



Conversão A/D e D/A



Departamento de Eletrônica e Computação

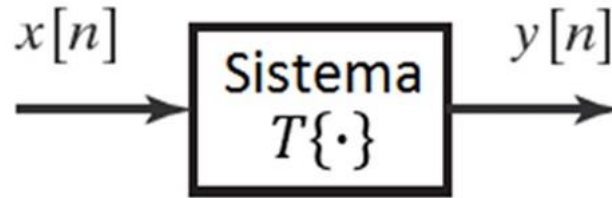
Centro de Tecnologia

ELC1115 – Sinais e Sistemas

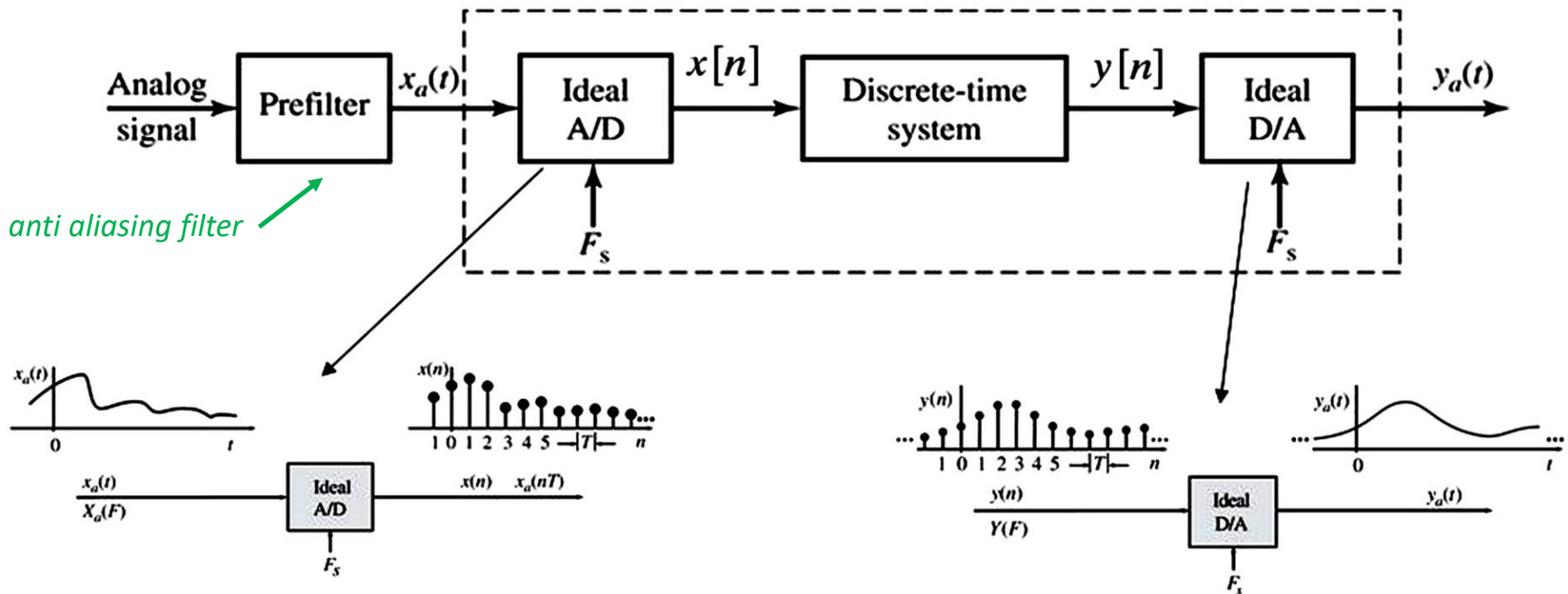
Prof. Fernando DeCastro

Processamento digital de sinais do *real world*

Conforme discutido no Cap I das notas de aula, um sistema digital (=sistema discreto) implementa uma transmitância $T\{\bullet\}$ que define o conjunto de operações ou processo que o sistema aplica sobre sequência de entrada $x[n]$ resultando na sequência de saída $y[n]$.



Mas para que um sistema digital possa processar sinais do mundo real, que são sinais analógicos (=sinais contínuos) , é necessário digitalizar o sinal analógico através de um conversor A/D, processar digitalmente o sinal digitalizado e reconverter o sinal digitalizado através de um conversor D/A em um sinal analógico:



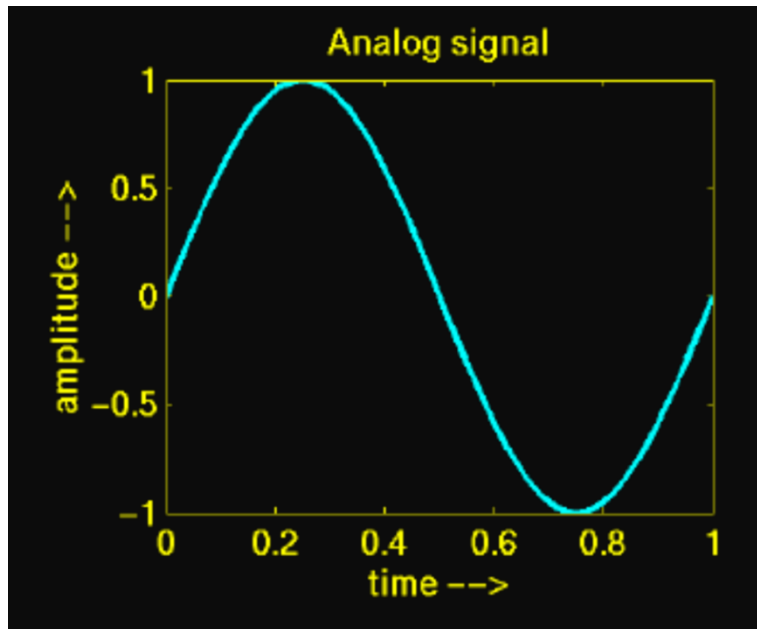
Conversão A/D

Um conversor A/D implementa 3 processos básicos, que, em geral, ocorrem na seguinte ordem:

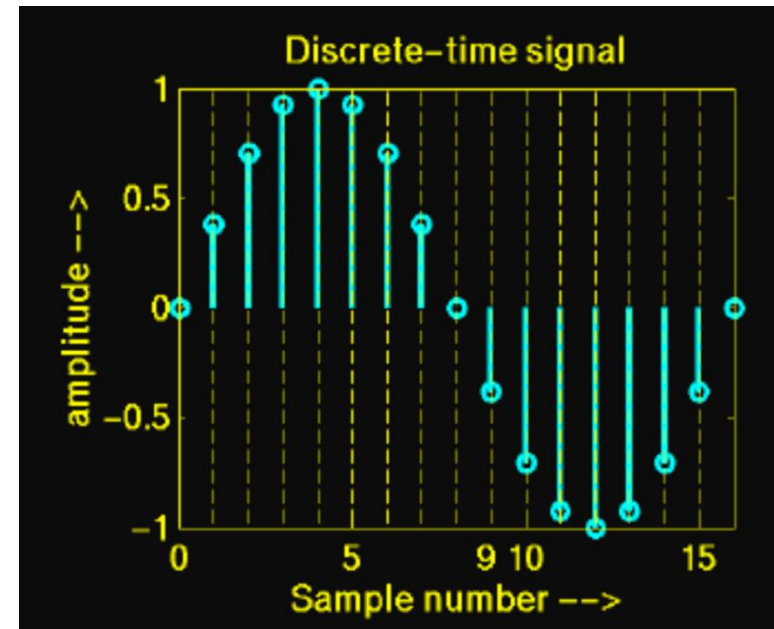
(1) Amostragem: Transformação do sinal contínuo no tempo em um sinal discreto no tempo (= sinal amostrado) de forma a atender a restrição de que qualquer processador digital opera de maneira discreta no tempo quanto à grandeza representada (clock – 3 GHz: 3 bilhões de operações por segundo, por exemplo).

(2) Quantização: Transformação da faixa de amplitudes contínua do sinal amostrado em (1) em uma faixa de amplitudes discreta de forma a atender a restrição de que qualquer processador digital opera de maneira discreta em amplitude quanto ao valor da grandeza armazenada em seus registradores. Por exemplo, um processador com tamanho do registrador 8 bits permite a representação de $2^8 = 256$ valores possíveis de amplitude (8 bits/amostra) \Rightarrow quantização da amplitude da grandeza representada.

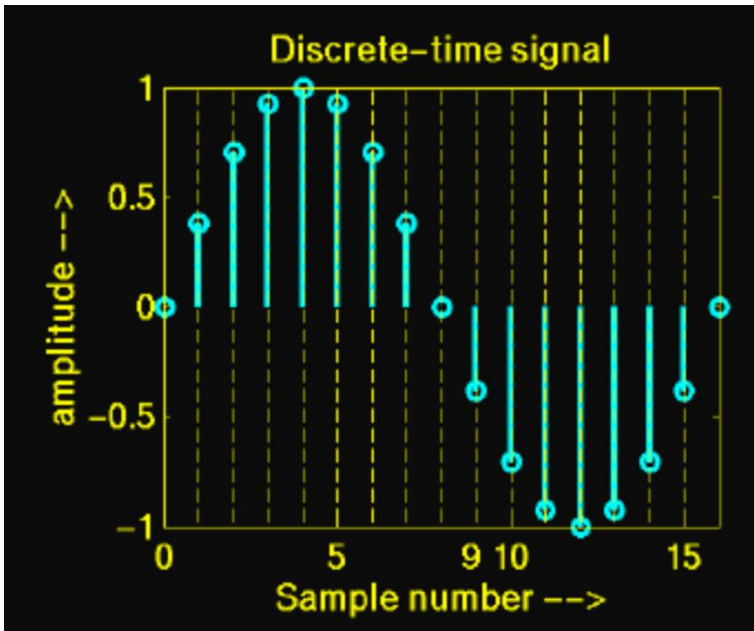
(3) Codificação: O sinal amostrado e quantizado resultante de (1) e (2) é transformado em uma sequência numérica em base binária. Cada amostra quantizada é mapeada em uma palavra binária de $N = \text{ceil}(\log_2(M)) = \text{ceil}(\ln(M)/\ln(2))$ bits onde M é número de níveis de quantização adotado e onde $\text{ceil}(\cdot)$ é o operador que retorna o menor número inteiro \geq que o argumento (\cdot).



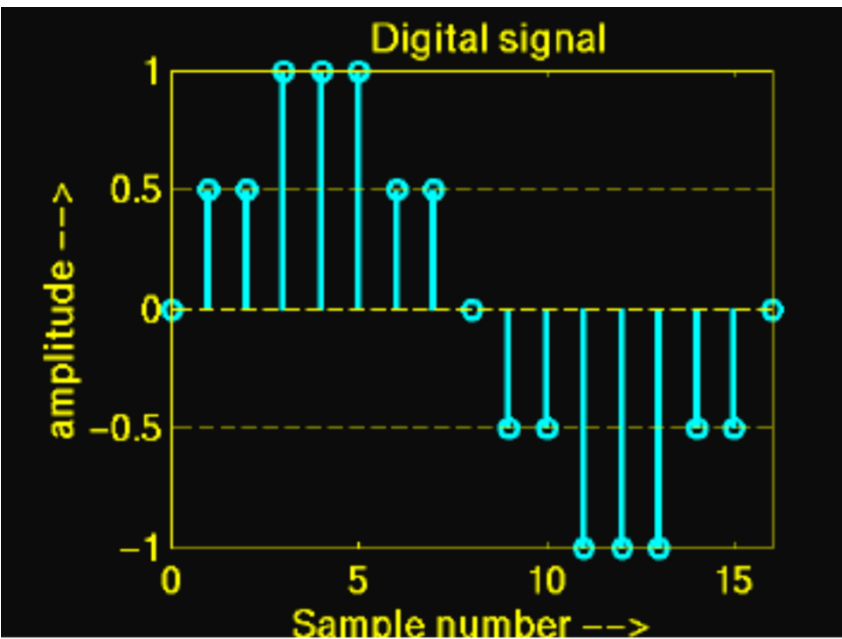
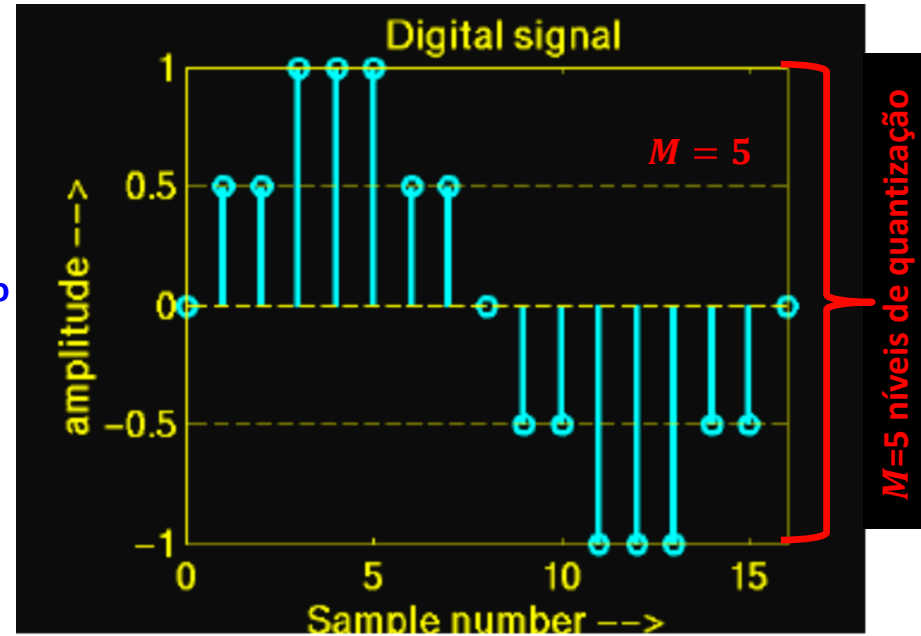
Amostragem



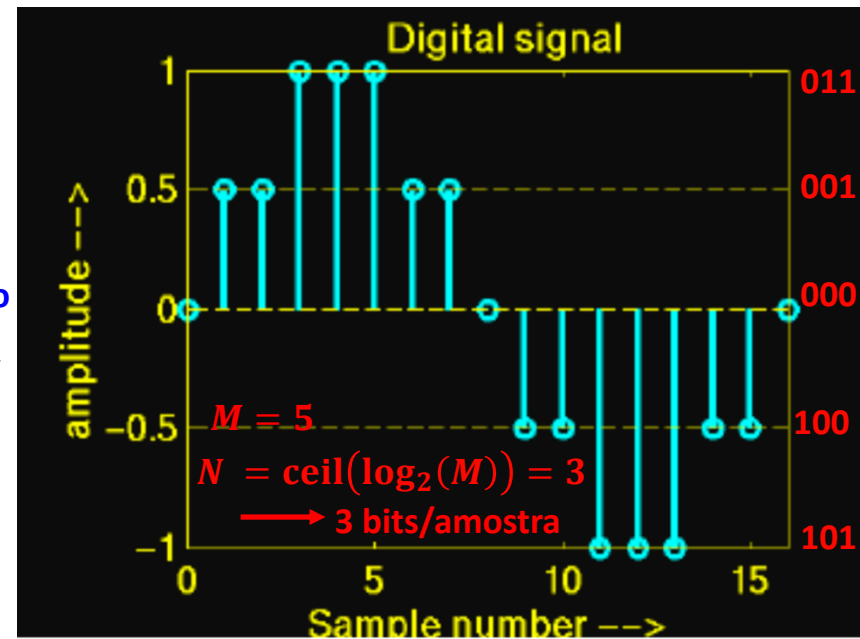
Conversão A/D



Quantização

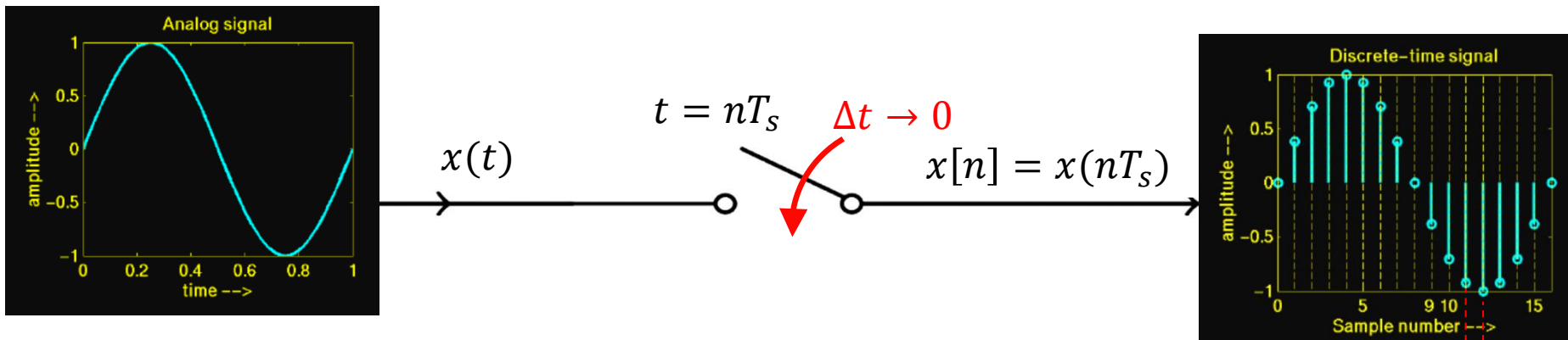


Codificação

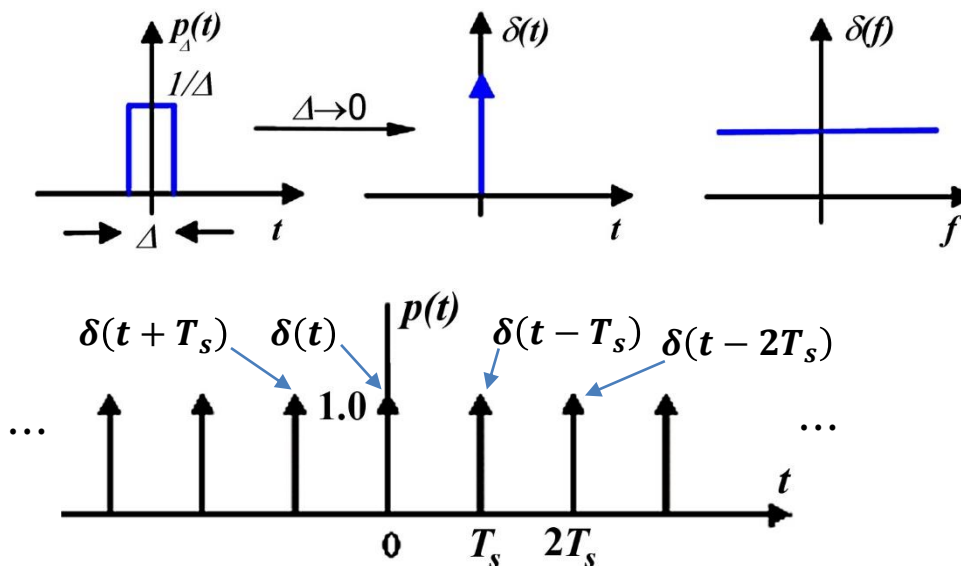


Amostragem

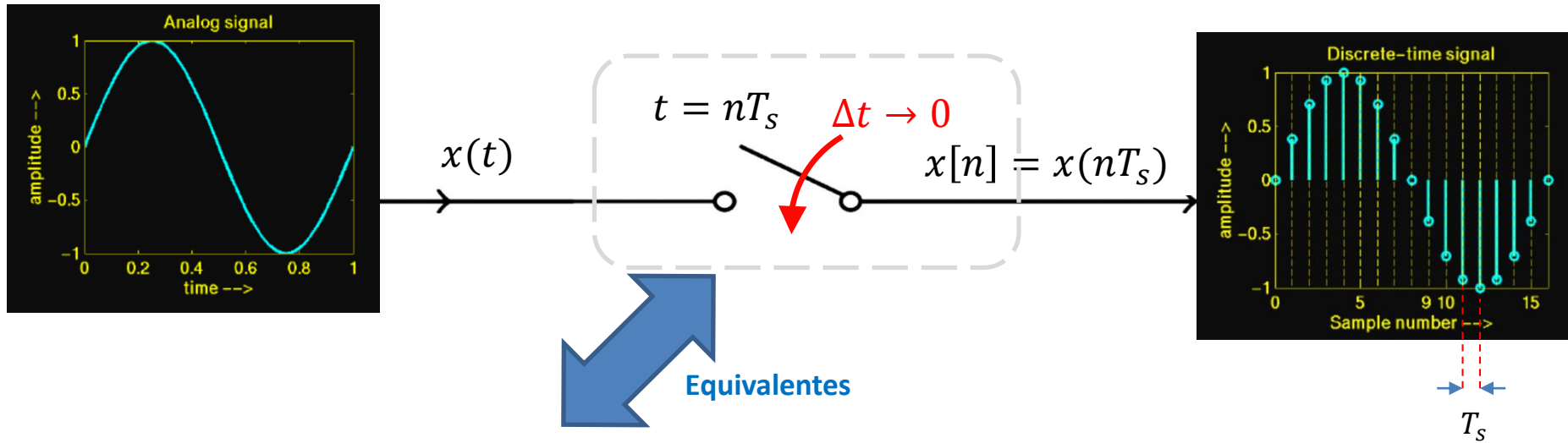
O processo de amostragem (*sampling process*) pode ser modelado por uma chave que fecha a cada T_s segundos durante um intervalo infinitesimal $\Delta t \rightarrow 0$, sendo a frequência de amostragem f_s do processo dada por $f_s = 1/T_s$, onde T_s é o intervalo de amostragem:



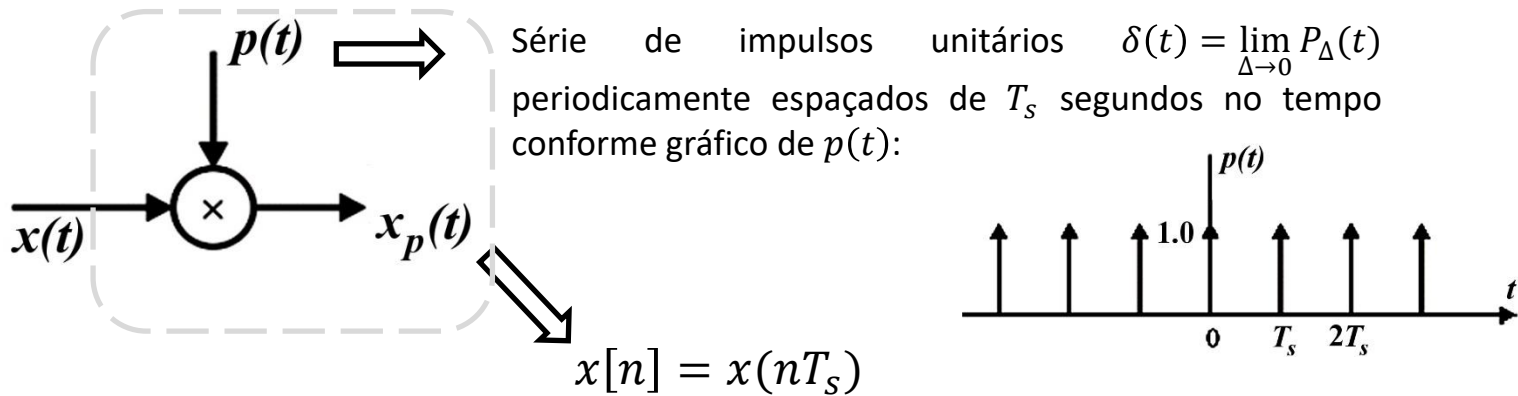
A chave que fecha a cada T_s segundos durante um intervalo infinitesimal $\Delta t \rightarrow 0$ pode ser modelada pela multiplicação de $x(t)$ por uma série $p(t)$ de pulsos $P_\Delta(t)$ periódicos de largura infinitesimal $\Delta \rightarrow 0$ e de período T_s , notando que, conforme já visto no Cap I das notas de aula, $P_\Delta(t)$ define o Impulso unitário $\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} P_\Delta(t)$:



Amostragem

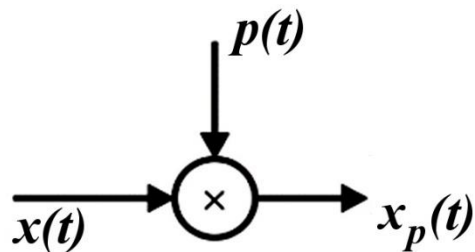
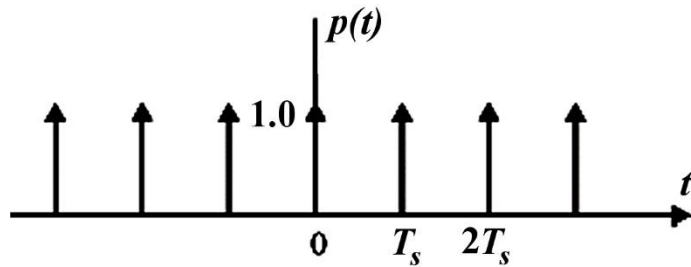
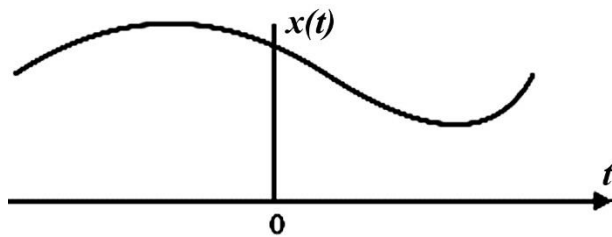


Equivalentes

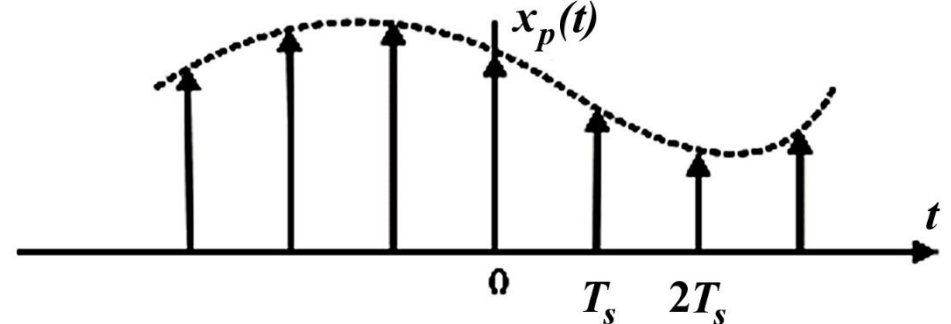
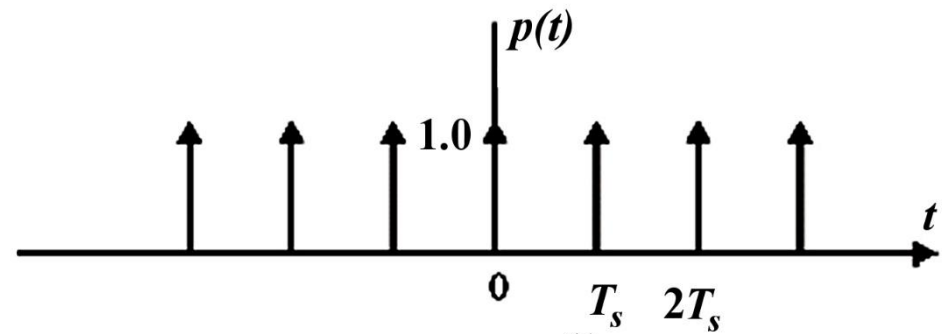
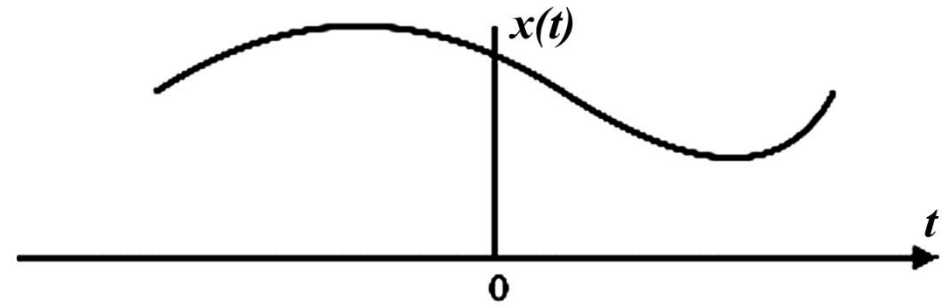


Amostragem

Exemplo: Consideremos o processo de amostragem do sinal $x(t)$ mostrado abaixo, o qual é amostrado a uma frequência de amostragem $f_s = 1/T_s$ por um trem de impulsos periódicos $p(t)$, sendo T_s o intervalo de amostragem. Determine o gráfico do sinal amostrado $x_p(t)$.

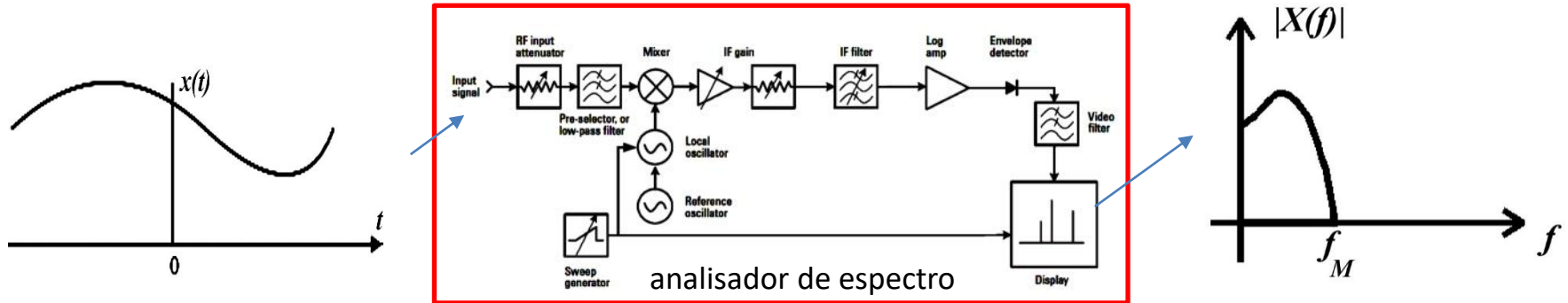


Solução:



Características espectrais do sinal amostrado:

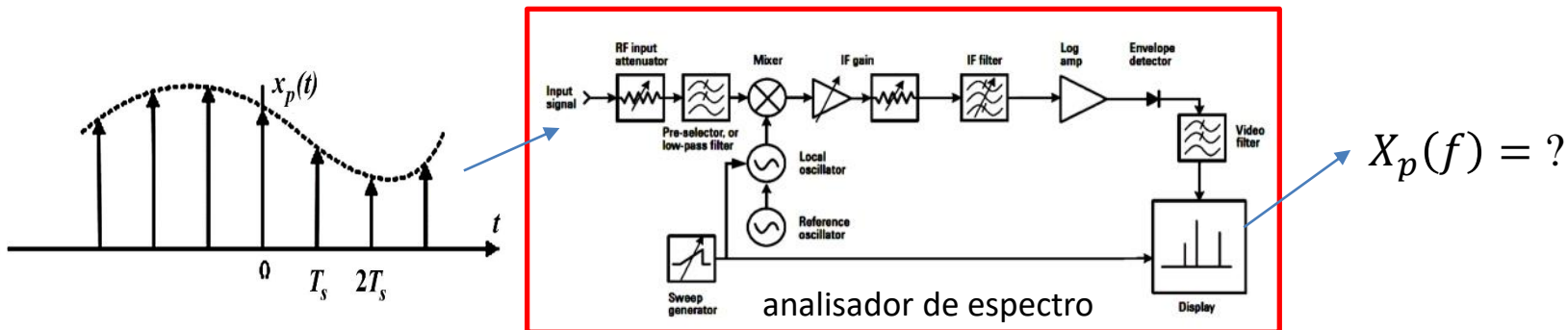
Vamos supor que o sinal $x(t)$ do slide anterior seja aplicado à entrada do analisador de espectro de varredura discutido no Cap I das notas de aula e que a magnitude do espectro resultante na tela do analisador seja $|X(f)|$ conforme abaixo:



Note que a magnitude $|X(f)|$ do espectro de $x(t)$ **apresenta componentes espectrais de magnitude significativa desde DC ($f = 0$ Hz) até uma frequência máxima f_M** , sendo desprezíveis as componentes espectrais acima desta frequência.

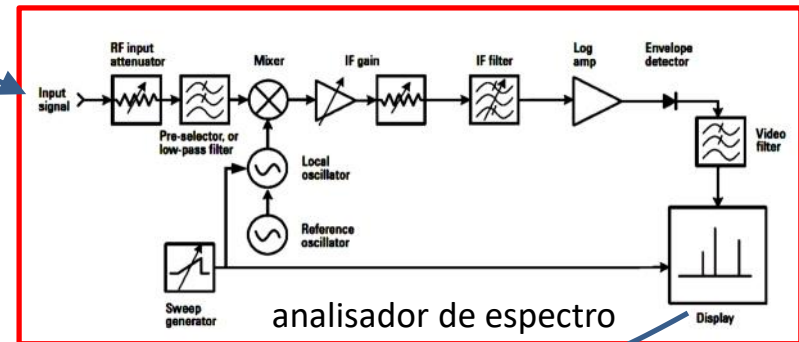
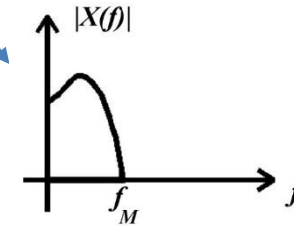
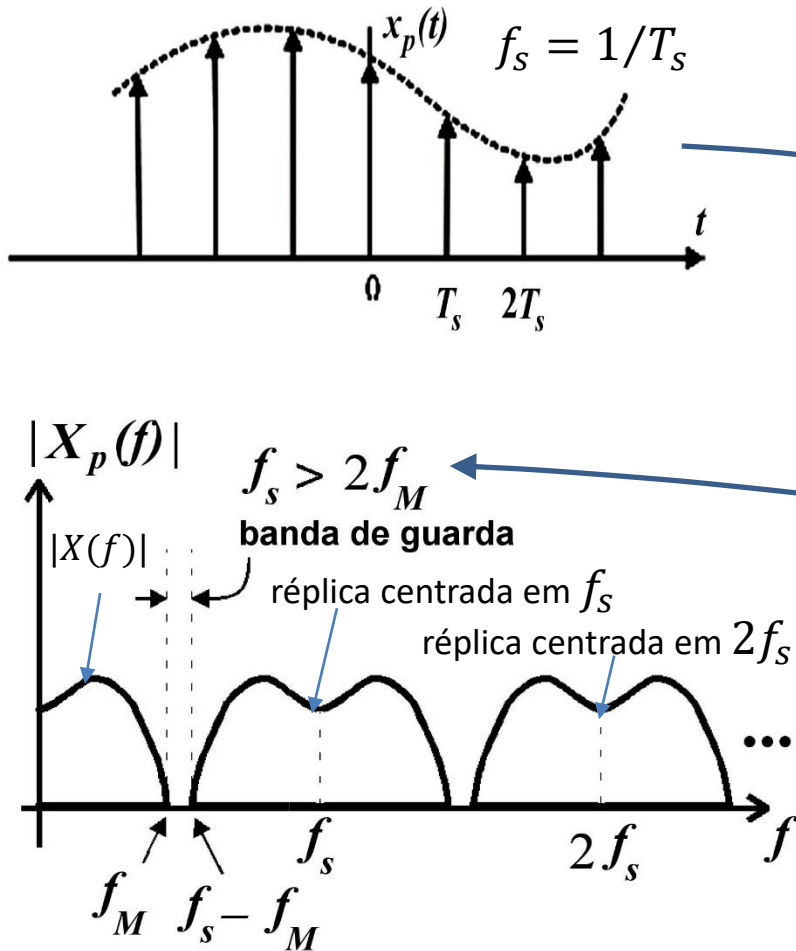
DC – *direct current* (corrente contínua não varia no tempo então seu espectro é uma barra em $f = 0$ Hz)

Pergunta: O que acontece com o espectro $X(f)$ de um sinal analógico $x(t)$ quando $x(t)$ é amostrado a uma frequência de amostragem $f_s = 1/T_s$ por um trem de impulsos periódicos $p(t)$, sendo T_s o intervalo de amostragem? Reformulando a pergunta – o que resulta na tela do analisador de espectro na situação que segue?

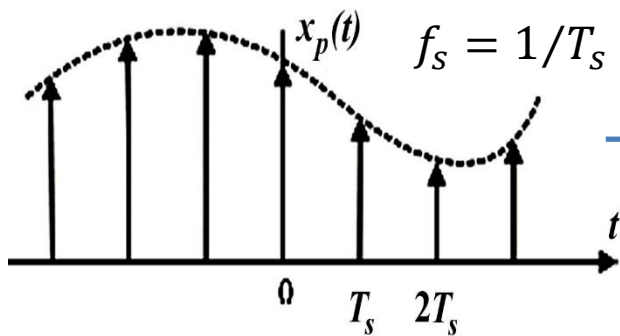


Características espectrais do sinal amostrado:

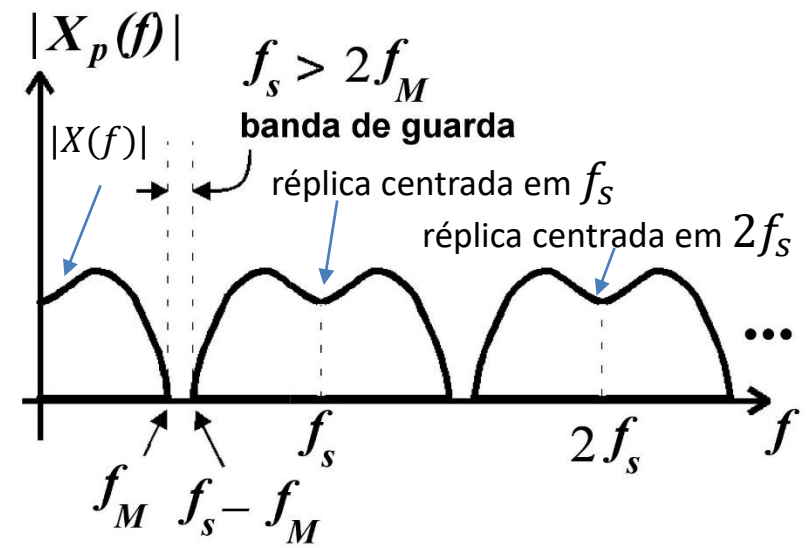
Resposta à pergunta do slide anterior: Sempre que um sinal analógico $x(t)$ é amostrado no tempo a uma frequência de amostragem $f_s = 1/T_s$ por um trem de impulsos periódicos $p(t)$, onde T_s é o intervalo de amostragem, e sempre que o espectro $X(f)$ de $x(t)$ for limitado em banda até uma frequência máxima f_M **então a magnitude $|X_p(f)|$ do espectro do sinal amostrado $x_p(t)$ será formado do espectro $X(f)$ superposto com múltiplas réplicas de $X(f)$ espelhadas em banda e centradas em múltiplos inteiros de f_s no domínio frequência f :**



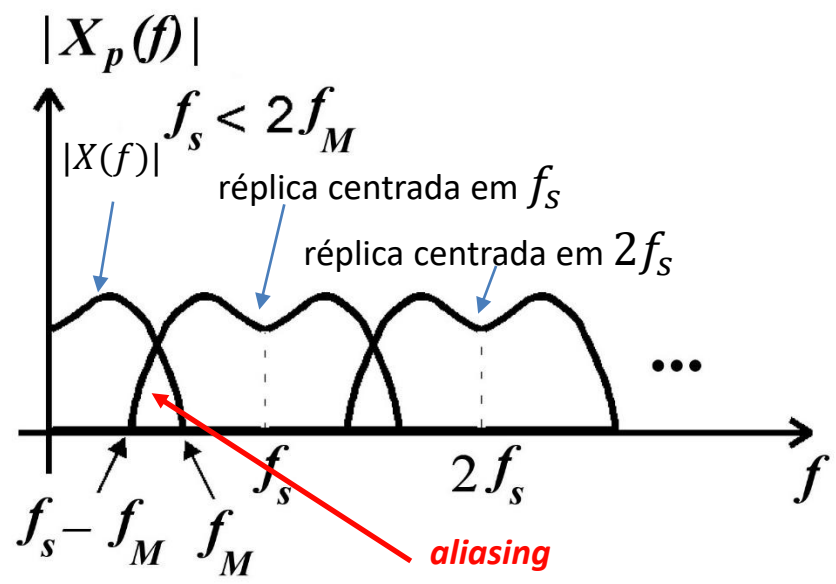
Características espectrais do sinal amostrado – critério de Nyquist



analizador de espectro

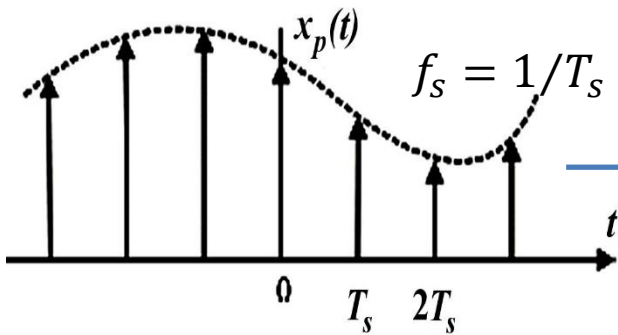


Note que a condição $f_s > 2f_M$ assegura uma banda de guarda entre as réplicas do espectro $X(f)$ centradas em múltiplos inteiros de f_s , o que impede que a réplica centrada em f_s invada e interfira com o sinal na faixa espectral do espectro original $X(f)$ que começa em $f = 0$ Hz e se estende até $f = f_M$.



Se a condição $f_s > 2f_M$ (**critério de Nyquist**) não é obedecida, ocorre interferência do sinal na faixa espectral do espectro original $X(f)$ pelas componentes espectrais da réplica centrada em f_s , o que caracteriza a interferência conhecida por **aliasing** (*alias* – pseudônimo), ou seja, é o próprio sinal original $X(f)$ interferindo nele mesmo mas com frequência diferente (“nome” diferente – pseudônimo).

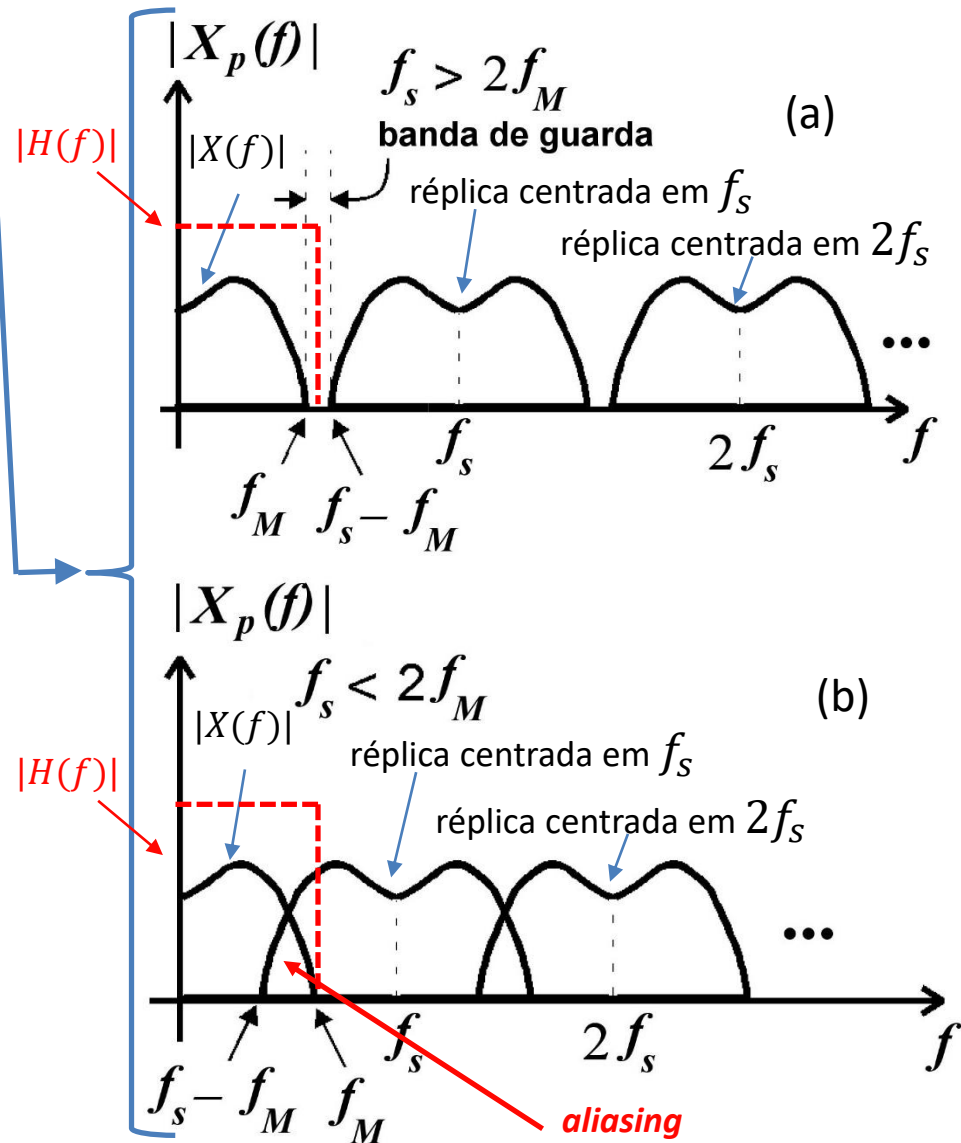
Características espectrais do sinal amostrado – recuperação do sinal analógico pelo D/A:



analisador de espectro

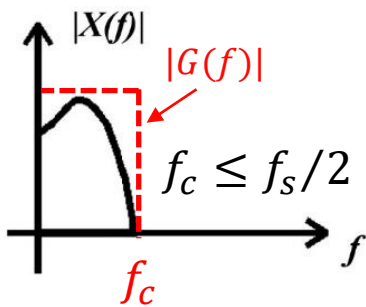
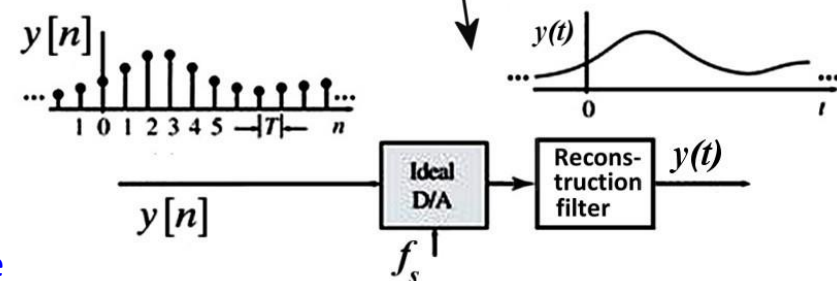
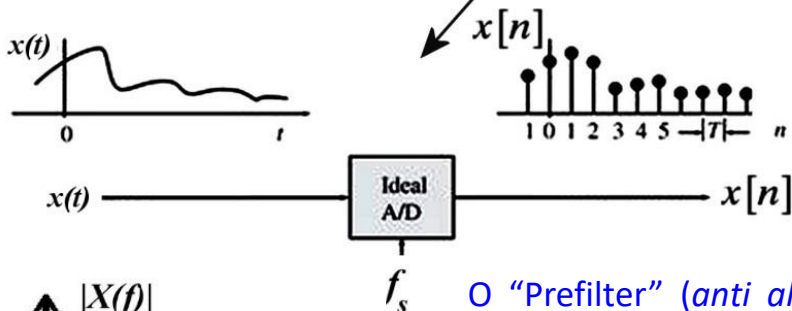
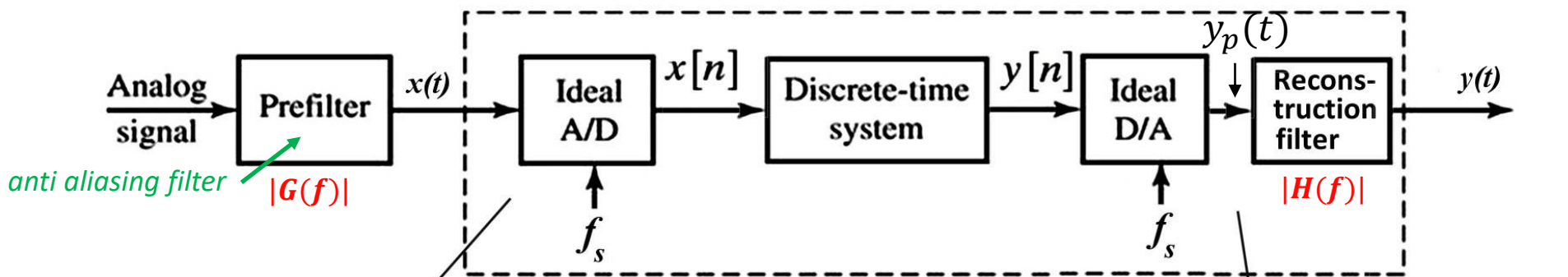
Importante notar que se conectarmos um conversor D/A na saída do A/D a título de verificar a fidelidade do processo A/D-D/A, o D/A recupera o sinal analógico basicamente através de um filtro passa-baixa analógico colocado em sua saída, denominado de **filtro de reconstrução**. A transmitância deste filtro no domínio tempo é a transmitância de um interpolador, que interpola as amostras através de uma reta ou uma função quadrática, ou qualquer função contínua suave.

O filtro de reconstrução tem função de transferência $H(f)$, idealmente conforme (a) ao lado, que elimina as réplicas de alta frequência resultando em sua saída um sinal com espectro $X(f)$ que é o espectro original de $x(t)$, fazendo com que a saída no tempo do filtro $H(f)$ seja uma cópia do sinal $x(t)$ original na entrada do D/A. Note em (b) que $f_s < 2f_M$ e portanto a banda de guarda deixa de existir tornando impossível o filtro $H(f)$ recuperar o espectro $X(f)$ original de $x(t)$ sem que ocorra *aliasing*.



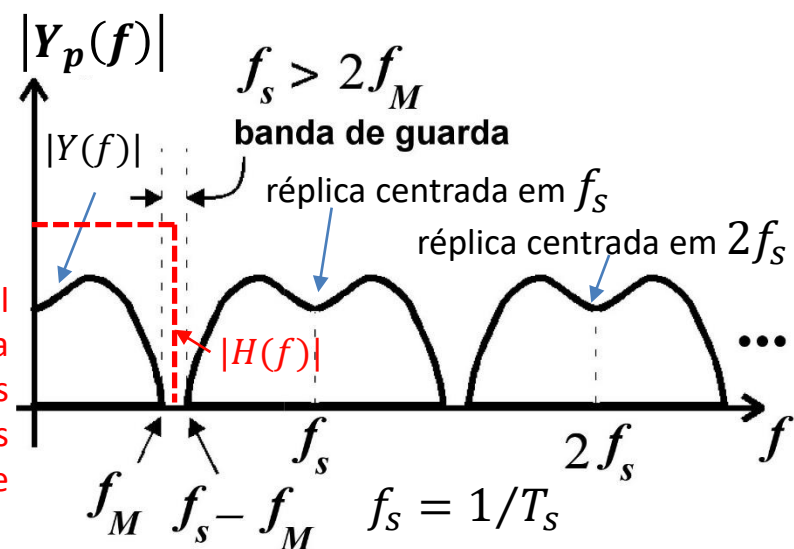
Portanto a mínima frequência de amostragem f_s para que não ocorra *aliasing* e o sinal digital possa ser reconvertido para um sinal analógico sem qualquer distorção pelo D/A é $f_s = 2f_M$, sendo f_M a maior frequência no espectro $X(f)$ de $x(t)$ a partir da qual a magnitude das componentes espectrais não são significativas.

Filtro anti-aliasing e recuperação do sinal analógico pelo D/A:



O "Prefilter" (*anti aliasing filter*) deve ter a função de transferência $G(f)$ de um filtro passa baixa c/ frequência de corte $f_c \leq f_s/2$ p/ evitar que componentes espectrais do sinal analógico de frequência maior que $f_s/2$ gerem *aliasing* no A/D.

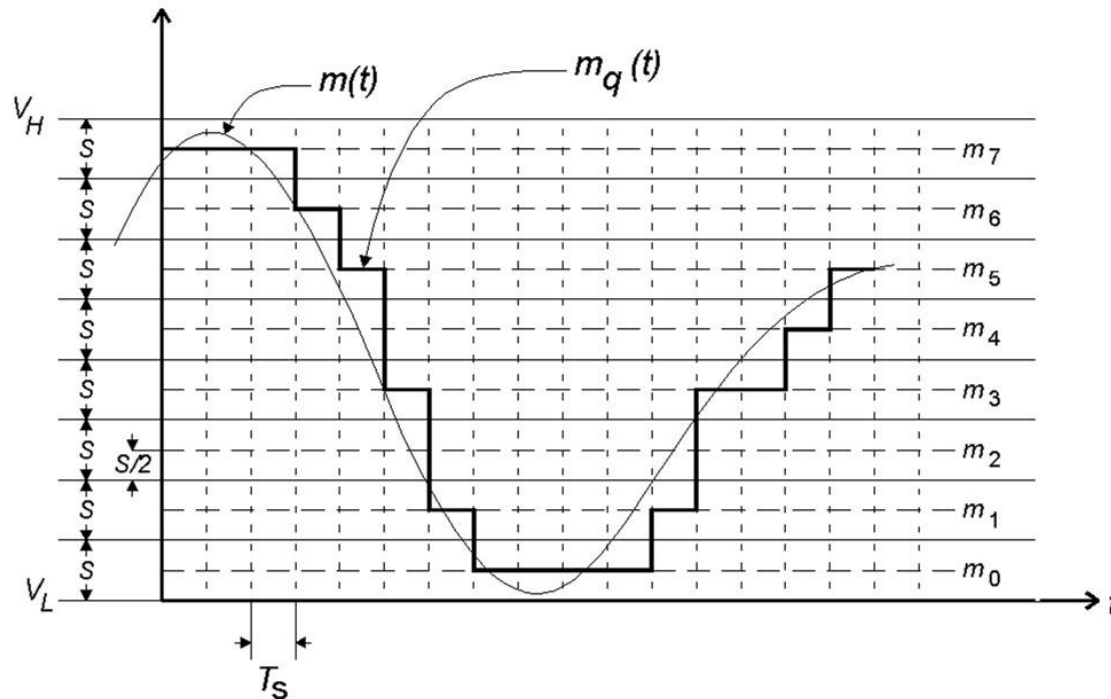
Caso $f_c < f_M$, sendo f_M a maior frequência no espectro do sinal analógico na entrada do filtro, ocorrerá perdas das componentes de alta frequência do sinal (é o caso, por exemplo, de um trem de pulsos periódicos que tem $f_M = \infty$). Ainda assim a perda de altas frequências é uma distorção preferível à distorção causada pelo *aliasing* que ocorrerá no A/D se a condição $f_M \leq f_s/2$ não for obedecida.



Quantização

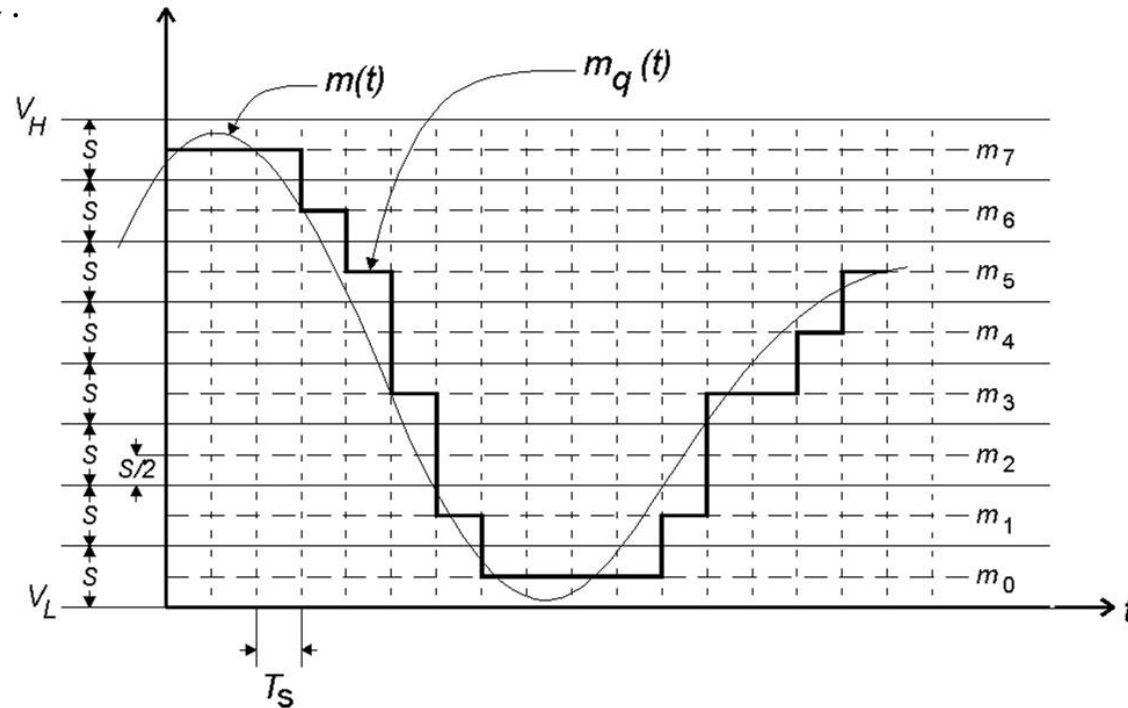
Quantização é o processo através do qual o sinal $m(n)$ contínuo em amplitude é transformado em um sinal $m_q(n)$ discreto em amplitude (valor). Ou seja, dado $m(n)$ no instante n , $m_q(n)$ assumirá um dos M possíveis valores, denominados níveis de quantização, do conjunto $\Theta = \{m_0, m_1, \dots, m_{M-1}\}$, sendo $m_0 < m_1 < \dots < m_{M-1}$, com $m_0 > m(n)$ e $m_{M-1} < m(n)$ para todo e qualquer n . Especificamente, $m_q(n) = Q\{m(n)\}$, onde $Q\{\cdot\}$ é o operador que representa a quantização do valor do argumento e é dado por $Q\{\cdot\} = \arg \min_{m_k} |(\cdot) - m_k|$, $m_k \in \Theta$, $k = 0, 1, \dots, M - 1$.

O operador $Q\{\cdot\}$ pode ser interpretado da seguinte maneira: Dado um valor x a ser quantizado, a operação definida por $Q\{x\} = \arg \min_{m_k} |x - m_k|$, $m_k \in \Theta$, $k = 0, 1, \dots, M - 1$, testa todas as M possíveis distâncias $|x - m_k|$ e atribui a $Q\{x\}$ aquele elemento m_q do conjunto $\Theta = \{m_0, m_1, \dots, m_{M-1}\}$ que resultou na menor distância $|x - m_q|$. Quanto menor o número M de níveis de quantização utilizados para representar $m(n)$, menos fiel será a representação e maior será o ruído de quantização.



Quantização

A figura abaixo mostra graficamente a operação de quantização $m_q(t) = Q\{m(t)\}$, ou $m_q(n) = Q\{m(n)\}$ se considerarmos que, antes de ser quantizado, $m(t)$ é amostrado a intervalos T_s . Portanto, é desnecessária a indexação temporal explícita das variáveis envolvidas. Assume-se que o instante de amostragem ocorre no início de cada intervalo T_s e que $m(t)$ varia entre os limites V_L e V_H .



Observe na figura que a operação $Q\{\cdot\}$ realizada é $Q\{\cdot\} = \arg \min_{m_k} |(\cdot) - m_k|$, $m_k \in \Theta$, $k = 0, 1, \dots, M - 1$, $\Theta = \{m_0, m_1, \dots, m_{M-1}\}$ com $M = 8$. A quantidade $S = (V_H - V_L)/M$ é denominada de **passo de quantização** ou **passo do quantizador** (*quantizer step*). A qualquer instante, o **erro de quantização** $e_q(t) = m(t) - m_q(t)$ é tal que $|e_q| \leq S/2$. Obviamente, quanto maior M , mais $m_q(t)$ assemelha-se a $m(t)$ e, portanto, menor será $e_q(t)$.

Quantização

A potência de ruído gerado no processo de quantização, ruído que é denominado de **ruído de quantização**, é dada pela média quadrática do erro de quantização. No domínio tempo, a potência de ruído de quantização é dada por

$$\overline{e_q^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e_q^2(t) dt$$

Da equação acima demonstra-se que (ver seção 2.2.1 de <http://www.fccdecastro.com.br/pdf/cd2.pdf>) a potência de ruído de quantização simplifica-se para

$$\overline{e_q^2} = \left[\frac{S^2}{12} \right]$$

Demonstra-se também no link acima referido que a potência do sinal é dada por

$$\overline{m^2(t)} = \frac{(MS)^2}{12}$$

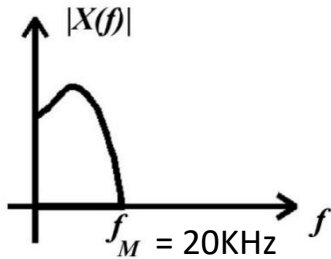
onde S é o tamanho do passo de quantização e M é o número de níveis de quantização (que determina o número de bits $N = \text{ceil}(\log_2(M)) = \text{ceil}(\ln(M)/\ln(2))$ por amostra no processo de codificação). A relação sinal ruído (SNR – *signal to noise ratio*) de quantização é então dada por

$$\text{SNR}_Q = \frac{\overline{m^2(t)}}{\overline{e_q^2}} = M^2 = (2^N)^2 = 2^{2N}$$

$$\text{SNR}_Q = 10 \log 2^{2N} = 6N \quad [\text{dB}]$$

Quantização - Exemplo

Exemplo: Consideremos um sinal analógico $x(t)$ cujo espectro $|X(f)|$ medido com um analisador de espectro é mostrado abaixo



Deseja-se processar digitalmente $x(t)$. É exigido uma relação sinal-ruído de quantização de 60dB no processo de digitalização. Determine a taxa de transmissão τ mínima em Kbps que o sistema que processará este sinal deverá prover para que não haja perda de informação.

Solução:

$$f_s = 2f_M = 40\text{KHz} = 40 \text{ [Kamostras/s]} \text{ (frequência de amostragem mínima de acordo com o critério de Nyquist)}$$

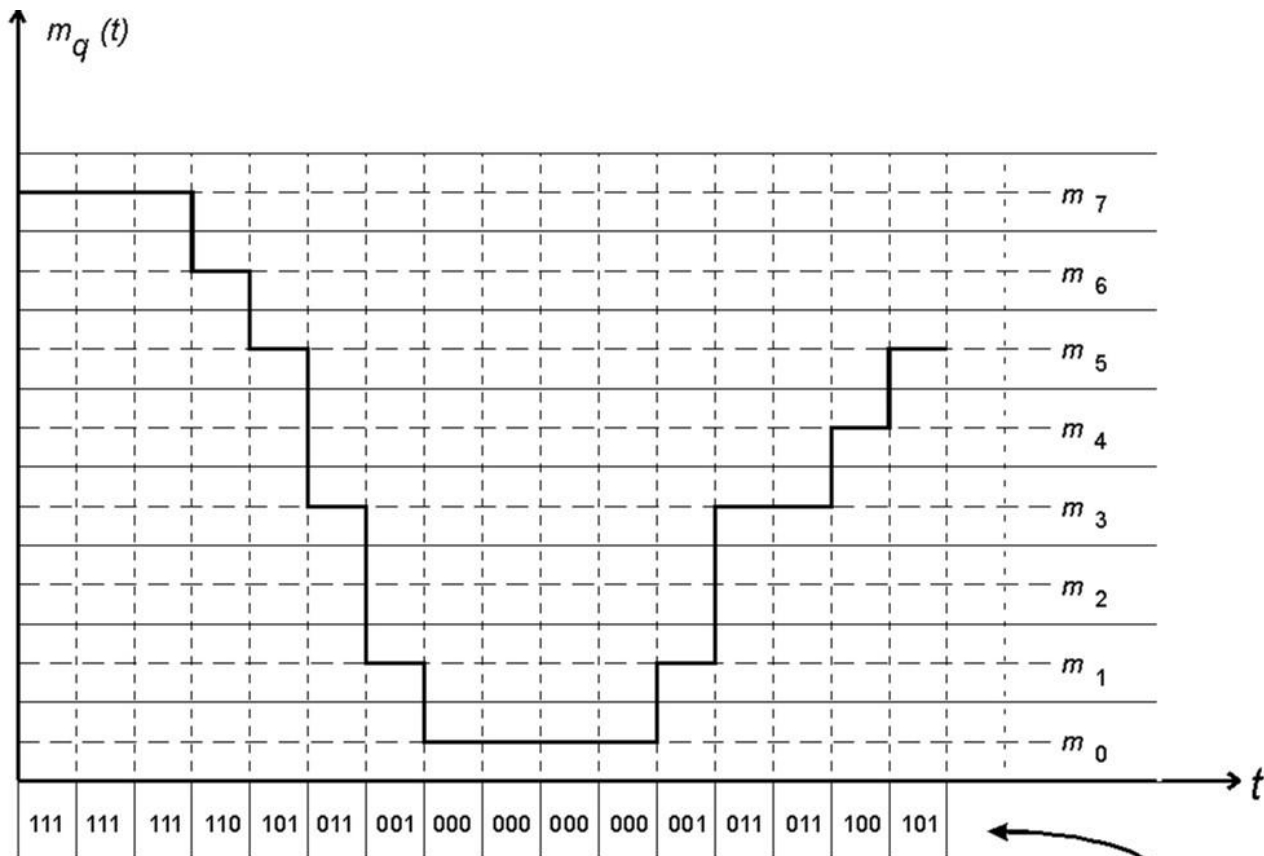
$$\text{SNR}_Q = 10 \log 2^{2N} = 6N \rightarrow N = \frac{\text{SNR}_Q}{6} = 10 \text{ [bits/amostra]}$$

$$\tau = f_s N = 40 \text{ [Kamostras/s]} \times 10 \text{ [bits/amostra]} = 400\text{Kbps}$$

Homework: Refazer este exemplo para $\text{SNR}_Q = 40\text{dB}$ e $f_M = 8\text{KHz}$.

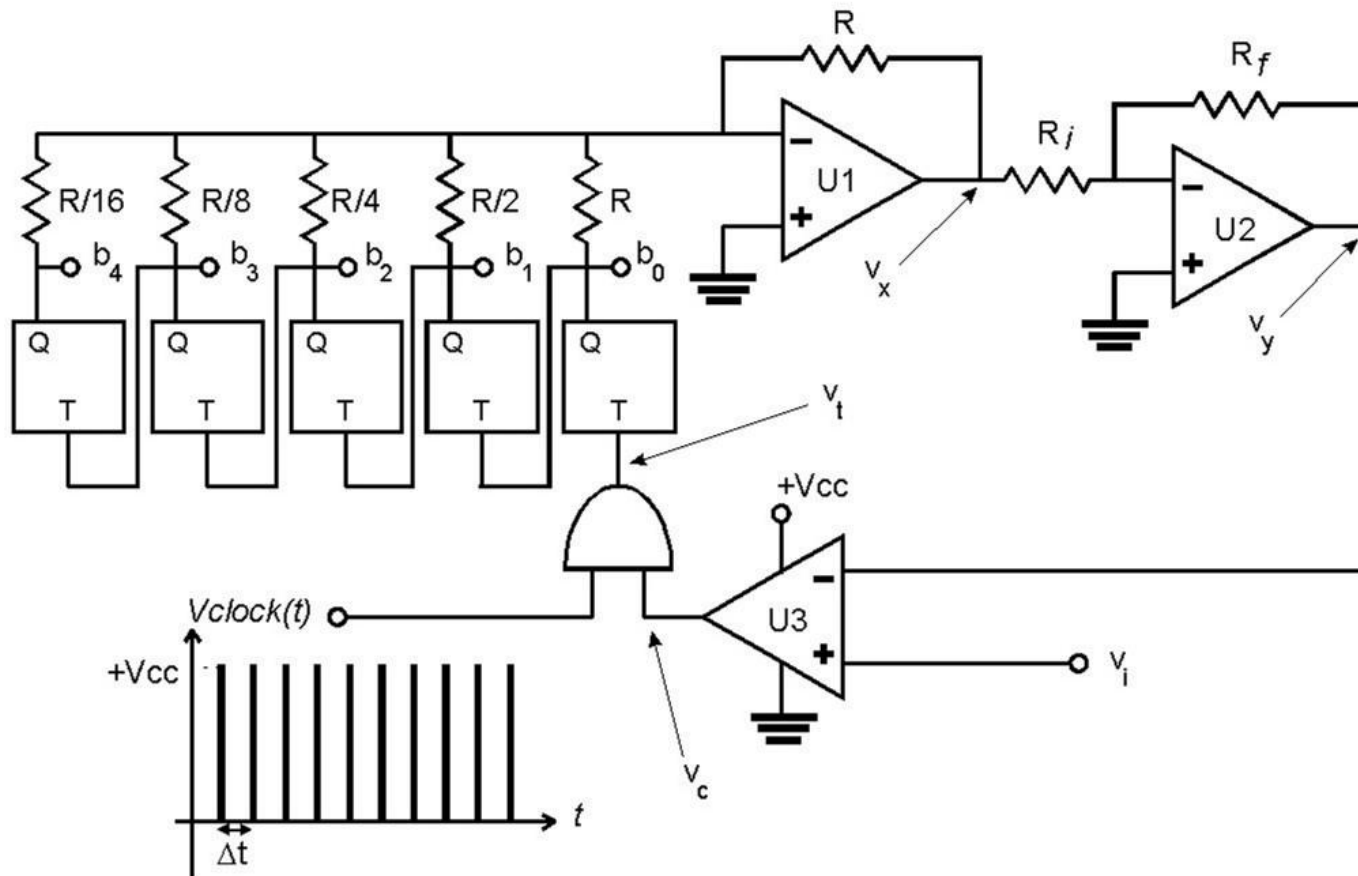
Codificação:

Nesta etapa da digitalização o sinal $m_q(t)$ (ou $m_q(n)$) resultante do processo de amostragem seguido do processo de quantização é transformado em uma seqüência numérica em base binária. Cada amostra $m_q(n) \in \Theta$ é mapeada em uma seqüência (ou bloco) de $N = \log_2 M$ dígitos binários (ou bits), conforme mostra a figura abaixo para $M = 8$, sendo $\Theta = \{m_0, m_1, \dots, m_{M-1}\}$ o conjunto de M possíveis valores de $m_q(n)$ ou níveis de quantização.



Codificação:

Uma possível implementação em *hardware* do mapeamento mostrado na figura do slide anterior é o conversor A/D (A/D: *analog to digital*) mostrado na figura abaixo. O sinal $m_q(t)$ é aplicado na entrada V_i e a saída resultante do mapeamento são os sinais $b_2 b_1 b_0$. Os sinais b_4 e b_3 não são utilizados porque são necessários somente $N = \log_2 M = 3$ bits para representar $M = 8$ níveis de quantização. Os amplificadores operacionais U1 e U2 são alimentados por fonte simétrica de $\pm V_{cc}$ volts. A tensão de alimentação do comparador U3, *flip-flops* e porta AND é assimétrica e de $+V_{cc}$ volts. Os *flip-flops* são do tipo T (*toggle*) e trocam o estado lógico da saída Q na borda de descida da entrada T. Cada sinal de saída b_i pode assumir os valores lógicos $\{0,1\}$ de acordo com os níveis de tensão $\{0, +V_{cc}\}$.



Da figura do slide anterior temos que

$$V_x = -V_{cc} \left[b_4 \left(\frac{R}{R/16} \right) + b_3 \left(\frac{R}{R/8} \right) + b_2 \left(\frac{R}{R/4} \right) + b_1 \left(\frac{R}{R/2} \right) + b_0 \left(\frac{R}{R} \right) \right] \quad (2.27)$$

$$V_x = -V_{cc} [16b_4 + 8b_3 + 4b_2 + 2b_1 + b_0] \quad (2.28)$$

onde b_i pode assumir os valores lógicos $\{0,1\}$ em (2.27) e (2.28). Ainda,

$$V_y = -(R_f/R_i)V_x \quad (2.29)$$

de modo que

$$V_y = V_{cc}(R_f/R_i)[16b_4 + 8b_3 + 4b_2 + 2b_1 + b_0] \quad (2.30)$$

mas, por simplicidade, se adotarmos R_f e R_i tal que $V_{cc}(R_f/R_i) = 1$, então

$$V_y = 2^4b_4 + 2^3b_3 + 2^2b_2 + 2^1b_1 + 2^0b_0. \quad (2.31)$$

Portanto, (2.31) dá um valor decimal de tensão correspondente ao valor binário $b_4 b_3 b_2 b_1 b_0$.

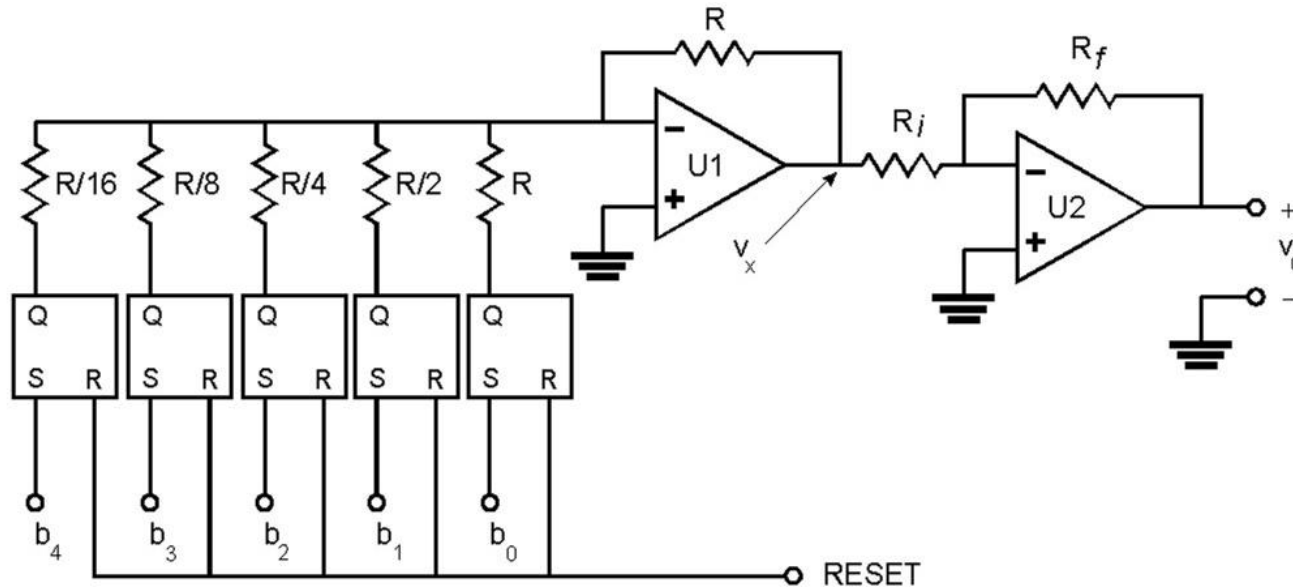
Codificação:

O funcionamento do A/D pode ser descrito através de um exemplo. Suponhamos que $m_q(t) = V_i = 3$ Volts. Inicialmente todos os *flip-flops* estão resetados, e portanto todas as saídas estão no estado lógico 0. Logo, de (2.31), $V_y = 0$. Como $V_i > V_y$ o comparador U3 gera $V_c = +V_{cc}$ e portanto $V_t = V_{clock}(t)$, o que faz os *flip-flops* incrementarem a contagem desde $b_4 = 0, b_3 = 0, b_2 = 0, b_1 = 0$ e $b_0 = 0$ até $b_4 = 0, b_3 = 0, b_2 = 0, b_1 = 1$ e $b_0 = 1$. Quando esta contagem é atingida, $V_y = 3$ (Equação 2.31) o que faz $V_i = V_y$, $V_c = 0$ e $V_t = 0$, parando o incrementar da contagem dos *flip-flops*. O valor decimal correspondente à saída digital $b_4 = 0, b_3 = 0, b_2 = 0, b_1 = 1$ e $b_0 = 1$ é 3V, que é precisamente a tensão de entrada $m_q(t) = V_i = 3$ Volts.

Obviamente a contagem deve ser suficientemente rápida para o pior caso, isto é, aquele em que os *flip-flops* devam contar dentro do intervalo de amostragem T_s até o número binário representativo do maior nível de quantização. Em outras palavras, $\Delta t < T_s / M$.

Codificação:

Para reconstrução do sinal $m'(t)$ a partir da seqüência binária utiliza-se um conversor D/A. Uma possível implementação de um conversor D/A é mostrado na figura abaixo.



O conversor D/A da figura acima utiliza *flip-flops* do tipo S/R. Um *flip-flop* S/R leva a saída Q ao estado lógico 1 quando a entrada S está no estado lógico 1, e leva a saída Q ao estado lógico 0 quando a entrada R está no estado lógico 1. Se ambas as entradas estão no estado lógico 0, a saída Q não é alterada. Através de raciocínio semelhante ao empregado para descrição do A/D, a saída V_0 é dada por

$$V_0 = V_{cc}(R_f/R_i)[16b_4 + 8b_3 + 4b_2 + 2b_1 + b_0] \quad (2.32)$$

ou fazendo $V_{cc}(R_f/R_i) = 1$,

$$V_0 = 2^4b_4 + 2^3b_3 + 2^2b_2 + 2^1b_1 + 2^0b_0. \quad (2.33)$$

Portanto, a saída V_0 definida por (2.33) resulta um valor decimal de tensão correspondente ao valor binário $b_4 b_3 b_2 b_1 b_0$ de entrada.