



Sinais e sistemas contínuos e discretos. O conceito de função de transferência e de espectro.



Departamento de Eletrônica e Computação

Centro de Tecnologia

ELC1115 – Sinais e Sistemas

Prof. Fernando DeCastro

Sinais e Sistemas

- Um sinal é uma função $f(\cdot)$ de uma ou mais variáveis independentes (em geral, tempo, posição ou frequência) e que expressa informação como resultado da variação de $f(\cdot)$ com a(s) variável(eis) independente(s).
- Um sistema é um conjunto de blocos, cada um com funcionalidade específica, e que, atuando de forma coerente entre si, possibilitam que o sistema altere as características e propriedades da informação expressa pelo sinal de acordo com um objetivo específico.

Por exemplo, o *Very Large Array* (New Mexico-USA), é um observatório para rádio-astronomia composto por 27 antenas de rádio c/ diâmetro $\phi=25\text{m}$ (ver <https://public.nrao.edu/explore/vla-explorer/> e <https://public.nrao.edu/telescopes/vla/>). Ondas eletromagnéticas (sinais) provenientes do universo são amplificadas por amplificadores analógicos de baixo ruído (sistema contínuo) e **processadas** por receptores digitais (sistema discreto) de modo a identificar variações na amplitude, fase, frequência e polarização das ondas (informação). A seguir este conjunto de informações é interpretado por computadores (sistema discreto) de modo a que se possa inferir sobre algum fenômeno físico sob estudo que delas dependam. Por exemplo, se o espectro (veremos o conceito de espectro adiante neste capítulo) do sinal da onda eletromagnética captada pelo *array* de antenas (*array* = conjunto – ver conceito em

http://www.fccdecastro.com.br/pdf/CE_Aula16a18_15122020.pdf) contém uma componente espectral de amplitude significativa na frequência de 1420.40575 MHz, significa que o astro que está irradiando a onda eletromagnética captada pelo *array* contém abundância do gás hidrogênio (ver <http://www.setileague.org/askdr/hydrogen.htm>). Ou, alternativamente, a informação é interpretada no sentido de identificar se ela foi gerada de forma inteligente (ver https://pt.wikipedia.org/wiki/Sinal_Wow!).

Sinais e Sistemas

- Um sistema, portanto, altera as características e propriedades da informação transportada pelo sinal de acordo com um objetivo específico. Isto é válido tanto para sistemas e sinais analógicos como para sistemas e sinais digitais. O objetivo pode ser, por exemplo, realçar os graves de um sinal de áudio (sinal unidimensional), aumentar o contraste de uma imagem (sinal bidimensional), e assim por diante.
- A ação do sistema de alterar as características e propriedades da informação transportada pelo sinal de acordo com um objetivo específico é denominado **processamento do sinal**.
- Quando o sinal é analógico (como, por exemplo, a tensão gerada por um microfone que capta um sinal de voz), ele é contínuo no tempo e é contínuo em amplitude, conforme exemplos nos próximos slides.
- O processamento de um sinal analógico é efetuado através de sistemas analógicos constituídos de dispositivos analógicos (amplificadores transistorizados, amplificadores operacionais, indutores, capacitores, resistores, linhas de transmissão, etc ...) e que, em uma definição simplificada, estabelece a relação entre os sinais de entrada e saída do sistema através de uma equação diferencial linear.
- Quando o sinal é digital (por exemplo, a tensão gerada por um microfone após ser digitalizada por um conversor analógico/digital ADC – ver https://pt.wikipedia.org/wiki/Conversor_anal%C3%B3gico-digital) ele é discreto no tempo e discreto em amplitude, conforme veremos adiante. ADC – *analog to digital converter*.
- O processamento de um sinal digital consiste em um conjunto de operações algorítmicas efetuadas por um processador digital que altera a informação transportada pelo sinal digital de acordo com um objetivo específico. Um **sinal digital é representado por uma sequência de números com precisão finita**, de forma que os algoritmos que o processamento desejado executa (filtragem, heterodinação, reconhecimento de padrão, etc...), possam ser implementados através de um programa (usualmente escrito em linguagem C ou em VHDL) e possam ser executados em processadores digitais (GPPs – *General Purpose Processor* , DSPs – *Digital Signal Processor* , FPGAs – *Field Programmable Gate Array*, etc).

Aplicações que utilizam processamento de sinais

- Algoritmos sofisticados e hardware de processamento de sinais são prevalentes em uma grande variedade de sistemas, desde **sistemas militares** altamente especializados e complexos **sistemas de telecomunicações**, até **aplicações industriais e eletrônica de consumo**.
- Os principais padrões de comunicações de dados, **áudio** e **vídeo** baseiam-se em muitos dos princípios e das técnicas de processamento de sinais, assim como algoritmos para processamento de **voz** e **imagem**, filtragem de **ruído**, *enhancement*, **codificação**, reconhecimento de **padrões**, equalização, processamento **multimídia**, **controle**, **robótica**, visão de máquina, engenharia **biomédica**, **acústica**, **sonar**, **radar**, **sismologia**, **exploração de petróleo**, eletrônica de consumo...etc...



Processamento de sinais em telecomunicações:

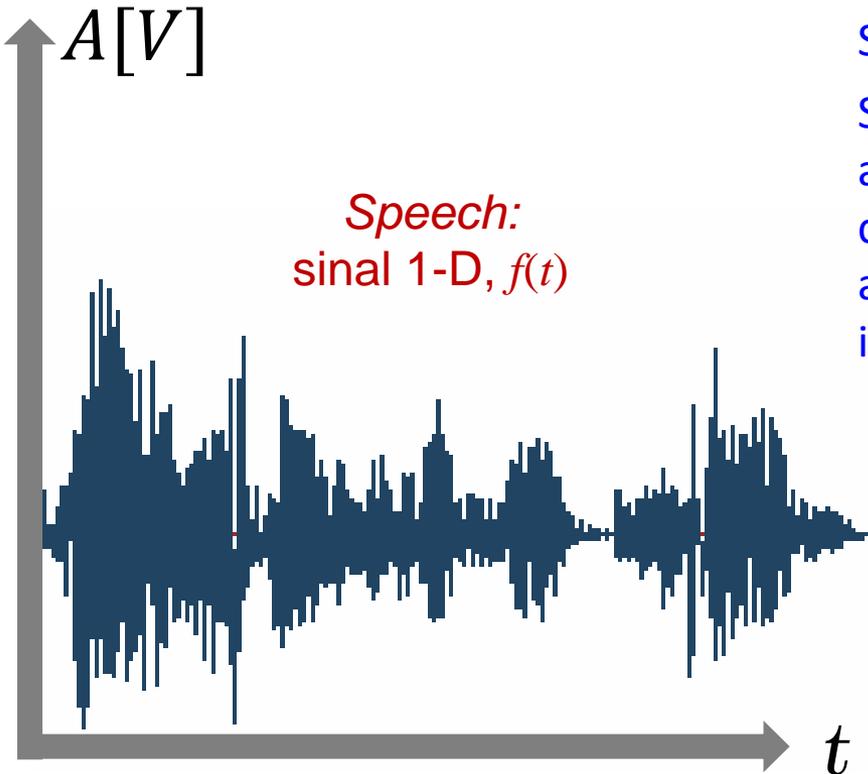
- A **detecção e interpretação de sinais** é uma área importante do processamento de sinais, em que o objetivo do processamento é obter uma identificação. Por exemplo, a **detecção de sinal** através de *matched filter* (ver slides 12 a 16 de http://www.fccdecastro.com.br/pdf/CE_Aula21a26_15122020.pdf). A determinação da direção (DOA – *Direction Of Arrival*) de uma onda eletromagnética através de *correlator* é um exemplo interessante de interpretação de sinais (ver slides 98 a 102 de http://www.fccdecastro.com.br/pdf/CE_Aula2a14_19102020.pdf). Outro exemplo de interpretação de sinais é o processo de **demodulação efetuado em um receptor digital**, que interpreta as variações de amplitude e fase da onda eletromagnética recebida identificando as palavras binárias que foram transmitidas pelo transmissor (ver http://www.fccdecastro.com.br/pdf/T2_Aula10&11_22042020.pdf, http://www.fccdecastro.com.br/pdf/T2_Aula12_24042020.pdf e http://www.fccdecastro.com.br/pdf/T2_Aula13_29042020..pdf).
- A **análise espectral**, baseada no uso da Transformada e da Série de Fourier e no uso de modelos de sinais, é outro aspecto particularmente importante do processamento de sinais, em que são identificadas quais frequências representam o sinal (ver slides 24 a 29 de http://www.fccdecastro.com.br/pdf/CE_Aula2a14_19102020.pdf).
- A **modelagem de sinais** desempenha um papel importante na compressão e codificação de dados, bem como em sistemas preditivos (ver slides 20 a 44 de http://www.fccdecastro.com.br/pdf/T2_Aula4_20032020.pdf).
- Outro tópico avançado de importância considerável é o **processamento adaptativo de sinais** em que o sistema auto-ajusta seus parâmetros livres de acordo com o objetivo (*goal*) desejado (ver slides 47 a 74 de http://www.fccdecastro.com.br/pdf/T2_Aulas16a20_27052020.pdf e ver slides 117 a 143 de http://www.fccdecastro.com.br/pdf/CE_Aula16a18_15122020.pdf).

Tipos de sinais:

Sinais podem ser caracterizados como:

- Sinal de variável independente contínua
- Sinal de variável independente discreta
- Sinal unidimensional
- Sinal multidimensional
- Sinal de amplitude contínua
- Sinal de amplitude discreta

Sinal unidimensional de amplitude contínua e de variável independente contínua

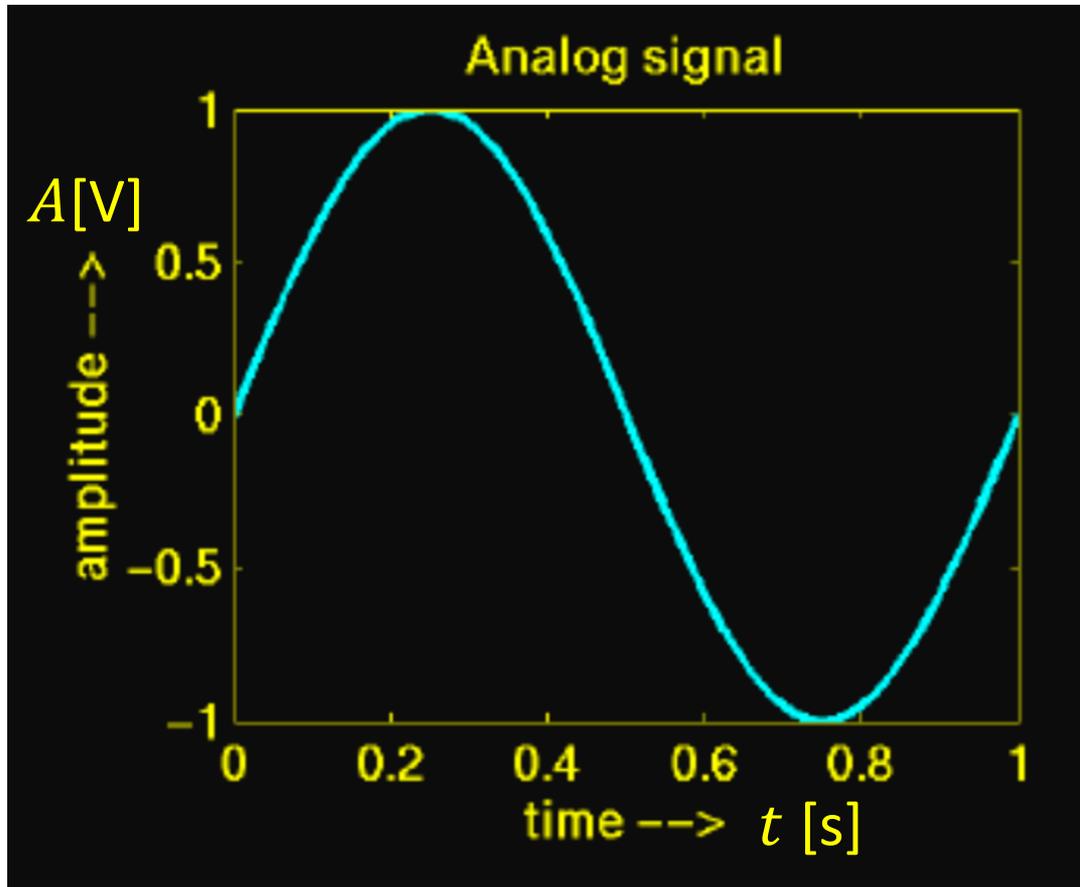


Sinal de voz:

Sinal mostrado na tela de um osciloscópio cuja amplitude A é uma função $A = f(t)$ do tempo contínuo t . O sinal é unidimensional porque a amplitude A depende de uma única variável independente t .

A grandeza física pressão acústica movimentando o diafragma do microfone, o qual gera um sinal elétrico cuja amplitude $A = f(t)$, medida em volt [V], corresponde à intensidade da pressão instantânea da onda sonora que incide no microfone.

Sinal unidimensional de amplitude contínua e de variável independente contínua



Sinal senoidal analógico de frequência $f_0 = 1$ [Hz] (período $T = 1/f_0 = 1$ [s]) e amplitude de pico $A_{pk} = 1$ [V] gerado por um gerador de áudio e mostrado na tela de um osciloscópio.

Note que tanto a amplitude $A = f(t)$ como o tempo t são contínuos.

Sinal bidimensional de amplitude contínua e de variável independente contínua

Nem sempre os sinais têm como variável independente o tempo.

Uma fotografia analógica, registrada em um filme analógico como o mostrado em (A) resulta em um imagem analógica (foto) como mostrado em (B) que é definida como um sinal bidimensional $f(x,y)$ não dependente do tempo.

A intensidade luminosa (*brightness*) em cada ponto (x,y) da foto é uma função contínua $f(x,y)$ de duas variáveis espaciais, uma variável horizontal x e uma variável vertical y .

As variáveis independentes x e y são variáveis espaciais e contínuas.



(B)

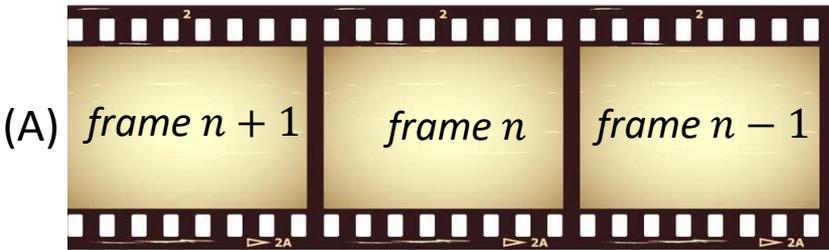


Basicamente estudaremos sinais unidimensionais, mas é elucidativo analisar alguns exemplos com sinais bidimensionais, especificamente imagens.

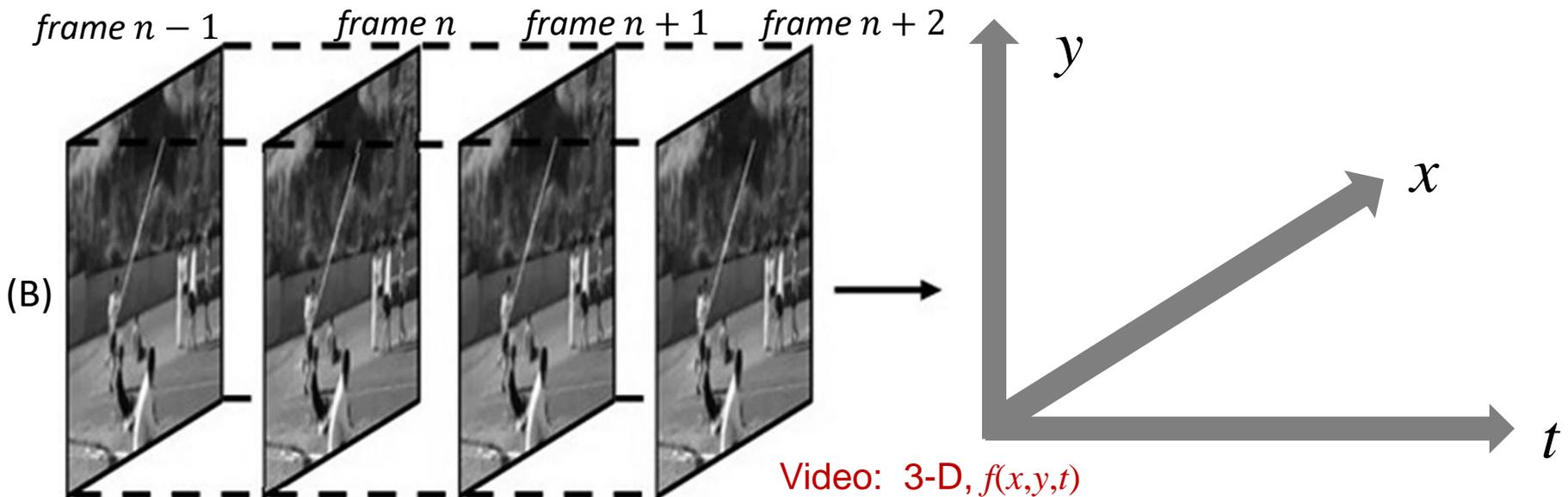
Sinal tridimensional de amplitude contínua e de variáveis independentes contínuas

A imagem gerada pela sequência de *frames* de um filme 35mm em preto e branco, conforme (A) abaixo, é um sinal tridimensional dependente das coordenadas x e y e do tempo t . A intensidade luminosa em cada ponto (x, y) da imagem projetada na tela do cinema varia continuamente com o tempo t de acordo com a cena, conforme mostrado em (B) abaixo, sendo, portanto, uma função contínua $f(x, y, t)$.

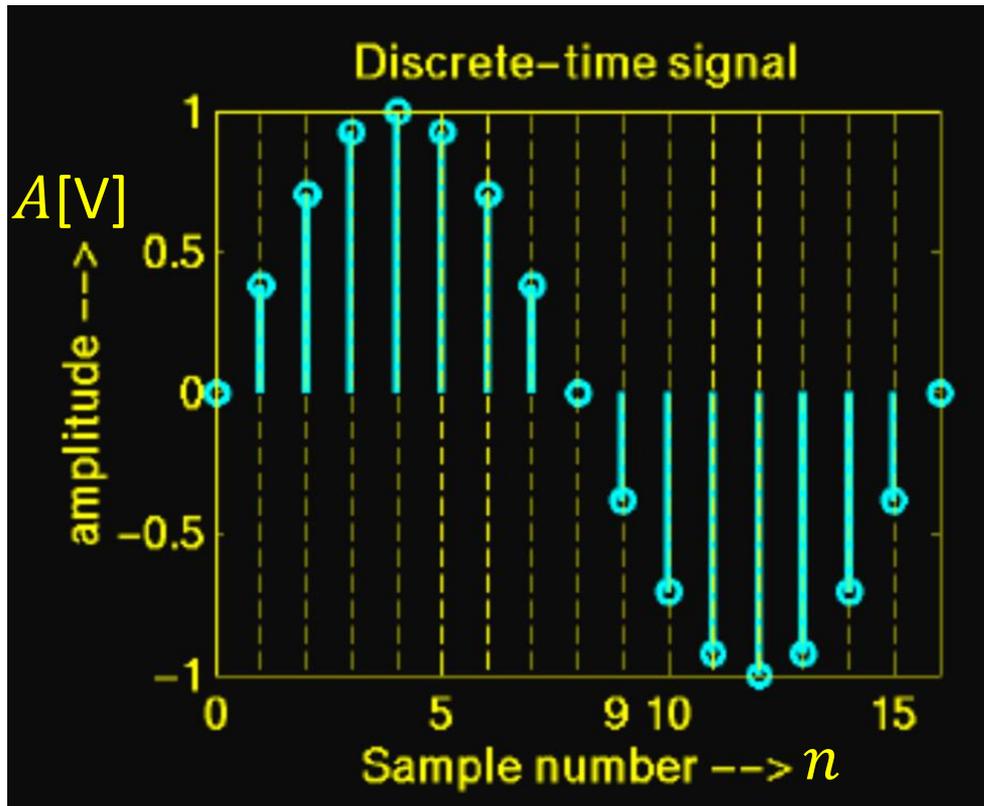
As variáveis independentes x, y (espaciais) são variáveis contínuas aos olhos do observador em consequência da fina granularidade do filme. A variável independente t é também contínua aos olhos do observador em consequência da rapidez com que o filme se movimenta atrás da lente do projetor.



→ Sentido de movimento do filme atrás da lente do projetor cinematográfico (ver <https://ssec.si.edu/stemvisions-blog/what-physics-behind-watching-movie>).



Sinal unidimensional de amplitude contínua e de variável independente discreta



Sinal discreto no tempo e contínuo em amplitude (= **sinal amostrado**).

Os valores da variável independente n são dados por uma sequência de números inteiros que representam o índice da amostra (= *sample*) do sinal.

A amplitude A do sinal amostrado é uma função contínua $A = f(n)$ da variável independente inteira n , que é o argumento da função f . A variável independente n é uma variável discreta porque somente assume valores numéricos inteiros.

Note que o sinal no gráfico ao lado resulta da amostragem do sinal no gráfico do slide 8, amostrado com uma frequência de amostragem $f_s = 16$ [Sa/s], isto é, 16 amostras por segundo (Sa – abreviação de *sample*).

Sinal unidimensional de amplitude contínua e de variável independente discreta



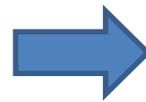
Séries temporais econômicas, usadas em análise de mercado de ações.

Eixo vertical:
índice do mercado de ações

Eixo horizontal:
amostras tomadas a cada 10 dias.

Sinal multidimensional discreto, de variável independente discreta

Múltiplas variáveis dependentes discretas em amplitude e discretas no tempo. Cada variável representada por uma sequência de amostras numéricas de valor complexo.



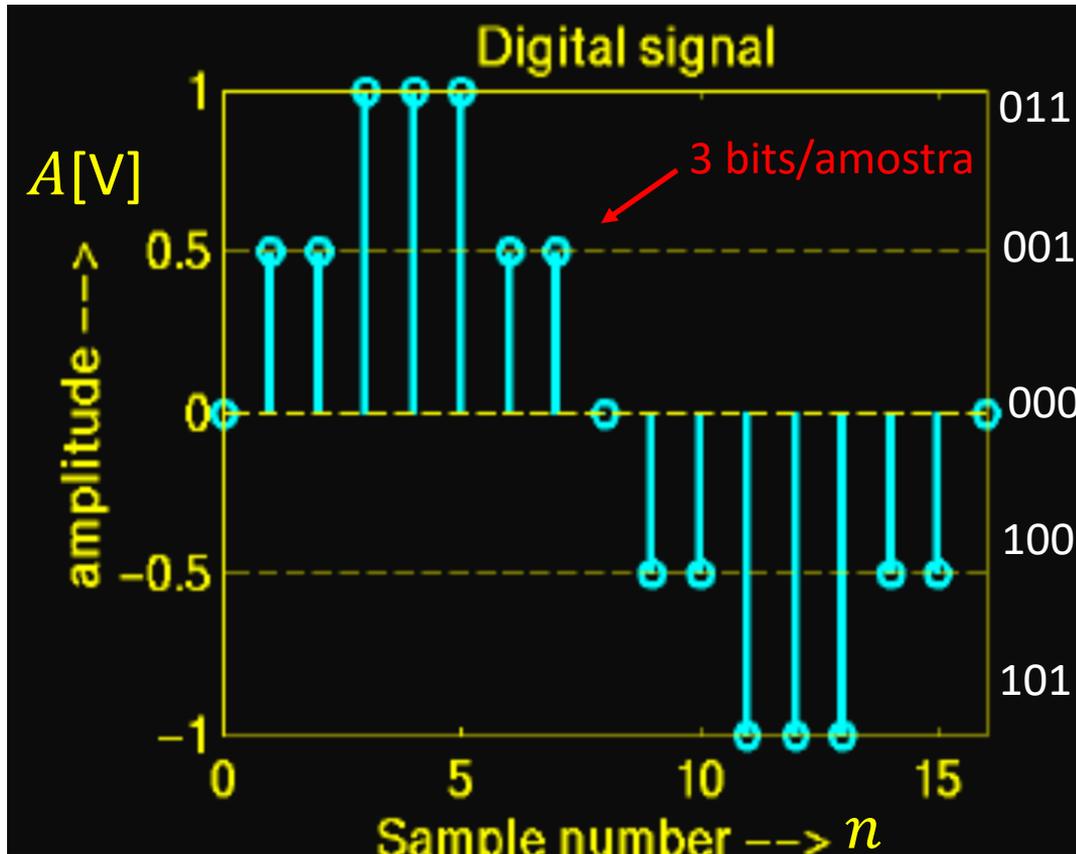
$$\underline{x}[n] = [s_0[n], s_1[n], \dots, s_{26}[n]]^T$$

$\underline{x}[n]$ é um vetor de 27 elementos, sendo cada elemento a sequência no tempo discreto que representa o sinal digitalizado de cada respectiva antena do arranjo espacial (*array*) de 27 antenas que compõe o *Very Large Array* (ver slide 2). A parte real e imaginária das amostras de cada uma das 27 sequências (as amostras têm que ser de valor complexo para representar amplitude e fase da onda eletromagnética que incide na antena) são palavras binárias de 8 bits que podem ter $2^8=256$ níveis de amplitude. A frequência de amostragem é $f_s = 2.048$ [GSa/s], isto é, 2.048 giga ($\times 10^9$) amostras (*samples*) por segundo.

Os sinais digitalizados das 27 antenas e representados pelo vetor $\underline{x}[n]$ são combinados digitalmente em um correlator de modo a se interferirem construtivamente, “focalizando” como se fosse uma lente as ondas eletromagnéticas originadas em um ponto localizado a anos-luz da Terra.



Sinal unidimensional, de variável independente discreta e amplitude discreta (= sinal digital)



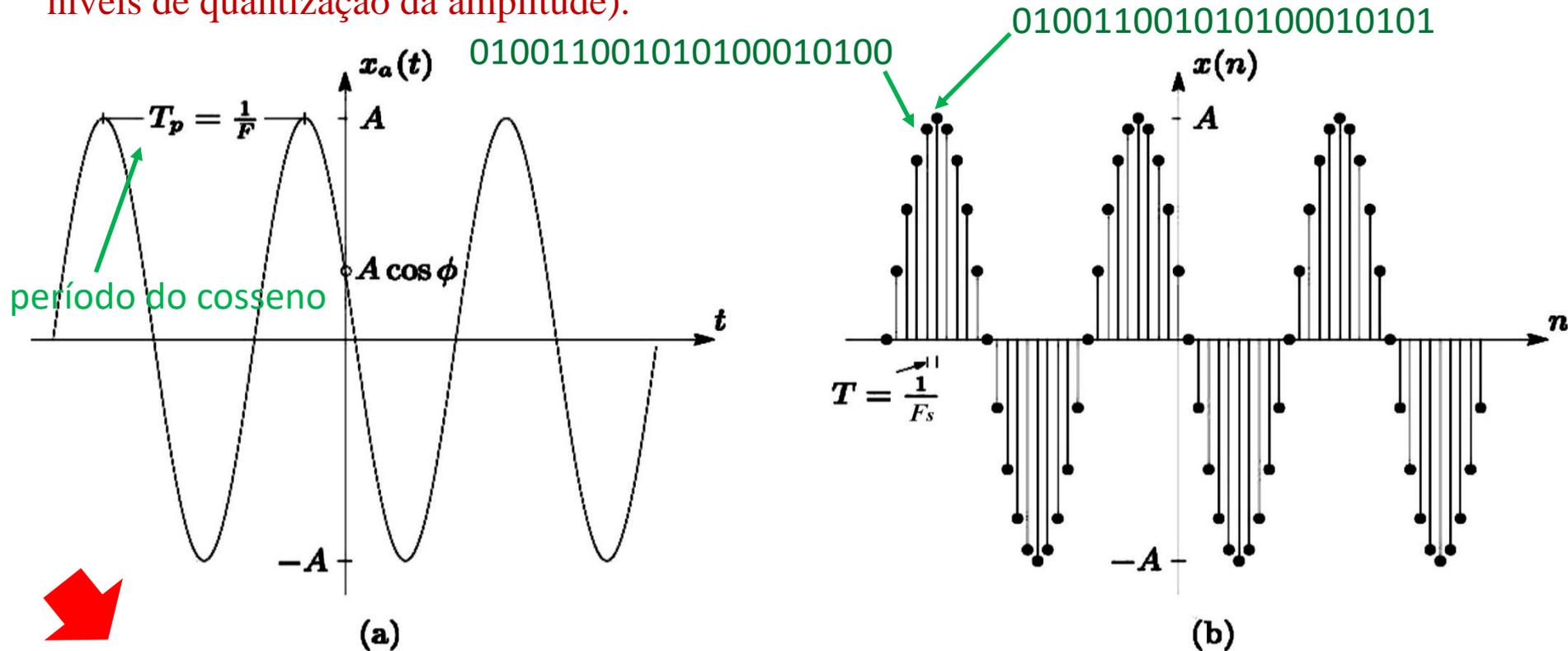
Sinal digital

Sinal discreto no tempo (amostrado) e discreto em amplitude (quantizado), adequado, portanto, a ser processado por um processador digital.

Importante notar que o sinal digital resultante da digitalização do sinal analógico através de um ADC (ver slide 3) deve ser compatível com o sinal de *clock* do processador digital. Especificamente, o sinal de *clock* do ADC que define a frequência de amostragem do ADC deve ter uma frequência que é um submúltiplo inteiro da frequência do sinal de *clock* do processador e ambos os sinais devem estar sincronizados no tempo para evitar *sampling jitter* – ver <https://en.wikipedia.org/wiki/Jitter>.

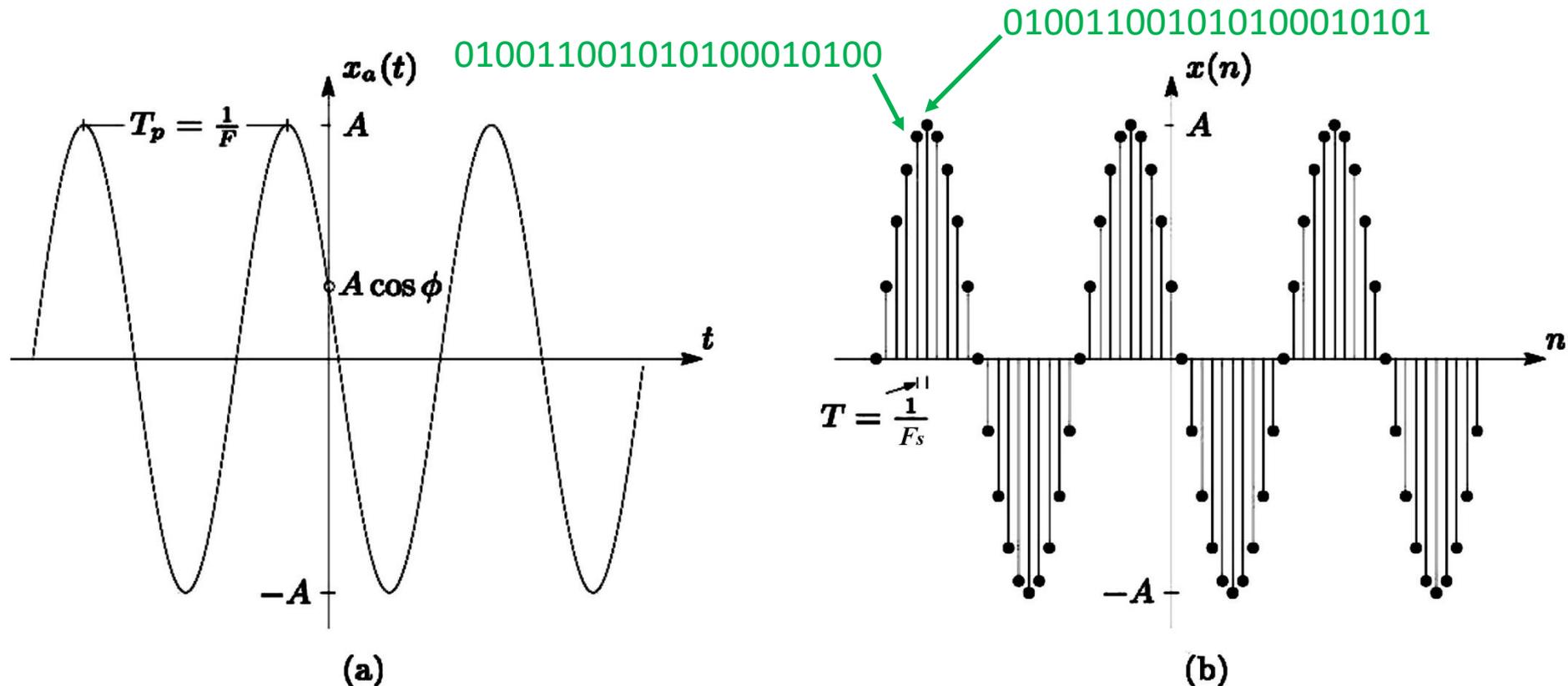
Além disto o número de bits que o ADC atribui a cada amostra gerada deve ser idealmente compatível com o número de bits do barramento de dados e registradores do processador. Por exemplo, um GPP com tamanho do registrador 16 bits permite a representação de $2^{16} = 65536$ valores possíveis de amplitude (16 bits/amostra), i.e., a amplitude da grandeza processada é **quantizada** em 65536 valores possíveis. O ADC deverá, portanto, gerar cada amostra com 16 bits. No entanto, nada impede de, neste caso, usar um ADC de 8 bits. Mesmo se usássemos um ADC de 32 bits/amostra ainda assim poderíamos colocar a amostra de 32 bits em um *buffer* e ler os dados de 16 bits em dois instantes distintos

Digitalização de uma cossenóide de amplitude A , frequência $F=1/T_p$ e fase ϕ utilizando um conversor A/D c/ frequência de amostragem $F_s = 20 F$ (20 amostras por período do cosseno) e utilizando 21 bits por amostra ($2^{21}=2.097.152$ possíveis valores de amplitude \Rightarrow 2.097.152 níveis de quantização da amplitude).



Note visualmente em b) que a frequência de amostragem $F_s = 20 F$ (20 am/ T_p) é suficientemente alta para assegurar uma boa resolução temporal do sinal digitalizado (a separação $T=1/F_s$ entre as amostras é suficientemente pequena para que a discretização no tempo “capte” as variações de amplitude do cosseno). Note também que a utilização de 21 bits por amostra ($2^{21}=2.097.152$ níveis de quantização da amplitude) assegura uma boa fidelidade das variações de amplitude do sinal digitalizado (a “escadinha” da quantização é desprezível) .

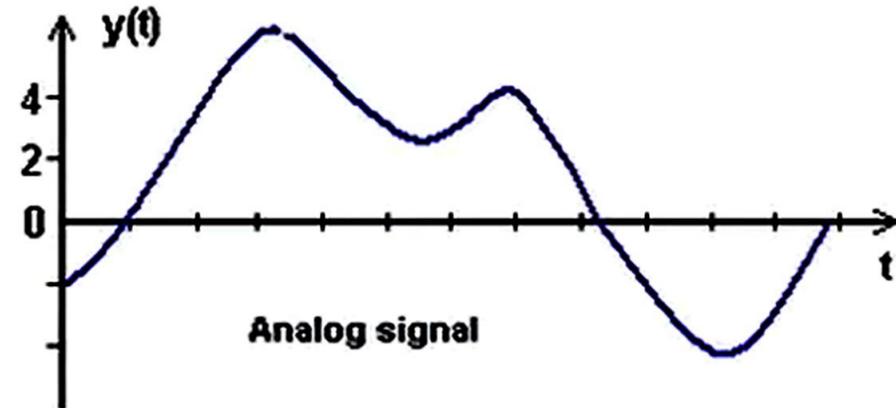
Exemplo: Seja um sinal do tipo cosseno de amplitude $A=1$, frequência $F = 1\text{KHz}$ e fase $\phi=90^\circ$ digitalizado por um conversor A/D c/ frequência de amostragem $F_s = 20 F$ e de 21 bits por amostra. Determine a taxa de transmissão τ em Kbps que o sistema que processará este sinal deverá apresentar para que não haja perda de informação.



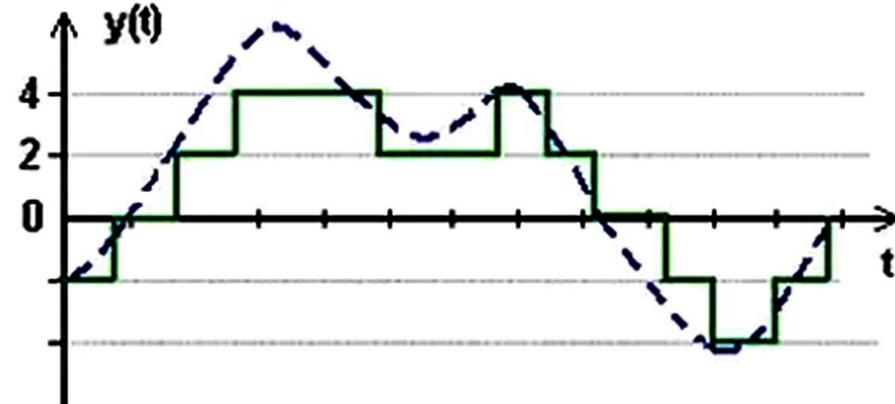
Solução: $F_s = 20 F = 20\text{KHz}$ (20 amostras por período do cosseno). O período do cosseno é $T_p = 1/F = 1 \text{ ms}$, e, portanto o sistema deve transportar 20 amostras a cada 1 milissegundo. Como cada amostra é uma palavra binária de 21 bits, então a taxa de transmissão τ é dada por $\tau = 20 \text{ amostras/ ms} \times 21 \text{ bits / amostra} = 420 \text{ bits / ms} = 420\text{Kbps}$.

Sumário comparativo entre os principais tipos de sinais:

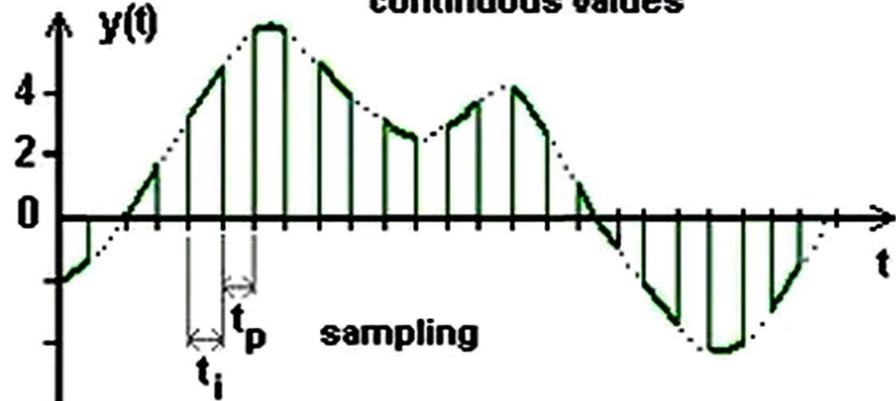
continuous-time
continuous values



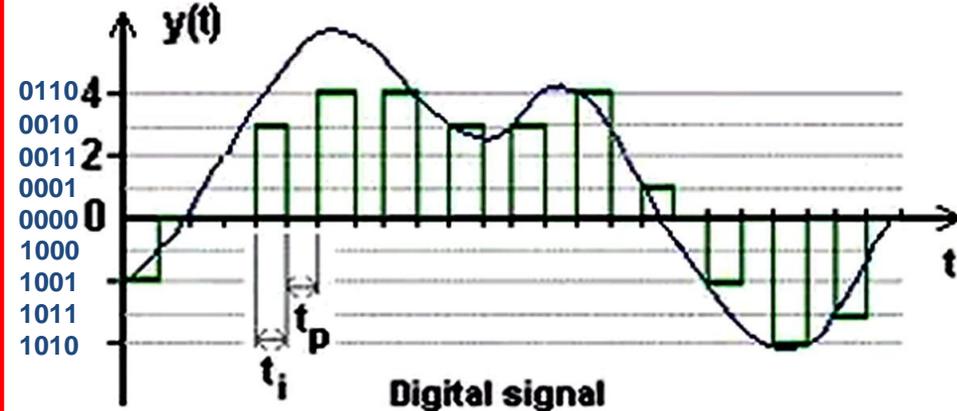
continuous-time
discrete-value



discrete-time
continuous values



discrete-time
discrete-value



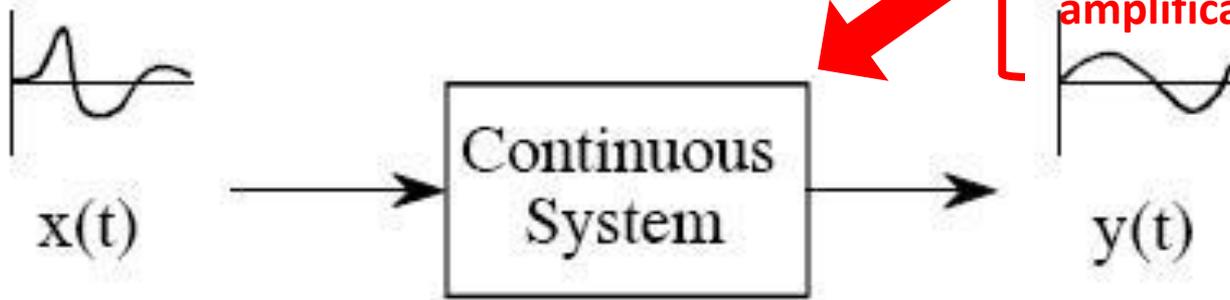
Tipos de sistemas:

Sistemas podem ser caracterizados como:

- Sistema de tempo contínuo x sistema de tempo discreto
- Sistema linear x sistema não-linear
- Sistema invariante no tempo x sistema variante no tempo

O enfoque da disciplina Sinais e Sistemas será em sistemas lineares, invariantes no tempo (LTI systems – *linear time-invariant systems*), tanto discretos como contínuos. Sistemas não-LTI podem ser analisados através de técnicas que são aproximações das técnicas de análise de sistemas LTI.

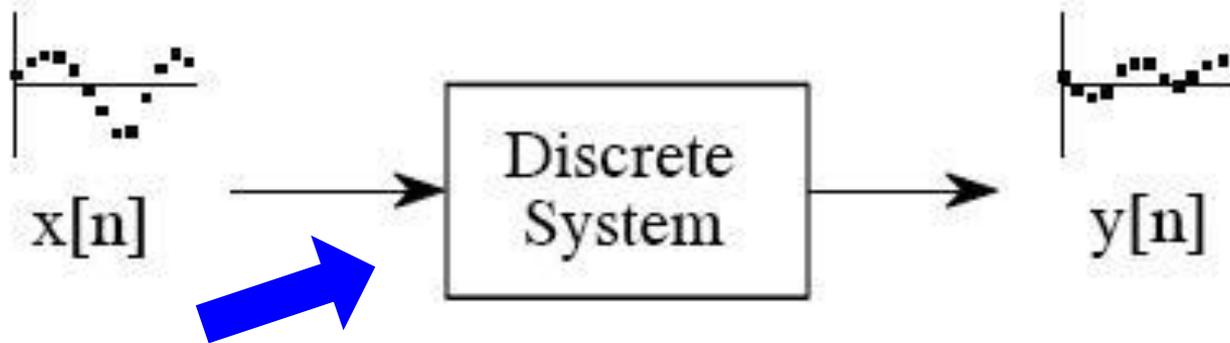
Sistema contínuo x sistema discreto:



Sistema analógico: resistores, indutores, capacitores, amplificadores, etc ...

Sinal de **Entrada** ou Sinal de **Excitação** do sistema

Sinal de **Saída** ou Sinal de **Resposta** do sistema



Sistema digital: Algoritmos implementados através de um programa (usualmente escrito em linguagem C ou em VHDL) e executados em processadores digitais (GPPs – *General Purpose Processor*, DSPs – *Digital Signal Processor*, FPGAs – *Field Programmable Gate Array*, etc...).

Dispositivos GPP, DSP e FPGA de mercado para processamento de sinais – alguns exemplos:

GPP: <http://www.ti.com/lit/ds/symlink/am1806.pdf>

DSP: [TMS320C6654 data sheet, product information and support | TI.com](#)

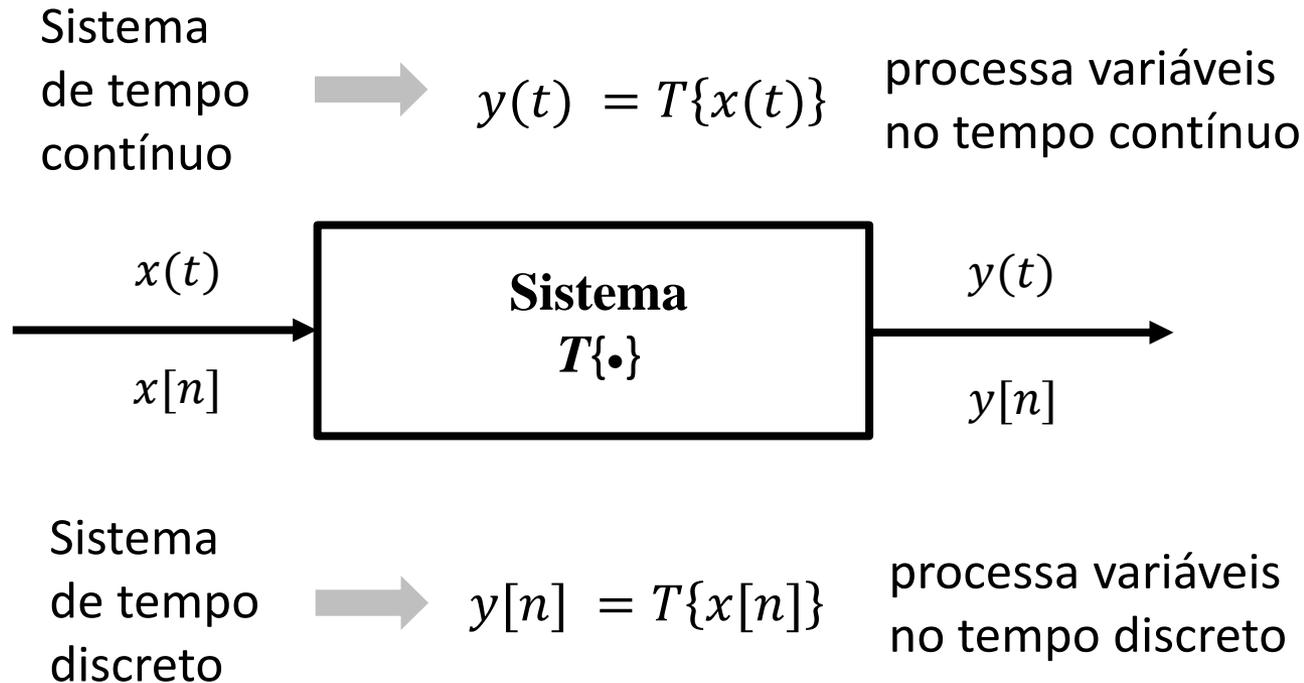
FPGA (SoC): https://www.xilinx.com/support/documentation/data_sheets/ds190-Zynq-7000-Overview.pdf



Permite o desenvolvimento de algoritmos com base no paradigma *High Level Synthesis*:

https://www.xilinx.com/support/documentation/sw_manuals/xilinx2019_1/ug871-vivado-high-level-synthesis-tutorial.pdf

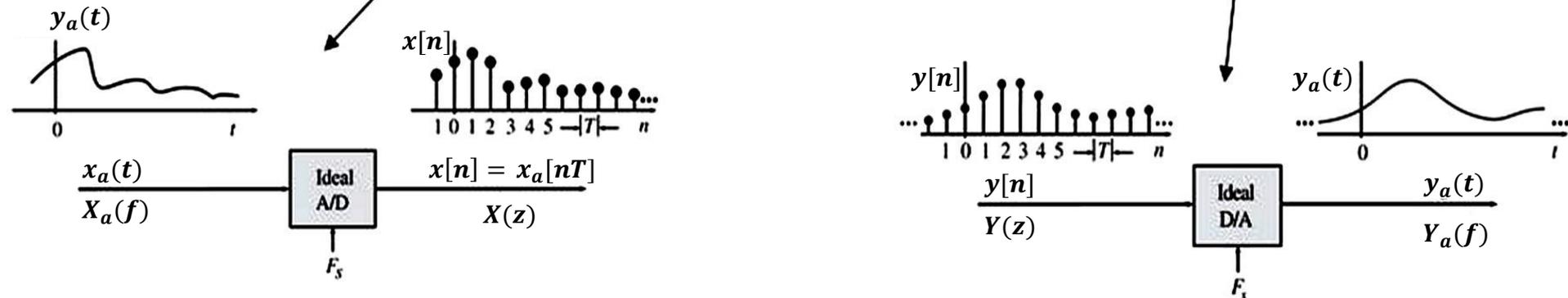
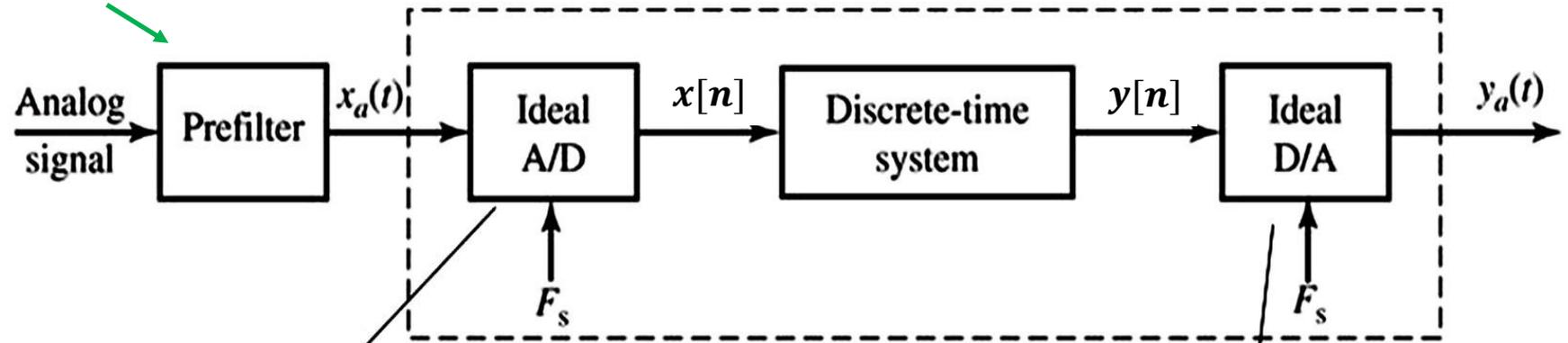
Sistema contínuo x discreto:



$T\{\cdot\}$ é o operador que define a **Transmitância** do sistema, i.e., define qual operação/processo o sistema aplica ao sinal x na entrada resultando na saída y ,

Arquitetura funcional genérica de um sistema discreto:

anti aliasing filter



Sistema linear x sistema não-linear:

A classe dos sistemas lineares é definida pelo princípio da superposição:

Se $y_1[n]$ e $y_2[n]$ são as respostas de um sistema quando $x_1[n]$ e $x_2[n]$ são as respectivas entradas (= excitações), então o sistema é linear, se e somente se

$$T\{x_1[n] + x_2[n]\} = T\{x_1[n]\} + T\{x_2[n]\} = y_1[n] + y_2[n] \leftarrow \text{propriedade da aditividade}$$

$$\text{e } T\{ax[n]\} = aT\{x[n]\} = ay[n] \leftarrow \text{propriedade da homogeneidade ou mudança de escala.}$$

onde a é uma constante arbitrária.

Sistema linear x sistema não-linear:

Um exemplo de sistema linear é aquele em que

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$$

A saída (=resposta) do sistema a cada instante amostral n é igual à soma cumulativa do valor no instante n e de todos os valores prévios da entrada (=excitação).

Um exemplo de sistema não-linear é aquele em que

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x^p[k]$$

sendo $p \neq 1$.

Sistema invariante no tempo x sistema variante no tempo:

Em um sistema invariante no tempo um deslocamento d no tempo na excitação $x[n]$ na forma $x_d[n] = x[n - d]$ resulta uma resposta $y_d[n] = y[n - d]$ com deslocamento d no tempo, resposta que é idêntica àquela que se obteria caso se deslocasse de d amostras a resposta $y[n]$ à excitação $x[n]$.

Especificamente, para que o sistema seja invariante no tempo, a resposta deslocada $y[n] = y[n - d]$ à excitação $x[n]$ tem que ser idêntica à resposta $y_d[n] = y[n - d]$ à excitação deslocada $x_d[n] = x[n - d]$.

Sistema invariante no tempo x sistema variante no tempo:

Por exemplo, o sistema definido pela relação $y[n] = nx[n]$

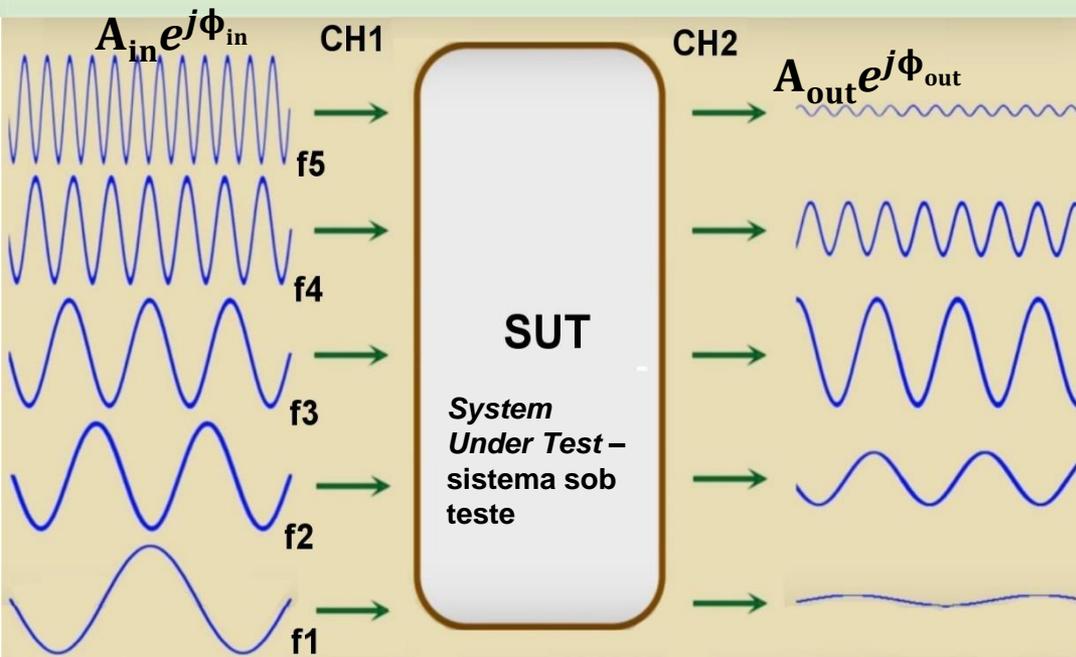
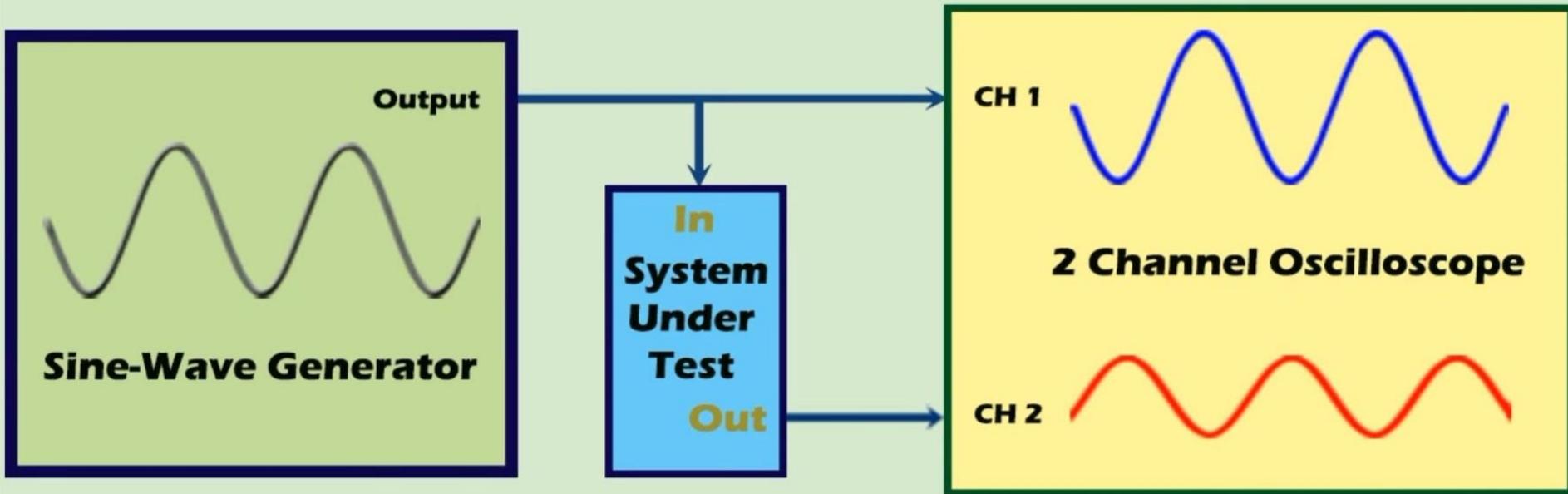
não é invariante no tempo, porque

para a excitação deslocada $x_d[n] = x[n - d]$ temos como resposta $y_d[n] = n x[n - d]$, isto é, o sistema “pega” o sinal de entrada (= excitação) e multiplica por n .

Mas note que $y_d[n]$ não é igual à saída (= resposta) que se obteria caso se deslocasse de d amostras a resposta $y[n]$ à excitação $x[n]$, resposta dada por $y[n - d] = (n - d)x[n - d]$.

Portanto, este sistema não é invariante no tempo.

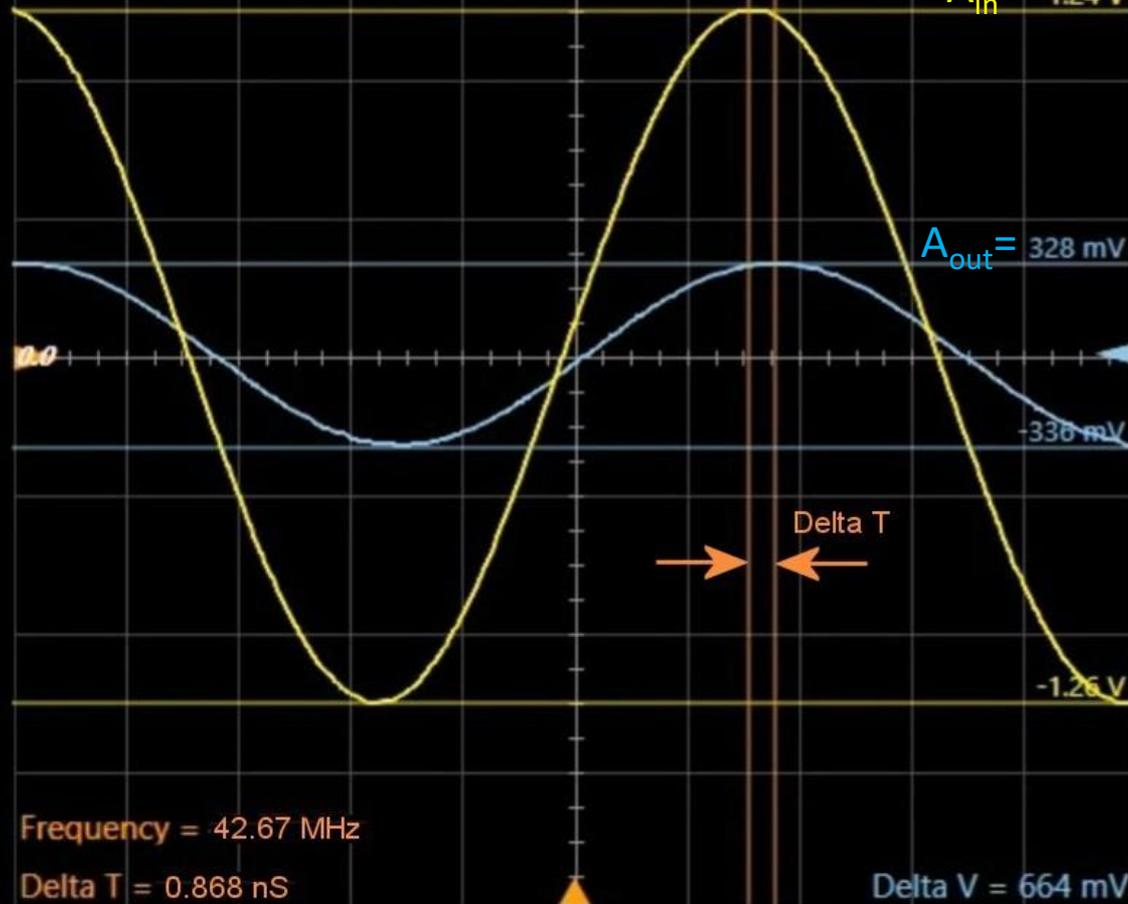
O conceito de função de transferência de um sistema LTI



O gerador senoidal aplica no CH1 (entrada "In" do SUT) uma cossenoide $CH1(t) = A_{in} \cos(2\pi ft + \phi_{in})$ de amplitude $A_{in}=1.24V$ (por exemplo) e fase $\phi_{in}=90^\circ$ e de frequência f ajustada manualmente através de um *knob* em uma sequencia de diversos valores $f_1 < f_2 < \dots$. Note que p/ cada frequência f_1, f_2, \dots o CH2 (saída "Out" do SUT) mede uma cossenoide $CH2(t) = A_{out} \cos(2\pi ft + \phi_{out})$ de mesma frequência f da cossenoide aplicada ao CH1 mas c/ amplitude A_{out} e fase ϕ_{out} que variam p/ cada frequência f_1, f_2, \dots

O conceito de função de transferência de um sistema LTI

Cossenoide do gerador senoidal de período $T=1/f=23.44\text{ns}$ ($f=42.67\text{MHz}$) medida no canal CH1 do osciloscópio (excitação do SUT em amarelo) e cossenoide resultante (resposta do SUT em azul) medida no canal CH2 do osciloscópio.



Signal Parameters

CH1 ON

1X 10X Probe



Marker Min. (V) -1.26

500 mV/DIV

DC MAX. (V) 1.25



GND Vp-p 2.51

Invert CH1+CH2

AC FO (MHz) 1.5000012

BW Limit 1000 MHz

CH2 ON

1X 10X Probe



Marker Min. (mV) -328

500 mV/DIV

DC MAX. (mV) 336



GND mVp-p 664

Invert CH1-CH2

AC FO (MHz) 1.5000013

YT



4 nS/DIV



Triggering

Alt

CH1

CH2

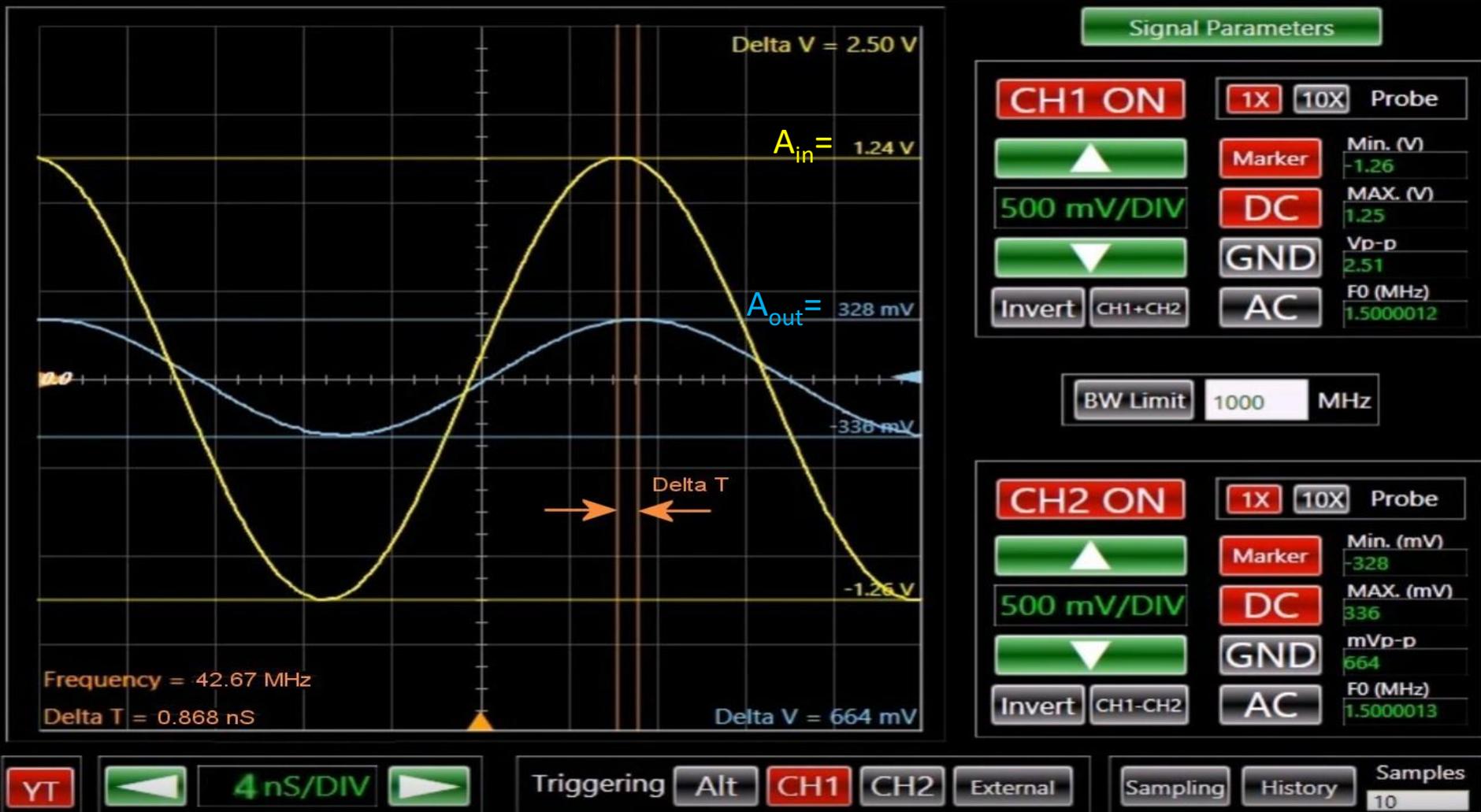
External

Sampling

History

Samples 10

O conceito de função de transferência de um sistema LTI



Note que $A_{out}/A_{in} = 0.328\text{V}/1.24\text{V} = 0.265$ é a **magnitude da transmitância** do SUT na frequência $f=1/T$ e **expressa o ganho do SUT na frequência f** . Note também que $\Delta\phi = \phi_{out} - \phi_{in} = -360 \times \Delta T/T = -360 \times 0.868\text{ns}/23.44\text{ns} = -13.3^\circ$ é o ângulo de atraso da cossenoide de saída em relação à cossenoide de entrada na frequência f . Por exemplo, $\Delta\phi = -90^\circ$ significa um atraso no tempo de $T/4$. Especificamente, $\Delta\phi$ é o **ângulo de fase da transmitância** do SUT na frequência f e **expressa o ângulo que o SUT atrasa o sinal de saída em relação ao sinal de entrada na frequência f** .

O conceito de função de transferência de um sistema LTI

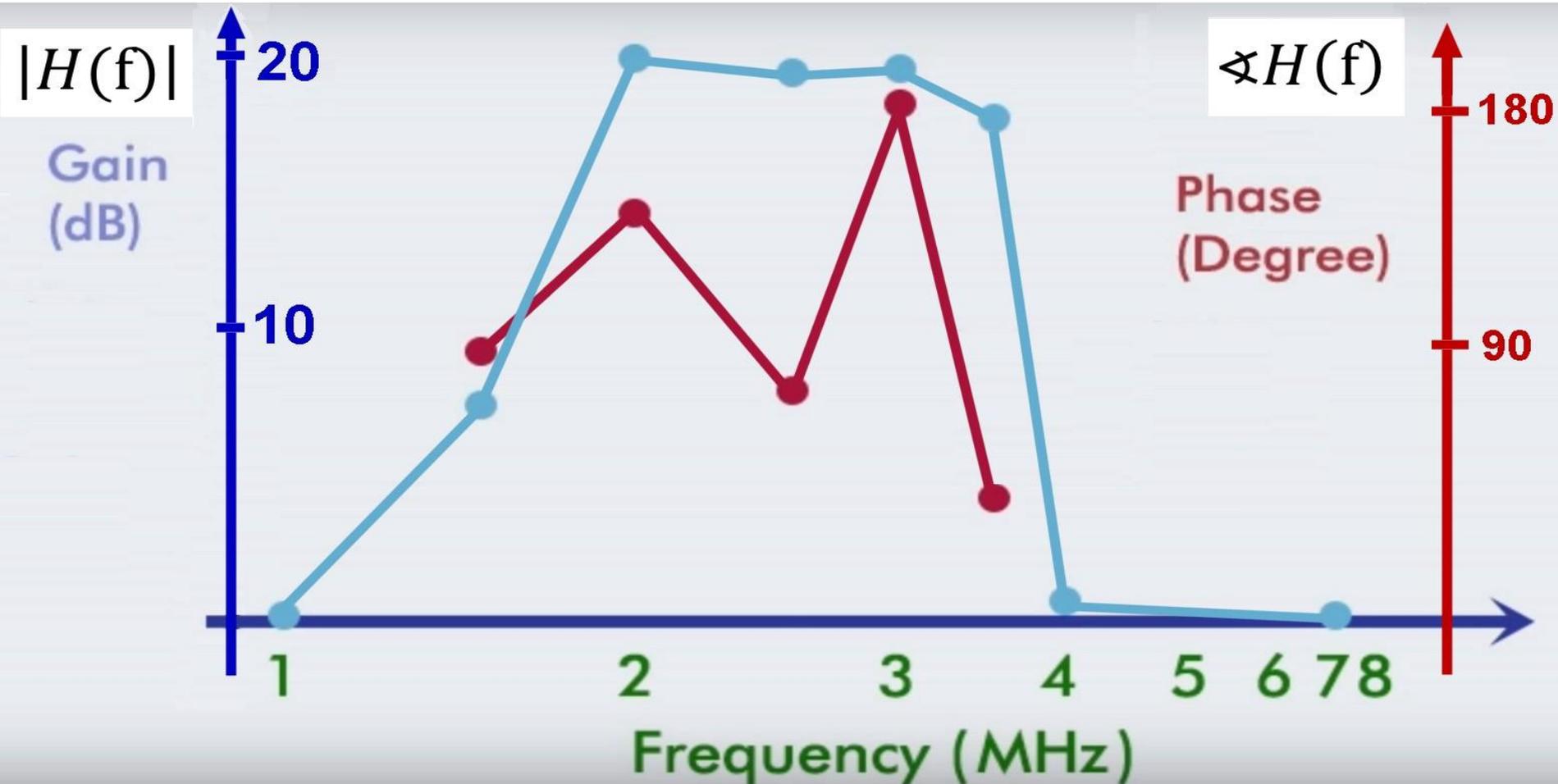
f [MHz]	$ H(f) = \frac{A_{out}}{A_{in}} \Big _f$	$ H(f) _{dB}$	$\angle H(f) = (\phi_{out} - \phi_{in}) \Big _f$ [°]
1.0	1.06	0.5 dB	-
1.5	2.51	8.0 dB	+90°
2.0	10.00	20.0 dB	+140°
2.5	8.91	19.0 dB	+78°
3.0	9.44	19.5 dB	+180°
3.5	7.94	18.0dB	+44°
4.0	1.12	1.0 dB	-
7.0	1.06	0.5 dB	-

$H(f) = |H(f)|e^{j\angle H(f)} = \text{Re}\{H(f)\} + j \text{Im}\{H(f)\}$ c/ valores tabulados na tabela acima em função da frequência f manualmente ajustada no gerador é uma função de valor complexo denominada **Função de Transferência** do SUT, função cujo domínio (= varável independente) é o domínio frequência f .

$|H(f)|$ é a magnitude da transmitância do SUT p/ cada frequência f e expressa o ganho do SUT em função da frequência f . É usual $|H(f)|$ ser expresso em decibel [dB] através de $|H(f)|_{dB} = 20 \log\{|H(f)|\}$, p/ efeito de realçar magnitudes pequenas e limitar magnitudes grandes (otimizando assim a visualização gráfica).

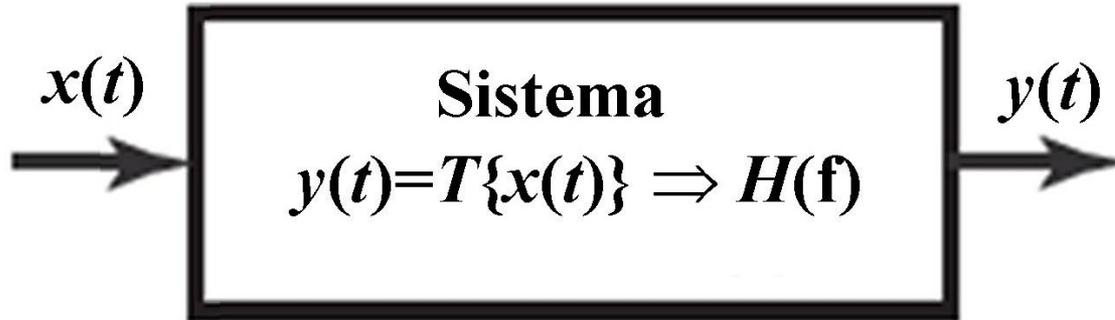
$\angle H(f)$ é o ângulo de fase da transmitância do SUT p/ cada frequência f e expressa o quanto o SUT atrasa o sinal de saída em relação ao sinal de entrada em função da frequência f . Para $\angle H(f) < 0$ a saída está atrasada em relação a entrada, e p/ $\angle H(f) \geq 0$ está adiantada.

O conceito de função de transferência de um sistema LTI



Curvas da resposta em frequência do SUT. O gráfico mostra o $|H(f)|$ [dB] e o $\angle H(f)$ [°] da função de transferência $H(f)$ do SUT obtidas da interpolação dos valores da tabela do slide anterior. A curva $|H(f)|$ indica que o SUT é um amplificador de 20dB de ganho com banda passante operacional que inicia em 2MHz e termina em 3.5MHz. Não foi plotada a curva $\angle H(f)$ para f fora da banda operacional do amplificador porque não há utilidade prática em determinar atrasos de fase para sinais que não serão amplificados pelo amplificador.

O conceito de espectro de um sinal



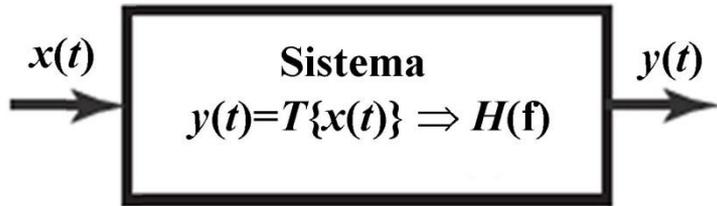
Consideremos um sistema LTI com uma transmitância $T\{\bullet\}$ que define a operação/processo que o sistema aplica sobre o sinal $x(t)$ na entrada, resultando no sinal de saída $y(t)$.

Conforme discutimos em slides anteriores, a operação/processo que a transmitância $T\{\bullet\}$ implementa no domínio tempo define o comportamento do ganho e do atraso (*delay*) do sistema em cada frequência f , comportamento que é definido pela função de transferência $H(f) = |H(f)|e^{j\angle H(f)}$ do sistema.

$H(f)$ é uma função de valor complexo com domínio em f , cujo módulo $|H(f)|$ expressa o ganho do sistema em função da frequência f e cuja fase $\angle H(f)$ expressa o ângulo que o sistema atrasa o sinal de saída em relação ao sinal de entrada na frequência f .

O conceito de espectro de um sinal

Vamos supor que a magnitude $|H(f)|$ da função de transferência $H(f)$ do sistema seja a de um filtro *narrowband* (banda estreita) de frequência central $f_0 = 70.023$ MHz com *bandwidth* (largura de banda) operacional $BW=2$ KHz conforme o gráfico:



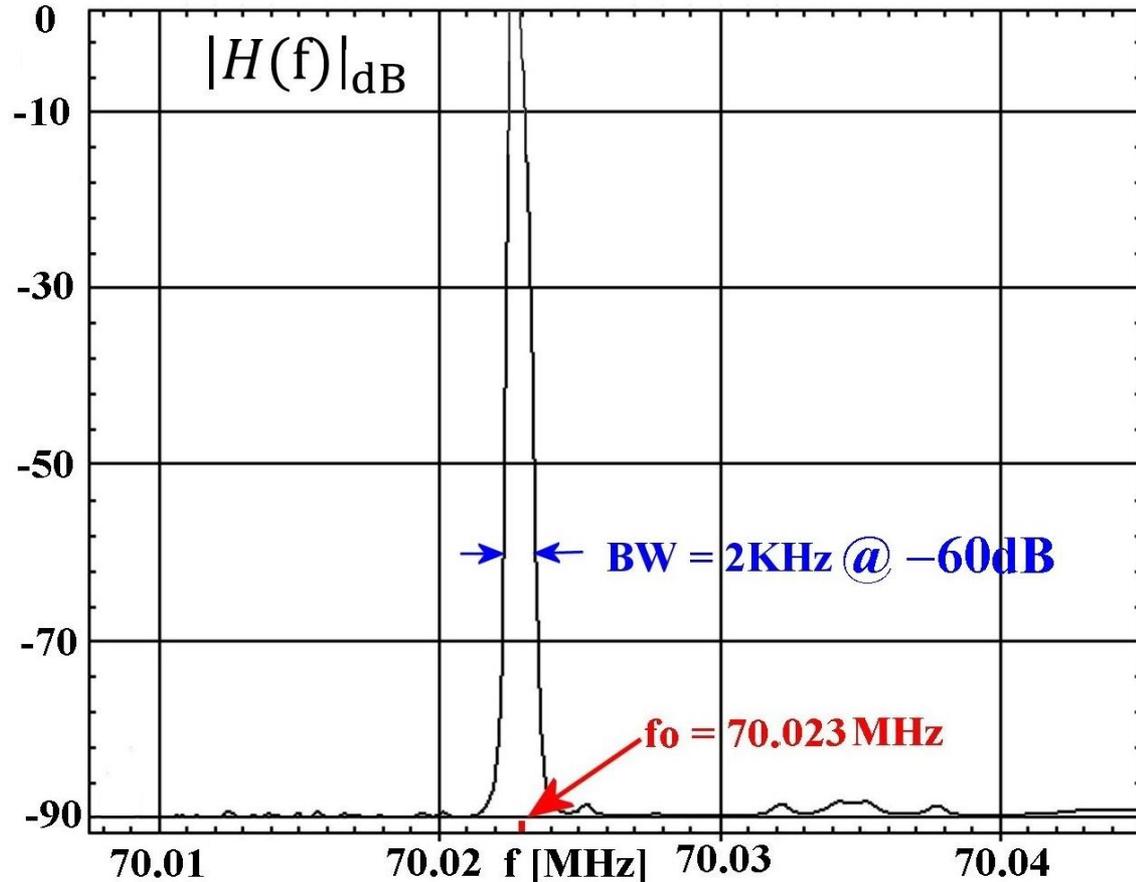
Vamos supor ainda que a excitação do sistema seja

$$x(t) = 0.7 \cos(2\pi 70.023 \times 10^6 t) + 0.5 \cos(2\pi 70.033 \times 10^6 t).$$

O sistema apresenta ganho 1.0 ($10^{\frac{0 \text{ dB}}{20}} = 1.0$) na banda de passagem de 2 KHz c/ centro em $f_0=70.023$ MHz e apresenta ganho de 3.16×10^{-5} ($10^{\frac{-90 \text{ dB}}{20}} = 3.16 \times 10^{-5}$) em $f = 70.033$ MHz. Portanto a resposta do sistema será

$$y(t) = 1.0 \times 0.7 \cos(2\pi 70.023 \times 10^6 t + \angle H(70.023 \times 10^6)) + 3.16 \times 10^{-5} \times 0.5 \cos(2\pi 70.033 \times 10^6 t + \angle H(70.033 \times 10^6)) \cong 0.7 \cos(2\pi 70.023 \times 10^6 t + \angle H(70.023 \times 10^6)).$$

Portanto a transmitância do sistema elimina para todos os fins práticos o sinal de frequência $f = 70.033$ MHz (atenuou de 90 dB o sinal) que está fora da BW operacional e amplifica com ganho unitário e com atraso de fase $\angle H(70.023 \times 10^6)$ o sinal de frequência $f_0=70.023$ MHz dentro da BW do filtro.



O conceito de espectro de um sinal

Vamos agora supor que o filtro *narrowband* permita variar a frequência central f_0 , mas mantendo $BW=2\text{KHz}$. Vamos aplicar a mesma excitação $x(t) = 0.7 \cos(2\pi 70.023 \times 10^6 t) + 0.5 \cos(2\pi 70.033 \times 10^6 t)$ do slide anterior e vamos ajustar a frequência central $p/$ $f_0=70.033\text{MHz}$ conforme o gráfico ao lado.

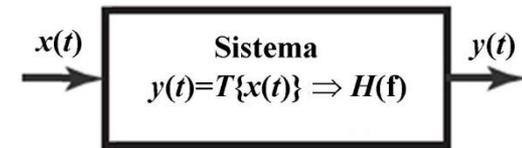
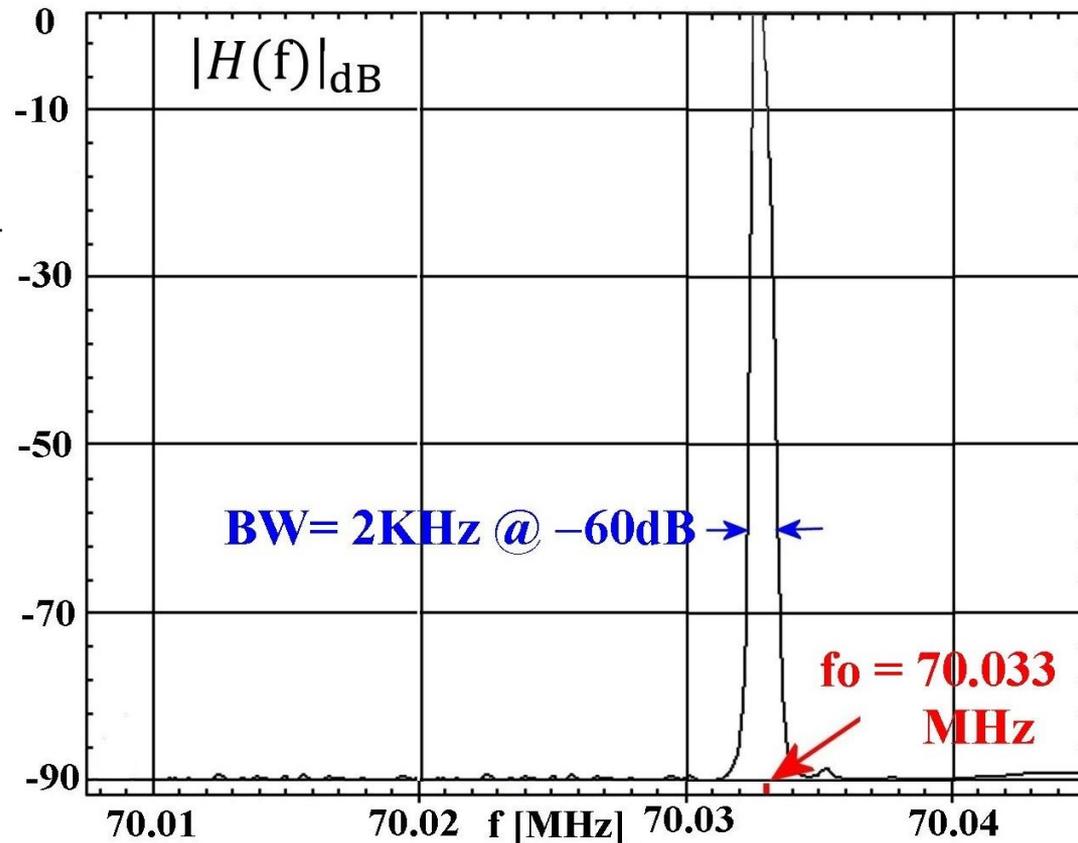
O sistema apresenta ganho 1.0 ($10^{\frac{0 \text{ dB}}{20}} = 1.0$) na banda de passagem de 2KHz c/ centro em $f_0=70.033\text{MHz}$ e apresenta ganho de 3.16×10^{-5} ($10^{\frac{-90 \text{ dB}}{20}} = 3.16 \times 10^{-5}$) em $f=70.023\text{MHz}$.

Portanto a resposta $y(t)$ do sistema será

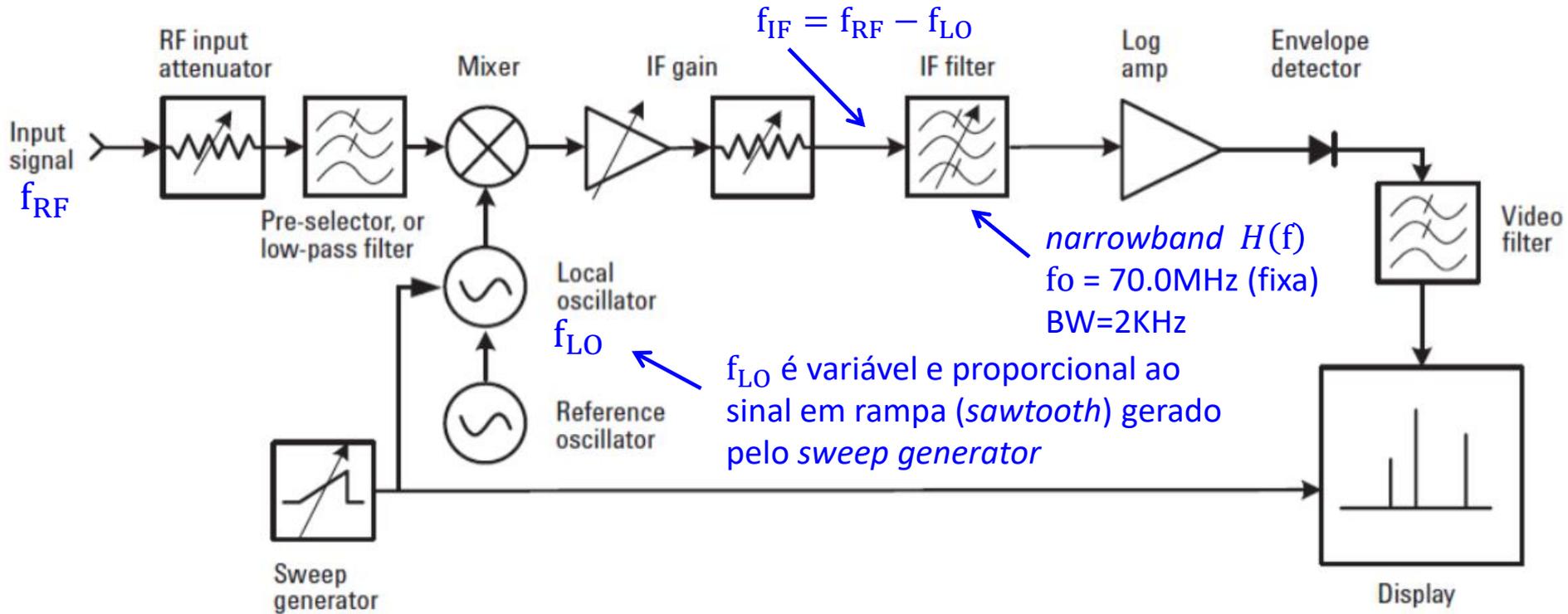
$$y(t) = 3.16 \times 10^{-5} \times 0.7 \cos(2\pi 70.023 \times 10^6 t + \angle H(70.023 \times 10^6)) + 1.0 \times 0.5 \cos(2\pi 70.033 \times 10^6 t + \angle H(70.033 \times 10^6)) \cong \cong 0.5 \cos(2\pi 70.033 \times 10^6 t + \angle H(70.033 \times 10^6)).$$

Portanto a transmitância do sistema amplifica com ganho unitário e com atraso de fase $\angle H(70.033 \times 10^6)$ o sinal de frequência $f_0=70.033\text{MHz}$ e elimina o sinal de $f=70.023\text{MHz}$ fora da BW operacional.

“Moral da estória”: O sistema que implementa o filtro *narrowband* de frequência central f_0 variável gera na sua saída y um sinal cuja amplitude é um indicador da amplitude que o sinal de entrada x apresenta para cada frequência na faixa em que se varia f_0 .



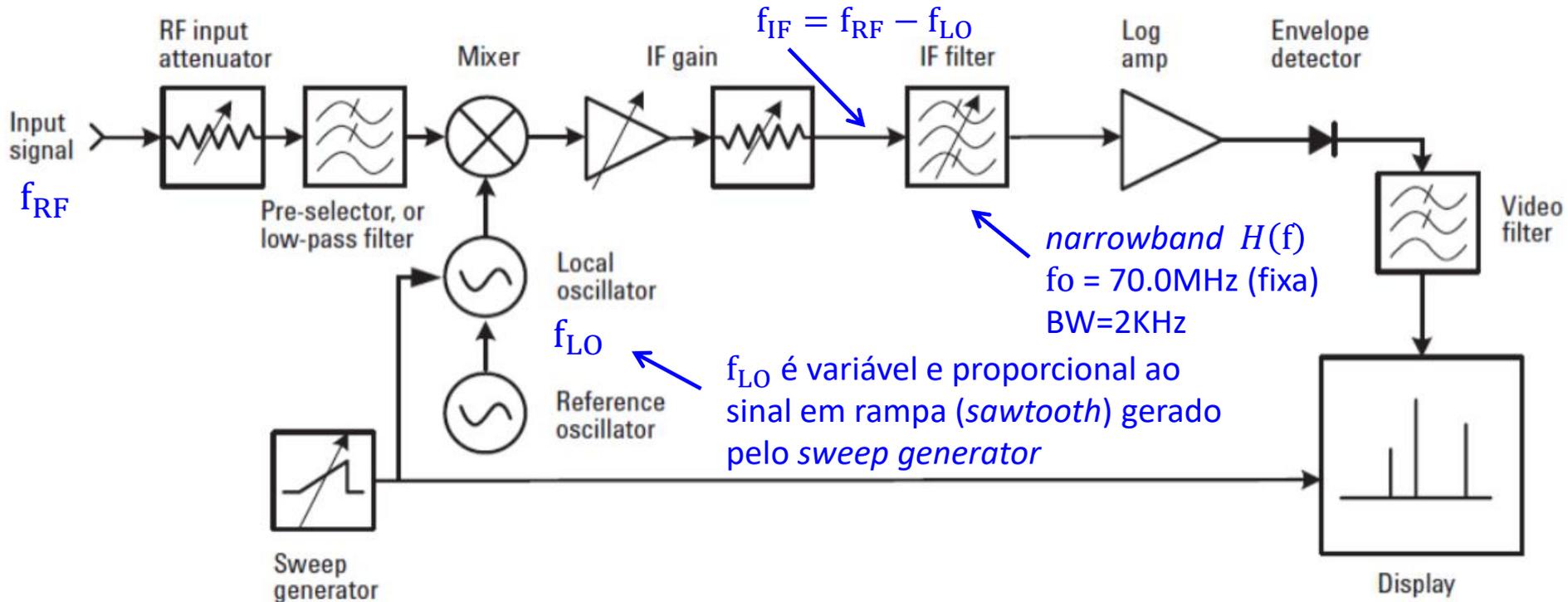
O conceito de espectro de um sinal



O diagrama de blocos acima mostra uma possível implementação de um sistema *narrowband* de frequência central f_o variável, conforme discutido no slide anterior. Este arranjo de blocos caracteriza o instrumento denominado **Analizador de Espectro de Varredura (Sweep Mode Spectrum Analyzer)** – ver <https://www.electronics-notes.com/articles/test-methods/spectrum-analyzer/superheterodyne-sweep-swept-spectrum-analyser.php>.

Note que na figura do presente slide a frequência central f_o do filtro *narrowband* (“*IF Filter*” – *Intermediate Frequency Filter*) é fixa em $f_o = 70.0\text{MHz}$, ao contrário do que foi discutido no slide anterior. Como a frequência f_o é fixa no presente caso, a variação da frequência central do sistema é obtida através dos blocos “*Mixer*” e “*Local Oscillator*”, conforme veremos a seguir.

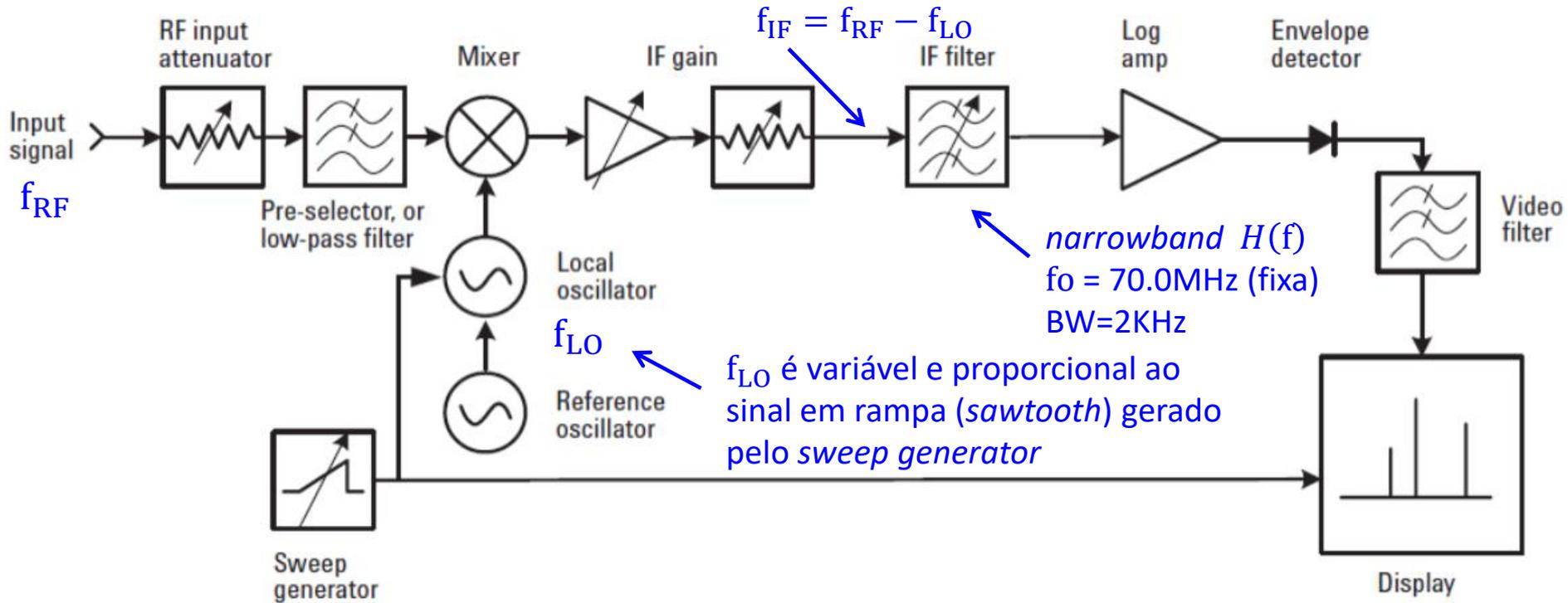
O conceito de espectro de um sinal



O “*Local Oscillator*” é um gerador cossenoidal de frequência f_{LO} variável de acordo com a amplitude do sinal em rampa gerado pelo *sweep generator* (gerador de varredura). Especificamente, f_{LO} varia linearmente de $f_{LO\min}$ a $f_{LO\max}$ e retorna a $f_{LO\min}$ re-iniciando o ciclo de varredura das frequências compreendidas entre $f_{LO\min}$ a $f_{LO\max}$.

O “*Mixer*” executa a heterodinação (ver Apêndice B e <https://www.electronic-notes.com/articles/radio/rf-mixer/rf-mixing-basics.php>) entre o sinal de entrada de frequência f_{RF} e o sinal de frequência variável f_{LO} gerado pelo “*Local Oscillator*”, de tal forma que o sinal heterodinado na entrada do “*IF Filter*” terá a frequência $f_{IF} = f_{RF} - f_{LO}$.

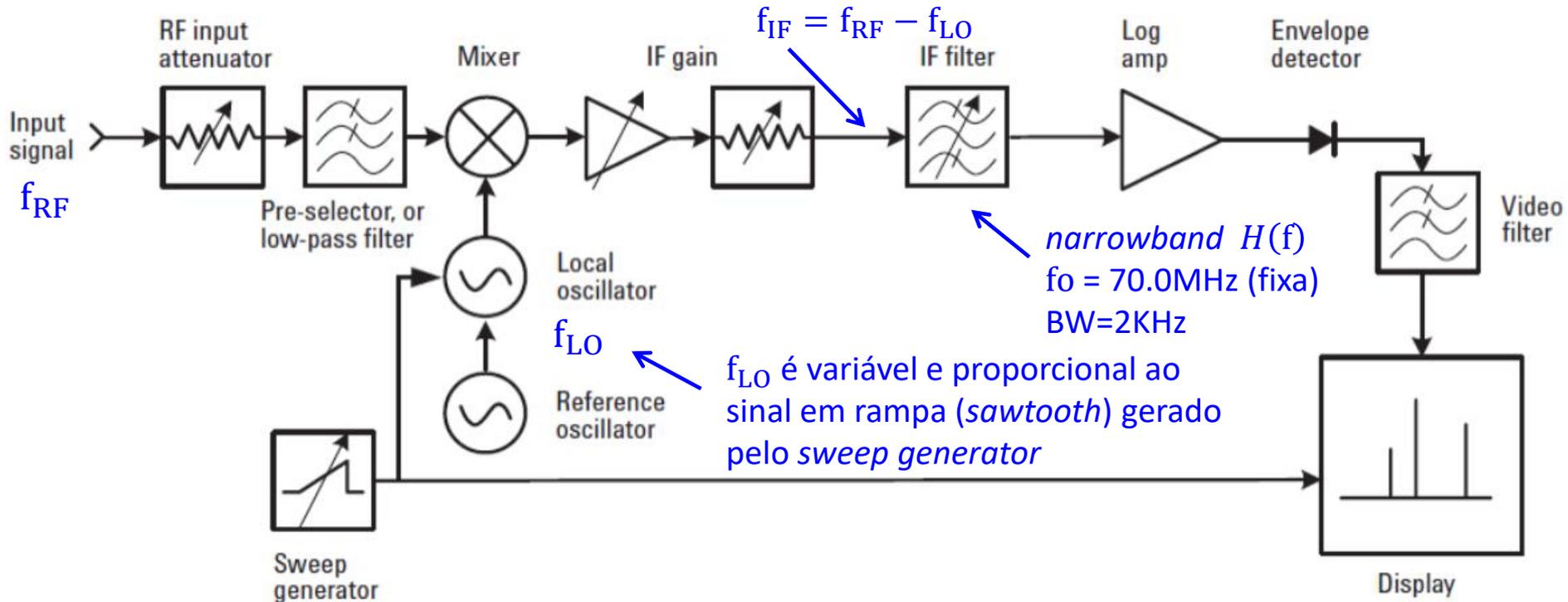
O conceito de espectro de um sinal



Note que se a frequência $f_{IF} = f_{RF} - f_{LO}$ do sinal heterodinado na entrada do “*IF Filter*” resultar igual à frequência central f_0 do “*IF Filter*” ($f_{IF} = f_0$), então o sinal “passa” pelo “*IF Filter*”, caso contrário ele é eliminado conforme discutido nos slides anteriores.

Especificamente, o sinal de frequência f_{RF} na entrada “*Input signal*” do sistema “passa” pelo “*IF Filter*” após ser heterodinado no “*Mixer*” se e somente se $f_{IF} = f_0$, ou seja, se a frequência f_{RF} do sinal de entrada do sistema obedecer à igualdade $f_{RF} = f_{LO} + f_0$, sendo f_0 fixo e igual a $f_0 = 70.0\text{MHz}$ e sendo f_{LO} variável de acordo com a rampa do *sweep generator* que varre linearmente a faixa de frequências compreendidas entre $f_{LO\min} \leq f_{LO} \leq f_{LO\max}$.

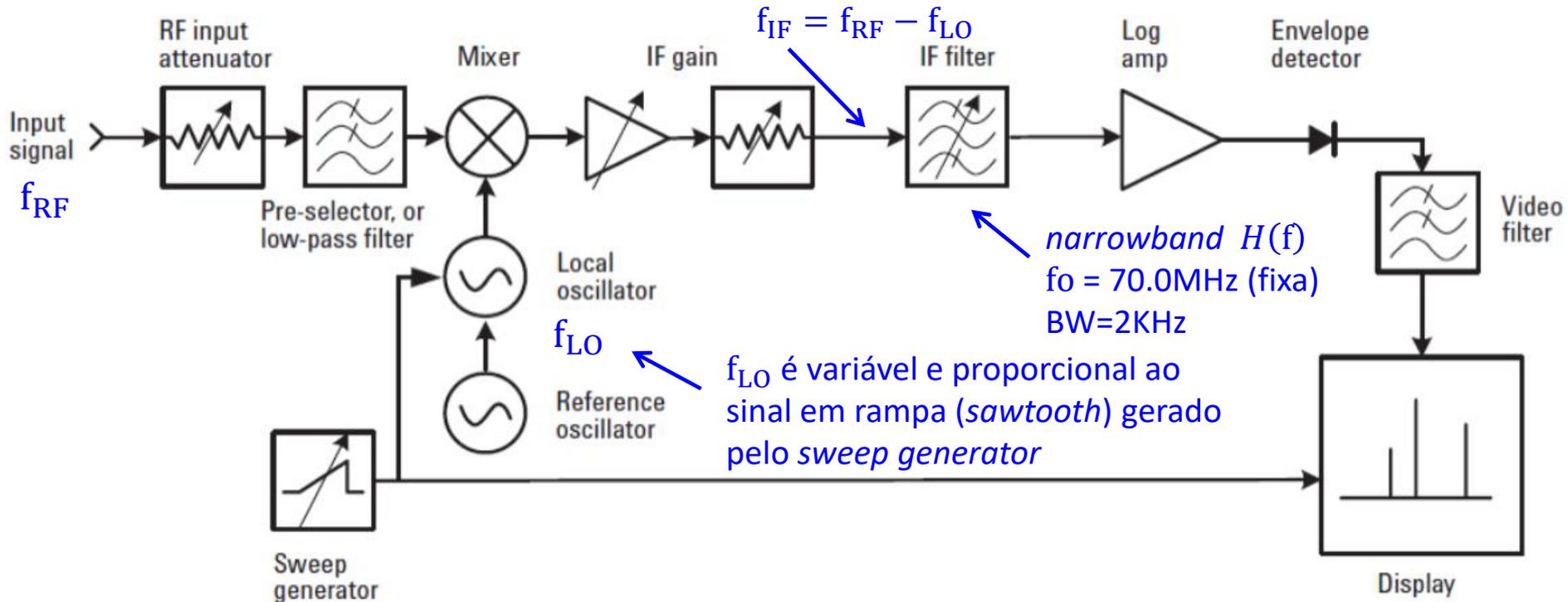
O conceito de espectro de um sinal



Este comportamento descrito no slide anterior caracteriza o sistema assim construído como um filtro *narrowband* para um sinal de entrada de frequência $f_{RF} = f_{LO} + f_0$. A frequência central do sistema *narrowband* é variável e varre a faixa de frequências compreendidas entre $f_{LO\min} + f_0 \leq f_{RF} \leq f_{LO\max} + f_0$.

Especificamente, o sistema varre a faixa de frequências do sinal de entrada no intervalo $f_{LO\min} + f_0 \leq f_{RF} \leq f_{LO\max} + f_0$ identificando a amplitude de cada frequência do sinal de entrada neste intervalo. A identificação de amplitude começa no “*Envelope Detector*” que retifica a cossenoide na saída do “*IF Filter*” após esta ser amplificada pelo “*Log Amp*” (amplificador logarítmico - saída já é em dB). Daí o filtro passa-baixa “*Vídeo Filter*” extrai o nível DC da cossenoide retificada, o qual é proporcional à amplitude da cossenoide.

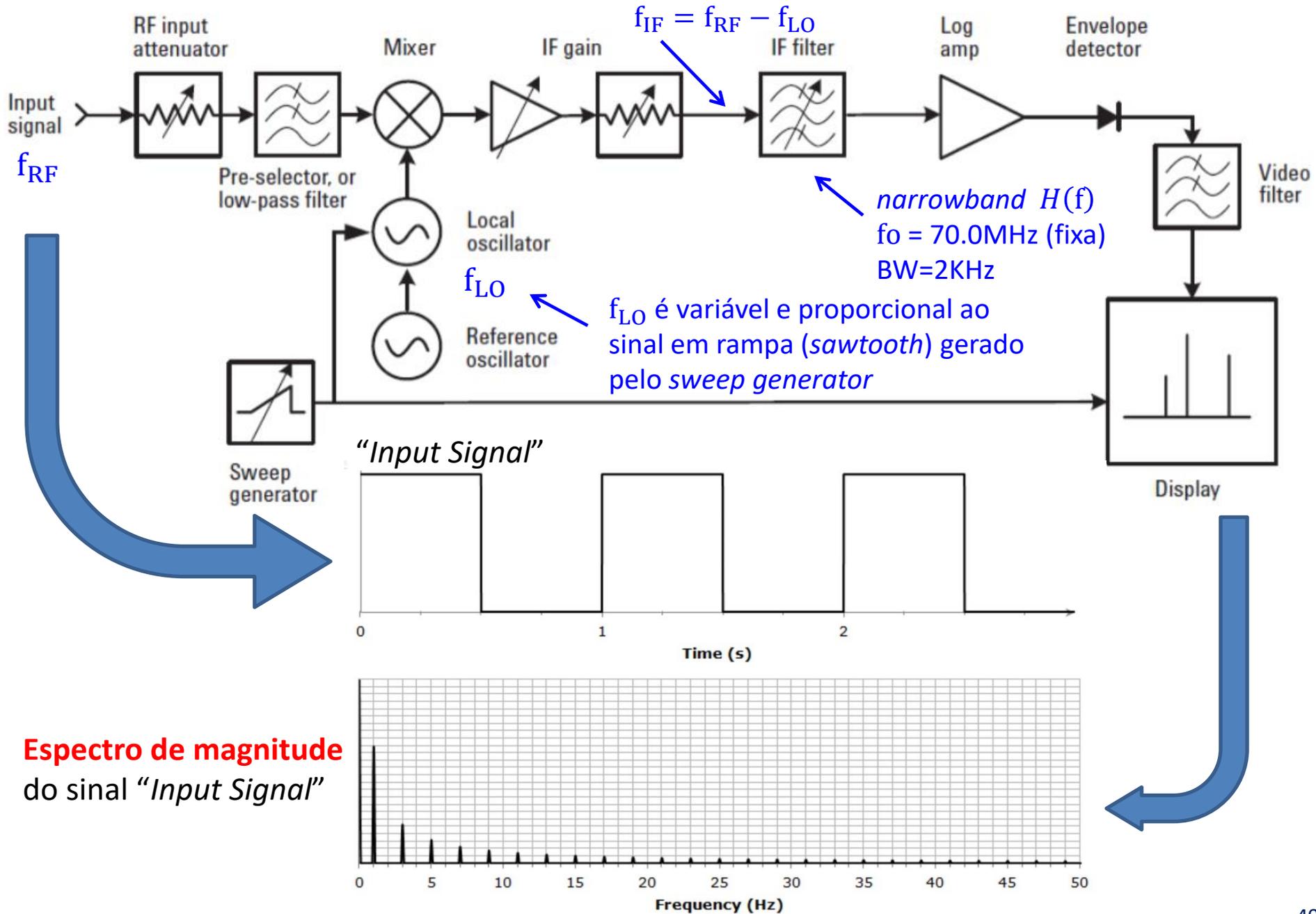
O conceito de espectro de um sinal



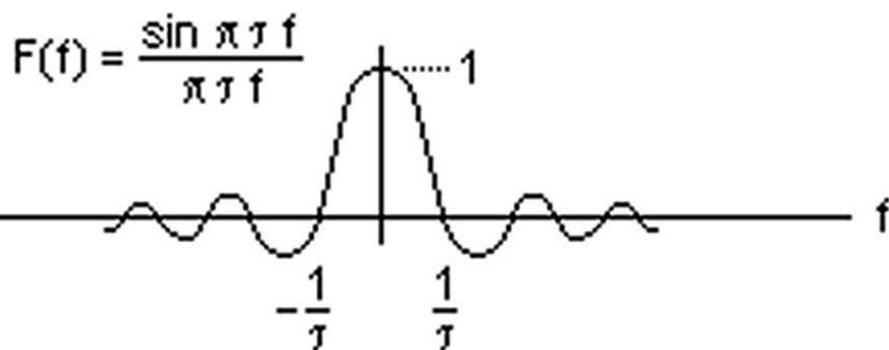
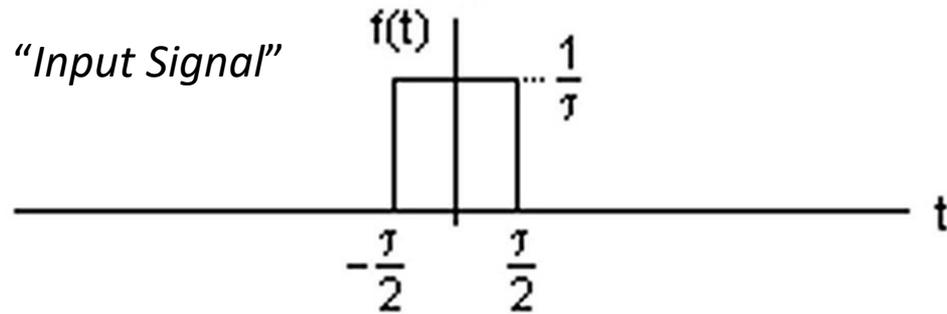
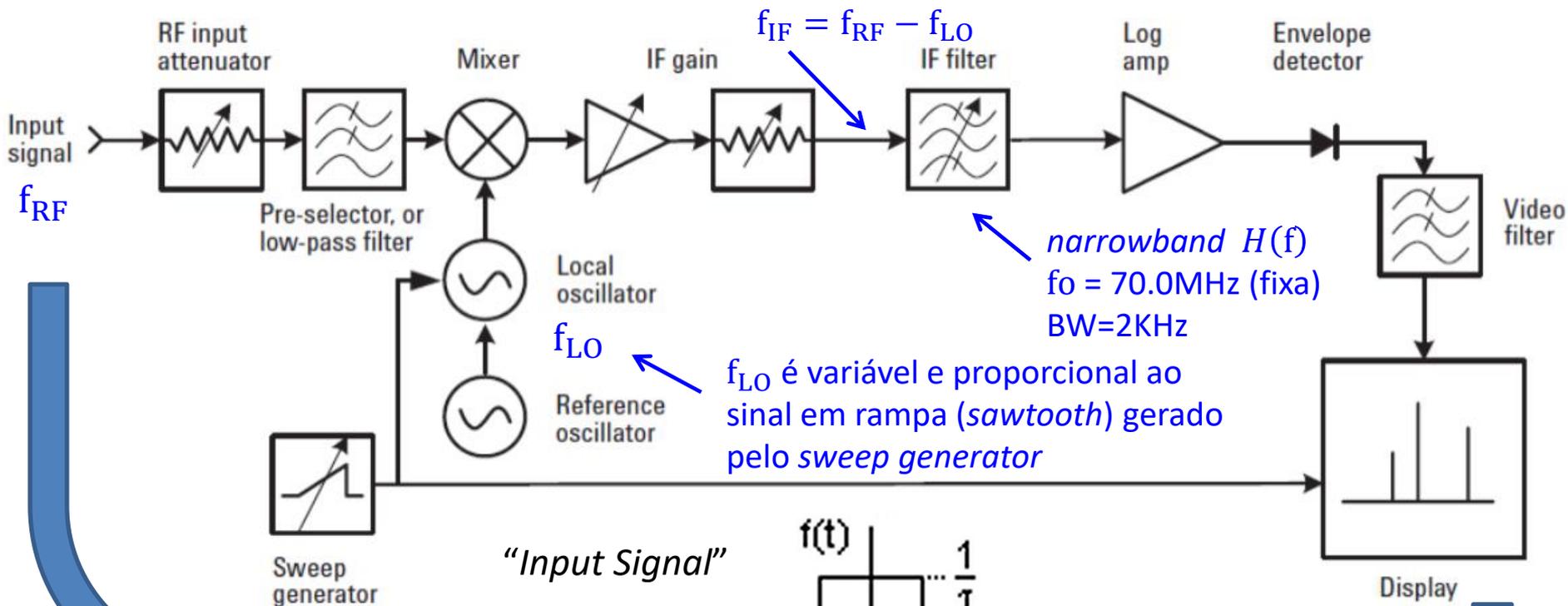
Portanto, o nível DC na saída do “*Vídeo Filter*” é proporcional à amplitude do sinal “*Input Signal*” de entrada na frequência $f_{RF} = f_{LO} + f_0$. Como o “*sweep generator*” varia a frequência que o sistema “deixa passar” no intervalo $f_{LO\min} + f_0 \leq f_{RF} \leq f_{LO\max} + f_0$, o nível DC na saída do “*Vídeo Filter*” identifica a amplitude de cada frequência do sinal de entrada neste intervalo.

Se a amplitude do nível DC na saída do “*Video Filter*” controlar a ordenada (eixo vertical) da tela gráfica “*Display*” e se a amplitude da rampa do “*Sweep generator*” controlar a abscissa (eixo horizontal) então a tela gráfica “*Display*” mostrará a curva da amplitude de cada frequência que compõe o sinal de entrada para cada frequência no intervalo $f_{LO\min} + f_0 \leq f_{RF} \leq f_{LO\max} + f_0$, curva que é o **espectro de magnitude** do sinal “*Input Signal*”.

Exemplo do espectro de um sinal (onda quadrada de período 1s)



Exemplo do espectro de um sinal (pulso aperiódico de largura τ)



Espectro de magnitude do sinal *"Input Signal"*.

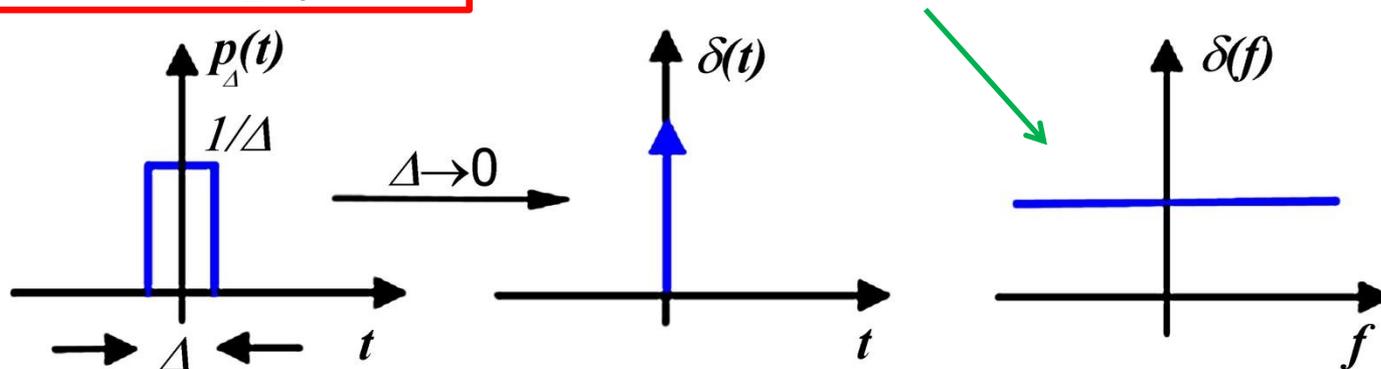
Note que o tempo de varredura do *Sweep generator* tem que ser compatível com a duração τ do pulso.

Excitações elementares aperiódicas:

Até o momento basicamente utilizamos sinais senoidais contínuos (e discretos) da forma $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta)$ (e $x[n] = A \cos(2\pi f_0 n + \theta)$) como excitação periódica do sistema LTI sob análise, com período T dado por $T = 1/f_0$. Note que, conforme discutimos em slides anteriores, o gráfico da magnitude de espectro de um sinal senoidal é uma única barra espectral de amplitude A localizada em f_0 . Há um conjunto de funções elementares aperiódicas, contínuas e/ou discretas, que também são utilizadas para excitação do sistema LTI sob análise. Cada uma delas apresenta características espectrais distintas (definiremos formalmente espectro mais adiante – por hora consideremos informalmente como espectro a curva que é plotada na tela de um analisador de espectro, conforme discutimos nos slides anteriores) e, conseqüentemente, têm aplicabilidade distinta. São elas:

$$\text{Impulso unitário } \delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} P_{\Delta}(t):$$

Frequências negativas resultam da definição formal de espectro, que será vista adiante.



Note que a área sob a função que caracteriza a variação instantânea de $\delta(t)$ é uma área unitária, devido à $\delta(t)$ ser definido à partir do $\lim_{\Delta \rightarrow 0} P_{\Delta}(t)$. Como $\delta(t)$ é uma variação instantânea no tempo, seu espectro $\delta(f)$ será extremamente largo (na realidade, terá infinitas frequências), porque **infinitas frequências são necessárias p/ construir uma variação instantânea no tempo.**

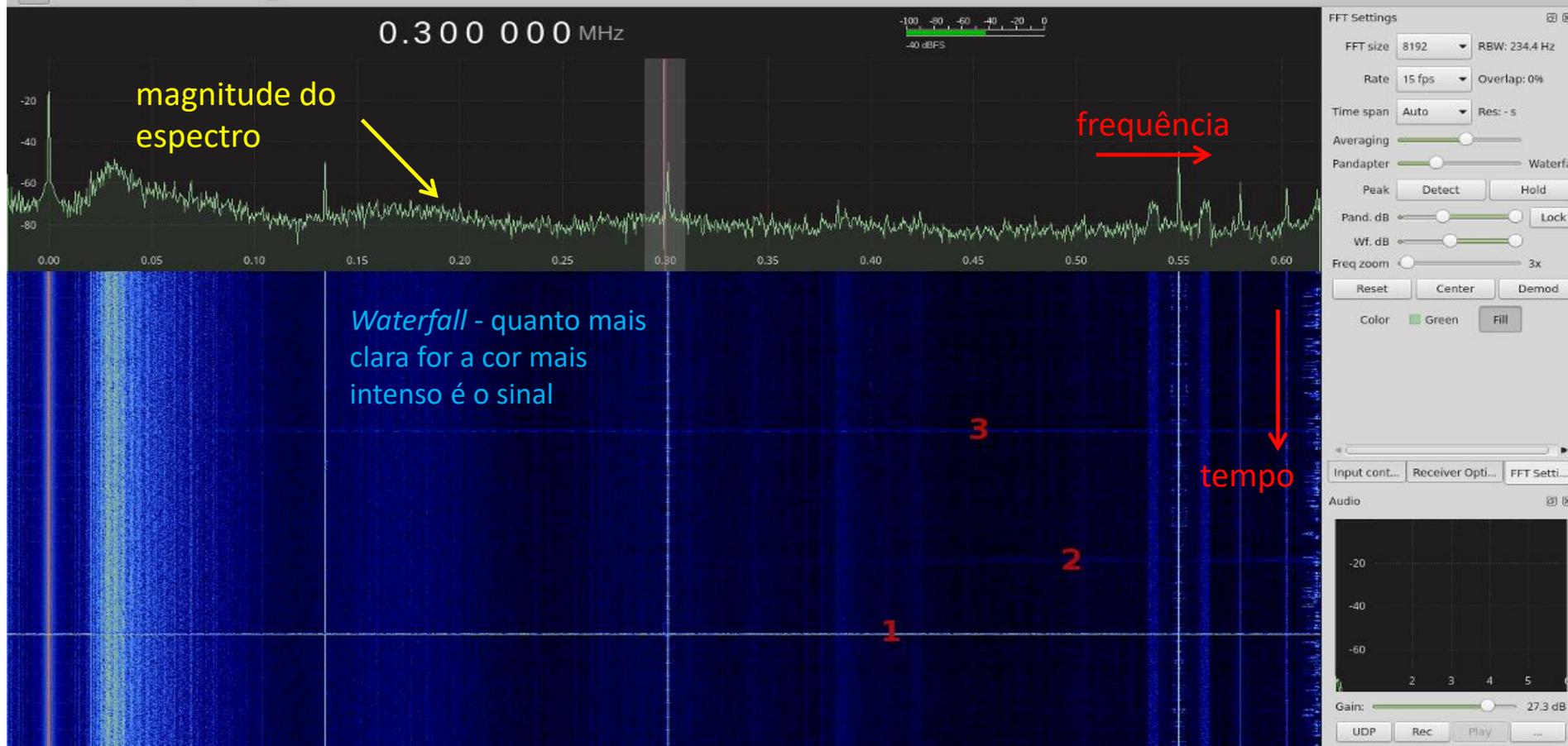
Excitações elementares aperiódicas:

Como exemplo do espectro extremamente largo gerado por uma variação impulsiva no tempo basta observar o que acontece durante uma tempestade c/ um receptor de AM na faixa de 525 a 1600 KHz. O surto impulsivo de corrente $\delta(t)$ que se estabelece na atmosfera a cada raio que ocorre irradia uma perturbação eletromagnética, e faz com que o receptor produza um som transiente no seu alto-falante que mantém a mesma intensidade sonora mesmo quando se varia a frequência de sintonia do receptor ao longo de toda faixa de 525 a 1600 KHz. Isto indica que a perturbação eletromagnética causada pelo surto de corrente do raio possui um espectro bem largo.



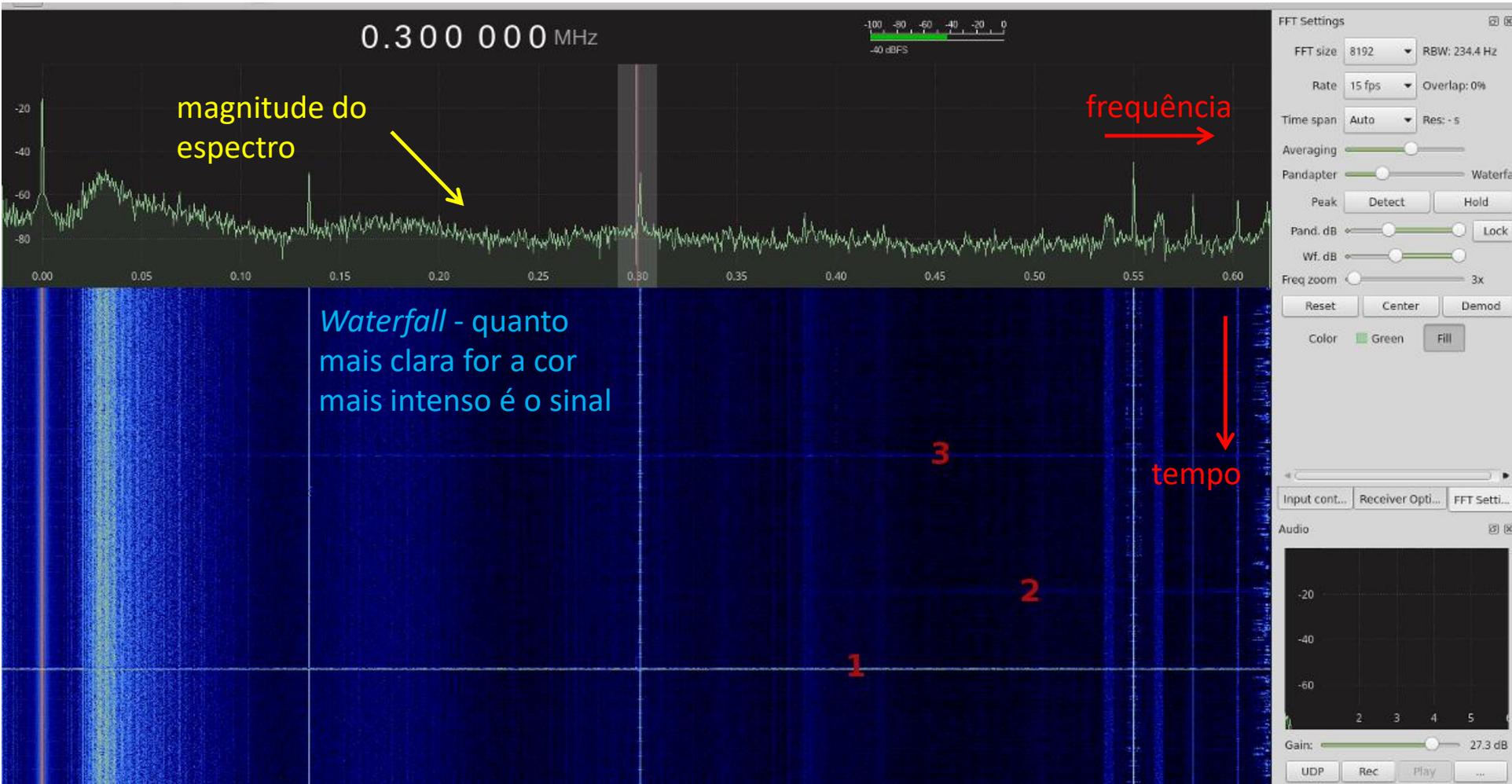
Excitações elementares aperiódicas:

Como outro exemplo do amplo espectro gerado por uma descarga elétrica (ver <https://ranous.wordpress.com/2017/08/03/diy-lightning-detection-with-sdr/>), a figura abaixo mostra o espectro gerado por três raios 1,2,e 3 na faixa de 50KHz a 600KHz:



A imagem acima mostra o *display* do analisador de espectro de um receptor SDR. O *waterfall* (região em azul) registra ao longo do tempo (eixo vertical) os valores da curva de magnitude do espectro, e quanto mais clara for a cor mais intenso é o sinal naquela frequência e naquele instante. O intervalo mostrado é de 30 segundos. A linha vertical clara em 550 kHz é a portadora de uma rádio AM naquela frequência. As 3 linhas finas horizontais 1,2 e 3 indicam a ocorrência de raios em 3 momentos distintos.

Excitações elementares aperiódicas:

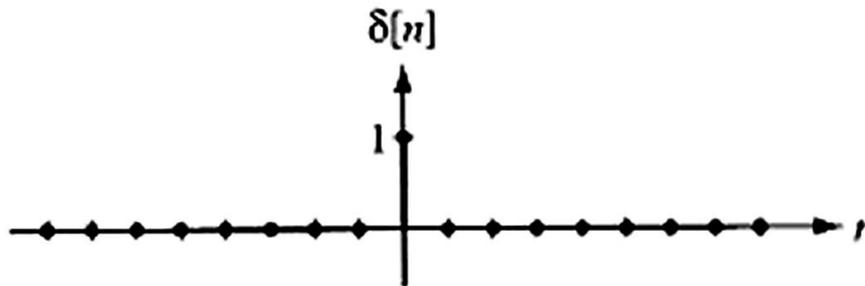


Note as linhas 1, 2 e 3 no *waterfall* – todas elas mantêm a mesma tonalidade da cor ao longo de respectiva linha, indicando uma intensidade de sinal constante ao longo do eixo da frequência nos 3 respectivos instantes em que os raios ocorreram. Isto indica a natureza da banda extremamente larga do espectro dos 3 raios. Note também que o raio 1 ocorreu primeiro e foi de grande intensidade (linha mais clara no *waterfall*). O raio 2 ocorreu alguns segundos depois e foi mais fraco ou mais distante. O raio 3 foi um pouco mais forte que o raio 2.

Excitações elementares aperiódicas:

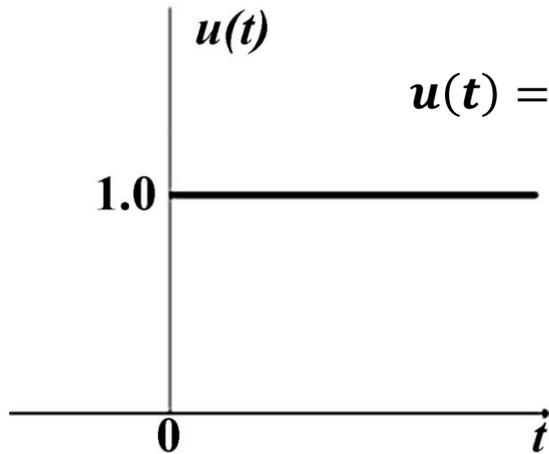
A figura abaixo mostra o impulso unitário $\delta[n]$ discreto no tempo:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

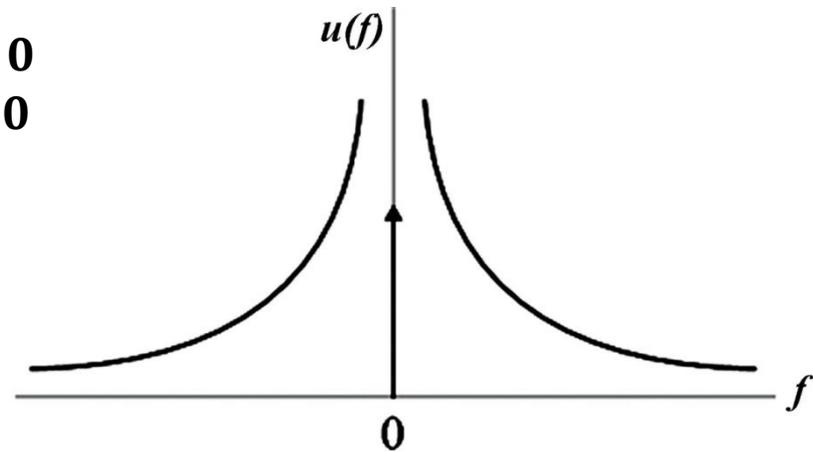


Excitações elementares aperiódicas:

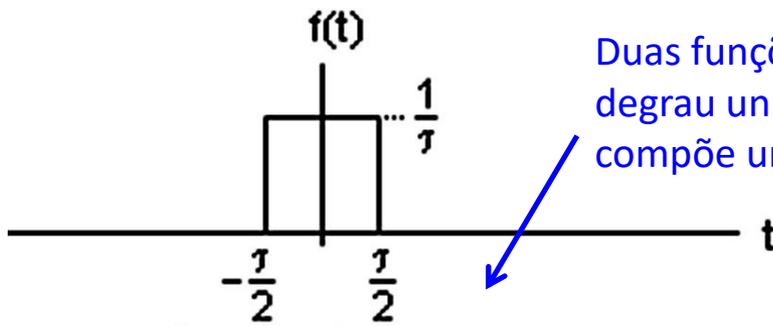
Degrau unitário $u(t)$:



$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



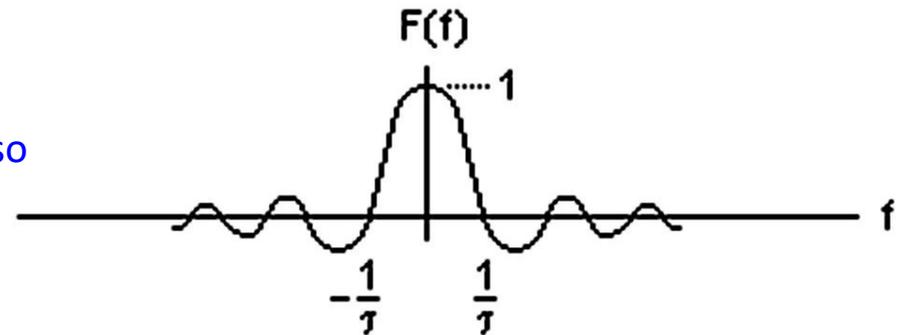
A função-excitação degrau unitário representa excitações do tipo *on-off*, como aquela gerada pela comutação de uma chave. São utilizadas também para compor outras funções excitação, como, por exemplo, uma função-excitação do tipo pulso:



Duas funções degrau unitário compõe um pulso

$$f(t) = \frac{1}{\tau} \left[u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right]$$

Time Domain

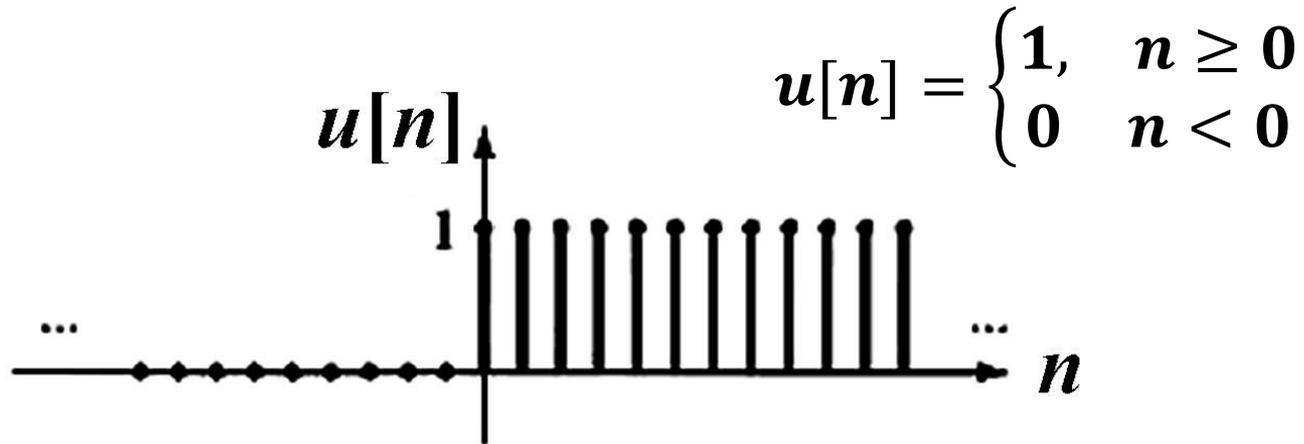


$$F(f) = \frac{\sin \pi \tau f}{\pi \tau f}$$

Frequency Domain

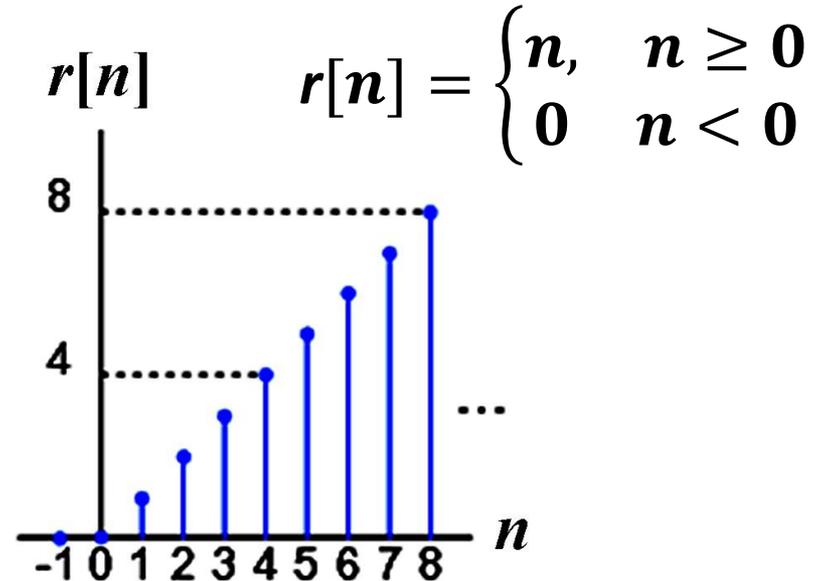
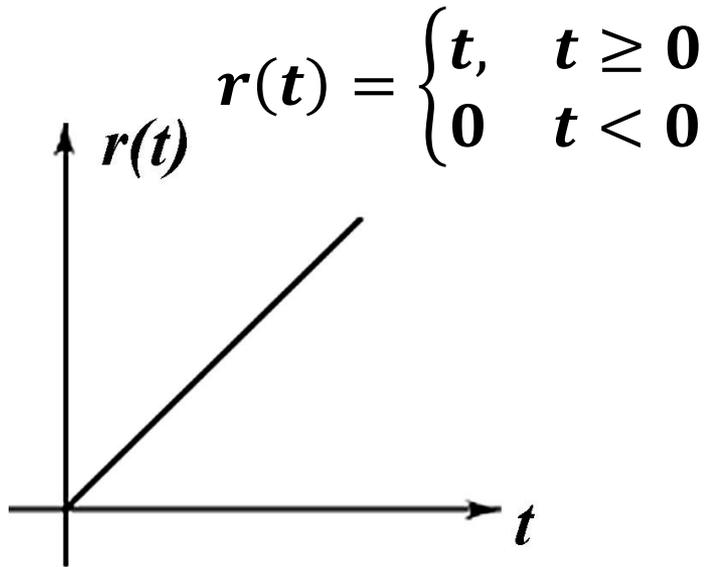
Excitações elementares aperiódicas:

A figura abaixo mostra o degrau unitário $u[n]$ discreto no tempo:



Excitações elementares aperiódicas:

Rampa unitária $r(t)$:



Note que $\mathbf{u}(t) = \frac{d}{dt}r(t)$ e que $\delta(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{u}(t)$.

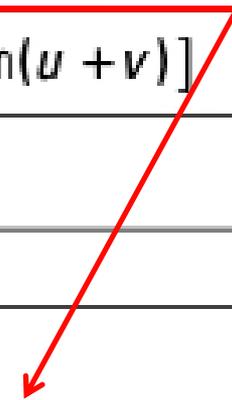
Apêndice A:

Operation	Formula
Rectangular to Polar Conversion	$z = x + jy = re^{j\theta}$ where $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ and $\theta = \arctan(y/x)$
Polar to Rectangular Conversion	$z = re^{j\theta} = r [\cos(\theta) + j\sin(\theta)] = x + jy$ where $x = r \cos(\theta)$ and $y = r \sin(\theta)$
Add: $z_3 = z_1 + z_2$	$(x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$
Subtract: $z_3 = z_1 - z_2$	$(x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$
Multiply: $z_3 = z_1 z_2$ (polar form)	$(x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + y_1 x_2)$ $r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$
Divide: $z_3 = z_1 / z_2$ (polar form)	$\frac{(x_1 x_2 - y_1 y_2) - j(x_1 y_2 - y_1 x_2)}{x_2^2 + y_2^2}$ $\frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$

Apêndice B:

Sejam $u = 2\pi f_1 t$ e $v = 2\pi f_2 t$. Valem as seguintes relações (*relationships*) trigonométricas:

<i>Relationship</i>	<i>Relationship</i>
$\sin u = \cos(u - \pi/2)$	$\cos u = \sin(u + \pi/2)$
$\cos(-u) = \cos u$	$\sin(-u) = -\sin(u)$
$\sin^2 u + \cos^2 u = 1$	$\cos^2 u = \frac{1}{2}(1 + \cos 2u)$
$\sin^2 u = \frac{1}{2}(1 - \cos 2u)$	$\cos(u \pm v) = \cos u \cos v \mp \sin u \sin v$
$\sin(u \pm v) = \sin u \cos v \pm \cos u \sin v$	$\cos u \cos v = \frac{1}{2}[\cos(u - v) + \cos(u + v)]$
$\sin u \sin v = \frac{1}{2}[\cos(u - v) - \cos(u + v)]$	$\sin u \cos v = \frac{1}{2}[\sin(u - v) + \sin(u + v)]$
$\cos u = \frac{1}{2}[e^{ju} + e^{-ju}]$	$\sin u = \frac{1}{2j}[e^{ju} - e^{-ju}]$
$e^{ju} = \cos u + j \sin u$	

heterodinação
 das frequências f_1 e f_2


Apêndice C:

Name	Continuous	Discrete
Impulse	$\delta(t) = 0, t \neq 0$ $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$	$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$
Step	$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$	$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$
Rectangle Pulse	$\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 1, & t \leq \tau/2 \\ 0, & t > \tau \end{cases}$	$u[n] - u[n - M]$
Triangle Pulse	$\Lambda\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 1 - t/\tau , & t \leq \tau \\ 0, & t > \tau \end{cases}$	$\begin{cases} n + 1, & 0 \leq n \leq M - 1 \\ 2M - 1 - n, & M - 1 < n \leq 2M - 2 \end{cases}$
sinc() and aliased sinc()	$\text{sinc}(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$	$\frac{\sin(N\pi x)}{\sin(\pi x)}, \text{ aliased sinc}()$
Sinusoid	$A \cos(2\pi f_0 t + \phi)$	$A \cos(\hat{\omega}_0 n + \phi), \hat{\omega} \text{ is mod } 2\pi$

Apêndice D:

Property	Continuous	Discrete
Energy	$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) ^2 dt < \infty$	$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] ^2$
Power	$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) ^2 dt < \infty$	$P_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] ^2 < \infty$
Periodic	$x(t - T_0) = x(t), T_0 = \text{period}$	$x[n - N_0] = x[n], N_0 = \text{period}$
Even	$x(-t) = x(t)$	$x[-n] = x[n]$
Odd	$x(-t) = -x(t)$	$x[-n] = -x[n]$