera 200 pontos no dominio frequencia
%logaritmico entre 10^0 rad/s e 10^2 rad/s
bode(sys,w) % Bode plot
grid on; % coloca grid no plot
```

Diagramas de Bode – Exemplo 6



$$H(s) = \frac{100}{s^2 + s + 100} = \frac{100}{[s - (-0.5 + j9.987)][s - (-0.5 - j9.987)]}$$

Diagramas de Bode – Exemplo 7

Exemplo 7: Considere um sistema de 2ª ordem definido pela função de transferência:

$$H(s) = \frac{\omega_o^2}{s^2 + 2\zeta\omega_o s + \omega_o^2} \quad (46)$$

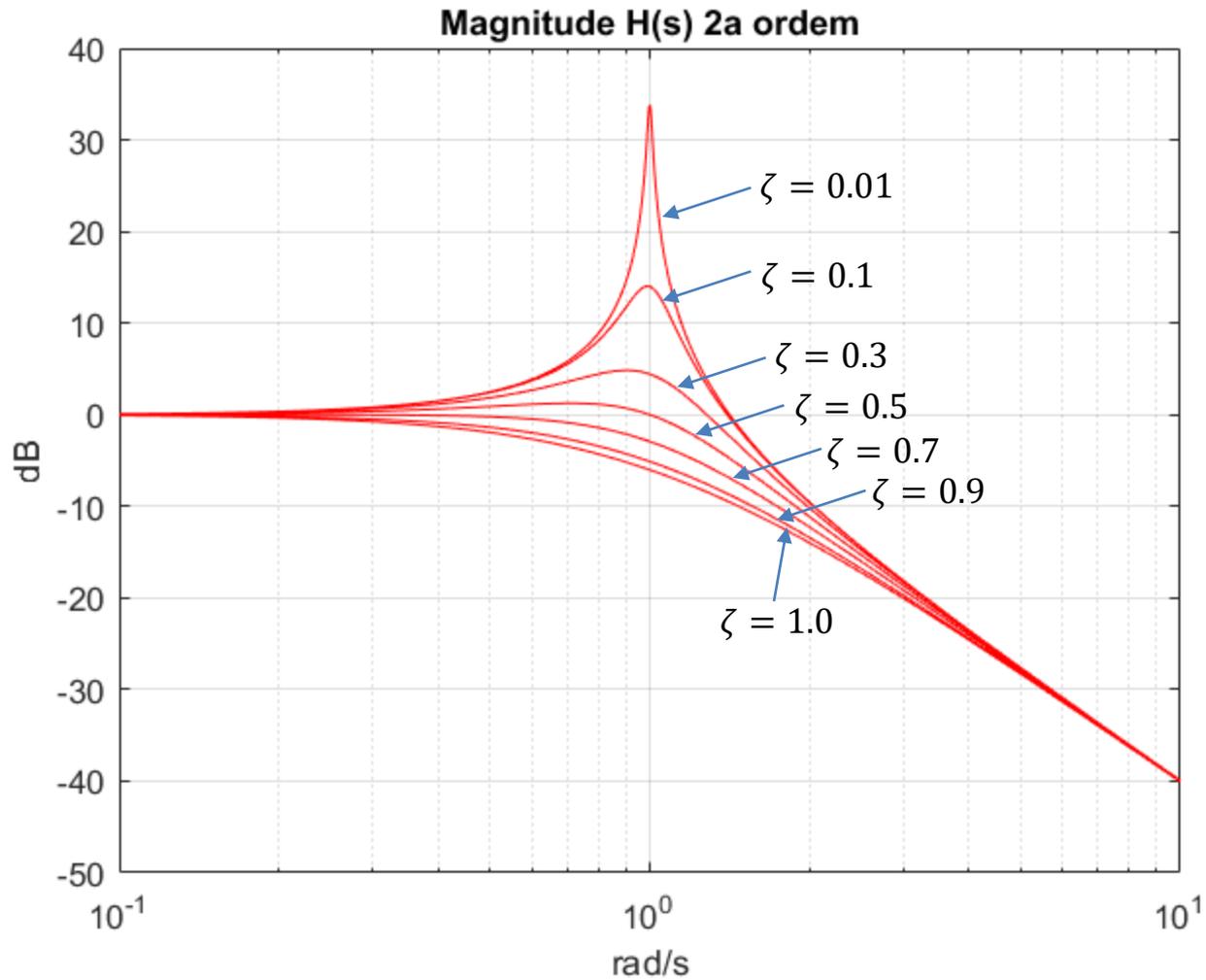
Pede-se: Para a frequência de ressonância $\omega_o = 1$ [rad/s] e para um conjunto de valores para o fator de amortecimento ζ que inicia em 0.01, vai de 0.1 a 0.9 em passos de .2 e termina em 1, plote os gráficos de Bode da magnitude $|H(j\omega)|$ [dB] e da fase $\angle H(j\omega)$ da resposta em frequência deste sistema utilizando a função `bode()` do software Matlab.

Solução: Ver próximo slide.

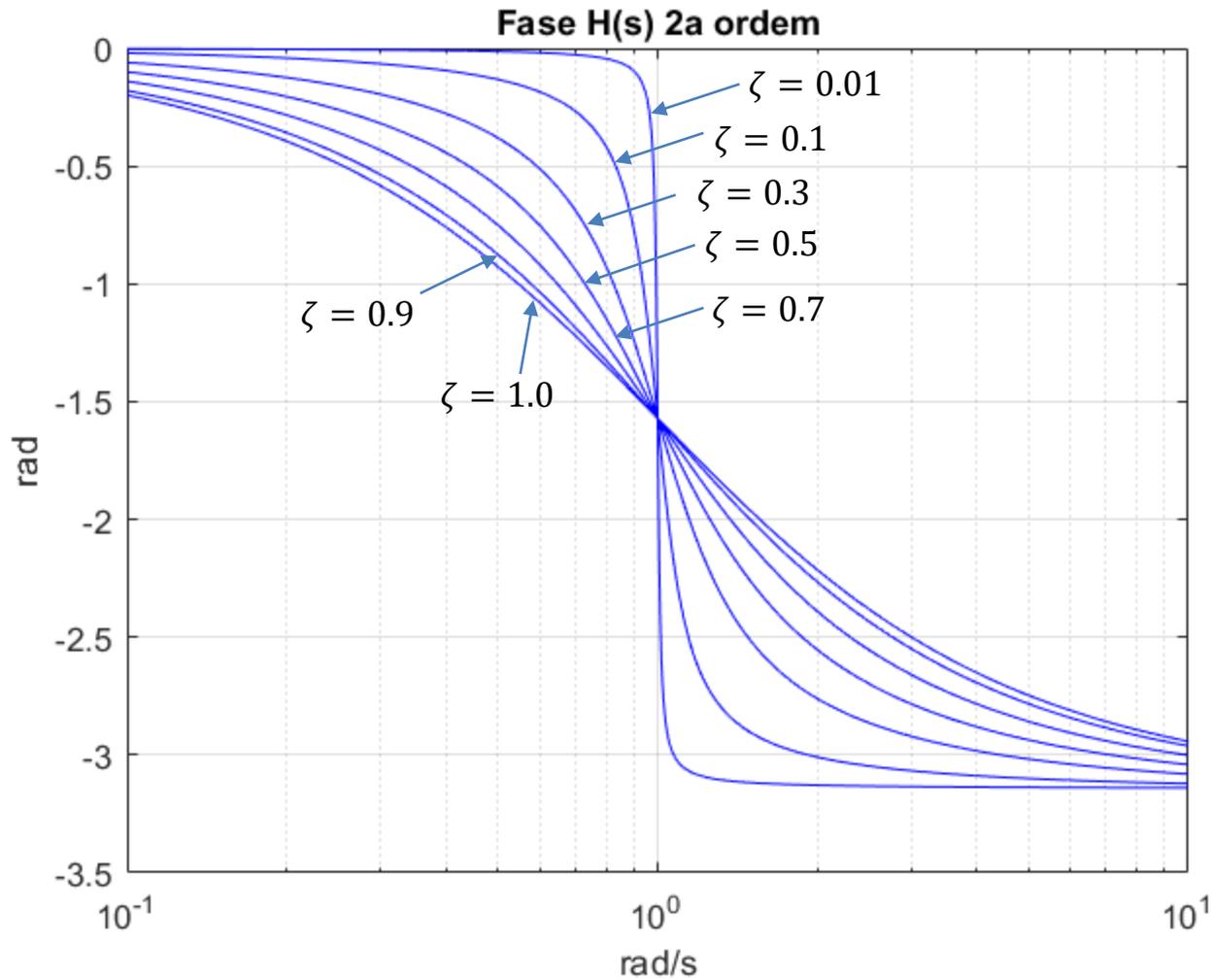
Diagramas de Bode – Exemplo 7

```
% BodeZeta2aOrdem.m: script p/ Bode plot da H(s) de sistemas de 2a ordem
% com diferentes fatores de amortecimento zeta
wo=1; %frequencia de ressonancia
zeta=[0.01 [.1:.2:0.9] 1] % valores do fator de amortecimento zeta {0.01, 0.1 a 0.9 em
% passos de .2, 1}
num=wo^2; %numerador da funcao de transferencia
w=logspace(-1,1,1000); % gera 1000 pontos no dominio frequencia logaritmico entre 10^-1
% rad/s e 10^1 rad/s
for k=1:length(zeta) % loop que atribui os valores de zeta ao denominador da funcao de
% transferencia e executa bode() p/ cada um deles
    den(k,:)= [1 2*wo*zeta(k) wo^2]; %atribui os valores de zeta ao denominador da função
% de transferencia
    [mag(:,k), ph(:,k)]=bode(num,den(k,:),w); % executa bode(), e gera as magnitudes e
% fases (em graus) sem plotar
end
figure(1) % magnitude serah mostrada na figura 1
semilogx(w,20*log10(mag),'-r') % plota magnitude - mesmo que plot() exceto que eh usada
% uma escala log p/ o eixo x. '-r': LineSpec p/ linha solida na cor vermelha.
title('Magnitude H(s) 2a ordem'); % titulo
ylabel('dB'); % label eixo y
xlabel('rad/s') % label eixo x
grid on; % coloca grade na figura 1
figure(2) % fase serah mostrada na figura 2
semilogx(w,pi*ph/180,'-b') % plota fase em radianos - mesmo que plot() exceto que eh
% usada uma escala log p/ o eixo x. '-b': LineSpec p/ linha solida na cor azul.
title('Fase H(s) 2a ordem'); % titulo
ylabel('rad'); % label eixo y
xlabel('rad/s') % label eixo x
grid on; % coloca grade na figura 2
```

Diagramas de Bode – Exemplo 7



Diagramas de Bode – Exemplo 7



Homework 1

Considere um sistema de 2ª ordem definido pela função de transferência:

$$H(s) = \frac{\omega_o^2}{s^2 + 2\zeta\omega_o s + \omega_o^2}$$

Pede-se: Para a frequência de ressonância $\omega_o = 1$ [rad/s] e para um conjunto de valores para o fator de amortecimento ζ que inicia em 0.01, vai de 0.1 a 0.9 em passos de .2 e termina em 1, desenhe manualmente o mapa de polos e zeros de $H(s)$. Compare cada mapa de polos e zeros obtido para cada fator de amortecimento ζ com as respectivas curvas para $|H(j\omega)|_{\text{dB}}$ e $\angle H(j\omega)$ obtidas no Exemplo 7. Discuta analiticamente a relação entre os mapas de polos e zeros e as respectivas curvas para $|H(j\omega)|_{\text{dB}}$ e $\angle H(j\omega)$, tendo como base da discussão o fator de amortecimento ζ .

Homework 2

Considere um sistema de 2ª ordem com atraso de transporte definido pela função de transferência abaixo:

$$G(s) = \frac{100e^{-10s}}{s^2 + s + 100}$$

Pede-se: **(a)** Expressar $G(s)$ na forma de razão entre dois polinômios $N(s)$ e $D(s)$ usando aproximações por expansão em série de potências de 2ª ordem **(b)** Plote o mapa de polos e zeros da $G(s)$ aproximada por expansão em série de potências de 2ª ordem.

Operation	Formula
Rectangular to Polar Conversion	$z = x + jy = re^{j\theta}$ <p>where $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ and $\theta = \arctan(y/x)$</p>
Polar to Rectangular Conversion	$z = re^{j\theta} = r [\cos(\theta) + j\sin(\theta)] = x + jy$ <p>where $x = r \cos(\theta)$ and $y = r \sin(\theta)$</p>
Add: $z_3 = z_1 + z_2$	$(x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$
Subtract: $z_3 = z_1 - z_2$	$(x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$
Multiply: $z_3 = z_1 z_2$ (polar form)	$(x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + y_1 x_2)$ $r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$
Divide: $z_3 = z_1 / z_2$ (polar form)	$\frac{(x_1 x_2 - y_1 y_2) - j(x_1 y_2 - y_1 x_2)}{x_2^2 + y_2^2}$ $\frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$

Apêndice B:

<i>Relationship</i>	<i>Relationship</i>
$\sin u = \cos(u - \pi/2)$	$\cos u = \sin(u + \pi/2)$
$\cos(-u) = \cos u$	$\sin(-u) = -\sin(u)$
$\sin^2 u + \cos^2 u = 1$	$\cos^2 u = \frac{1}{2}(1 + \cos 2u)$
$\sin^2 u = \frac{1}{2}(1 - \cos 2u)$	$\cos(u \pm v) = \cos u \cos v \mp \sin u \sin v$
$\sin(u \pm v) = \sin u \cos v \pm \cos u \sin v$	$\cos u \cos v = \frac{1}{2}[\cos(u - v) + \cos(u + v)]$
$\sin u \sin v = \frac{1}{2}[\cos(u - v) - \cos(u + v)]$	$\sin u \cos v = \frac{1}{2}[\sin(u - v) + \sin(u + v)]$
$\cos u = \frac{1}{2}[e^{ju} + e^{-ju}]$	$\sin u = \frac{1}{2j}[e^{ju} - e^{-ju}]$
$e^{ju} = \cos u + j \sin u$	